Fourier.

XXIII.

Théorie de la Chaleur.

I.

Température de la terre et de l'espace planétaire.

XXIII.

Théorie de la chaleur.

Questions relatives à la température de la terre — Action d'un foyer extérieur —

Température de l'espace planétaire —

BIBLIOTHÈQUE IMPÉRIALE
MSS.

vu

Longueur totale des chaines, jusqu'aux pieux Culées

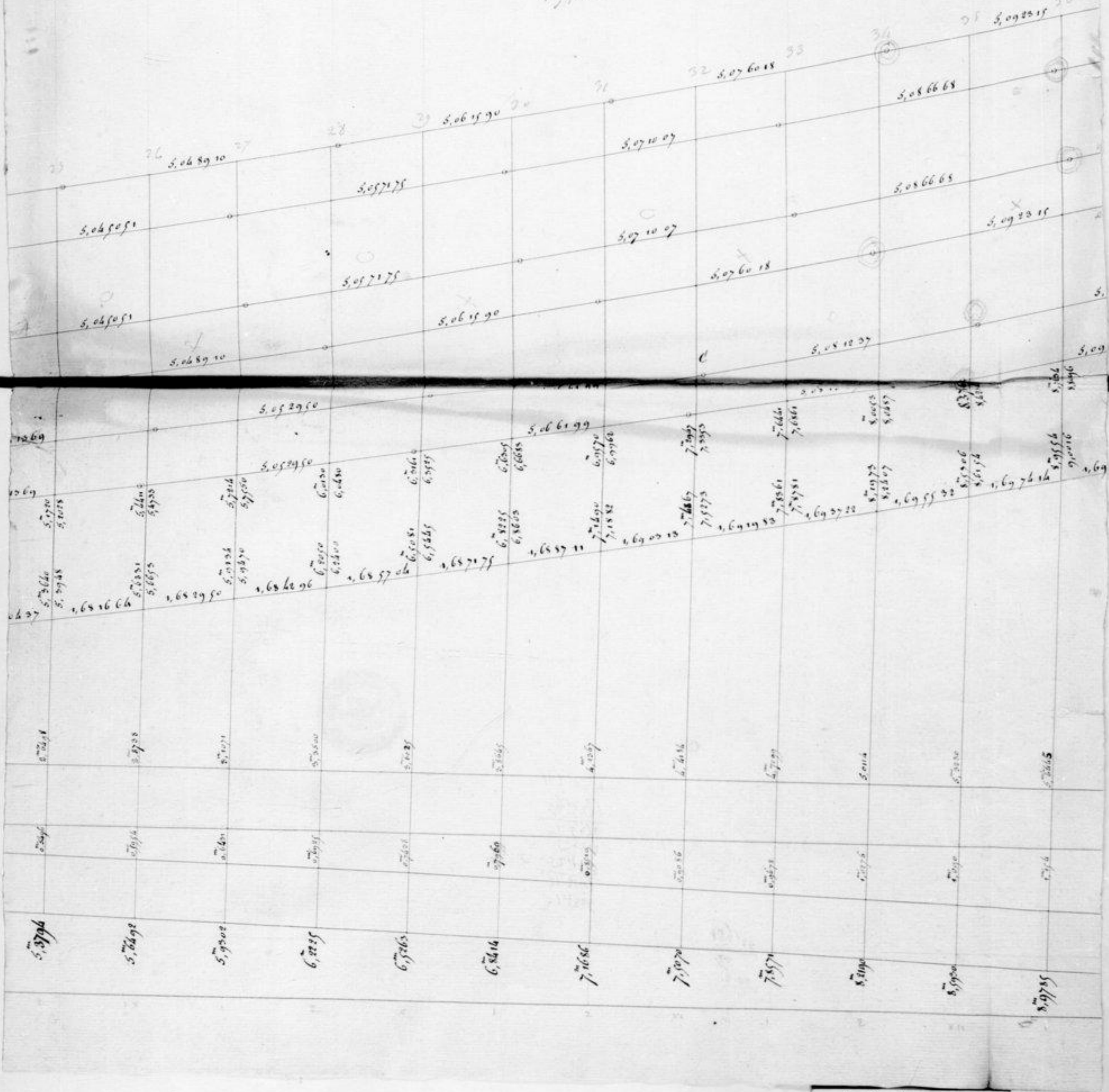
119.00
40
159.20

79.346
4.98
83,206
20
83,206

5.157
07
5,087

27,1346
24,2147
52,1493
5.0812
1.6974
59,5279
119,0558

le pont jusqu'à l'axe de la première Pile de Suspension Superbe



BIBL. NAT.
PARIS
SERVICE PHOTOGRAPHIQUE
REPRODUCTION INTERDITE

Sur les températures terrestres.

(commencant à la feuille 13)

mettre Cordouan,
Différence de la valeur initiale 6. avec celles [illegible]
profondeur aucun changement dans la marche des températures

15

Nous avons une remarque à faire sur l'article 9 page 6. on y
détermine le coefficient g par la condition que $\cos(2g^2Kt - gx)$
et $\sin(2g^2Kt - gx)$ ne doivent point varier lorsque t est
augmenté de la durée θ de la période. il faut d'abord mettre t'
au lieu de t et $\frac{Kt}{c \cdot D}$ au lieu de t' de sorte que la condition
détermine g est celle ci $\frac{2g^2K\theta}{c \cdot D} = 2\varpi i$ ou $g = \sqrt{\frac{\varpi i}{\theta} \cdot \frac{K}{c \cdot D}}$
cette valeur doit être prise dans l'équation (a) de la page 6 et en
général il faut remplacer θ par $\frac{K\theta}{c \cdot D}$
maintenant pour que la partie de l'équation (a) qui est hors le signe $\sum$
puisse être nulle il faut que l'exposant $x\sqrt{\frac{i\varpi}{K\theta} c \cdot D}$ soit une
quantité assez grande par exemple par exemple si $x\sqrt{\frac{i\varpi \cdot c \cdot D}{K\theta}}$ était
un nombre assez grand comme de sorte que la puissance $10^{\text{ième}}$ de $\frac{1}{e}$ donne
environ un petit nombre il ne faudrait avoir qu'un nombre assez petit
placé hors le signe $\sum$ soit donc $x\sqrt{\frac{i\varpi}{K\theta} \cdot c \cdot D} = N$ on désigne
par x la valeur que doit avoir la profondeur x pour que l'exponentielle
soit $\left(\frac{1}{e}\right)^N$ ou autrement $\frac{x^2 \varpi c \cdot D}{K\theta} = N^2$ et
$x = N\sqrt{\frac{K\theta}{\varpi c \cdot D}}$ $\frac{K}{c \cdot D} = \frac{x^2 \varpi}{N^2 \theta}$ De sorte que si l'on observe les profondeurs ou les variations
périodiques devenant insensibles on pourra conclure la valeur
du coefficient $\frac{K}{c \cdot D}$. par exemple on trouve que pour les
variations périodiques devenaient tout à fait insensibles à 100 mètres
de profondeur et si pour l'observation on voit que les variations sont
seulement insensibles à 25 mètres de profondeur on en pourra
conclure que le coefficient $\frac{K}{c \cdot D}$ est 16 fois plus grand pour les
eaux que pour les matières dont le globe est formé en certains lieux.
d'ailleurs cette expérience donnera les valeurs de C et de D
séparés en supposant que le produit $c \cdot D$ ou la capacité spécifique
rapportée au volume est deux fois moindre pour les matières des
rochers que pour les eaux, on en conclura que la conductibilité K est
32 fois moindre pour les rochers que pour les eaux. mais ces conclusions
sont très incertaines à cause de l'incertitude des observations.
reprenons maintenant les remarques de l'article 17 page 12 on
voit que si l'on suppose le terme écarté égal à 16 fois 1083 ans
et le coefficient $\frac{K}{c \cdot D}$ deux fois moindre comme cela paraît devoir
être pour les matières du globe il faudrait que à la profondeur de 237
mètres le changement annuel de température fut au lieu d'une
division de la variation initiale 6. ainsi de sorte nous n'apprécierons aucun
profondeur aucun changement sensible dans la température

14 il Voudrait qu'il doit falloir d'abord un loyd de temps bien considérable pour que la cause agissant périodiquement à la surface n'ait plus d'effet sensible à cette profondeur, c'est ainsi que la loi de température à de grandes profondeurs est sans dépendance avec celle de la cause qui agit à la surface et un témoignage du temps écoulé depuis l'époque où cette cause a été appliquée. Si cette époque n'était pas bien reculée on verrait encore quelques traces sensibles dans les températures à des profondeurs que nous ne pouvons atteindre

19

Nous avons par l'analyse du n° 19 page 11 que l'expression de la diminution annuelle est la suivante

$$\omega = \left(\frac{KT}{c\cdot D}\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot \frac{x\, e^{-\frac{x^2}{h}\frac{KT}{c\cdot D}}}{\sqrt{\omega h}}$$

ou vont qu'à des profondeurs bien grandes cette diminution devient totalement insensible cependant il importait de chercher la profondeur x pour laquelle à mesure que devient la diminution annuelle est la plus grande car il y a ici bien entendu un maximum à raison du produit de x par l'exponentielle. on aura

$$\text{mettons } a = \frac{c\cdot D}{h\,KT} \quad \text{ou} \quad \frac{KT}{c\cdot D} = \frac{1}{2h} \quad \text{on aura}$$

$$\omega = \frac{(2h)^{\frac{3}{2}} \cdot x\, e^{-2x^2}}{\sqrt{\omega h}}$$

et cherchons quelle doit être x pour que ω soit un maximum on aura $\frac{d\omega}{dx} = 0 = \frac{(2h)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\omega}\sqrt{h}} \left\{ e^{-2x^2} - 2\,2x^2 e^{-2x^2} \right\}$ d'où l'on tire

$$2\,2x^2 = 1 \quad \text{et} \quad x = \frac{1}{\sqrt{2}\,2}$$

Disignant par (ω) la valeur maximum on aura $(\omega) = \frac{(2h)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\omega}\sqrt{h}} \frac{1}{\sqrt{2\,2}} e^{-\frac{1}{2}} = \frac{2h}{\sqrt{2\omega e}} = \frac{c\cdot D}{KT} \frac{1}{\sqrt{2\omega e}}$

$$\text{et } x = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{h\cdot KT}{c\cdot D}} = \sqrt{\tfrac{1}{2}h} \cdot \sqrt{\frac{KT}{c\cdot D}}$$

on connaît les différences par la limite de la température, savoir que la valeur maximum de cette diminution annuelle décroît avec la température absolue qu'elle est proportionnelle de cette température et que la profondeur x à laquelle elle est proportionnelle à la racine quarrée de cette température absolue par exemple si $\frac{c\cdot D}{K}$ est 1083 si T' est 1083 la valeur maximum est $\frac{1}{\sqrt{2\omega e}}$ et la profondeur à laquelle sensiblement cette valeur est $\sqrt{\frac{1}{2}h}$ ou $\sqrt{2\cdot 365{,}24\cdot 60}$ compté en mètres.

1460 1440

1460
7^2
$2\,9^2$
$10\,2^2$
$10\,51^2$

$\sqrt{\quad}$

$2\cdot 100$

$z = w \sin x \sin y$

$p = w \cos x \sin y$

$q = w \sin x \cos y$

$r = -w \sin x \sin y$

$s = w \cos x \cos y$

$t = -w \sin x \sin y$

$m = \pm 1$

$\frac{dy}{dx} = 1$ $\begin{cases} y - a = x - b \\ z = w \sin x \sin y \end{cases}$

$\frac{dy}{dx} = 1$ | $\frac{dz}{dx} = p + q$

$\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ | $\frac{d^2z}{dx^2} = r + s + s + t = r + 2s + t$

$(y - y')(\quad) = (x - x')$

$y - a = x - b$

$\frac{1083}{T}$ $\frac{1}{n}$

$\frac{1083}{n \cdot 1083}$ $\omega = \frac{n}{2\pi 0}$

$T = 1083$ $\omega = \frac{2\pi}{2\pi 0}$ $\frac{1}{10}$

$\frac{C.D}{n} = 1083$

15 20

nous avons supposé jusqu'ici que l'état initial de la surface était le même pour une couche entière qui a pénétré à la surface et donne une température variable en profondeur par une fonction périodique ou de cette manière tantôt elle circulaire de mouvement [illegible] alors dans l'intérieur du solide nous allons maintenant [illegible] la question sous un autre point de vue.

Supposons qu'un milieu ab d'une épaisseur infinie soit exposé sur la surface à l'action d'un foyer de chaleur f dont la température varie comme une fonction périodique du temps f t. la plaque est supposée prendre la chaleur par la surface extérieure a b i d. la chaleur sort de la surface b par voie de rayonnement, et [illegible] la face intérieure d'abord qui reçoit les rayons est retenue à une température variable b. l'état initial du milieu est donné il s'agit de connaître quel sera ensuite l'état de température de point dont la profondeur est x. cette température sera fonction de x et de t qu'il s'agit de déterminer. nous désignerons par v_0 la température de la surface on aura précisément l'équation générale

$$\frac{dv}{dt} = \frac{K}{c \cdot D} \cdot \frac{d^2 v}{dx^2}$$

Désignons par $\left(\frac{dv}{dx}\right)_0$ la valeur de $\frac{dv}{dx}$ lorsque $x = 0$ on aura

$$K\left(\frac{dv}{dx}\right)_0 = -\left(f(t) - v_0\right) g + \left(v_0 - b\right) h$$

en faisant $f t - v_0$ est la quantité dont la température à l'instant t surpasse celle v_0 de la surface. le coefficient g est relatif à la facilité avec laquelle la chaleur de foyer pénètre la surface b et h exprime la même quantité par rapport à la face intérieure. Soit de plus dt la quantité de chaleur qui entre pendant un instant dt et qui doit être égale à $K\left(\frac{dv}{dx}\right)_0 dt$ on désignera par $\left(\frac{dv}{dx}\right)_0$ la valeur que reçoit la fonction $\frac{dv}{dx}$ lorsque l'on fait $x = 0$. ainsi les deux équations que l'on doit avoir lorsque $x = 0$ sont les suivantes $\frac{dv}{dt} = \frac{K}{c \cdot D} \frac{d^2 v}{dx^2}$

et $\left(\frac{dv}{dx}\right)_0 K = v_0 \frac{g - h}{} - (bh + g f t)$. nous écrirons t' au lieu de $\frac{Kt}{c \cdot D}$ et en mettant t au lieu de t'. désignant ensuite $\frac{g-h}{K}$ par G et $\frac{bh + g(ft \frac{c \cdot D}{K})}{K}$ par Ft on aura $\left(\frac{dv}{dx}\right)_0 = G v_0 - Ft$. on remarquera que la fonction Ft est périodique c'est à dire qu'elle conserve la même valeur lorsque t devient $t + \theta$ θ étant la durée d'une période de G et ft [illegible] h au lieu de G et ft au lieu de Ft, nous aurons à intégrer les équations différentielles suivantes

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2 v}{dx^2} \quad (1)$$

et $h v_0 - \left(\frac{dv}{dx}\right)_0 = Ft$ (2)

10 21

en considérant la nature de la question, on voit que si le temps écoulé
depuis l'application du loyer est infiniment grand l'état
de toute la molle solide est devenu périodique, en sorte que la
fonction inconnue v est certainement telle qu'en y faisant tendre
une partie de cette fonction disparaît et il reste une fonction de
x et de t qui est périodique c'est à dire qui ne change pas lorsque
l'on écrit $t+\theta$ au lieu de t. il y a donc une autre partie
de la fonction v qui est celle qui s'évanouit avec le temps et
c'est $v = u + w$. nous chercherons en premier lieu quelle
est la fonction périodique u en sorte que nous déterminerons
la fonction non périodique w. Cherchons donc à
déterminer u nous chercherons une fonction de x et t
qui satisfasse aux deux équations (1) et (2) et qui soit périodique
en t de période θ et formé premièrement de l'état initial
pour $t=0$ lorsque l'on fait dans cette fonction $t=0$, se confondent
d'un autre état qui réunit avec celui que représente u en l'état
$t=0$ pendant le cours d'une période pour le solide devant
ayant deux états différents dans deux solides dont l'un
à $t=0$ lorsqu'on fait $t=0$ et l'autre est tel qu'on doit
supposer il faut l'état initial on peut commencer à
mouvement en prenant pour u la 1° de l'action périodique du foyer
2° de l'action constante de l'enceinte solide en laquelle est
située la fonction périodique u. car le premier état sera
entièrement établi pendant une période θ. car le premier état sera
au commencement de chaque période s'établira lorsque
une certaine loi que la fonction u exprime et changera
ainsi pendant le cours d'une période pour le rétablir dans
la période suivante et durera de cette manière à
l'infini.

Le second état est un peu plus compliqué il se présente au
premier moment où l'état initial donné il s'altère de plus
en plus et finira par entièrement après un certain temps. Il y a
donc ici commandant le cas précédent deux questions à résoudre
la première après avoir fait l'état final du solide et la seconde la
différence entre ces deux états variable et cet état final.

22.

pour résoudre la première question, nous prendrons les deux
équations 1 et 2 et nous supposerons

$$u = \sum e^{-g_i x} \left(a_i \cos(2g_i^2 t - g_i x) + b_i \sin(2g_i^2 t - g_i x) \right)$$

et comme la fonction doit être périodique nous $2g^2\theta = 2i\omega$

$$\text{et } u = \sum_{i=0}^{i=\infty} e^{-x\sqrt{\frac{i\omega}{\theta}}} \left(a_i \cos\left\{ i\omega \frac{t}{\theta} - x\sqrt{\frac{i\omega}{\theta}} \right\} + b_i \sin\left\{ i\omega \frac{t}{\theta} - x\sqrt{\frac{i\omega}{\theta}} \right\} \right)$$

17 bis.

Remarque sur un cas particulier

$$\frac{du}{dx} = \sum \sqrt{\frac{i\omega}{\theta}} e^{-x\sqrt{\frac{i\omega}{\theta}}} \left(a_i \cos qx + b_i \sin qx \right) + e^{-x\sqrt{\frac{i\omega}{\theta}}} \left(a_i \sqrt{\frac{i\omega}{\theta}} \sin qx - b_i \sqrt{\frac{i\omega}{2}} \cos qx \right)$$

on dérive ici par rapport à q la quantité sous les signes trigonométriques

et faisant $x = 0$ pour avoir la valeur de $\frac{du}{dx}$ à la surface on aura

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_0 = \sum \sqrt{\frac{i\omega}{\theta}} \left\{ a_i \cos\left(\frac{i\omega t}{\theta}\right) + b_i \sin\left(\frac{i\omega t}{\theta}\right) \right\} + a_i \sqrt{\frac{i\omega}{\theta}} \sin\left(\frac{i\omega t}{\theta}\right) - b_i \sqrt{\frac{i\omega}{\theta}} \cos\left(\frac{i\omega t}{\theta}\right)$$

$$= \sum - a_i q_i \cos 2q_i^2 t - b_i q_i \sin 2q_i^2 t + a_i q_i \sin 2q_i^2 t - b_i q_i \cos 2q_i^2 t$$

$$= \sum \left(q\overline{a-b} \sin 2q^2 t - q\overline{a+b} \cos 2q^2 t \right)_i$$

on a aussi $\left(\frac{du}{dx}\right)_0$ développé pour $x = 0$, $(u)_0$ la valeur de u correspondant

l'équation (2) on aura

$$ft = \sum \left\{ \left(ha + q\overline{a+b} \right) \cos 2q^2 t + \left(hb - q\overline{a-b} \right) \sin 2q^2 t \right\}_i$$

où l'on a mis $2q^2 t = x$, $h = \frac{t}{2q^2}$, φx est $f\left(\frac{x}{2q^2}\right) = \varphi x$ ou

$$ft = \sum_{i=0}^{i=\infty} \left\{ \left(h a_i + \overline{a_i + b_i} \sqrt{\frac{i\omega}{\theta}} \right) \cos\frac{i\omega t}{\theta} + \left(h b_i - \overline{a-b}\sqrt{\frac{i\omega}{\theta}} \right) \sin\left(\frac{i\omega t}{\theta}\right) \right\}$$

faisant $\frac{2\theta t}{\theta} = y$ et désignant $f\left(\frac{y\theta}{2\omega}\right)$ par φy on aura

$$\varphi y = \sum_{i=0}^{i=\infty} \left\{ \left(h a_i + \overline{a_i + b_i} \sqrt{\frac{i\omega}{\theta}} \right) \cos iy + \left(h b_i - \overline{a_i - b_i} \sqrt{\frac{i\omega}{\theta}} \right) \sin iy \right\}$$

que nous écrirons ainsi $\varphi y = \sum_{i=0}^{i=1} \left(A_i \cos iy + B_i \sin iy \right)$

on aura ainsi un théorème à l'aide duquel on déterminera A_i et B_i au moyen de la fonction φy on aura donc deux équations pour déterminer a_i et b_i on connaîtra donc entièrement la fonction u, et ainsi l'état périodique résultant de l'action infiniment prolongée du foyer variable et de l'écart à la température constante sera exactement connu par notre analyse avant de passer à la détermination de la fonction W qui relie la seconde question et qui se déduit facilement de notre analyse précédente examinons seulement préliminairement quelques propriétés de la première question.

