

# ŒUVRES DE FERMAT

ÉDITÉES PAR LES SOINS DE

MM. PAUL TANNERY ET CHARLES HENRY

SOUS LES AUSPICES

DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

## TOME TROISIÈME.

Traductions par M. Paul TANNERY :

DES ÉCRITS ET FRAGMENTS LATINS DE FERMAT; 2<sup>o</sup> DE *L'Inventum novum*  
DE JACQUES DE BILLY;  
3<sup>o</sup> DU *Commercium epistolicum* DE WALLIS.



PARIS

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES  
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE  
Quai des Grands-Augustins, 55.

MDCCCXCVI

---

## MÉTHODE

POUR LA

## RECHERCHE DU MAXIMUM ET DU MINIMUM.

---

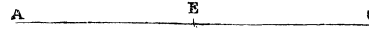
Toute la théorie de la recherche du maximum et du minimum suppose la position de deux inconnues et la seule règle que voici :

Soit  $a$  une inconnue quelconque de la question (qu'elle ait une, deux ou trois dimensions, suivant qu'il convient d'après l'énoncé). On exprimera la quantité maxima ou minima en  $a$ , au moyen de termes qui pourront être de degrés quelconques. On substituera ensuite  $a + e$  à l'inconnue primitive  $a$ , et on exprimera ainsi la quantité maxima ou minima en termes où entreront  $a$  et  $e$  à des degrés quelconques. On *adégalerà*, pour parler comme Diophante, les deux expressions de la quantité maxima ou minima, et on retranchera les termes communs de part et d'autre. Cela fait, il se trouvera que de part et d'autre tous les termes seront affectés de  $e$  ou d'une de ses puissances. On divisera tous les termes par  $e$ , ou par une puissance de  $e$  d'un degré plus élevé, de façon que dans l'un au moins des termes de l'un quelconque des membres  $e$  disparaisse entièrement. On supprimera ensuite tous les termes où entrera encore  $e$  ou l'une de ses puissances et l'on égalera les autres, ou bien, si dans l'un des membres il ne reste rien, on égalera, ce qui revient au même, les termes en plus aux termes en moins. La résolution de cette dernière équation donnera la valeur de  $a$ , qui conduira au maximum ou au minimum, en reprenant sa première expression.

Voici un exemple :

Soit à partager la droite AC (*fig. 91*) en E, en sorte que  $AE \times EC$  soit maximum.

Fig. 91.



Posons  $AC = b$ ; soit  $a$  un des segments, l'autre sera  $b - a$ , et le produit dont on doit trouver le maximum :  $ba - a^2$ . Soit maintenant  $a + e$  le premier segment de  $b$ , le second sera  $b - a - e$ , et le produit des segments :  $ba - a^2 + be - 2ae - e^2$ ;

Il doit être adégalé au précédent :  $ba - a^2$ ;

Supprimant les termes communs :  $be \curvearrowright 2ae + e^2$ ;

Divisant tous les termes :  $b \curvearrowright 2a + e$ ;

Supprimez  $e$  :  $b = 2a$ .

Pour résoudre le problème il faut donc prendre la moitié de  $b$ .

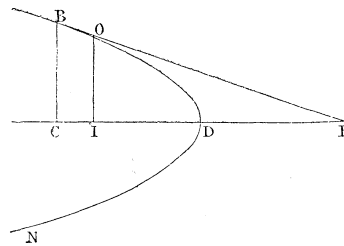
Il est impossible de donner une méthode plus générale.

#### DES TANGENTES DES LIGNES COURBES.

Nous ramenons à la méthode précédente l'invention des tangentes en des points donnés à des courbes quelconques.

Soit donnée, par exemple, la parabole BDN (*fig. 92*), de sommet D,

Fig. 92.



de diamètre DC; soit donné sur elle le point B, par lequel il faut mener la droite BE tangente à la parabole et rencontrant le diamètre en E.

Si l'on prend sur la droite BE un point quelconque O, dont on mène

l'ordonnée  $OI$ , en même temps que l'ordonnée  $BC$  du point  $B$ , on aura :

$\frac{CD}{DI} > \frac{BC^2}{OI^2}$ , puisque le point  $O$  est extérieur à la parabole. Mais  $\frac{BC^2}{OI^2} = \frac{CE^2}{IE^2}$ , à cause de la similitude des triangles. Donc  $\frac{CD}{DI} > \frac{CE^2}{IE^2}$ .

Or le point  $B$  est donné, donc l'ordonnée  $BC$ , donc le point  $C$ , donc  $CD$ . Soit donc  $CD = d$ , donnée. Posons  $CE = a$  et  $CI = e$ ; on aura

$$\frac{d}{d-e} > \frac{a^2}{a^2+e^2-2ae}.$$

Faisons le produit des moyens et des extrêmes :

$$da^2 + de^2 - 2dae > da^2 - a^2e.$$

*Adégalons* donc, d'après la méthode précédente; on aura, en retranchant les termes communs :

$$de^2 - 2dae \curvearrowright - a^2e,$$

ou, ce qui revient au même :

$$de^2 + a^2e \curvearrowright 2dae.$$

Divisez tous les termes par  $e$  :

$$de + a^2 \curvearrowright 2da.$$

Supprimez  $de$  : il reste  $a^2 = 2da$ , donc :  $a = 2d$ .

Nous prouvons ainsi que  $CE$  est double de  $CD$ , ce qui est conforme à la vérité.

Cette méthode ne trompe jamais, et peut s'étendre à nombre de questions très belles; grâce à elle, nous avons trouvé les centres de gravité de figures terminées par des lignes droites et courbes, aussi bien que ceux de solides et nombre d'autres choses dont nous pourrions traiter ailleurs, si nous en avons le loisir.

Quant à la quadrature des aires limitées par des lignes courbes et droites, ainsi qu'au rapport que les solides qu'elles engendrent ont aux cônes de même base et même hauteur, nous en avons déjà longuement traité avec M. de Roberval.