18 **22**

si l'on écrit $A_i = h a_i + \overline{a_i + b_i} g_i$ et $B_i = h b_i - \overline{a_i - b_i} g_i$ on aura

on tirera la valeur de a_i et b_i qui sont les mêmes quelles

$$a_i = \frac{\overline{g_i + h}\, A_i - g_i B_i}{(g_i + h)^2 + g_i^2} \qquad \text{et} \qquad b_i = \frac{\overline{g_i + h}\, B_i + g_i A_i}{\overline{g_i + h}^2 + g_i^2}$$

on aura trouvé (page 6) $A_0 = \frac{1}{2\omega} \int_0^{2\omega} \partial y\, \varphi y$

$$A_i = \frac{1}{\omega} \int_0^{2\omega} \partial y\, \varphi y \cos(iy) \qquad B_i = \frac{1}{\omega} \int_0^{2\omega} \partial y\, \varphi y \sin iy$$

spécifiquement $y = \frac{2\omega t}{\theta}$ et que $\varphi y = f \frac{y \cdot \theta}{2\omega} = ft$

on aura $A_0 = \frac{1}{\theta} \int_0^{\theta} \partial t\, ft$, $A_i = \frac{2}{\theta} \int_0^{\theta} \partial t\, ft \cos\left(i \cdot \frac{2\omega t}{\theta}\right)$

$B_i = \frac{2}{\theta} \int_0^{\theta} \partial t\, ft \cos\left(i \cdot \frac{2\omega t}{\theta}\right)$ on peut maintenant écrire

la valeur de u qui est ainsi exprimée

$$u = \frac{\frac{h}{\theta} \int_0^{\theta} \partial t\, ft + \varphi n}{h^2} =$$

$$= \frac{1}{h\theta} \int_0^{\theta} \partial t\, ft + \sum_{i=1}^{i=\infty} \left\{ \frac{\overline{h + \sqrt{i\omega}} \cdot \frac{2}{\theta} \int_0^{\theta} \partial t\, ft \cos\left(i \frac{2\omega t}{\theta}\right) - \sqrt{i\omega} \cdot \frac{2}{\theta} \int_0^{\theta} \partial t\, ft \sin\left(i \frac{2\omega t}{\theta}\right)}{\left(h + \sqrt{\frac{i\omega}{\theta}}\right)^2 + \frac{i\omega}{\theta}} \cos\left(\frac{2i\omega t}{\theta} - 2\sqrt{\frac{i\omega}{\theta}}\right) \right.$$

$$\left. + \frac{\overline{h + \sqrt{i\omega}} \cdot \frac{2}{\theta} \int_0^{\theta} \partial t\, ft \sin\left(i \frac{2\omega t}{\theta}\right) + \sqrt{i\omega} \cdot \frac{2}{\theta} \int_0^{\theta} \partial t\, ft \cos\left(i \frac{2\omega t}{\theta}\right)}{\left(h + \sqrt{\frac{i\omega}{\theta}}\right)^2 + \frac{i\omega}{\theta}} \times \sin\left(\frac{2i\omega t}{\theta} - 2\sqrt{\frac{i\omega}{\theta}}\right) \right\} e^{-2\sqrt{\frac{i\omega}{\theta}}}$$

il faut maintenant représenter la dimension linéaire de la page 15 n°20)
écrire t' au lieu de t, et enfin $\frac{kt}{c \cdot D}$ au lieu de t' il faut aussi remplacer
h par G et G par $\frac{g+h}{K}$ et remplacer ft par $\frac{6h + g\,ft}{K}$. pour avoir la dimension
simplifier le calcul on prendra pour dimension la température ou celle
que nous avons désignée par 6 et qui appartient à l'élément solide
on aura à écrire $\frac{g}{K} ft$ au lieu de ft. De plus en remplaçant t par $\frac{K\theta}{c \cdot D}$
il faut aussi remplacer θ par θ' et enfin θ' par $\frac{K\theta}{c \cdot D}$

mais pour une autre forme de solution dans l'énoncé du résultat il faut remarquer que l'intervalle t sous le signe sont affectés comme le numérateur que nous devons désigner par r afin de ne pas les confondre avec la variable t. faisant maintenant les substitutions on aura

$$u=\frac{2}{\mu y+h}\cdot\frac{1}{\theta}\int_0^\theta dr\,Fr+\frac{2}{\theta}\sum\frac{e^{-r\sqrt{i\omega c\nu}:\mu\theta}}{\left(\frac{g+h}{\mu}\right)^2+\sqrt{i\omega c\nu}:\mu\theta\}+i\omega c\nu:\mu\theta}\times$$

$$\left\{\left(\frac{g+h}{\mu}+\sqrt{i\omega c\nu}:\mu\theta\right)\int dr\,Fr\cos\left(\frac{2i\omega t}{\theta}-\sqrt{i\omega c\nu}:\mu\theta\right)\sin\left(\frac{2i\omega r}{\theta}\right)\right\}\times$$

$$+\cos\left(\frac{2i\omega t}{\theta}-r\sqrt{i\omega c\nu}:\mu\theta\right)$$

$$\left\{+\left(\frac{g+h}{\mu}+\sqrt{i\omega c\nu}:\mu\theta\right)^2\int dr\,Fr\sin\frac{2i\omega r}{\theta}+\sqrt{i\omega c\nu}:\mu\theta\cos\frac{2i\omega r}{\theta}\right\}\times$$

$$+\sin\frac{2i\omega t}{\theta}-r\sqrt{i\omega c\nu}:\mu\theta\Big\}$$

(A)

$$u=\frac{g}{g+h}\cdot\frac{1}{\theta}\int_0^\theta dr\,Fr+\frac{2}{\theta}\sum\frac{\left(\frac{g+h}{\mu}+\sqrt{i\omega c\nu}:\mu\theta\right)e^{-r\sqrt{i\omega c\nu}:\mu\theta}}{\left(\frac{g+h}{\mu}\right)^2+2\left(\frac{g+h}{\mu}\right)\sqrt{i\omega c\nu}:\mu\theta+2i\omega c\nu:\mu\theta}\int_0^\theta dr\,Fr\{\cos\}$$

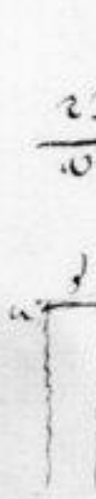
$$\left\{\cos\left(\frac{2i\omega t}{\theta}-r\sqrt{i\omega c\nu}:\mu\theta\right)+\sqrt{i\omega c\nu}:\mu\theta\cdot\sin\left(\frac{2i\omega t}{\theta}-r\sqrt{i\omega c\nu}:\mu\theta\right)\right\}$$

$$u=\frac{g}{g+h}\cdot\frac{1}{\theta}\int_0^\theta dr\,Fr+\frac{2}{\theta}\sum\left\{\frac{\left(\frac{g+h}{\mu}+\sqrt{i\omega c\nu}:\mu\theta\right)e^{-r\sqrt{i\omega c\nu}:\mu\theta}}{\left(\frac{g+h}{\mu}\right)^2+2\left(\frac{g+h}{\mu}\right)\sqrt{i\omega c\nu}:\mu\theta+2i\omega c\nu:\mu\theta}\int_0^\theta dr\,Fr\cos\left(\frac{2i\omega t}{\theta}-r\sqrt{i\omega c\nu}:\mu\theta\right)\right\}$$

$$+\sqrt{i\omega c\nu}:\mu\theta\cdot\sin\left(\frac{2i\omega t}{\theta}-r\sqrt{i\omega c\nu}:\mu\theta\right)$$

(a)

$\frac{23}{\omega t}$ pour interpréter les résultats de cette solution examinons d'abord le cas le plus simple où nous supposons que l'enceinte extérieure est entièrement à la température zéro. qu'un globe f placé à la distance y ayant la température constante 2 échauffe la surface de la moitié gauche du globe f dont le rayon est h de même que pour l'enceinte. sur le rayon du globe. $2\pi r:\frac{r}{2}$ est l'aire du grand cercle dans le globe. $\frac{1}{2}\cdot 2\pi\cdot y\cdot\frac{y}{2}\cdot 4$ est l'aire hémisphérique dont le centre est en b et dont le rayon est $\frac{y}{2}$ cette aire est $2\pi y^2$ le rapport de $2\pi r^2$ à $2\pi y^2$ est le nombre de fois que la surface du globe vue de b est contenue dans l'enceinte hémisphérique. or la température de l'enveloppe étant 0 et celle de l'environnante étant 2 donnera à b pendant l'unité de temps une quantité de chaleur $2h$ ce qui est la différence de la conductibilité extérieure donc pendant l'unité de temps le globe f donne à b la quantité de chaleur $2\cdot h\cdot\frac{\pi r^2}{2\pi y^2}$ ou $\frac{hr^2}{2y^2}$



$$\frac{\partial v}{\partial t} = \sum (a^2+b^2)^{\frac{1}{2}} \left(-2i\omega\right) \sin\left(2i\omega t - \arctan\frac{b}{a}\right)$$

$$t = \frac{\theta}{2i\omega} \arctan\frac{b}{a}$$

$$2(1+m\sin 2i\omega t = bi$$

$$t \sin 2i\omega t = \frac{i}{2}\theta \qquad 2i\omega t = \arctan\frac{i}{0}$$

$$t = \theta \qquad t = \frac{\theta}{2i\omega} \arctan\frac{i}{0}$$

ou a pour un infini le même & prendroit une température dans
nous avons désigné par u et ici la valeur de u sera celle
dans cet état final la surface & recouvert la quantité de chaleur
$2hr^2$ pendant l'unité de tems et dans le même tems elle rendroit
$2y^2$
$\frac{2hr^2}{2y^2}$ uh, on doit donc avoir $u = \frac{2 \cdot r^2}{2y^2}$
appliquant ce raisonnement à la surface de la chaleur blanche
Supposons qu'un disque entièrement noir et d'un métal rayonnant reçoit
dans le même tems la chaleur rayonnée par la surface d'une autre sphère dont le
forme et sphérique le rayon r' la distance y et la température
constante 2.

Si la surface totale du disque & avoit la température 1 elle perdroit
pendant l'unité de tems une quantité de chaleur 6h ou désignant par 0
la température de l'enceinte solide formée de toutes parts.
réciproquement si l'enceinte avoit la température et si les corps
quelconque renfermé dans la température zero
il recevroit par toute la surface pendant l'unité de tems une quantité de
chaleur 6h. L'être de grand cercle dans l'autre sphérique est $2\omega r \cdot \frac{r}{2}$
ou ωr^2 la surface sphérique étant entière dans le rayon et y a pour
valeur $2\omega \cdot y \cdot \frac{y}{2} \cdot 4$ ou $4\omega y^2$ donc la surface du globe échauffé vu de
& est contenue dans la surface sphérique un nombre de fois égal à
$\frac{\omega r^2}{4\omega y^2}$ ou $\frac{r^2}{4y^2}$ par conséquent si la température de l'autre est 2
la quantité de chaleur que le disque reçoit du globe est $2h \cdot \frac{r^2}{4y^2} \cdot 6$
en effet si toute la surface sphérique avoit la température 2 le disque
recevroit $2h6$ donc il ne reçoit du globe que $2h6\frac{r^2}{4y^2}$. Soit
u la température que le disque doit prendre l'enceinte ayant la
température 0 ce disque perdant donc une quantité de chaleur égale à $hu6$ donc $hu6 = 2h6\frac{r^2}{4y^2}$
donc $u = \frac{2r^2}{4y^2}$. Soit β l'angle sous lequel l'autre est vu
De 6 emprunta prendre $y=1$ et $r = \frac{1}{2}\beta$ on a donc
$u = \frac{2 \cdot \beta^2}{16}$. Soit $\beta = \frac{2\omega}{360} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\omega}{360}$ on aura $u = \frac{2 \cdot \omega^2}{16 \cdot 360 \cdot 360}$
ou $2 = \frac{16 \cdot 360 \cdot 360}{\omega^2} u$ par exemple si $u = 60^{\text{degrés}}$ on trouve
$2 = \frac{16 \cdot 360 \cdot 6}{\omega^2}$ $= \frac{16 \cdot 360 \cdot 6 \cdot 7}{22 \cdot 22}$ $2 = \frac{16}{\omega^2} \cdot 360 \cdot 360 \cdot 60$,
la température qui répond à la fusion du fer est plus grande que 6000
ainsi le rapport de 2 à cette température est du même ordre et
moindre que $\frac{16}{6^2} \cdot 36 \cdot 36 \cdot 6$ ou $\frac{16}{6^2} \cdot 1296$

$\frac{36}{36}$ / 216 / 108 / $\frac{108}{1296}$ / $\frac{1296}{6480}$ / $\frac{6480}{19440}$ 6époo

$\frac{200\,000.6^4}{16}$ / $\frac{120000}{64}$ 2000

16 on voit d'abord ce qu'on prouve le 1er terme du 2e membre de l'équation (a) de la page 19. en effet multiplions les 2 membres de la page 15 y Ft par λ la quantité de chaleur que la sur face du foyer, c'est à dire que si la surface b avait la température 0 et si l'on désigne par λ la température du foyer au premier instant t recevant pendant cet instant la quantité de chaleur $y\lambda\,dt$ avait la température du foyer n'a pas beaucoup varié λ elle peut être exprimée par $\lambda\varphi t$ en désignant par φt une fonction périodique telle que $\varphi(t+\theta) = \varphi t$. c'est cette quantité $\lambda\varphi t$ que désigne Ft. supposons maintenant que pendant t prenne abscisse on élève comme ordonnée la quantité correspondante $\lambda\varphi t$ on a Ft dans tout l'intervalle d'une période c'est à dire de 0 à θ et qu'ayant tracé l'arc de la courbe on $\int_0^\theta dt\, Ft$ on fasse la même chose ayant la boîte b devient égal en surface à l'arc de la courbe dont la hauteur de la rectangle serait $\frac{1}{\theta}\int_0^\theta dt\, Ft$ ou $\frac{\lambda}{\theta}\int_0^\theta dt\,\varphi t$ c'est cette valeur que nous appellons la température moyenne du foyer pendant toute la durée θ de la période. soit a cette température moyenne supposons que le foyer ait une température constante égale à la température moyenne a. la surface b considérée comme celle d'un petit corps peut échanger de la chaleur avec cette enceinte mais seulement par b l'échange entre le foyer et toute la surface abc étant supposée imperméable à la chaleur la nature prendrait une certaine température fixe v que l'on détermine par cette équation $g(a-v)\beta t = hv\beta\,dt$ ou on désigne par h la conductibilité extérieure de b par rapport à l'enceinte. on en conclut

$$v = \frac{ga}{g+h} \quad \text{ou} \quad v = \frac{g\lambda\frac{1}{\theta}\int_0^\theta dt\,\varphi t}{g+h} \quad \text{ou} \quad \frac{g}{g+h}\,\frac{1}{\theta}\int_0^\theta dt\, Ft$$ exprimant



que le premier terme de la valeur de u dans l'équation (a) - ainsi ce premier terme est la température fixe que prendrait le petit échantillon s'il était exposé au foyer par la surface b toutes choses d'ailleurs égales la température étant imperméable à la chaleur et n'étant exposé que le foyer est une température fixe égale à la température moyenne du foyer pendant la durée θ de la période.

ce premier terme de u est la température fixe qu'il faudrait donner à toute la masse d'un solide infiniment petit pour qu'en abandonnant au foyer une température fixe égale à la température moyenne dont nous avons parlé il ne survint aucun changement par l'action du foyer sur le solide.

25 ainsi

si l'on suppose que la conductibilité K est nulle il est facile de voir que la valeur de u se réduit au premier terme dont il s'agit dans l'article précédent. ainsi dans le cas d'une conductibilité nulle K on trouve que la température de b devient une valeur constante qui peut être exprimée par une certaine période dont le plus petit rapport rationnel avec θ est $\frac{1}{n}$ et qui est la température moyenne dont nous avons parlé précédemment à chaque instant et c'est celle que prend ainsi nécessairement le solide

21 24

26 si la valeur de la profondeur x est très grande ou est réduite aux premiers termes de toute façon quelle que soit la profondeur on augmente les variations périodiques diminuent très rapidement, et dès que l'on arrive à l'effet on a bien que la température constante qui répond à l'effet moyen

27 si la durée de la période est extrêmement petite la valeur de u reste encore réduite à ses premiers termes et pour toutes les profondeurs. l'échange de chaleur est plus rapide avec les périodiques il amène toujours

28 rapidement la même moyenne

si les nombres y et k sont extrêmement grands sans que le nombre k/y soit très grand la valeur de u se réduit à ses premiers termes pour toutes les profondeurs. on pourrait aussi les autres circonstances et considérer par exemple le cas où est très grande

29 est petite.

au lieu de poursuivre cet examen relatif à la première question qui a pour objet l'état périodique, nous considérerons la valeur de u qui comprend la partie variable du système avec le temps.

nous avons distingué (n° 16) deux parties dans l'état initial des températures, une première partie est représentée par u_0 c'est à dire ce que devient u lorsque on fait $t=0$ et une seconde partie qui forme la première terme l'état initial donné par la fonction arbitraire fx. w est une fonction de x et t en y faisant $t=0$ elle devient fx donc le résultat w_0 ajouté à u_0 donne la fonction fx. ainsi il faut connaître que le solide ayant d'abord des températures initiales représentées par φx en prenant $\varphi x = fx - u_0$. le solide dont cet état est emporté dans l'enceinte solide dont la température a la valeur constante 0, il perd insensiblement sa chaleur initiale et arrive à un état stationnaire ou limite où la température est nulle. or cet effet s'produit bien lorsque l'on a développé les températures correspondant à u_0 chacune pour chaque période. mais le système ne peut revenir au même état il ne tend point à revenir au contraire il s'éloigne de plus en plus de cet état primitif. Fourier a démontré que la température d'un point solide est toujours finie et satisfait à l'équation différentielle rigoureuse.

• Concevons d'abord que l'état initial est seulement u_0 la température de la face et celle de l'enceinte feront varier cet état. la variation de température d'un point pris en exemple en un point de la surface de hauteur enfin il faut chercher combien l'élément de la surface reçoit de chaleur et combien il donne à l'enceinte. la différence fait connaître la variation de température de l'élément ainsi le second état de u_0 nous désignerons cet état suivant par u_1 et en général nous considérerons quelconque ainsi succédant la fonction u_t est u_0 u_1 u_2 u_3 ...

23 et qui sont de même des fonctions v et w 11.

on les calcule qui sont variés u Soit donc v la différence entre u et la température zéro de l'enceinte et la différence entre u et la température A du foyer ces différences multipliées chacune par un certain coefficient et la somme donne la variation du pendant l'instant dt il en est de même de v les variations $\frac{dv}{dt}$ dues à l'instant dt sont de la forme $-h(v-0)+g(A-v)$ h et g étant de certains coefficients relatifs l'un à l'action de l'enceinte l'autre à l'action du foyer.

pour déterminer w nous ne considérons que l'action de l'enceinte et nous supposons que la température A du foyer est nulle ainsi la variation de w pendant l'instant dt est représentée par $-h(w-0)dt+g(0-w)dt$

quant à la variation dv nous l'avons déjà exprimée elle est aussi exprimée par $-h u dt+g(A-u)dt$ donc $du+dw=d(u+w)=-h(u+w-0)dt+g(A-u-w)dt$ ce qui montre qu'on connaît les valeurs de dv.

il est facile de voir que pour déterminer v on peut calculer le rayonnement u et w la première quantité se détermine en considérant l'effet réuni de l'enceinte et du foyer et la seconde se détermine en supposant la température du foyer nul et ne considérant que l'effet de l'enceinte.

30

il reste donc à considérer l'effet de l'enceinte sur l'état initial représenté par φx ou $fx-u_0$. Si l'on fait $t=0$ u devient une fonction de la forme $b+P_x$ et cette fonction P_x est telle que cette quantité, lorsque x est négative, devient nulle $fx+b+P_x$ $b+P_x$ et P_x devient nulle lorsque x est très grande. par conséquent l'état initial que l'on doit considérer est φx ou $fx-b-P_x$

on trouvera résolu cette question dans les mêmes principes. on y suppose que le solide a reçu la température initiale φx et qu'on l'ait mis dans l'enceinte dont la température est 0. et appelant w la fonction de x et t qui exprime la température après le temps t on a

$$w=\frac{2}{\omega}\int_0^\omega \frac{dp\, e^{-p^2\kappa t}}{p^2+\frac{h^2}{\kappa^2}}\left(\frac{h}{\kappa}\sin px+p\cos px\right)\int_0^\omega d\lambda \sin p\lambda\left(\frac{h}{\kappa}\varphi\lambda-\frac{d}{d\lambda}\varphi\lambda\right) \qquad (6)$$

d'après la nature de cette intégrale, on voit que l'on peut appliquer le théorème connu sur la décomposition d'une fonction $\varphi\lambda$ et ajouter les résultats. nous supposerons donc que l'état initial d'un solide est d'abord $fx-6$

$$\int \sin^2 \frac{x}{b}\,dx = \frac{x}{2} - \frac{b}{2}\sin\frac{2x}{b}$$

$$\cos a \cos b = \tfrac{1}{2}\cos(a-b) + \tfrac{1}{2}\cos(a+b)$$

$$\cos^2 a = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos 2a$$

$$\frac{m}{2}\int dx\left(1+\cos\frac{2x}{b}\right)$$

$$\frac{m}{2}\theta' + \frac{m}{2}\int \cos\frac{2x}{b}\,dx$$

$$\frac{\theta}{2}\left(1-\cos\frac{2x}{b}\right)$$

$$\begin{array}{ccc} fx & \beta+\gamma & A \\ qx+fx & & B+C \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} (fx)-(fx)' & \alpha-\upsilon \\ \varphi x-(\varphi x)'+\psi x-(\psi x)' & \alpha-\varphi+\gamma-\gamma \end{array}$$



et reproduction dont est doté par la figure a b c d mais concevons
le solide engendré par la surface à l'action de l'encastre entièrement
à la température zero et mesurons le mouvement
variable de la chaleur en par l'intégrale (6).
ensuite mesurons l'effet produit par la courbe P
qui correspond à la courbe b P q r ... or cette ligne est asymptotiquement
parallèle aux ordonnées de r à l'infini grande selon la courbe avec l'axe
de r. il suit donc que l'état initial f P q r atteint par l'action
de l'encastre sur la surface n'a aucune influence sensible à des profondeurs
assez grande la chaleur initiale n'affectant que la partie avoisinante
du solide infini ne peut être point à des profondeurs assez grandes
dans le solide. on conclut de là avec certitude que l'altération
de l'état initial ne sera à d'assez grandes profondeurs sensible dans
aucun effet sensible tandis que même que si l'état initial que l'on considère
était f r - 6. on verra par la même manière how diffuse comment la
chaleur du solide du solide se dissipe tout l'influence de l'encastre et en
profondeur du foyer.
en général si l'une partie des ordonnées sur laquelle on a à faire grandes profondeurs
dans tout le cas où l'effet des variations périodiques émanées
de ri dont à des infinités entièrement disparaît. on suppose que
l'état initial soit donné que pour cette ordonnée soit à la température
qui répond au zero du thermomètre et qui est arbitraire, que les variables
périodiques et régulières soit connue. il faudra chercher quel serait
cette température fixe et constante que prendrait tout le solide
si le foyer avait une température fixe égale à sa valeur moyenne.
appelant 6 cette température constante de tout le point du solide
déterminée et f r la température initiale donnée on regardera
f r - 6 comme une température excédente qui doit disparaître toute
entière. déterminant donc cette chaleur excédente contenue dans un solide
on part par la mesure à la température constante zero donne
encastré antérieure ou déterminera par l'intégrale précédente 6
l'état du solide après un certain temps et l'on connaîtra parmi des
profondeurs assez grandes toutes les variations de la
température. pour appliquer cette recherche à un point de la
superficie il faudrait avoir égard à la fonction P.

31

Si l'on suivait les différentes parties de la solution précédente on verrait que la question
est résolue dans tous les éléments. on connaît l'état final périodique qui
ne peut affecter que les parties voisines de la surface. on connaît aussi
comment la chaleur initiale se dissipe progressivement et la loi de cet
amortissement se trouve entièrement exprimée par l'une d'elle. il suffit
toujours remarquer que la fonction f r qui représente l'état initial est
arbitraire et donnée entre toutes les fonctions possibles des températures.
il peut arriver que l'on désire savoir comme cause de cette chaleur initiale
un foyer antérieur dont l'action aurait été longtemps prolongée par
exemple l'immersion dans un milieu échauffé dont le cas dont nous
expériences nous ont donné plusieurs applications la fonction f r

qui regarde l'état initial est telle que les températures varient dans le profondeur. le solide peut perdre pendant cet long temps dans cette période quoique la surface demeure exposée dans le vide à une température fort inférieure. mais le temps à courir devient beaucoup plus grand pour qu'il s'établisse un ordre contraire dans les températures et l'état qui précède de la distribution finale est tel que les températures décroissent depuis le centre jusqu'à la surface. mais si l'on ne considère que des parties du solide situées à de très grandes profondeurs par exemple celles qui seraient voisines du centre on voit que la température de ces points peut être pendant un temps immense fort inférieure à celle des points plus voisins de la surface.

La conclusion la plus générale qui résulte de cet examen analytique est la distinction de l'état final périodique qui peut résulter d'une température de foyer et de l'état variable ou transitoire qui appartient en propre au solide. Nous entendons par température finale proprement dite celle qui subsiste en un point donné de la masse pendant la présence actuelle du foyer dont l'effet est périodique. Tout autre température finale dépend de l'origine entière du temps et disparaît avec elle. Elle est due aux causes qui font varier la chaleur de la surface et qui ont cessé d'agir. Les températures périodiques résultent au contraire d'une cause entièrement subsistante elles ne cessent ou ne s'établissent jamais brusquement. mais les températures propres varient avec le temps et leur succession peut. ce phénomène offre une marche comme paraissent l'indiquer toutes les observations relatives à une chaleur dont le cycle est fini ou périodique. Tout effet dynamique que l'on puisse observer dans le cycle est fini car il n'est sujet à aucune période il ne peut être établi que par des causes semblables à celles qui subsistent à la surface du monde planétaire et [illegible] dont la nature est entièrement ignorée

52

si dans l'équation A de la page 19 on fait $x = 0$ on aura en désignant par V la température variable de la surface

$$V = \frac{2}{g+h}\,\frac{1}{\theta}\int_0^{\theta} dr f r + \sum \left\{ a_i \cos\left(2i\omega\frac{t}{\theta}\right) + b_i \sin\left(2i\omega\frac{t}{\theta}\right) \right\}$$ en désignant

par a_i et b_i les coefficients du colonne et du sinus le premier terme est une

fonction constante et le second est une fonction périodique de t. on pourra

ouvre $a_i \cos\left(2i\omega\frac{t}{\theta}\right) + b_i \sin\left(2i\omega\frac{t}{\theta}\right) = A_i \cos\left(2i\omega\frac{t}{\theta} - q_i\right)$

$= A_i \cos\left(2i\omega\frac{t}{\theta}\right)\cos q_i + A_i \sin 2i\omega\frac{t}{\theta}\cdot \sin q_i$ donc $A_i \cos q_i = a_i$ et

$A_i \sin q_i = b_i$ donc $\tan q_i = \frac{b_i}{a_i}$ et $q_i = \arctan\left(\frac{b_i}{a_i}\right)$ et

$A_i^2 = a_i^2 + b_i^2$ ou autrement

$$V = \frac{2}{g+h}\,\frac{1}{\theta}\int_0^{\theta} dr f r + \sum (a^2+b^2)^{\frac{1}{2}} \cos\left(2i\omega\frac{t}{\theta} - \arctan\frac{b_i}{a_i}\right)$$

si l'on suppose par exemple que la température variable du foyer de source
par $f't$ est donnée par $\lambda + m\lambda \cos(\omega t + \varepsilon)$ le terme
et est [illegible] ou $\lambda(1 + m\cos(\omega t + \varepsilon))$ le terme
$\lambda t V_{t_1} = \lambda V(t + m\cos(\omega t + \varepsilon)) = \lambda V(t + m\sin(\omega t + \varepsilon + \frac{\pi}{2}))$
et le second est $\lambda\left(1 + m\sin\left(\frac{2i\omega t}{\theta}\right)\right)$ le facteur constant
au second temps est pris $\int_0^t f't = \lambda\left(\int_0^t dt + m\int_0^t dt \cos\frac{2i\omega t}{\theta}\right) = \lambda t + \lambda m \frac{\theta}{2i\omega}\sin\frac{2i\omega t}{\theta}$
$= \lambda\theta$ ainsi $\frac{1}{\theta}\int_0^\theta f'r = \lambda$ et le premier terme du facteur
$De V = \frac{g\lambda}{g+k}$. on trouve $\int_0^\theta dr\left[\lambda\left(1 + m\cos\frac{2i\omega r}{\theta}\right)\right]\cos\frac{2i\omega r}{\theta}$
$= \lambda\frac{\theta}{2i\omega}\sin\frac{2i\omega r}{\theta} + \frac{m\lambda r}{2} + \frac{m\lambda}{2}\frac{\theta}{4i\omega}\sin\frac{4i\omega r}{\theta}$ et terme suivant
l'intégrale vaut $\int_0^\theta dr\left(1 + m\cos\frac{2i\omega r}{\theta}\right)\cos\frac{2i\omega r}{\theta} = \frac{m\lambda\theta}{2}$
$\int_0^\theta dr\left(1 + m\cos\frac{2i\omega r}{\theta}\right)\sin\frac{2i\omega r}{\theta} = \lambda\frac{\theta}{2i\omega}\left(1 - \cos\frac{2i\omega r}{\theta}\right) + \lambda m\int_0^\theta dr\cos\frac{2i\omega r}{\theta}\sin\frac{2i\omega r}{\theta}$
et vaut $\frac{\lambda m}{2}\int_0^\theta dr\, 2\sin\frac{2i\omega r}{\theta}\cos\frac{2i\omega r}{\theta} = \frac{\lambda m}{2}\int_0^\theta dr\sin\frac{4i\omega r}{\theta} =$
$\frac{\lambda m}{2}\frac{\theta}{4i\omega}\left(1 - \cos\frac{4i\omega r}{\theta}\right)$ ainsi l'intégrale cherchée est nulle.
en appliquant le calcul à l'équation A on trouve donc
$$V = \frac{g\lambda}{g+k} + \sum \frac{\sqrt{\frac{g+k}{\kappa} + \sqrt{i\omega}\frac{c}{\kappa\theta}}}{\left(\frac{g+k}{\kappa} + \sqrt{i\omega}\frac{c}{\kappa\theta}\right)^2 + \frac{i\omega}{\kappa\theta}}\left\{\frac{m\lambda\theta}{2}\cos\left(\frac{2i\omega t}{\theta}\right) + \sqrt{i\omega}\frac{c}{\kappa\theta}\sin\left(\frac{2i\omega t}{\theta}\right)\right\}$$
on donne $a_i = \frac{m\lambda\cdot\mu}{\nu}$ et $b_i = m\lambda\sqrt{\frac{i\omega}{\kappa\theta}}\cdot\frac{\mu}{\gamma}$, $\frac{b_i}{a_i} = \sqrt{\frac{i\omega}{\kappa\theta}}$
$a^2 - b^2 = \frac{m^2\lambda^2\mu^2}{\mu^2}\left(1 + \frac{i\omega}{\kappa\theta}\right)$ et $(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{m\lambda\mu}{\nu}\sqrt{1 + \frac{i\omega}{\kappa\theta}}$
on trouve donc
$$V = \frac{g\lambda}{g+k} + \sum \frac{m\lambda\mu}{\nu}\sqrt{1 + \frac{i\omega}{\kappa\theta}}\cos\left\{\frac{2i\omega t}{\theta} - \operatorname{arctang}\sqrt{\frac{i\omega}{\kappa\theta}}\right\}$$

avant de continuer cet examen parlons notre attention sur quelques éléments
33 remarquables de la question.

Supposons que le système qui est exposé sur la surface à l'action du foyer extérieur de
différentes substances qui aient mis et le même temps pour parvenir à la
chaleur. le cas le plus simple est celui où tout est pris de la surface terrestre

27

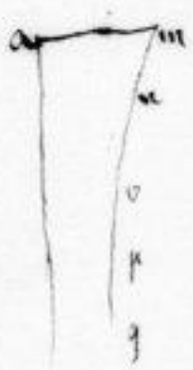


contraste, soit δ cette température constante, il est évident qu'après un temps infini le solide aura acquis une homogénéité de quelque nature qu'il soit, et prendra une température constante b. cette température limite que l'on a $bh\,\delta t$ quantité de chaleur sortie pendant l'élément $dt = g\,\delta t(\delta - b)$. de l'équation $bh = g(\delta - b)$ on tire $b = \frac{g}{g+h}\cdot\delta$

il est evident que si l'on donne à toutes les parties du solide cette température b ainsi déterminée, tous les points de ce solide conserveront cette température commune sans aucun changement
le résultat est totalement indépendant de la nature des substances qui forment le solide.
il faut aussi remarquer qu'il n'entre dans l'expression de la température limite b que le coefficient g qui est relatif à l'intensité de l'action de foyer sur la surface S et le coefficient h qui mesure la conductibilité intérieure par rapport à l'enceinte

34

Si maintenant on considère l'échauffement progressif, en attribuant toujours au foyer une température constante δ. et si l'on suppose que dans l'état initial la température du solide était 0 comme celle de l'enceinte, il est évident que la température due à la présence du foyer croîtra incessamment en décroissant depuis la surface à mesure que la profondeur augmente.



en effet supposons que la surface ait d'abord reçu, et que la couche infinie $m\,n\,o\,p\,q\,\ldots$ dont les ordonnées représentent les températures actuelles aient différentes ordonnées de sorte que le point q, ou plutôt supposons qu'aucune ordonnée ne soit plus grande que celle qui la précède, et considérons l'effet instantané du foyer extérieur, il est évident que cet effet tendra à augmenter les températures de la surface et la première ordonnée augmentera pendant le même instant une ordonnée quelconque étant plus grande ou au moins égale à celle qui la suit il se fait entre deux ordonnées consécutives une progression décroissante en général on peut remarquer que toutes les actions de la source tendent à établir dans le solide une distribution différentielle de chaleur. ce résultat ne cesse que lorsque l'action de chaque molécule sur la suivante ne fait plus croître la température de cette dernière, dans le cas où le solide est terminé.

35

si le solide exposé à l'action du foyer extérieur a des températures initiales quelconques soit fait la surface qui représente la température initiale de ses points dont les ordonnées sont I et soit I une autre semblablement placée par rapport à b la température limite que le solide recevrait de la présence du foyer extérieur

pendant un tems infini en regardera l'état du bout f_x comme la moitié de deux autres savoir 6 et $f_x - 6$ le premier n'est aucunement changé par la présence du fusain il le conserve tout entier le second est augmenté d'un autre état qui appartient à la pointe de l'encre dont est composée cette dernière et qui est égal à $f_x - 6$. Ces deux problèmes de l'état initial en deux autres dont chacune est la moitié.

en effet la température d'un point intérieur du solide varie à chaque instant et cette température qui est une fonction de x et t (on considère ici 6 comme une fonction inutile.) la valeur de Dv du changement est qui a lieu pendant l'instant dt peut être représenté par $m(\grave{y} - y) - n(y - y')$ en désignant par m et n de certains coefficients qui dépendent de la nature du solide dont les points qui agissent l'un sur l'autre $\grave{y}$ y et y' sont trois abscisses infiniment proches y est celle qui répond à la température v. et si l'on écrit $f_x - 6$ au lieu de f_x il est manifeste que la différence $\grave{y} - y$ et $y - y'$ demeurent les mêmes par conséquent l'état initial $f_x - 6$ si l'on ne considère que les points qui sont écartés de la même manière que le sont l'état f_x et comme l'état 6 ne peut pas être changé l'état entier que la différentielle peut être ordinaire, tout se réduit à considérer les variations de deux états à peu près égales les variations qu'auroit lieu pour l'état non diminué.

le même raisonnement s'applique aux points de la surface 0. la température V de l'onde en ces points peut toujours être décomposée en deux autres l'une U variable par l'effet réuni du foyer et de l'enceinte et l'autre V par effet de l'enceinte [illegible] l'effet réuni du foyer supposé à la température zero et de l'enceinte à la température v. la variation Du est $m(\lambda - u) + n(v - u)$ la variation dw est $m(o - w) + n(o - w)$ la variation totale $Du + dw$ est $m(\lambda - u) + n(o - u - w)$ ou Dv est donc $m(\lambda - u - w) + n(o - u - w)$ ou $m(\lambda - v) + n(o - v)$ c'est précisément ce qui auroit lieu si l'état v n'avoit pas été composé.

plus généralement supposons que le point m soit rapporté à l'abscisse dont les variables sont λ et A et que l'état initial soit exprimé par f_x on pourra décomposer f_x en deux états β et γ de sorte que à chaque instant $\lambda = \beta + \gamma$ 2° à ces mêmes états B et C de sorte que à chaque instant $A = B + C$ 3° l'état f_x en deux autres φx et ψx de sorte que à chaque instant $f_x = \varphi x + \psi x$.

attribuant dans à dans le liée par fictem cet agam, et fermés les deux sub Manet quelle état d'abord l'état organisé de cet sub Manet, alte trans
dit ou mut à l'un l'état initial $f(x)$, et à l'autre l'état initial $f(x')$ on
appelera le premier dans deux carrés B et B et le second dans
deux carrés y et C, on observera ou l'on calculera l'état variable en
un très brillant pour chaque solide en outre on ajoutera les températures
variables qui répondent au même instant. Le homme sera la température
- ture variable que l'on aurait trouvée si ne cessé d'exister qu'un solide
dont l'état initial était $f(x)$ ou l'état exprimé dans deux carrés A et
en effet dans le premier instant la variation d'un point quelconque du
solide intérieur en sera $m(a-f(x')) + n(A-f(x'))$
$+ p_1(f(x_1)-f(x')) + p_2 f(x_2-f(x')) +$ &c coefficient pour m, n, p, p_1...
les coefficients qui mesurent les actions des foyers a et A ou des autres
points x_1 x_2 x_3 ... pris aussi comme foyers et qui exercent
leur action sur le point dont l'état initial est $f(x')$. on aura notamment
pour le 1er des deux solides exposés à la fois dans les températures B et B
$m(B-\varphi x') + n(B-\varphi x') + p_1(\varphi x_1 - \varphi x') +$ &c
et pareillement $m(\gamma - \psi x') + (C-\psi x') + p_1(\psi x_1 - \psi x') +$ &c
car il est remarquer qu'indépendamment les foyers a et A sont
y sont supposés que la nature du corps est partout exactement
la même que dans le foyer total a ce qui fait que les coefficients m, n
sont communs. on remarque que la détermination des
deux solides pour le premier instant est
$m(a-f(x')) + n(A-f(x')) + p_1(f(x_1)-f(x')) +$ &c est
à dire la même que l'équation pour la détermination dans le solide
premier instant les résultats seront entièrement analogues à ceux qui
avaient lieu avant le premier instant on pourra donc toujours continuer
le même calcul on est sûr pour les points du solide dans tous les
cas possibles en déterminer comme on vient de faire pour deux autres
la quelconque que l'on veut prendre à fin de pouvoir tenir compte de chaque
solution séparée.
Dans la recherche actuelle on détermine l'état initial du solide en deux
autres dont l'un est celui qui subsiste toujours
périodique tel l'influence réunie du foyer à la température A et
de l'enceinte à la température zéro. le second est l'excédent de l'état
initial qui varie continuellement avec le temps par l'influence du foyer
à la température zéro et de l'enceinte à la température zéro. Cette
détermination s'applique à tout solide homogène ou non et à
tout état initial.

36

La considération d'élément de l'état final de la dépendance de foyer, et de la chaleur encadente que le solide donne selon pouvant être appliquée aux solides non homogènes, on examinera successivement le résultat de l'une et de l'autre question.

Si un solide non homogène est exposé à l'action d'un foyer ardent, il doit prendre une température inégale & qui dépend de l'intensité du foyer, et qui ne peut être par conséquent l'état initial du solide et sera ce solide comme ayant l'état initial $fx-6$ et l'emploiant pour la surface au foyer à la température zero et à l'instant à la température zero on examinera comment cet état $fx-6$ se changera successivement jusqu'à ce que toute cette chaleur soit dissipée.

Or si l'état initial fx est tel que les températures soient croissantes depuis la surface, en augmentant la profondeur il en sera de même de l'état $fx-6$ et par conséquent l'action de l'instant qui altère cet état initial ne changera point à l'action de température sur l'instant ne s'étendra également à partir de la surface de la température. quant à la variation du dernier solide dont l'action de chaque qui la précède donnée dont il s'agit de mesurer la grandeur cette variation est déterminée par la différence qui peut pas être toute entière de l'une à l'autre. Donc chaque action particulière ne peut troubler ledit problème dont il s'agit dans cette dit problème continuera de subsister jusqu'à ce que toute la chaleur encadente soit dissipée

considérons maintenant l'échauffement progressif d'un solide d'une température initiale égale partout comme celle de l'enceinte entière et que l'on expose à l'action de la surface d'une cause périodique. on suppose que le solide ne soit pas homogène, il est certain qu'après un infini le solide le fournira d'une température telle qu'en le donnant plus le changer. c'est à dire qu'il y a un certain état tel qu'en le donnant au solide la même action périodique détermine le lendemain retrouvera à la même température au commencement de chaque période. si dans cet état on considère un point allant vers la surface la température va de plus en plus varier de dans le cours d'une période et la retrouvera à même limite à la même température au commencement de la période suivante. placé au milieu de l'épaisseur, par exemple, aura également une température périodique dont le point dans le cours d'une période a nécessairement une température moyenne de cette température moyenne du point ne est la même que la température moyenne d'un point infiniment voisin de ne est même indépendante de lui. en effet

soient v_1 v_2 v_3 v_4 . . . v_m les temperatures successives du point m aux différentes époques de la période et u_1 u_2 u_3 u_4 . . . les temperatures du point n qui y correspondent aux mêmes instants.

les quantités $k(v_1-u_1)+k(v_2-u_2)+k(v_3-u_3)+\&$ représentent les quantités de chaleur qui pendant le cours de cette période passe au dessus du point m le coefficient k étant la conductibilité propre du solide entre les points m et n pendant le cours de chaque époque. Or pendant le cours de la même période il y aura une certaine quantité de chaleur qui passera au dessus du point m et viendra du point n et qui y correspondra aux mêmes instants. Il y aura donc une certaine quantité de chaleur qui pendant le cours de cette période passera au dessus du point m et viendra du point n se trouvera de même dans toutes les périodes successives. Or le solide étant supposé depuis un tems infini soumis à l'action périodique d'un foyer extérieur il est impossible que dans ce solide la température du point m ne varie point dans le cours de chaque période et que la température moyenne n'augmente ou ne diminue successivement si la quantité de chaleur qui pendant chaque période passe au dessus du point m est plus petite ou plus grande que celle qui y revient. Donc il est impossible que dans le solide ne subsiste pas toujours une température moyenne constante

+ temperature de surface.

effet de l'encaissement

climats polaires

état initial résultant de l'immersion d'un sol bien échauffé

température causée par la chaleur des couches inférieures

progressive et divergente.

retard du minimum de température.

---

considérant présentement la température moyenne en différents climats, et les conséquences que l'on peut en déduire pour connaître de même une manière approchée la température extérieure fondamentale la température moyenne d'un point est déterminée par deux causes bien différentes savoir l'inégal échauffement de la boule terrestre par les différents rayons du soleil suivant la direction des rayons et leur divergence et réfraction inégale en traversant l'atmosphère. Pour connaître l'effet de la première cause il faut considérer le globe terrestre comme un globe solide de figure sphérique d'un diamètre égal à celui de la terre. l'effet de la seconde cause ne peut être pris en considération que lorsque le globe sera supposé environné d'une atmosphère semblable à celle dont la terre est environnée. Nous supposerons d'abord que le soleil ne change point de déclinaison pendant le cours d'une révolution entière. Nous supposerons ensuite que le soleil parcourt également des parallèles également éloignés les uns des autres. Nous supposerons enfin que le globe ne tourne point autour de son axe. Cette dernière supposition est sans doute très éloignée de la vérité mais elle est nécessaire pour déterminer l'effet de la première cause indépendamment de la seconde. Lorsque nous aurons déterminé l'effet de la première cause nous déterminerons facilement l'effet de la seconde en faisant tourner successivement le globe autour de son axe de différentes quantités.

Si un globe solide d'un petit diamètre était exposé aux rayons du soleil, et que le globe fut formé dans toute son épaisseur de la même matière que sa surface, il s'établirait dans le globe un équilibre de chaleur dont l'intensité dans la masse et dans la surface du globe est déterminée par une équation différentielle aux différences partielles. Mais il n'est pas nécessaire d'examiner ici la formation successive de cet équilibre, parce que le globe est extrêmement grand, la température dans l'intérieur de la masse du globe est extrêmement basse. La température dans chaque lieu est déterminée par une équation différentielle entre la chaleur que reçoit un lieu à chaque instant, la masse du globe et la température qui est comparablement petite par rapport à celle qui vient d'abord que nous devons avant toute chose déterminer la valeur moyenne de la température annuelle. Comme nous supposons ici la surface exactement sphérique nous n'avons point à examiner l'effet de l'inclinaison de chaque partie de la surface et nous supposerons perpendiculaire à la verticale. C'est d'abord pour la petite différence que cette différence peut apporter à la valeur moyenne de la température en un climat donné. Enfin nous aurons égard à l'objet de la disposition à soi de déterminer avec plus de précision l'effet de la première cause.

38



la ligne EO désignant celle que parcourt le centre de l'horizon et pendant un jour et demi. le soleil au commencement du jour part du point E et de cet point le jour la moitié de la circonférence de l'équateur. le cercle fait avec l'horizon un angle égal au complément de la latitude dont l la latitude du lieu dont r l'axe de l'équateur qui a été décrit depuis le commencement du jour jusqu'au point S ou le soleil est parvenu actuellement on fait passer un vertical par le

on aurait donc $A = -19$.

Supposons encore que la température du climat dont la latitude est $\frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{2}$ soit

$\frac{3}{4}\cdot 27$

3466
3316
150

comparé avec l'effet produit sur et l'horizon en la hauteur h du soleil déterminée l'intensité de son effet sur le cercle de l'horizon pendant un instant. cet effet est proportionnel à $g \sin h$ c'est à dire que lorsque d'abord on a $h = 90°$ cet effet devient double triple quadruple &c le sinus de h étant double triple quadruple. par cet effet nous entendons la quantité de chaleur que l'élément w placé au centre de l'horizon reçoit par la lumière pendant un instant. si on prend on abbaisse dans le plan de l'équateur une perpendiculaire $ne = o$ la valeur de cette perpendiculaire sera $\sin r$. et si on prend o on abbaisse une perpendiculaire sur l'horizon la valeur de cette perpendiculaire sera le produit de $\sin r$ par le sinus de l'angle entre l'horizon et l'équateur ou $\cos l$. or cette perpendiculaire abbaissée de e sur l'horizon est $\sin h$ on a donc $\sin h = \sin r \cos l$. il faut maintenant pour connoître l'action totale pendant la durée d'un jour multiplier $\sin r \cos l$ par dr et intégrer de $r = o$ jusqu'à $r = \varpi$ on a donc pour la mesure de l'effet cherché $\int dr \sin r \cos l$ ou $\overline{1 - \cos r} \cos l$ ou $2 \cos l$. ainsi l'effet de chaleur de la zone ou la quantité totale de chaleur que l'athmosphère communique pour un centre de l'horizon est représenté par $2 \cos l$. chaque zone le même effet le renouvelle dans le même lieu pour indiquer cet l'effet annuel dans un lieu donné on a représenté par $2 \cos l$.

39

on a vu précédemment que dans un lieu donné la température à une assez grande profondeur est constante égale à la température moyenne annuelle du point de la surface. ainsi la loi qui doit exprimer d'un mouvement uniforme la température du climat c'est à dire la température sur la terre à une assez grande profondeur sont proportionnelle au sinus de la latitude. il est évident que cette température dans la profondeur doit s'ajouter à la température extérieure lorsque celle ci doit être désignée par A par conséquent l'expression de la température sous la ligne à une profondeur sera $A + K \cos l$ en désignant par K un certain coefficient qui dépend de la facilité avec laquelle la chaleur pénètre les différentes.

si donc on observe des températures fixes de deux lieux pour lesquels l'état superficiel sont le même et que ces températures soient v_1 et v_2 les latitudes étant l_1 et l_2 on aura $v_1 = A + K \cos l_1$.

$v_2 = A + K \cos l_2$.

par exemple supposant que la température à l'équateur soit 27 degrés centésimaux et qu'elle soit $\frac{1}{2}$ 27 au parallèle dont la latitude est $\frac{1}{4}\varpi$

on aura $27 = A + K$ et $\frac{1}{2}27 = A + K\sqrt{\frac{1}{2}}$ d'où l'on tire

$\frac{1}{2}27 = K\left(1 - \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$ ou $K = \frac{27}{2 - \sqrt{2}} = \frac{27000}{586} = 46$

on aura donc $A = -19$.

supposant encore que la température du climat dans la latitude est $\frac{1}{3}\cdot\frac{\varpi}{2}$ soit $\frac{3}{4}\cdot 27$

2
1,414
0,586

27000 | 586
46.0
27
19

2344
3406
3516
440

3 | 1,7320
1 | 2,7 343 3
7

200
189
1100
1029
7100
5926
1760

3464 | 530
0,530

27000 | 530
2650 | 50.3
2000

50.3
27.
73,3

on aura $27 = A + K$, $\frac{3}{2}.27 = A + K\sqrt{\frac{3}{4}}$ d'où $\frac{1}{4}27 = K\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$

ou $K = \frac{27}{4 - 2\sqrt{3}} = \frac{27000}{530} = 50,3$ et par suite $A = -23,3$

en général on aura $v_1 = A + K\cos l_1$ $v_2 = A + K\cos l_2$ et

$v_1 - v_2 = K(\cos l_1 - \cos l_2)$; $K = \frac{v_1 - v_2}{\cos l_1 - \cos l_2}$, si la première

température v_1 est prise à l'équateur on a $K = \frac{v_1 - v_2}{1 - \cos l_2}$

et $A = v_1 - \frac{1}{1 - \cos l_2}(v_1 - v_2)$.

en supposant que v_1 ait une valeur déterminée, plus l_2 sera petite plus la valeur de K sera grande plus celle de A sera petite. on bel cas accélérera dans l'hémisphère de l'atmosphère diminuera cette différence $v_1 - v_2$ elle diminuera K et par conséquent augmentera A on trouve dans cette température fondamentale trop grande. elle est négative, et au dessous de $-23,3$

40

nous avons jusqu'ici supposé que le boulet devait l'équateur pendant toute l'année. il faut maintenant avoir égard au changement de déclinaison ce qui exigera un calcul un peu compliqué on pourrait voir ce calcul que nous avons fait dans le fil noté M faut recommencer le calcul mais on rapportera ici le résultat sans aucun de calcul. Evidemment cette vitesse doit exister car il n'y a pas de raison pour que le boulet ne dépasse pas les climats polaires en dépassant vers la latitude de Lima par ex l'obliquité de l'écliptique nous trouvons que la grandeur du boulet de chaleur que le centre de l'hémisphère reçoit pendant une année entière est proportionnelle à $2\cos l - \frac{\cos(2l)}{2\cos l}\sin^2\theta +$ des termes suivant ordinairement les puissances impaires de $\sin^2\theta$ et nous négligerons par la suite. nous allons examiner ce qui résulte de l'emploi des deux premiers termes.

nous aurons $v_1 = A + K\left(2\cos l_1 - \frac{\cos(2l_1)}{2\cos l_1}\sin^2\theta\right)$ soit $l_1 = 0$

$v_2 = A + K\left(2\cos l_2 - \frac{\cos 2l_2}{2\cos l_2}\sin^2\theta\right)$ $l_2 = \frac{1}{4}\varpi$

on trouve dans le bulletin de Kiew an editi. longitude. VI vol p. 219

$v_1 = 29.45$ et $v_2 = 14.16$ on aura

$29.45 = A + K\left(2 - \frac{1}{2}\sin^2\theta\right)$

$14.16 = A + K\left(2\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$ $\left(15,29 = K\left(2 - \sqrt{2} - \frac{1}{2}\sin^2\theta\right)\right)$

$K = \frac{15.29}{2 - \sqrt{2} - \frac{1}{2}\sin^2\theta} = \frac{15.29}{0,607} = 30.1$ donc $14,16 = A + K\sqrt{2}$

ou $14.16 = A + 42,614$, donc $A = -28,4$

$\log\sin\theta = \log\sin 25°28\frac{1}{2}$

$= 9,600263$ (-10)

$2\log\sin\theta = 19,200527$ (-20)

$\log\sin^2\theta = -0,799473$

$0,200527$

$0,15868 = \sin^2\theta$

1,414	1629	507
0,586	1521	301
0,079	108	
0,507		

30,1
1,414
1204
301
120
30
42,614
29.45
13,11

42,614
14,16
28,4014

$\frac{\partial}{\partial q} \bar{L} =$

$0 = A' + K' (2\omega l_1 - g_1 q) - g_1 K$

$0 = A' + K' (2\omega l_2 - g_2 q) - g_2 K$

$\sin^2\theta = 0,15668$
$\sin^4\theta = 0,07934$
$2 - \frac{1}{2}\sin^2\theta = 1,92066$

1,92066
1,732
1,92066
1,34442
57 60
384
3,32652
2,92066
0,40586
7,95
1,732
7965
55655
23855
13930
13,76594
40586
33,9
121758
159360
121758
376020
33,9
1,92066
33,9
30451
6779
64908
29.45
35,63
0,15868
0,84132
22620
16852
6768
6472

$\sin\alpha_1 = 29.45$ at $l_1 = 0$
$v_2 = 21,50$ at $l_2 = \frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{2}$

$29,45 = A + K(2 - \frac{1}{2}\sin^2\theta)$
$21.50 = A + K\left(\sqrt{3} - \frac{1}{2}\frac{\sin^2\theta}{\sqrt{3}}\right)$
$= A + K(1,92066$
$= A + \frac{K}{\sqrt{3}}(2,92066$

$29,45 = A + K(1,92066)$
$21,50 = A + \frac{K}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sin^2\theta\right)$

d'où $7,95 = \frac{K}{\sqrt{3}}\left((1,92066)\sqrt{3} - 2,92066\right) = \frac{K(0,40586)}{1,732}$

$K = \frac{(7.95)(1,732)}{0,40586} = 33,9$ et $A = -26.63$ (en arrondissant calculs)

Soit encore $v_1 = 29.45$, $l_1 = 0$, $29,45 = A + K(2 - \frac{1}{2}\sin^2\theta)$
$v_1 = 6,83$ $l_2 = \frac{2}{3}\cdot\frac{\pi}{2}$ $6,83 = A + K(1 + \frac{1}{2}\sin^2\theta)$

$22,62 = K(1 - \sin^2\theta) = K(0,84132)$ d'où $K = 26,8$, $A = -12$
(en arrondissant calculs.
A-t-on dans la division encore un chiffre supprimé ou on aurait
$22.62 = K$, $A = -15,79$

ou en général $v_1 = A + K\left(2\cos l_1 - \frac{\cos(2l_1)\sin^2\theta}{2\cos l_1}\right)$

$v_2 = A + K\left(2\cos l_2 - \frac{\cos 2l_2 \sin^2\theta}{2\cos l_1}\right)$

$K = \frac{v_1 - v_2}{2(\cos l_1 - \cos l_2) - \sin^2\theta\left(\frac{\cos 2l_1}{2\cos l_1} - \frac{\cos(2l_2)}{2\cos l_2}\right)}$

plus la différence $v_1 - v_2$ est grande (la valeur de l_1 et l_2 étant donnés) ainsi que celle de $\sin\theta$ plus K sera grande. Cette valeur de K est possible. Supposons que v_1 soit donnée et que dans l'ébullition la température v_2 ou le trempe en faisant v_2 plus grande qu'elle ne doit être on trouvera une valeur de K trop grande et par conséquent une valeur de A plus grande qu'elle ne doit être, c'est ce qui arrive lorsqu'on emploie le résultat des observations car la présence de l'atmosphère tend à rendre la température moins vite égale aux températures de A que l'on trouve et toujours trop grande elle est négligée et au début de l'ébullition que nous avons trouvés.

On pourrait aussi en opérant en conservant les mêmes valeurs pour v_1, v_2 l_1 et l_2 faisant varier θ les valeurs de A et de K variant et l'on verra quelle erreur on commet lorsqu'on fait abstraction de l'obliquité de la chaleur mais ce détail n'est point nécessaire



$\sqrt{3}/2 = \cos$

$2\cos = \sqrt{3}$

$\cos 2\ell = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}\sin^2\theta = 0,7934$

$-\frac{1}{2}\sin^2\theta = 1,2060$

$\sin^2\theta = 0,1468$

$3,8413\,2$

$\sqrt{3} = 1,7320$

$\sqrt{3} = 3,4640$

$0,7320$

$0,7934$

51240

6574

2198

$0,46063$

$\sin^2\theta = 0,1468$

$\sin^2\theta = 0,0793\,4$

$0,4640$

$0,0580$

$0,4060$

$2\,\cdot$

$0,$

$\ell_1 = \frac{1}{3}\frac{\pi}{2}$

Soit $\ell_1 = \frac{1}{3}\frac{\pi}{2}$ et $\ell_1 = 0$ on a $v_1 = A + K\left(2 - \frac{1}{2}\sin^2\theta\right)$

$v_2 = A + K\left(\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\sin^2\theta\right)$

$v_1 - v_2 = K\left(2 - \frac{1}{2}\sin^2\theta - \sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\sin^2\theta\right) = \frac{(4-\sqrt{3}) - \sin^2\theta(2-\sqrt{3})}{2\sqrt{3}}$

$v_1 - v_2 = K\left(\frac{2060}{1,7320}\right)$

Soit $\ell_1 = \frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{2}$ et $\ell_1 = 0$ on a $v_1 = A + K\left(2 - \frac{1}{2}\sin^2\theta\right) = 29,45$

$v_2 = 21,50$

$v_2 = A + K\left(\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot\sin^2\theta = 21,50\right.$

$7,99 = K\left(2 - \sqrt{3} - \frac{1}{2}\sin^2\theta\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) = \frac{K}{\sqrt{3}}\left(2\sqrt{3} - 3 - \frac{1}{2}\sin^2\theta(\sqrt{3}-1)\right.$

$= \frac{K}{\sqrt{3}}\left(0,4640 - (0,0793\,4)\,0,7320\right) = \frac{K\cdot 0,4060}{1,7320}$ d'où

$K = 33,0$ et $A = 7,99$

$\frac{3}{2}\sqrt{2}\,v = k\cdot$

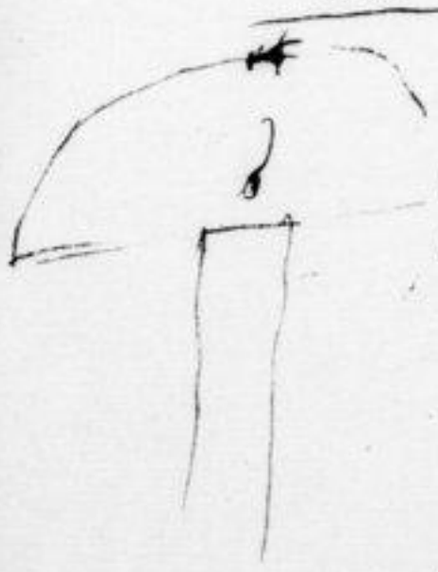
$0 = A' + K'(2\cos\ell_1 - 9,9) - 9K$

$\ldots - 9,K$

42

quoique les calculs précédens ne puissent fournir que des résultats approchés, ils donnent toutes fois une idée exacte de la marche du phénomène on voit que la température dans du climat est déterminée 1° par la température fondamentale A qui en tte cet enfoncement et ne peut être supposée indépendamment au dessus du zero de notre échelle thermométrique 2° par la présence du soleil qui élève la température du climat d'une certaine quantité au dessus de cette température fondamentale 3° par un nombre abscissa de causes accessoires que nous avons indiquées parmi ces causes accessoires il faut admettre la plus importante de l'action réciproque de l'atmosphère, et celle de l'océan le mouvement de l'air et des eaux tend à rendre les températures moins inégales si cette cause n'existait point et que chacune fut entièrement soumise à son influence propre on observerait à la surface sphérique du globe des températures plus différentes qu'elles ne sont. si l'invention concevait une enceinte entourant la boule d'une couche - lure conductrice et qui s'étendit au delà des limites de notre système planétaire on ne pourrait pas attribuer à cette enceinte une température hyperborée ni une température hyperboréenne autrement il faudrait pour les climats des températures entièrement différentes de celles que l'on peut observer. la température - lure extérieure fondamentale de A est celle qui la conductibilité à l'enceinte pour que les effets thermométriques ne changeât pas la température à la surface du globe mais ne changeât point la température de cette enceinte. la même température extérieure fondamentale de A est actuellement inconnue parce que l'on ne connaît pas exactement quelle est la chaleur que la terre emprunte ou restitue à l'espace environnant. mais l'existence de cette température fondamentale est incontestable. examinons maintenant quelle température doit être attribuée à l'enceinte pour qu'elle exerce un effet prononcé. nous verrons ensuite comment on pourra l'observer.

43.



si la température fondamentale extérieure est −40° centésimaux et si la température moyenne à l'équateur est 30. on aura sur la surface S d'une sphère infiniment profond et sur le plan de la section du foyer f dans une direction orthogonale élevant de 70 degrés centésimaux, on peut d'après cela se former quelque idée de la température du foyer primitive lorsque l'on connaît la dimension et la distance.

supposons qu'un prisme de fer qui ne peut prendre la chaleur que par la surface S soit placé sous l'influence d'une enceinte dont la température soit plus basse que celle de l'espace environnant d'une très grande quantité et dont une très grande partie est entretenue à la température zero et dont une partie $\frac{1}{n}$ est entretenue à la température hyperborée H. quelle température doit prendre la surface S.

on suppose que le corps dans le premier instant a reçu un supplément de l'élément enlevé-
-ment petit δ et dont la borne limite le foyer est la même partie de
l'hemisphere entoure que l'élément sphérique de la partie de l'enceinte
qui a cette température a est la même partie de l'hemisphérique;
Les corps à leurs surfaces qui ont B cette température chacun
de δ on aura $Bh\delta dt$ pour la quantité de chaleur que la surface
δ envoye à toute l'enceinte qui a cette température a ou plus
exactement $Bh\delta dt\left(\frac{n-1}{n}\right)$. quant à la partie $\frac{1}{n}$ de l'enceinte
qui a cette température a elle envoye la quantité de chaleur
qu'elle recevrait de δ si cet élément δ avait la température
$(a-B)$ et que la partie $\frac{1}{n}$ est la température zero ainsi
l'élément δ recevrait de la part une quantité de chaleur égale
$(a-B)h\delta.dt\frac{1}{n}$ car $(a-B)h\delta dt$ serait toute la quantité
de chaleur envoyée à l'enceinte entière si δ avait la
température $a-B$ dans la partie $\frac{1}{n}$ qui est sa
quelle n'ème partie de la chaleur que toute on a donc
l'équation $Bh\delta dt.\left(\frac{n-1}{n}\right) = (a-B)\frac{h\delta}{n}dt$ en prenant
un très grand nombre $B = \frac{a-B}{n}$ ou $B = \frac{a}{n}$ ainsi la
température B du premier sera de la n'ème partie de la
température a du foyer.
maintenant en supposant le diamètre du soleil $\frac{1}{2}$ de degré
le rayon lunaire. soit ρ le rayon du foyer. $2\varpi\rho$ la circonférence
$\varpi\rho^2$ l'aire du cercle on aura $\rho = \frac{2\varpi}{2.360} = \frac{\varpi}{360}$. soit 1 le
rayon de la sphère 2ϖ la circonférence ϖ la surface du grand
cercle 2ϖ la surface hemisphérique $\frac{\varpi\rho^2}{2\varpi}$ le rapport $\frac{1}{n}$
ainsi $\frac{1}{n} = \frac{1}{2}\rho^2 = \frac{1}{2}\frac{\varpi^2}{(360)^2}$ on a donc $a = B.\frac{2.360^2}{\varpi^2}$
ou environ $a = 25920\,B$. on aurait donc pour la température
de l'athe environ 25 milliers la température B du climat
de l'étoile et si l'on suppose comme on l'a vu plus haut
$B = 70$ degrés centésimaux on aurait $a = 25920.70$
environ $a = 1800.70$ ou 25 milliers 7000 ainsi
la température de l'athe pourrait être comparée à
18 ou 19 milliers la chaleur de l'eau bouillante si l'on prend
600 degrés pour la chaleur du fer rouge on aurait environ quatre
milliers la chaleur du fer rouge.
Le résultat est celui qui aurait lieu si le rayon de l'athe était lumineux

360
36
216
108
129600
25920 60
259 600
$n = 36$ 259
7
181 30

$\rho = \frac{\varpi}{360}$ rayon
$\varpi\rho^2$ surface.
1 rayon. $\frac{1}{2\varpi}\rho^2 = \frac{1}{n}$
2ϖ circ.
ϖ surf. $\rho = \frac{\varpi}{360}$
hémisphère
2ϖ
$\frac{\varpi^2}{2.360^2}\,2 = \frac{2.360^2.60}{\varpi^2}$
$\frac{\varpi^2 60}{2.360.360}$
$\frac{\varpi^2}{12.360}$

$\frac{2\pi}{2.360}$ $\frac{\pi}{360}$

$\frac{1}{2}$ $\frac{\pi}{360}$

$2.360.360$

$9,87$

$\frac{2\pi \cdot 1}{2}$ $\quad$ $\frac{2\pi \cdot 9}{2}$ $\quad$ 9

π

π

1

$\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}$

$\frac{\pi}{360}$

$\frac{\pi}{360}$

$\frac{\pi}{360

perpendiculaire sur le plan de l'orbite d'où il faut avoir égard à l'obliquité de [illegible]
rayon et à l'intermittence des nuits. [illegible], la quantité
de chaleur communiquée par le foyer au centre de l'hexalune est proportionnelle
à $\frac{1}{\Delta^2}\cos\gamma$ en appelant γ l'arc compris entre le zenith et le lieu
actuel de l'astre. l'intégrale prise de $t=0$ à $t=\frac{1}{\omega}$ est $\frac{1}{\omega}\cos\gamma$
on a ainsi l'effet total pendant le jour est représenté par 2.
si l'astre restait au zenith pendant une révolution entière l'effet total
serait $4\sqrt{2}\frac{r^2}{\Delta^2}$ ou 2 ainsi le rapport de l'effet réel pendant
la durée de jour à l'effet qui serait produit si l'astre demeurait au zenith
pendant une révolution entière est celui de 2 à $\pi\omega$ ou de 1 à ω.
donc la température que prendrait la surface d'où l'astre aurait la température
2 est celle que l'on obtient en divisant le nombre ω. au
dessus en désignant par β la température de [illegible] et par λ
celle de l'astre en mouvement $\beta=\frac{1}{\omega}\frac{\lambda}{n}=\frac{1}{\omega}\frac{\rho^2}{r^2}$ et si l'on sait
$\rho=\frac{\sigma}{360}$ on aura $\beta=\frac{\lambda\cdot\omega^2}{\pi^2\cdot(360)^2}$ ou $\beta=\frac{\omega^2\cdot\lambda}{2\cdot(360)^2}$. si l'on suivant β
on aura $\frac{\lambda}{2}=\frac{\beta\cdot 360^2}{\omega^2}$ ou $\frac{\lambda}{2}=41253\cdot\beta$ ou $\lambda=82506\beta$
en faisant $\beta=7°$ on aura $\lambda=577542,0$. ainsi la température
de l'astre est environ 577 degrés centigrades au dessus
donne ainsi la température de l'incandescence évaluée à 500 degrés.
ce résultat diffère comme on voit de la température fondamentale A
de l'espace planétaire nous l'avons ici à $-40°$ environ. et nous estimons
à $+7°$ cette température [illegible] à l'équateur par la
44. Mélange du sel.

les résultats numériques que l'on rapporte sont affectés d'une incertitude
provenant de l'incertitude des observations. nous n'avons eu aucun moyen
de connaître la température fondamentale. mais ce qui importe
beaucoup ici c'est l'influence de cette température qui est un des éléments
du système du monde. or ce but est incontestable. la série suivante
avec chacun des éléments entre nous ne pouvons nous dissimuler
une idée des [illegible] qu'un astre est susceptible
de leur [illegible]. c'est dans la même vue que nous calculons les
températures des astres planétaires
on peut estimer comme nous l'avons vu à $7°$ l'élévation de température causée
à l'équateur par la [illegible] par la présence du sel. cette élévation est pour les différents
planètes en raison inverse de la racine des distances. ainsi en [illegible]
on trouvera les rapports suivants

mercure	vénus	la terre	mars	jupiter	saturne	
$\frac{4}{9}$	2	1	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{17}$	$\frac{1}{91}$	(doit en marge les rapports plus approchés)
7						
490	140	70	30	$2\frac{16}{17}$	$\frac{70}{91}$	
mercure	vénus	la terre	mars	jupiter	saturne	
$\frac{49}{20}$						
490	100	50	-10	-38	-40	

129600.
113
3588
1296
1296
16448 | 333
1620 | 41253
444
333
894
910
1880
1773
1070
710
3600

41253
82506
7
577542

$1-\frac{1}{170}$ $\quad a$

$1+\frac{1}{170}$ $\quad a+\frac{a}{84}$

$1-\frac{2}{84}$

$\frac{1}{\left(1+\frac{1}{84}\right)^2}$ $\quad 1-\frac{1}{42}$

$\frac{1}{168}$ $\quad \frac{1}{84}$ $\quad \frac{1}{42}$

$\frac{3936}{11872}$ $\quad \frac{3936}{3936}$

$\frac{3936}{4000000}$

$\frac{3}{2000}$ $\quad \frac{1}{666}$

$\frac{3936 \cdot 360 \cdot 60}{4000000}$

$\frac{3936 \cdot 216}{40000}$ $\quad \frac{3936 \cdot 84}{10000}$ $\quad \frac{3936}{84}$

$\frac{1}{30}$ $\quad \frac{1}{32}$

$1+\frac{1}{15}$ $\quad 1+\frac{2}{15}+\frac{1}{225}$

$\frac{168}{10000}$ $\quad \frac{336}{672}$ $\quad \frac{672}{10000}$

$\frac{10000}{672}$ $\quad \frac{672}{3280}$ $\quad \frac{2}{119}$

$\frac{10000}{840}$ $\quad \frac{166}{1600}$ $\quad \frac{166}{151}$ $\quad \frac{166}{480}$

$\frac{166}{166}$ $\quad \frac{996}{996}$ $\quad \frac{996}{166}$

$27\,456 \cdot 70$

9° $\quad 32^\circ 84'$ $\quad 57^\circ 6'$

$114^\circ 12'$

$2R\sin(15')$

$\log \tan 16^\circ 30' 2'' = 7,968888$

$\log 166 = 2,220108$

$10,189884$

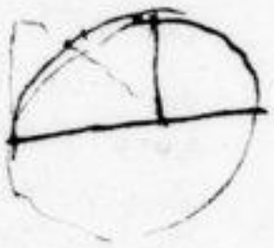
$9,811012$

$\rho = R \tan \alpha$

$\rho = \frac{R}{166} \tan \beta$

$\tan \beta = 166 \tan \alpha$

$\log \tan \beta = \log \tan \alpha + \log 166.$





Sur la limite du système pour que l'effet de la chaleur solaire est [illegible]
sensible à la surface d'un ramas cet astre dont le diamètre apparent est
d'environ [illegible] minutes et demie n'élève guère le thermomètre à l'égal
que d'environ $\frac{1}{3}$ de degré. à la surface de mercure la température [illegible]
celle du fer rouge. à la surface de vénus l'eau bouillirait avec de petits [illegible]
et Mercure lui-même à cause que elle ne pourrait exister à l'état liquide si l'on avait quelque
connaissance du poids de l'atmosphère à la surface de mars l'eau serait gelée
à la surface de jupiter le mercure serait solide. ainsi l'eau à l'état liquide [illegible]
appartient en propre à la terre.

43.

nous avons supposé le diamètre apparent du soleil de 30' minutes sexagésimales
en [illegible] cette valeur du diamètre moyen apparent à 32 minutes
un [illegible] pour la température $\frac{1}{2}$ de l'astre une moyenne
valeur que celle qui a été supposée plus haut il faudrait diminuer
celle que l'on a trouvée d'environ $\frac{2}{15}$ parce qu'elle serait trop forte
de quarrel.

46

la distance du soleil à la terre variée dans le cours d'une année d'une
[illegible] quantité [illegible] que la moyenne distance de Mars est augmentée
ou diminuée d'environ $\frac{1}{39\frac{1}{2}}$ de cette moyenne. la moindre distance est augmentée
d'environ $\frac{1}{119}$ ou en nombre rond d'un trentième de sa propre valeur
par conséquent [illegible] de la chaleur solaire varie dans
le cours d'un an d'environ la quinzième partie de la valeur.
si la température fondamentale de l'espace au lieu d'être alternativement
peu différente de -60 ou -30 ou -60 degrés centigrades
était beaucoup moindre qu'elle fut par exemple -120 degrés
l'effet de la chaleur solaire [illegible] d'environ 150 degrés et
par conséquent le changement de la distance engendrerait
diminuant la température d'environ dix degrés cependant
tel changement [illegible] de température fondamentale

47

on reconnaît aussi l'existence de cette température en hiver du ciel en
ce décant qu'on ne peut supposer que toute la chaleur communiquée
à la terre émane du soleil. car il devient nuit pendant la nuit
aussi d'en attribuer la présence de l'atmosphère ne pourrait se déduire
au reste l'observation du thermomètre exposé pendant la nuit
au ciel serein montre l'existence d'une température du ciel très
basse. mais il est bien difficile de supposer que la basse
température du ciel ait aucune relation avec celle
de cette température fondamentale

48

$1 - \frac{1}{170}$ a

$\rightarrow \frac{1}{\quad}$ $a + \frac{a}{\quad}$

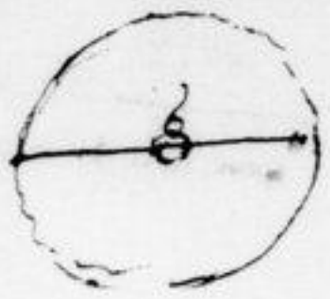




$\frac{1}{2}$ $\bar{a}$ 1.15

1.50

1 = 2506



nous regarderons en outre avant celles des quelques précédentes qui peuvent
exiger un examen ultérieur ou des preuves plus exactes.
Soit d'abord la température de l'enceinte qui indique horizontal 0 placé au
centre de l'hémisphère recevant d'un arbre qui occupe le zenith et
dont le diamètre apparent vaut 2 p. le rayon p est extrêmement
petit ainsi que le rayon de b car dimensions sont incomparablement plus petites
que le rayon 1 de l'hémisphère dont le centre est en b. l'arbre dont le diamètre
et 2p envoie au disque pendant chaque unité de temps une certaine quantité qui
perpendiculaire à la surface et de l'unité de temps à laire S que l'arbre occupe sur
la surface hémisphérique à la différence 2π − β de l'atmosphère chaude
2π de l'arbre à la température relative β du disque b et à basse température h
sur l'aire S elle-même dit que chaque dont la température constante est
si le rayon qui joint S et b n'était pas perpendiculaire sur le disque mais faisait
avait qu'il fit un angle φ avec la surface plane S et un angle φ avec
la surface b on voit d'après les principes de la théorie de la chaleur
rayonnante que la quantité de chaleur envoyée par S à b n'est pas la quantité envoyée par
la différence de la quantité envoyée par S à b à la quantité envoyée par
b à S a pour expression

$$S \sin^2 h \left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \text{ et } b \sin^2 \varphi.$$

on suppose que les
surfaces des disques S et b sont l'une et l'autre celle du fer poli, et que
toute l'enceinte hémisphérique dont la température est zéro est aussi
celle du fer poli. le coefficient h est propre au fer
si l'on considérait des surfaces différentes il faudrait désigner par H la quantité
de chaleur que l'unité de surface de la matière du disque abcd à la température
envoie pendant l'unité de temps en rayonnement dans le vide de la température
zéro. pendant l'unité de temps envoie de la même substance que le disque et qui formerait
valeur de l'espace intérieur étant O. on entend par cette température intérieure
cette d'une enceinte formée de la même substance que le disque et qui formerait
de la nature de l'espace hémisphérique. Si l'enceinte était formée d'une autre
substance que le disque la quantité de chaleur communiquée par le disque à
l'enceinte pendant l'unité de temps dépendrait de la température du disque et
de la température zéro de l'enceinte. Si la température du disque était
zéro aucune chaleur ne serait communiquée par le disque à l'enceinte
ici la considérable relative de l'un à l'autre que b et de l'enceinte.
il faut considérer que la température de l'enceinte étant donnée et constante
comme b le disque b pendant ne commencement la température c'est à dire
qu'il la conserve tel l'avant au plus dans cet état d'équilibre mais
considérant l'effet que le disque communique à l'enceinte une certaine quantité
de chaleur pendant l'unité de temps 2° que l'enceinte communique au disque
pendant le même temps une certaine quantité de chaleur qui est égale à la
première 3° que si le disque a la température 1 de l'enceinte et la température
de la température 0 il y a encore dans le cas précédent deux quantités de
chaleur communiquées mais qui sont inégales c'est la différence de ces deux quantités
que l'on représente par h de manière et comptée en sens inverse de celle
que produirait seule la différence dont il s'agit
nous mettrons aussi par g et d'après la même manière la quantité
relative du disque b et du disque S c'est à dire que l'enceinte étant
était formée toute entière de la substance du disque S et si cette enceinte était
la température zéro le disque b ayant la température 1 et l'unité de temps
pendant l'unité de temps un échange de quantité de chaleur entre le disque
et l'enceinte et que la différence ou la quantité de chaleur perdue par le disque
soit donc g l'étendue du disque S mesurée en unité de surface nous aurons

b a la température B
s a la température b

s et b tout deux développent dans les directions tout à fait comparables mais légèrement plus petites que la déformée qui correspond à la température de b et température de d.

p est l'angle qui y soit avec s
q est l'angle qui y soit avec b

non inA - n mB

l'unité de surface ayant la température 1, et l'enceinte homothétique ayant la température 0, h est la quantité de chaleur envoyée dans toutes les directions pendant l'unité de temps cette quantité est apparemment perdue de la même manière entre la chaleur qui est de b et celle qui reste dans b.

Si l'unité de la surface appartient à une substance différente de la chaleur spécifique

sont A la quantité de chaleur qui fait de la surface échauffée et B la quantité qui fait de l'enceinte échauffée la température zéro

h est A − B

lorsque la surface change de nature A et B changent aussi en effet la quantité de chaleur qui fait de l'enceinte échauffée et K b la partie de cette chaleur qui reste dans b. a a Kb=B

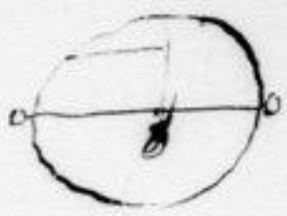
et K est un coefficient qui dépend de la nature de b.

si l'on change la nature de b b devient le même mais K change et devient mK entre que B devient mKb ou mB

mais en même temps A change avec la nature de la surface et devient mA de sorte que h devient mA − mB ou mh

si la chaleur spécifique change de nature

lorsque la surface échauffée égale à l'unité de surface mesurée de manière à une température donnée 1 et qu'elle est d'une certaine nature



grande proximité de chaleur cette surface S communique à b mais la vapeur la laisse passer K Sil p. sin φ. S. b (α − β) p est l'angle que font avec S le rayon qui joint un point de S et un point de b et comme on suppose b assez S et b étant infiniment rapprochés on considère que la distance mutuelle de ces points soit sensiblement perpendiculaire à S et b de sorte que l'angle p que font cette distance avec S et de l'angle φ qu'elle fait avec b. on désigne par K un coefficient constant que l'on suppose déterminé et par α et β les températures actuelles de S et b lorsque b étant au centre de l'horizon contient une zone hémisphérique parallèle à l'horizon qui soit à la hauteur φ de largeur dφ et que l'on suppose infiniment petite de cette zone soit dφ. comme l'angle φ est le même pour tout le périmètre de la zone et que l'angle p est droit on prendra l'arc de la zone pour la valeur de S et l'aire de la zone sera

$K b \sin\varphi . d\varphi . \overline{\alpha-\beta}$ $2\pi\omega\cos\varphi . d\varphi$ car l'arc de la zone est $2\pi\omega\cos\varphi$

il l'intégrale de part $\varphi = 0$ jusqu'à $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ on doit trouver la quantité de la balle de chaleur que l'enceinte hémisphérique fournit de la même température que S communique à b. or connaissant déjà cette quantité pour $g b \overline{\alpha-\beta}$ on en conclura donc la valeur de K

la quantité $g = 2K\omega \int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\varphi \cos\varphi . \sin\varphi = K\omega \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin 2\varphi = K\omega \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\omega 2\varphi\right)$

donc $g = K\omega$ ainsi la quantité de chaleur envoyée par S à b est

$\frac{g}{\omega} \sin p . \sin\varphi . S b . \overline{\alpha-\beta}$ il faut remarquer que S est mesuré en surface et b est mesuré en surface. soit ρ le demi diamètre de S mesuré en surface on aura $S = \omega\rho^2$ par conséquent la quantité de chaleur envoyée par la surface S à b sera $g \sin\varphi b \overline{\alpha-\beta} . \rho^2$ car l'angle p est droit. Il faut chercher l'aire de la zone hémisphérique dont les points avec b font un angle φ est $2\pi\omega\cos\varphi d\varphi$ le produit de cette aire par le coefficient $\frac{g}{\omega} \sin\varphi$ est $2g\cos\varphi d\varphi \sin\varphi$ l'intégrale est $g \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin 2\varphi$ ou $g\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\varphi\right)$ ou g ainsi pour la quantité de la balle de chaleur envoyée par l'hémisphère à b il faut multiplier l'aire infiniment petite $2\pi\omega\cos\varphi d\varphi$ de la zone par $\frac{g}{\omega} \sin\varphi$. si donc on suppose que la surface qui envoye la chaleur soit l'angle φ ne soit pas $2\pi\omega\cos\varphi d\varphi$ mais f il faudra aussi multiplier S par le coefficient K ou $\frac{g}{\omega} \sin\varphi$ on conclura rigoureusement que l'expression de la quantité de chaleur envoyée par l'arbre S à b est $\frac{g}{\omega} \sin\varphi . S b \overline{\alpha-\beta}$ et si S est un cercle infiniment petit dont le rayon est ρ on aura $g \sin\varphi . \rho^2 b \overline{\alpha-\beta}$

42

ce déversoir étant posé sous cette expression $\frac{g}{\varpi}\overline{\lambda-\beta}\sin\varphi.\delta\sin\varphi$. Il
elle exprime que pendant l'écoulement de la différence de quantité de chaleur
que le communiquent et s'échappent de la température β et
le degré 5 à la température plus élevée λ que cette différence dépend et
$\frac{g}{\varpi}\overline{\lambda-\beta}\delta\sin\varphi.\delta.\sin\varphi$ pendant l'écoulé tems. on désigne par 5
l'axe du déversoir mesuré par la surface de l'eau par φ l'angle que font
la direction de l'axe avec le plan 5 par φ l'angle que font cette
direction avec le plan δ. on suppose ici la différence représentée pour 1.
Si elle était y compris en raison de la grandeur. la quantité de chaleur acquise
par δ tant $\frac{g.\sin\varphi.\overline{g\lambda-g\beta}.\sin\varphi.\delta}{\varpi g^2}$

Dans le cas de la surface hémisphérique $\sin\varphi=1$ et si l'axe est vertical au
zenith $\sin\varphi=1$. il ne faut point perdre de vue que l'expression précé-
dente s'applique à des surfaces enfoncement relatif 5 et δ en sorte que la
ligne y qui joint un point de l'axe et un point de la surface fait toujours avec l'axe
l'angle φ et avec la surface l'angle φ quelque incliné il puisse être sur 5
et δ. cette formule contient la solution de la théorie de échauffement
rayonnant qui ne dépend point de la réflexion.

30

---

marchera avec β la température ambiante qui doit prendre le dégré δ exposé
à l'air 5 et à l'enceinte entretenue à la température Θ. on aura
l'équation $h\beta\delta = g(\lambda-\beta)\delta.5$
pour trouver le premier membre de cette équation
de l'air échauffée par 5 sur la surface hémisphérique à laquelle
peut exprimer cette air est proportionnel à $\frac{g.\sin\varphi.\overline{g\lambda-g\beta}.\sin\varphi.\delta}{\varpi g^2}$
Si l'axe hémisphérique
ou $\frac{g}{\varpi}(\lambda-\beta)\sin\varphi.5.\delta$ ou $h\beta = \frac{g}{\varpi}\sin\varphi.5(\lambda-\beta) = g\rho^2.\sin\varphi.\overline{\lambda-\beta}$

#

β l'équation $\beta = \frac{g}{h}\frac{(\lambda-\beta)5}{\varpi}$ ou $\beta = \frac{g5}{h\varpi}(\lambda-\beta)$

ou $\beta = \frac{\frac{g5}{h\varpi}.\lambda}{1+\frac{g5}{h\varpi}} = \frac{5.\lambda.g}{gs+h\varpi}$ #

et comme 5 est une grandeur finie relative ona $\beta = \frac{5g}{h\varpi}$

ona $\beta = \frac{\rho^2.\lambda}{2}$. la surface hémisphérique ou le rapport de 5 à

la surface hémisphérique est $\frac{1}{2}\rho^2$ double de celui de sorte que le rapport de température réduite β et λ
est différent du rapport de l'axe 5 à l'axe hémisphérique.

Si l'axe 5 au lieu d'être placé au zenith était incliné sur la surface
par à la hauteur sur l'horizon mesurée par l'arc φ du vertical on aura
l'équation. $h\beta\delta$ produit de chaleur produite par δ pendant l'unité
tems pour la communication avec l'enceinte est égale à
$\frac{g}{\varpi}(\lambda-\beta)\sin\varphi.5.\delta$ ou $h\beta = g\sin\varphi.5(\lambda-\beta) = g\rho^2.\sin\varphi.\overline{\lambda-\beta}$



$k\omega \sin\alpha \cdot d\alpha \cdot \sin\alpha$

$k\omega \int d\alpha \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\omega\lambda\right)$

$\frac{k\omega^2}{2} = h$

$h\left(k\lambda - \frac{k\omega^2}{4}\right) = 290'2$

$\frac{2h}{\omega^2} \sin\varphi \cdot \sin\varphi \cdot \delta b$

$\frac{4 \cdot 360 \cdot 360}{355} \cdot 113$

$\frac{30}{36}$
216
108
108

$\frac{5184}{113}$

15552
5184
5184
$\overline{5857\,92}$ | $\frac{355}{1650}$

$\frac{355}{2307}$
2130
1773
1773
$\overline{1770}$

4640
580
1650
7
11550

464000
580

1155 | $\frac{58}{1}$ 23100
58
$\overline{1848}$
1155
$\overline{3155}$
58
$\overline{9240}$
5774
$\overline{6692}$

$1650 \quad 7000$

11550000

1155 | $\frac{58}{70}$ multiplo
58 580
$\overline{6729}$ 11600000

4

$1429.$

Il l'atmosphere de la terre sur l'horizon est la φ. la densité de cette atmosphere mesurée en surface de la surface est ρ. l'étendue de δ en surface est δ la température même de la terre est λ celle de δ est β. la quantité de chaleur que δ perd pendant l'unité de temps si n'ayant la température de l'atmosphère ce dernier que δ était imprimé pour une unité de surface de la même nature que la terre à la température zero pendant la même unité de temps est exprimée par $g \varphi^2 \delta . \lambda - \beta$ et la quantité de chaleur que perd δ pendant l'unité de temps est $h \delta \beta$ et la quantité de chaleur que reçoit δ pendant l'unité de temps est exprimée par $g \varphi^2 \delta . \lambda - \beta$ et la quantité de chaleur que reçoit δ pendant la même unité de temps exprimée à la température zero est $g \varphi^2 \delta . \lambda - \beta$ et la quantité de chaleur que reçoit δ pendant l'unité de temps est $h \delta

43 et comme ρ est une très petite fraction on a $\beta = \frac{\lambda}{\varpi} \frac{g}{h} \rho^2 \lambda$ 2 Sf.
ainsi l'athe étant le pôle [illegible] au zenith on a $\beta = \lambda \cdot \frac{g}{h} \rho$
et l'autre décrivant [illegible] un vertical on a
$\beta = \frac{2}{\varpi} \frac{g}{h} \rho^2 2$
en sorte qu'on considère que durant la nuit le dique δ conserve sa chaleur de sorte que l'on peut établir ainsi le calcul.
la quantité de chaleur acquise pendant le jour par [illegible] de cette
vertical $= 2g \rho^2 (1-\beta) \delta$ pendant tout une nuit pour ϖ' et
la quantité de chaleur perdue pendant le même tems une nuit pour 2δ est
$\frac{1}{2} \beta 2\varpi \delta$ on doit donc avoir $2g\rho^2(1-\beta) = 2h\varpi\beta$
ou $\beta (2h\varpi + 2g\rho^2) = 2g\rho^2 \lambda$ ou $\beta = \frac{g \rho^2 \cdot \lambda}{h\varpi}$
où l'on connoit exactement la température β qui s'établit dans un
dique placé au centre de l'hémisphère si l'athe dont la température est
λ décrivoit un vertical d'un mouvement uniforme. h exprime la
conductibilité relative du dique δ à l'espace extérieur et g la conductibilité relative du dique δ à l'athe dont le diamètre a pour grandeur ρ
le rayon du vertical étant pris pour l'unité.

52 Comme la température de l'espace extérieur que nous prenons pour zero est déterminée par celle qui a chauffé extrêmement éloigné et que cet espace tout d'une certaine analogie à celle de l'athe on est tenté à faire $g = h$ d'où en désignant on a $\beta = \frac{\lambda \rho^2}{\varpi}$. soit $\rho = \frac{\varpi}{2 \cdot 360}$
on aura $\beta = \frac{\lambda \cdot \varpi^2}{\varpi \cdot 4 \cdot 360^2} 2$. en prenant la température β à 70
degrés centésimaux on a donc $\lambda = \frac{4 \cdot 360^2 \cdot 70}{\varpi^2}$
ou $\lambda = \frac{4 \cdot 36 \cdot 36^2 \cdot 7}{\varpi^2} \cdot 1000 = \frac{4 \cdot 36 \cdot 36^2 \cdot 7 \cdot 113}{355} 1000$
$= 11330000$ on trouvera ainsi que la température de l'athe est plus
de cent quinze millions de degrés centésimaux si l'on suppose la chaleur du
environ 36 millions fait la chaleur du fer rougi à 500

53

Soit r le demi-diamètre d'un globe sphérique très petit placé au centre d'une enceinte sphérique du rayon 1 et soit comme dans le calcul précédent ρ le demi diamètre d'un très petit disque S placé sur cette enceinte sphérique
δ est la température du disque S et celle du reste de l'enceinte
sphérique. Soit la température constante que doit prendre le disque. δ il faut
déterminer cette valeur de β. la surface sphérique du globe r est $2\varpi r \cdot r \cdot 4$
ou $4\varpi r^2$ si l'on nomme h la conductibilité relative de δ et de l'enceinte on
aura $4\varpi h \beta r^2$ pour l'expression de la quantité de chaleur que doit de la surface
de δ pendant l'unité de tems et qui se communique à l'enceinte sphérique en
égard à la très petite partie de l'une hémisphérique occupée par S.
Soit g la conductibilité relative de S et de δ on aura $\pi \rho^2 g (\delta - \beta)$ pour l'expression
de la quantité de chaleur que δ envoyant à toute l'enceinte la température de δ
étant à celle de l'enceinte étant β.

ce dans ce cas chaque partie de l'enceinte égale à S recevant de b une même quantité de chaleur donc appelant $\frac{1}{n}$ le rapport de S à l'aire totale sphérique entière on aura $\frac{4\omega g}{n}\overline{\lambda-\beta}\rho^2$ pour l'expression de la quantité de chaleur que b à la température λ communiquerait à S à la température β et pareillement pour l'expression de la quantité de chaleur que S à la température λ communiquerait à b à la température β. on doit donc avoir l'équation $4\omega h\beta\rho^2 = \frac{4\omega g}{n}\overline{\lambda-\beta}\rho^2$. on trouve que le rayon ρ de la surface sphérique disparaît naturellement de la température relative à laquelle ne dépend point de rayon ρ de la molécule. il reste l'équation $h\beta = \frac{g}{n}\overline{\lambda-\beta}$. le rayon de l'enceinte S étant ρ. la surface du disque est $\omega\rho^2$ la surface hypothétique entière est $2\omega\cdot\frac{1}{2}\cdot 4$ ou 4ω donc $n = \frac{4\omega}{\omega\rho^2} = \frac{4}{\rho^2}$ on aura

$$h\beta = \frac{\rho^2 g\overline{\lambda-\beta}}{4}$$

ρ^2 étant une quantité très petite on a $\beta = \frac{g}{h}\lambda\frac{\rho^2}{4}$

Supposons maintenant que le corps très petit exposé à la chaleur soit un disque et soit b la surface totale convexe de ce disque. Concevons que l'autre S adhère à la surface plane du disque et cherchons quelle température β doit prendre b pour que le disque b la quantité de chaleur envoyée par b à l'enceinte pendant le temps θ est $h b\beta\theta$ si b avait la température λ et l'enceinte fut $g\overline{\lambda-\beta}\cdot b\cdot\theta$ pour l'expression de la quantité de chaleur que b communiquerait à l'enceinte totale entière pour la même température. Mais la surface S ne voit pas toute la surface b. Une partie de la surface b ne voit que l'enceinte elle-même et une autre partie de la surface b ne voit que une petite portion de l'enceinte. Il faut déterminer [illegible] pendant le temps θ la température β qu'doit prendre le disque [illegible]

[illegible]

1° résumons les conséquences qui découlent des articles précédents en admettant les températures que doivent déterminer les Rayons polaires.

Si deux surfaces S et b entièrement petites c'est à dire dont les dimensions sont infiniment petites par rapport à la distance qui les sépare sont placées parallèlement de la chaleur leur S étant à la température λ et l'autre b à la température β. ρ étant l'angle que fait y avec S et φ l'angle que fait avec b y étant la distance relative de S à b c'est à dire la quantité de chaleur que pendant le temps 1 prendrait la surface 1 de même nature que S si elle avait la température λ et elle était exposée à une enceinte solide fermée de toutes parts qui aurait la température constante 0 serait de la même nature que la surface b.

nous dirons que S prend dans son echange avec b pendant le tems θ une quantité de chaleur exactement égale à

(a) $\frac{g}{\varpi} \sin p . \sin \varphi . 5 . b . \frac{2-\beta}{y^2}$

nous parla que si avant let température β, et b let température λ, celuit la surface S qui acquerait la chaleur mesurée par la quantité précédente.

2° cherchons au moyen de cette formule combien un élément ω de la surface S d'un rayon quelconque R qui tourne de tout point sur le plan de cet élément ω enlevera pendant que cette enceinte est à la température 0 et que la surface relative à l'élément ω est mesurée par g.

ayant son centre en ω

la surface considérée sera mesurée par φ et le parallèle dont tous les points sont sur la surface sphérique considérée a pour rayon $\sin \varphi$ et le parallèle dont la hauteur est $\varphi + d\varphi$. l'aire de cette zone est $R^2 2\pi \omega \sin \varphi . d\varphi$

la quantité de chaleur envoyée par ω à cette zone sera d'après la formule précédente $\frac{g}{\varpi} . 1 . \sin \varphi . R^2 2\pi \omega \sin \varphi . d\varphi . \omega \frac{1}{R^2}$ il ne reste qu'à intégrer

depuis $\varphi = 0$ jusqu'à $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ on aura $g\omega 2 \sin \varphi . \omega \varphi . d\varphi$ ou $g\omega \sin 2\varphi . d\varphi$

intégrant, on a $g\omega \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\varphi \right)$ et faisant $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ on aura $g\omega$ ce qui

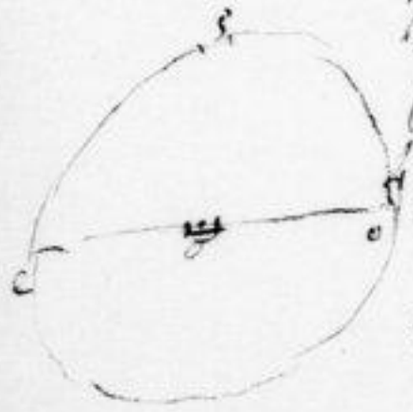
S

doit avoir lieu en effet puisque la surface S perdant une quantité de chaleur égale à g l'élément ω perd $g\omega$

3° si l'axe S était vertical et qu'il y eut au centre de l'enceinte un disque b qui ne pouvant acquérir de la chaleur que par la surface b et ôtant le reste de l'enceinte avant la température zero désignant la température de S par λ celle que doit prendre b par β. la conductibilité relative de b à l'enceinte par h et la conductibilité relative de b à S par g on trouvera β au moyen de cette équation

b

$h\beta b = \frac{2}{\varpi} 5 b \left(\frac{2-\beta}{y^2} \right)$ et comme l'on suppose dans cette hypothèse que la surface S est entièrement nulle c'est à dire n'a aucune portion entre eux pulle de la surface sphérique dont y est le rayon on a $h\beta = \frac{g}{\varpi} 5 \lambda$ ou $\beta = \frac{g}{h} \frac{5}{\varpi} \frac{\lambda}{y^2}$ si l'on désigne par ρ le rayon de l'axe S supposé en nombre de longueur on a $\beta = \frac{g}{h} \rho^2 \frac{\lambda}{y^2}$



4° si l'axe S décrit le vertical c so d'un mouvement uniforme le tems de la révolution entière étant exprimé par θ. on aura en désignant par t le tems écoulé depuis le levé au point c une équation

$\frac{g}{\varpi} \sin \left(2\pi \frac{t}{\theta} \right) 5 . b \left(\frac{2-\beta}{y^2} \right) dt$ pour la mesure de la quantité de chaleur que pendant l'instant dt le disque b acquiert dans son échange avec l'axe et embrassant depuis $t=0$ jusqu'à $t = \frac{1}{2}\theta$ le tems entier ou l'on suppose le disque b acquiert pendant la durée d'une révolution. ce disque peut donc également être supposé recevoir la quantité $h b \beta$ dans son échange avec l'enceinte car il faut seulement donner au disque une largeur occupée par l'axe S entre deux points de la surface sphérique.

46

ou adonc en supposant pour simplifier le calcul $\gamma = 1$ 38.

$h\,\delta\beta\theta = \frac{g}{5}(\alpha-\beta)\,s.\delta \int_{\frac{3}{4}\theta}^{\theta} \sin 2\varpi\frac{t}{\theta}$. l'integrale est

$\frac{\theta}{2\varpi} - \frac{\theta}{2\varpi}\cos 2\varpi\frac{t}{\theta}$ ou l'on doit faire $t = \frac{1}{2}\theta$ on a aussi $s = \varpi\rho^2$ ainsi

l'equation devient $h\beta = g\overline{\alpha-\beta}\rho^2\frac{1}{\varpi}$ ou $\beta = \frac{g\alpha\rho^2}{h\varpi}$ et si l'atmosphere etoit

tout au zenith on auroit $\beta = \frac{g}{h}\alpha\rho^2$

5° si un globe spherique tres petit de rayon r occupe le centre d'une espece spherique

que termine une enceinte entretenue à la temperature 0 et s'imagine

S de rayon ρ a la temperature constante α on trouve la temperature

β que doit prendre le globe en employant de l'equation suivante

$4\varpi r^2 h\beta = 4\varpi.r^2\frac{(\alpha-\beta)}{4\varpi}\frac{s}{4\varpi}.g$ ou $h\beta = \frac{\alpha s}{4\varpi}g$ ou $\beta = \frac{g}{h}\frac{\rho^2\alpha}{4}$

le paragraphe 4° de cet article fait connoitre le rapport de β à α lorsque

l'atmosphere d'air vertical c'est cette formule $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{g}{h\varpi}\rho^2$ qu'doit etre

employée pour connoitre le rapport de la temperature de l'atmosphere a

celle que l'on observeroit à l'equateur dans un lieu profond si l'atmosphere

continuellement au zenith c'est celle que l'on trouve dans l'article 52. c'est dans

cet article qu'il faut prendre toujours exacte de la temperature de l'atmosphere

55 6° Supposons que le digue b etant permeable à la chaleur

par un plan vertical seulement, et exposé à la chaleur dependante de

de l'autre prend une temperature β egale à $\frac{g}{h}\alpha\rho^2$. on voit par cette

equation la dependance precedente du coefficient h que l'elevation β de la temperature

est d'autant plus grande que h est moindre et que la conductibilité relative

de l'atmosphere au digue est plus grande. c'est cette conductibilité respective

à l'atmosphere qui est propre par M. de Saussure. on peut employer

l'hygrometre de maniere à diminuer h en augmentant g.

l'effet de cet instrument est d'augmenter la difficulté de la communication

de la chaleur du digue à l'atmosphere exterieure et de ne point diminuer

ou de diminuer le moins possible la communication de la chaleur dans

au digue. ainsi des thermometres construits dans l'article 52. sont dans

leur rayons de telle proportion à ce que soit des temperatures hors differentes

selon que le rapport $\frac{g}{h}$ sera plus ou moins grand.

c'est à une cause semblable qu'il faut rapporter l'inegale temperature

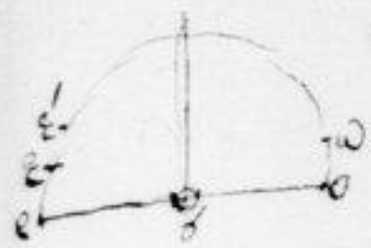
que des thermometres placés dans un rayon du globe lorsque l'un

est nitré et que l'autre est exposé dans l'air libre. cet thermo-

-metre lui-même proprement parler. devient un anemometre à cause de

sa chaleur.

nous reprendrons maintenant ainsi que nous l'avons précédemment fait l'examen d'une
seule loi directe avec l'influence des rayons lumineux et il s'agit de déterminer le maximum
et le minimum de température que la surface d'un globe donné en proie à
l'action perpendiculaire d'un foyer extérieur.



Soit un globe dont le centre soit placé à l'équateur, on le fera
tourner dans son premier donné le centre d'où l'on voit de dessous,
et l'on cherchera quelle valeur moyenne de cette chaleur acquise pendant une
seule révolution diurne sur la surface de l'astre pendant que
chaque point de celle-ci passera successivement devant le foyer,
chargé de déclinaison et que cette valeur de cette manière pendant le cours d'une
année. par ce moyen on fera abstraction des variations diurnes et
l'on connaîtra la loi qui règle pendant le cours d'une année la chaleur
de chaque jour. on déterminera ensuite le temps de l'année qui doit nous
répondre au maximum et au minimum ce qui est l'objet spécial de nos
recherches.

L'astre ayant la déclinaison australe parcourra l'arc eE se levera en E, décrira
un parallèle perpendiculaire au plan de l'équateur passera au
dessus de l'horizon, disparaîtra pendant une demie révolution diurne, et
ensuite se lèvera en E' la déclinaison étant augmentée de EE'
qui détermine la révolution diurne qui l'accomplit de E en ω, et dont la
durée est $\frac{1}{2}\theta$. après quoi l'astre a décrit un arc de parallèle que nous
désignerons par q. or dans le temps t l'astre décrit le parallèle entier dont la
longueur est $2\pi \cos\varepsilon$ on aura donc $\frac{\theta}{2\pi \cos\varepsilon} = \frac{t}{q}$ ou $q = 2\pi \cos\varepsilon \cdot \frac{t}{\theta}$

si du point m sur l'astre est pris un autre point quelconque une perpendiculaire sur le
plan de l'horizon la longueur de cette perpendiculaire sera $\cos\varepsilon \sin\left(\frac{2\pi \cdot t}{\theta}\right)$
on allet l'angle a compté depuis le temps où l'astre entre dans son premier
qui porte l'astre est aussi on prend $a = \frac{2\pi t}{\theta}$ on aura $1 : \sin a$
:: $\cos\varepsilon$: à la hauteur de la perpendiculaire de sorte que la hauteur
est $\cos\varepsilon \sin\left(\frac{2\pi t}{\theta}\right)$ ou si l'on appelle φ l'arc qui mesure la hauteur
de l'astre sur l'horizon la perpendiculaire dont il s'agit est
le sinus de φ on aura donc $\sin\varphi = \cos\varepsilon \cdot \sin\frac{2\pi t}{\theta}$, si l'on représente par
g le coefficient qui mesure la conductibilité relative de l'astre au centre
de l'horizon on trouvera facilement l'expression de la quantité de chaleur
que le centre dont l'arc est b acquiert par la présence de l'astre pendant
l'instant dt la déclinaison étant ε et le temps t écoulé depuis le lever
de l'astre étant t ce qui est la même chose la hauteur sur l'horizon
étant φ. pour déterminer cette quantité de chaleur nous nous
servirons de la formule (a) de la page 45 et nous trouverons.

$\frac{g}{\omega y^2} \cdot \sin\varphi \cdot s \cdot \delta \cdot (2-\beta)\, dt\, \omega a s = \alpha \rho^2$ et $\sin\varphi = \cos\varepsilon \cdot \sin\left(\frac{2\pi t}{\theta}\right)$

ainsi la quantité de chaleur acquise par le centre de l'astre pendant
un jour est en appelant λ la température de l'astre et β celle de b

$\frac{g \cdot \rho^2 (2-\beta) b \omega \varepsilon}{y^2} \int_0^{\frac{1}{2}\theta} dt \sin\left(\frac{2\pi t}{\theta}\right)$ on désigne par y la distance de l'astre.

une femme à bord a l'Equateur de variation de cette aiguille, est tournant avec Dieu que d a mesure, valeur numérique moyenne plus grande que 1 finalement $y=1$ et on attend 1 minute pour la quantité cherchée $g\rho^2 d\cdot\omega\theta \int_0^{\frac{1}{2}\theta} \sin\frac{2\pi t}{\theta}$

l'intégrale est $\frac{\theta}{2\pi} \frac{-\theta\omega}{2\pi}\left(\frac{2\pi t}{\theta}\right)$ et faisant $t=\frac{1}{2}\theta$ on trouve

$b\cdot g\rho^2 d\cdot\theta\omega\theta$ c'est la quantité que la surface β placée au centre de

l'horizon acquiert pendant une demi révolution durant $\frac{1}{2}\theta$ comptée en minutes la position de ρ et la longueur du rayon de la terre étant une unité simplifie dans le rayon est 1 a est la température de la terre exprimée en unités empruntant pour zéro la température de la glace fondante et pour unité celle de l'ébullition de l'eau. g est la quantité de chaleur que la surface 1 à la température 1 perd pendant le tems 1 une minute lorsque la différence de température est 0 la surface 1 étant de la nature de b et concentrée de la nature de β l'unité de surface et la quantité d'une mettre de côté. g est exprimée en nombre de kilogrammes de glace.

---

e a étant un arc de l'équateur et γ un arc de l'écliptique α l'obliquité de l'écliptique e l'arc de déclinaison on a $1:\sin\gamma :: \sin\alpha : \sin e$ ou $\sin e = \sin\alpha\cdot\sin\gamma$. soit T l'année révolution annuelle et t le tems écoulé depuis le commencement de l'année on a $T:2\pi :: t:\gamma$ ou $\gamma = \frac{2\pi t}{T}$ on a donc



$\sin e = \sin\alpha\cdot\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$

on a trouvé que pendant le tems θ formé d'une demi révolution diurne et d'une nuit le centre b de l'horizon reçoit une chaleur exprimée par $\frac{g2\rho^2 b\cdot\theta\cdot\omega\theta}{\pi}$ on a remarqué aussi il y a de cette chaleur a cause pendant l'instant dt en observant: $\theta : \frac{g2\rho^2 b\, dt\,\omega\theta}{\pi} :: dt$ et l'on a ainsi $\frac{g2\rho^2 b\,\omega\theta\cdot dt}{\pi}$. il faut maintenant mettre pour cela la valeur $g\sin\alpha$ tirée de l'équation $\sin e = \sin\alpha\cdot\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$ antérieure

ainsi que pendant chaque instant dt l'athe communique au centre de l'horizon une quantité de chaleur exprimée par

$$\frac{g2\rho^2}{\pi} b\, dt \sqrt{1-\sin^2\alpha\cdot\sin^2\frac{2\pi t}{T}}$$ le coefficient de dt est la

fonction de t qui pendant le cours d'une année entière T règle la quantité de chaleur communiquée par l'athe au centre de l'horizon

on peut faire $b=1$. la fonction est périodique.

$$h\beta\beta' \qquad h\beta\beta + h'\beta'\beta' - g\rho(\alpha - \beta)$$

$$g\beta\alpha - g\rho \qquad * - g\beta(\alpha ft - \beta) =$$

$$\frac{(h\beta + h'\beta')\beta * - g\beta(\alpha ft - \beta)}{\rho c \cdot v} = \frac{\partial \beta}{\partial t}$$



$$\frac{g}{\omega} \quad s \cdot \beta \cdot \sin\varphi \cdot (\alpha - \beta)$$

$$g\rho^2 \sin\left(\frac{2\omega' t}{\theta}\right)(\alpha - \beta)\beta - (h\beta\beta + h'\beta'\beta) = \frac{s}{s} \rho \cdot c \cdot v \frac{\partial \beta}{\partial t} \qquad m = \frac{g\rho^2 \beta}{s \cdot c \cdot v}$$

$$n = \frac{h\beta + h'\beta'}{s c \cdot v}$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial t} = m \sin\left(\frac{2\omega' t}{\theta}\right) - n\beta$$

$$\frac{2\omega'}{\theta}$$

$$g\rho^2 \sin\left(\frac{2\omega' t}{\theta}\right)$$

$$ft(\alpha - \beta)\beta - (h\beta\beta + h'\beta'\beta^4) = s \cdot c \cdot v \cdot \frac{\partial \beta}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial t} = ft - \beta H \qquad \frac{\partial \beta}{\partial t} + H\beta = ft$$

$$\beta = e^{-Ht}\left(a + \int \partial t \cdot e^{Ht} ft\right)$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial t} = -H\beta + e^{-Ht} e^{Ht} ft \qquad \frac{\partial \beta}{\partial t} = -H\beta + ft$$

$$t = 0 \quad \beta = a$$

$$\beta = a e^{-Ht} + e^{-Ht} \int \partial t\, e^{Ht} ft$$

$$\beta = e^{-Ht} \int_0^t \partial t\, e^{Ht} ft \qquad \left(e^{\alpha t} \cos bt \right.$$

$$ft = \{a + b \cos 2\cdot \tfrac{2\pi}{T} t \} \qquad \int e^{\alpha t} \cdot \cos t = \frac{e^{\alpha t}(a\cos t + \sin t)}{a^2 + 1} + \text{const.}$$

$$\int$$

$$\frac{\sin t + a\omega t}{a^2 + 1} \qquad 0 = \frac{a}{a^2+1} + c \qquad = e^{\alpha t}\left(\frac{\sin t + a\omega t}{a^2+1}\right) - a$$

$$\beta = \frac{A}{H} + \frac{\sin t}{H^2 + 1} \qquad \frac{\sin t + a\omega t}{a^2+1} - a e^{-\alpha t}$$

$$\cos t + H \sin t = 0$$

$$\sin t = -H \quad t = \text{arc tan} -H$$

$$\omega t$$

$$\int \frac{1}{H} e^{Ht} - \frac{1}{H}$$

$$\frac{1}{H} - \frac{e^{-Ht}}{H}$$

49 ——— Tout revient donc à trouver une fraction d'arc petite en sorte qu'on puisse développer le radical et omettre les puissances $\sin^4\theta$ $\sin^6\theta$ $\sin^8\theta$

ce radical devient $1 - \frac{1}{2}\sin^2\theta \cdot \sin^2\left(\frac{\pi t}{T}\right) - \frac{1}{8}\sin^4\theta \cdot \sin^4\left(\frac{\pi t}{T}\right)$

$\sin^2 a = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2a)$ donc $\sin^2\left(\frac{\pi t}{T}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$

1586
1985
1586
7920
1260
0,02502 = $\sin^2\theta$
0,00156 = $\frac{1}{16}\sin^4\theta$

le développement du radical est donc

$$1 - \frac{1}{2}\sin^2\theta\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\right) - \frac{1}{8}\sin^4\theta\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{2\pi t}{T}\right\}^2$$

ou on observe (page 34 en marge) $\sin^2\theta = 0,16868$ et l'on aura

$\frac{1}{32}\sin^4\theta = 0,00078$ et par conséquent en omettant $\sin^4\theta$ on aura beaucoup moins que la millième partie du résultat ainsi obtenu

en négligeant le coefficient $\frac{g\alpha\rho^2}{\varpi}$ par H et faisant $\beta = 1$

$$H\left(1 - \frac{1}{4}\sin^2\theta + \frac{1}{4}\sin^2\theta\cdot\cos\frac{2\pi t}{T}\right)$$ c'est la quantité de la fonction ft qui pendant le cours d'une année règle la quantité de chaleur que le centre de l'horizon reçoit à chaque instant. Si l'on avait $\sin\theta = 0$ cette quantité qu'il y aurait aurait de constante on trouverait pour la quantité cherchée H ou $\frac{g\alpha\rho^2}{\varpi}$ ce qui s'accorde avec le résultat du paragraphe 40

Développant $\frac{1}{2}\sin^2\theta$. la fonction ft est à proprement parler ce que le centre de l'horizon reçoit de chaleur pendant l'unité de temps si la hauteur de l'astre demeurait pendant cette unité de temps la même qu'elle était effectivement pendant l'élément considéré.

Il faut maintenant examiner quelles sont les circonstances variables que doit prendre le centre de l'horizon étant ainsi exposé à cette action variable mesurée par la fonction périodique ft.

ouvert facilement que si l'action dont il s'agit est renouvelée pendant
un temps infini elle détermine dans le prisme solide deux états périodiques et que la durée de la période dont elle s'environne
prive la vérité de cette proposition on peut aussi la démontrer par le
calcul mais ce n'est point l'objet de notre recherche

Nous désignons par v la température variable que le point dont la position est déterminée par x a acquis depuis l'époque où le corps a été échauffé
uniformément jusqu'à l'instant t qui comprend un nombre indéterminé de périodes égales
à T. on retranche de t ce nombre exact de périodes.
v est une fonction de x et de t. Cette fonction est périodique
c'est à dire qu'en écrivant $t+T$ la fonction ne change point
quand même on retient l'équation générale $\frac{dv}{dt} = k \frac{d^2v}{dx^2}$
à laquelle la fonction v doit satisfaire.

pendant l'instant dt la surface b reçoit comme nous l'avons dit
une quantité de chaleur égale à $b.ft.dt$ et la température variable
est désignée par v_0 la quantité de chaleur perdue pendant le même
temps dt au moyen de l'enceinte est $h v_0 dt$.
On désigne par h la conductibilité relative de b avec l'enceinte
(comme les désignations précédentes) ainsi la chaleur que perd pendant
l'instant dt la surface b est $h v_0 b dt - b ft. dt.$ d'après la principe
général de la théorie cette quantité doit être égale à celle qui pendant
l'instant dt traverse le petit solide de bas en haut à la surface b
et l'expression de cette dernière quantité est $k b. \left(\frac{dv}{dx}\right)_0 dt$ on aura

$$h v_0 - ft = k \left(\frac{dv}{dx}\right)_0$$

équation qui est déjà rapportée page 16 il faut
seulement remarquer qu'ici nous supposons l'enceinte à la température
zéro et que nous considérons que la température v de la page est naturellement plus élevée que celle de b. on aura donc les deux équations

$$\frac{dv}{dt} = \frac{k}{c.D} \frac{d^2v}{dx^2} \quad \text{et} \quad k \left(\frac{dv}{dx}\right)_0 = h v_0 - H \left(1 - \frac{1}{4}\sin^2 \theta + \frac{1}{4} \sin^2 \theta \cos^2 \frac{pdt}{T}\right)$$

et l'on a $H = \frac{g 2\rho^2}{\tau}$ qui est une quantité finie rapportée à cet ennemi
extrêmement grand et ρ un nombre entier ou cent petit.

---

on trouve maintenant l'analyse des pages 16 et 17 et l'on écrira

$$v = e^{-mx} \left\{ a \cos(2m^2 t - mx) + b \sin(2m^2 t - mx) \right\}$$ pour que la
fonction dont être périodique, on aura $2m^2 T = 2\pi$
on trouve de la quantité q la quantité sur la page ci ou sin.

$$\frac{dv}{dx} = -m e^{-mx} (a \cos q + b \sin q) + e^{-mx} (+ma \sin q - mb \cos q)$$
$$= e^{-mx} (ma \sin q - mb \sin q - ma + mb \cos q)$$

$a + b\cos 2\left(2\pi \frac{t}{\theta}\right)$

α ft | $g\sqrt{\alpha - 3}$ ft

$a + b\cos 2\pi t$

$\frac{g}{\pi} 5 \cdot 6 \cdot (\alpha - 3)$

gr $\frac{g}{\theta} \rho^2 2 \left(1 - \frac{1}{4} h\omega_0^2 + \frac{1}{4} h\omega_0^2 \cdot \cos\left(2 \cdot \frac{2\pi t}{\theta}\right)\right)$

51

$$\frac{d^2v}{dx^2} = e^{-mx'}\left\{ -m\overline{ma-mb}\cos q + m\overline{ma+mb}\sin q \right\}$$
$$= e^{-mx'}\left\{ m\overline{ma-mb}\sin q + m\overline{ma+mb}\cos q \right\}$$

$$= e^{-mx'}\left(2m^2 a\cos q + 2m^2 b\sin q \right)$$

$$\text{et } \frac{dv}{dt} = e^{-mx'}\left(-2m^2 a\cos q + 2m^2 b\sin q \right.$$

ainsi l'equation sera satisfaite si l'on a $\frac{dv}{dt} = \frac{d^2v}{dx^2}$

Dans celle qui est impossible savoir $\frac{dv}{dt} = \frac{k}{c\cdot D}\frac{d^2v}{dx^2}$ on aura

$\frac{kt}{c\cdot D} = t'$ et l'on aura $\frac{dv}{dt'} = \frac{d^2v}{dx^2}$ on prendra donc

$$v = e^{-mx'}\left\{ a\cos(2m^2 t' - mx) + b\sin(2m^2 t' - mx) \right\}$$

et mettant pour t' sa valeur $\frac{kt}{c\cdot D}$ on aura

$$v = e^{-mx}\left\{ a\cos\left(2m^2\frac{kt}{c\cdot D} - mx\right) + b\sin\left(2m^2\frac{kt}{c\cdot D} - mx\right) \right\}$$

actuellement puisque la solution doit être périodique on aura $2m^2\frac{kT}{c\cdot D} = 2i\pi$ en prenant pour i un nombre quelconque.

ou aussi $2m^2 t = 2i\pi\frac{c\cdot D}{k}\frac{t}{T}$ et $m = \sqrt{\frac{i\pi\cdot c\cdot D}{kT}}$

on faudra $v = e^{-x\sqrt{\frac{i\pi\cdot c\cdot D}{kT}}}\left\{ a\cos 2i\pi\frac{c\cdot D}{kT}\cdot t - x\sqrt{\frac{i\pi\cdot c\cdot D}{kT}} \right\}$
$$+ b\sin\left\{ 2i\pi\frac{c\cdot D}{kT}\cdot t - x\sqrt{\frac{i\pi\cdot c\cdot D}{kT}} \right\}$$

on pourra donner à i différentes valeurs entières et la somme des valeurs correspondra encore à l'équation

---

Il ne reste plus qu'à satisfaire à l'équation $k\left(\frac{dv}{dx}\right)_0 = hv_0 - ft$

on a $\left(\frac{dv}{dx}\right)_0 = m\overline{a-b}\left(\overline{a-b}\sin(2m^2 t) - \overline{a+b}\cos 2m^2 t \right\}$

et $(v)_0 = e^{\quad}\left(a\cos 2m^2 t + b\sin 2m^2 t \right)$

et $ft = H\left(1 - \frac{1}{4}\sin^2\theta + \frac{1}{4}\sin^2\theta\cdot\cos\left(2\cdot\frac{2\pi t}{T}\right) \right\}$

il faut d'abord que l'on ait $K m \overline{a-b} = hb$ Si a et b subsistent cette condition les lieux disparaîtront tous dans l'équation

$K\left(\frac{dv}{dx}\right)_0 = hv_0 - ft$ il ne reste que des termes.

on aura d'abord $i=0$ et l'on aura

$-K(a_0+b_0) = ha_0 - H\left(1-\frac{1}{4}\sin^2\theta\right)$ et comme on a aussi

$K m_0 \overline{a_0-b_0} = hb_0$ et $m_0=0$ il faut que l'on ait $b_0=0$ et par conséquent $-K a_0 = h a_0 - H\left(1-\frac{1}{4}\sin^2\theta\right)$ d'où

$b=0$ et $a_0 = \frac{H}{h+K}\left(1-\frac{1}{4}\sin^2\theta\right)$

Déplus on donnera à i une autre valeur telle que m^2 puisse devenir $\frac{2\pi.t}{T}$ il faudra donc que l'on ait $\frac{2\pi t}{T} = \frac{i\omega.Dt}{KT}$ ou $i = \frac{C.D}{K}$

si donc il arrivait que $\frac{2K}{C.D}$ fut un nombre entier i'' on satisferait facilement à la propriété et l'on aurait la solution cherchée. mais ce cas est purement hypothétique il est indispensable de supposer que la quantité $\frac{2K}{C.D}$ est ordinairement une fraction très petite qui diffère peu d'un nombre entier. on pourra donc négliger cette fraction en tant qu'elle diffère de l'unité et comme cas singulier des cas naturels.

---

pour connaître plus distinctement la marche du phénomène que nous avons à considérer, on supposera qu'un vase Ω rempli de liquide est exposé à l'action variable d'un foyer extérieur. la température variable du vase et B est une fonction périodique de t on désigne par B la température variable du vase et B est une fonction de t qu'il s'agit de déterminer. nous supposons que la température du foyer est une quantité constante extrêmement grande. nous représenterons la température variable du foyer par $A\left(A + B\cos\left(2.\frac{2\pi t}{\theta}\right)\right)$. la chaleur de l'espace entre et θ, est la longueur du rayon de la sphère Ω exprimée à la surface Ω le rayon est 1. g est la conductibilité relative de l'air à la surface Ω dans la température de l'enceinte est $2\pi\theta$ h est la conductibilité relative de la surface Ω et de l'enceinte toute la chaleur spécifique de vase qui n'est pas en proie aux rayons de l'air est imperméable à la chaleur la profondeur du vase prismatique est $\frac{1}{2}r$ la ligne de centre ramène pour un point spécifique C et pour densité D

calculons l'onde ayant une température actuelle Ω perd pendant l'instant dt une quantité de chaleur égale à $hB\,dt.b$ et l'acquiert sur l'effet du foyer $g\left(A+B\cos\left(2.\frac{2\pi t}{\theta}\right)-B\right)bdt$ ou omettant B

$gA\left(A+B\cos\left(2.\frac{2\pi t}{\theta}\right)\right)bdt$

l'accroissement de température dB pendant l'instant dt se trouve en divisant l'augmentation de la quantité de chaleur par le produit du volume r.b du vase et de la capacité c.D que le travail avait rapportée au volume un donc l'équation

$$\frac{dB}{dt} = \frac{1}{r.b.c.D}\left\{ g\,dA\,b + g\,dB\cos 2\frac{\pi t}{\theta} - hBb \right\}$$

ou $\frac{dB}{dt} = \frac{g}{r.c.D}\left\{ A + B\cdot\cos\left(2\cdot\frac{2\pi t}{\theta}\right)\right\} - \frac{hB}{r.c.D}$ (1)

comme la quantité de chaleur communiquée par le foyer à la surface b est $g\,d\left(A + B\cos 2\cdot\frac{2\pi t}{\theta}\right)$ il faut faire une comparaison entre cette quantité de chaleur et celle que l'on a trouvée page 49 que l'on a trouvé $g\,dA = \frac{g\,d\rho^2}{\omega}\left(1 - \frac{1}{4}\sin^2\theta\right)$ ou $A = \frac{\rho^2}{\omega}\left(1 - \frac{1}{4}\sin^2\theta\right)$

et $g\,dB = \frac{g\,d\rho^2}{\omega}\left(\frac{1}{4}\sin^2\theta\right)$ ou $B = \frac{\rho^2}{\omega}\left(\frac{1}{4}\sin^2\theta\right)$

---

en écrivant aussi l'équation (1)

$$\frac{dB}{dt} = \left(a + b\cos 2\cdot\frac{2\pi t}{b}\right) - kB$$ en faisant

$$a = \frac{g\,d\rho^2}{r\omega c.D}\left(1 - \frac{1}{4}\sin^2\theta\right)$$

$$b = \frac{g\,d\rho^2}{r\omega c.D}\left(\frac{1}{4}\sin^2\theta\right)$$

$$k = \frac{h}{r.c.D}$$

(2) on intègre cette équation 2 en écrivant

$$\frac{dB}{dt} + kB = \varphi t$$ d'où l'on tire

(3) $B = e^{-kt}\left(\text{const} + \int dt\, e^{kt}\varphi t\right)$ en effet en différentiant cette dernière équation on a $\frac{dB}{dt} = -kB + e^{-kt}\cdot e^{kt}\cdot\varphi t$

ou $\frac{dB}{dt} + kB = \varphi t$. Si le temps t est supposé nul et qu'alors la valeur de B soit nulle, on fera la constante nulle, et on prendra l'intégrale depuis zéro, en sorte que la valeur de B est ainsi exprimée

$$B = e^{-kt}\int_0^t dt\, e^{kt}\varphi t = e^{-kt}\int_0^t dt\, a e^{kt} + \int_0^t dt\, b e^{kt}\cos 2\frac{2\pi t}{t}$$

en effet le premier terme est $e^{-kt}\left(\text{const} + \frac{a}{k}e^{kt}\right)$

ou $e^{-kt}\left(\frac{a}{k}e^{kt} - \frac{a}{k}\right)$ ou $\frac{a}{k} - \frac{a}{k}e^{-kt}$

$e^{-kt} = \frac{1}{1000}$ $\quad kt\log e = \lg 1000$

$t = \frac{3}{k \log e}$ 1285

$k = \frac{h}{rcv}$ $\quad t = \frac{3 \cdot r \cdot c \cdot v}{h \log e}$ 3.10 1

$T = \frac{3 \cdot r \cdot 1285 \cdot 10.2}{365 \cdot 24 \cdot 60}$ $\quad \frac{3 \cdot r \cdot 1285}{365} \frac{1}{8} \frac{1}{3}$

$\frac{r \cdot 1285}{24 \cdot 365}$ $\quad \frac{1 \cdot r \cdot 257}{24 \cdot 73}$

$\frac{73}{292}$

$\frac{146}{1752}$ $\quad \frac{257}{7}$

1752

pour avoir dans le second terme $\int dt\, e^{Kt} \cos\left(2\cdot\frac{2\pi t}{\theta}\right)$ il faut faire

$2\cdot\frac{2\pi t}{\theta} = q$ d'où $t = \frac{q\cdot\theta}{4\pi}$, $dt = \frac{\theta\, dq}{4\pi}$

l'intégrale devient $\frac{\theta}{4\pi}\int dq\, e^{\frac{K\cdot\theta}{4\pi}\cdot q}\cos q$. or on a par une

formule des démons $\int dq\, e^{mq}\cos q = \text{const} + e^{mq}\left(\frac{m\cos q + h\sin q}{m^2+1}\right)$

et en déterminant la constante $\int_0^q dq\, e^{mq}\cos q = -\frac{m}{m^2+1} + e^{mq}\left(\frac{m\cos q + \sin q}{m^2+1}\right)$

mettant pour m et q leurs valeurs on a pour la valeur de la 2ème

terme de β

$$e^{-Kt}\frac{\theta}{4\pi}\left\{\frac{-\frac{K\theta}{4\pi}}{\left(\frac{K\theta}{4\pi}\right)^2+1} + e^{Kt}\left(\frac{\frac{K\theta}{4\pi}\cos\left(2\cdot\frac{2\pi t}{\theta}\right) + \sin\left(2\cdot\frac{2\pi t}{\theta}\right)}{1+\left(\frac{K\theta}{4\pi}\right)^2}\right)\right\}$$

ainsi la valeur de β qui résulte lorsque Kt est très grand

$$\beta = \frac{a}{K}\left(1-e^{-Kt}\right) + \frac{\theta b}{4\pi}\left\{\frac{\frac{K\theta}{4\pi}\cos\left(2\cdot\frac{2\pi t}{\theta}\right) + \sin\left(2\cdot\frac{2\pi t}{\theta}\right) - \frac{K}{4\pi}\theta\, e^{-Kt}}{1+\left(\frac{K\theta}{4\pi}\right)^2}\right\} \qquad (4)$$

---

cette équation (4) donne l'expression exacte des températures variables durant

il faut mettre pour a, b et K leurs valeurs rapportées dans l'article

précédent page 53. on voit par cette expression que la valeur de β tend de

plus en plus à devenir périodique et qu'il n'y a dans β que deux termes

quelle intégrale périodique savoir $-\frac{a}{K}e^{-Kt}\cdot\frac{-\frac{K\theta}{4\pi}}{1+\left(\frac{K}{4\pi}\right)^2}\cdot\frac{e^{-Kt}}{\frac{\theta}{4\pi}}$

n'faisant t infini on aura

$$\beta = \frac{a}{K} + \frac{\frac{b\theta}{4\pi}}{1+\left(\frac{K\theta}{4\pi}\right)^2}\left\{\frac{K\theta}{4\pi}\left(\cos\left(2\cdot\frac{2\pi t}{\theta}\right)\right) + \sin\left(2\cdot\frac{2\pi t}{\theta}\right)\right\}$$

(5) en mettant pour a, b, K leurs valeurs on a

$$\beta = \frac{g}{h}\frac{2\rho^2}{\varpi}\left(1-\frac{1}{4}\sin^2\theta\right) + \frac{\frac{g\,d\rho^2}{r\varpi c\cdot a}\cdot\frac{1}{4}\sin^2\theta}{1+\left(\frac{h\theta}{4\varpi r c\cdot D}\right)^2}\left\{\frac{h\theta}{4\varpi r c\cdot D}\cos\left(2\cdot\frac{2\pi t}{\theta}\right) + \sin\left(2\cdot\frac{2\pi t}{\theta}\right)\right\}$$

---

la valeur de β peut être nulle sans que θ le soit

$$\beta = A + B\cos\left(2\cdot\frac{2\omega' t}{\theta}\right) + C\sin\left(2\cdot\frac{2\omega' t}{\theta}\right)$$ si l'on veut trouver le

temps qui répond à la plus grande valeur de β on aura

$$0 = \frac{d\beta}{dt} = -\frac{2\cdot 2\omega'}{\theta} B\sin\left(\frac{4\omega' T'}{\theta}\right) + \frac{4\omega'}{\theta} C\cos\left(\frac{4\omega' T'}{\theta}\right)$$

ou $\tan\left(\frac{4\omega' T'}{\theta}\right) = \frac{C}{B}$ et $T' = \frac{\theta}{4\omega'}\arctan\frac{C}{B}$

ou $T' = \frac{\theta}{4\omega'}\arctan\left(\frac{h\theta}{4\omega' rcv}\right)$ $\quad T' = \frac{\theta}{4\omega}\arctan\left(\frac{4\omega' rcv}{h\theta}\right)$ ...

la plus grande valeur que puisse acquérir la quantité β est $\frac{1}{2}\theta$ et elle arrive pour $\arctan$ ainsi le temps qui répond au maximum est toujours compris entre $\frac{1}{8}$ de la période entière θ qui exprime la durée de l'année.

$h\theta = 4\omega' rcv$

$r = \frac{h\theta}{4\omega' cv}$

Si g est nulle il est évident que la voûte ne reçoit aucune chaleur du foyer et que sa température doit demeurer nulle ce que donne en effet l'équation (6) car a et b deviennent nuls

Si h est nulle la voûte a une toute autre chaleur qu'il ne lui vient du foyer et la température acquise ne peut être périodique. il est nécessaire qu'elle aille toujours en croissant. dans ce cas on ne peut appliquer l'équation (6) mais il faut recourir à l'équation (4) en y faisant h nulle et par conséquent K nulle ou il vient $\frac{1-e^{-Kt}}{K}$ devient t et l'on trouve $\beta = at + b\frac{t}{4\omega}\cdot\sin\left(\frac{4\omega t}{\theta}\right)$

c'est regarder la voûte en effet l'équation 4 s'il y faut $h=0$

si l'on suppose que la profondeur r de la voûte est extrêmement petite, les quantités K, b, a seront extrêmement grandes et l'on aura

$$\beta = \frac{a}{K} + \frac{b}{K}\cdot\frac{\theta}{4\omega}\cdot\frac{4\omega}{\theta}\cos\left(\frac{4\omega t}{\theta}\right) = \frac{g\lambda\rho^2}{h\omega}\left(1-\frac{1}{4}\sin^2\theta\right) + \frac{g\lambda\rho^2}{4\omega}\cdot\frac{1}{4}\sin^2\theta\cos\frac{4\omega t}{\theta}$$

or la température variable du foyer est $2\left\{\frac{\rho^2}{\omega}\left(1-\frac{1}{4}\sin^2\theta\right) + \frac{\rho^2}{\omega}\cdot\frac{1}{4}\sin^2\theta\cos\left(\frac{4\omega t}{\theta}\right)\right\}$

de sorte que dans ce cas d'une profondeur infiniment petite si $g = h$ la température de la voûte est toujours la même que celle du foyer et en général

$$\beta = \frac{g}{h}\left\{\frac{2\rho^2}{\omega}\left(1-\frac{1}{4}\sin^2\theta\right) + \frac{2\rho^2}{\omega}\cdot\cos\left(\frac{4\pi t}{\theta}\right)\right\}$$

Si c'est une quantité infiniment grande la valeur de K est très petite il faut considérer que quelque petite que soit la valeur de K lorsque t devient double ou plus grand que celle qui est assez petite pour que dans l'équation (4) le

$\frac{\omega \frac{4\omega t}{\theta}}{\theta}$ $\frac{\theta}{4\omega}\cdot\frac{\theta}{4\omega}\left(1-\omega\frac{4\omega t}{\theta}\right)$

$\frac{\theta}{4\omega}\ \frac{\sin 4\omega t}{\theta}$

$-kt$

$\frac{a}{k}t+\frac{1}{k^2}e$

$\frac{a}{k}t-\frac{a}{k}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k}e^{-kt}\right)+\frac{\theta}{4\omega}\left(\frac{k\theta}{4\omega}+\frac{\theta}{4\omega}e^{-kt}\right)$

$\frac{1}{1+\left(\frac{k\theta}{4\omega}\right)^2}$

$-kt$

$\frac{a\theta}{k}-\frac{a}{k^2}+\frac{a}{k^2}e$

$e^{-Kt}=\omega$ $t=\frac{\log n}{}$ $=\log n\cdot\frac{r\cdot c\cdot v}{h}$

$-Kt\log e=\log\omega$ $\frac{h\log e}{rcv}$ $t=3\cdot r\cdot 10^{7}\cdot h\cdot c\cdot v$

$t=\frac{\log n}{K\log e}$ $T=\frac{h\ r\cdot c\cdot v}{66h\cdot 24\cdot 60}$

$\log\frac{}{1000}$ v nombre de Kilogrammes que pese un volume $=7800$ Kilogrammes

c nombre d'unité de chaleur nécessaire pour élever un Kilogramme de sa température 0 à la température 1.

θ à la température 1

la chaleur nécessaire pour élever un Kilogramme de Fer de sa température 0 à la température $77^{\circ},77$

$1 : 0,7777 :: 1 : 0,7777$

$1 : 0,7777 :: 2 : 1$

$\frac{4}{3}$ chaleur spécifique du Fer

chaleur spécifique du Fer.

$(7,8)(0,125)$

$(7800)\ 0,125$

$0,777$

$50 : 1000 :: 60$

$0,7777$
$0,125$
3885
1554
777
$0,097125$

$0,125$
$0,777$
$0,097125$

$7,788$
$0,126$
7800
1008
882
9828
$9828 \mid 777$
12
777
2058
$0,126\ 777$
126
777
4630
$7800\ 4662$
1680

$\frac{1}{2}$
24 7800
1300
4
$7800\ 125$
$1250\ 78$
1000
875
9750
777
194
$0,126$
7800
125
1000
625
9750
777
1
4668
1556
778
$7800\ 28\ 1300$
78
2200
2200

~~36~~

le terme e^{-Kt} dont elle aura pour exposant $-Kt$ et il en sera de même de la partie du terme suivant qui aura pour facteur e^{-Kt}. ainsi la température β prendra une valeur stationnaire $\frac{a}{K}$. mais cette température finale ne sera jamais périodique. lorsque K est une petite quantité ce qui arrive si r a une grande valeur. la température β devenue périodique est exprimée comme il suit $\beta = \frac{a}{K} + \frac{6.\theta}{4\pi} \sin\left(\frac{4\pi}{\theta} t\right)$ la valeur maximum de β correspond à la valeur de t pour laquelle $\cos\left(\frac{4\pi t}{\theta}\right)$ est nulle on aura donc $\frac{4\pi t}{\theta} = \frac{1}{2}\pi$ et $t = \frac{1}{8}\theta$. ainsi lorsque r est une quantité très petite on a $\beta = \frac{q}{h}\left\{\frac{\lambda\rho^2}{\omega}\left(1 - \frac{1}{4}\sin^2\theta\right) + \frac{\lambda\rho^2}{\omega'}\cos\left(\frac{4\pi t}{\theta}\right)\right\}$

et la valeur maximum de β a lieu lorsque $t = 0$

lorsque r atteint une quantité extrêmement grande la valeur de β est aussi en raison $\beta = \frac{q}{h}\left\{\frac{\lambda\rho^2}{\omega}\left(1 - \frac{1}{4}\sin^2\theta\right) + \frac{q\lambda\rho^2}{r\omega^2 c.D}\cdot\frac{\theta}{4\pi}\left(\frac{1}{4}\sin^2\theta\right)\sin\left(\frac{4\pi t}{\theta}\right)\right\}$

il arrivera que la température périodique contenant r au dénominateur sera extrêmement petite. quant à la quantité valeur d'une très petite profondeur sous une température variable comme celle du foyer et suivant précisément la même loi mais moindre extrêmement profond ne sera plus sujet qu'à des variations périodiques fort petites et insensibles) il prendra une température fixe déterminée par l'intensité moyenne du foyer. toutes ces conséquences sont trop faciles à déduire pour qu'il soit utile d'y insister.

---

de l'équation (5) il sera facile de déduire l'expression de la température moyenne pendant toute la durée de la période θ désignant par température moyenne la valeur $\frac{1}{\theta}\int_0^\theta \beta\, dt$ on la hauteur du rectangle qui ayant pour base la longueur θ aurait une aire égale à celle de la courbe dont l'ordonnée est β et l'abscisse t. cette température moyenne sera désignée par β on aura $\beta = \frac{q}{h}\cdot\frac{\lambda\rho^2}{\omega}\left(1 - \frac{1}{4}\sin^2\theta\right)$ on pourrait aussi au moyen de l'équation 4 prendre la valeur de la température moyenne pendant une période durant l'intégrale depuis $t = i\theta$ jusqu'à $t = (i+1)\theta$ on verrait alors comment cette température moyenne varie avec i et l'on reconnaît que l'approche très rapidement de la température désignée par β. nous remarquerons seulement que l'exponentielle e^{-kt}. diminue de plus en plus rapidement à mesure que t augmente de sorte que la température moyenne approche de la valeur limite. plus la quantité K est petite plus il faut attendre pour que la température devienne sensiblement périodique. ce temps nécessaire est donc en raison inverse de K ou en raison directe de $\frac{r.c.\rho}{h}$

57 — pour le former une idée des valeurs numériques propres à cette question.
on supposera que le vol[ume] employé ait la forme d'une sphère
& de 1m de pol[e] qu'il est rempli d'eau que la pesanteur est une unité
matière et que les autres forces soient imperceptibles à la chaleur ce qui
arrive en effet si ce vase était dans un horizon[tal] pour
ce qu'il n'y ait aucun transport de chaleur dans le sens horizontal.
on place ensuite l'équateur de manière que la surface & hémisphère
de hauteur restant vertical. lorsque t commence lorsque le pôle
se trouvant l'équateur passe au zenith.
l'équation 5 étant mise sous cette forme $\beta = \mu + \nu\left\{\frac{\kappa\theta}{4\pi\omega}\cos\left(\frac{4\pi\omega t}{\theta}\right) + \sin\left(\frac{4\pi\omega t}{\theta}\right)\right\}$
la plus grande des valeurs variables périodiques que prend β est celle
qui a lieu lorsque l'on a $\nu\left\{-\frac{4\pi}{\theta}\frac{\kappa\theta}{4\pi\omega}\sin\left(\frac{4\pi\omega t}{\theta}\right) + \frac{4\pi}{\theta}\cos\left(\frac{4\pi\omega t}{\theta}\right)\right\} = 0$

$$\text{ou } \tan g\left(\frac{4\pi\omega t}{\theta}\right) = \frac{4\pi}{\kappa\theta} \quad \text{ou } \frac{4\pi\omega t}{\theta} = \text{arc tang}\left(\frac{4\pi\omega \cdot r \cdot c \cdot D}{h\theta}\right)$$

$$\text{ou } \frac{t}{\theta} = \frac{1}{4\pi\omega}\,\text{arc tang}\left(\frac{4\pi\omega \cdot r \cdot c \cdot D}{h\theta}\right)$$ les valeurs de C et D qui
conviennent à l'arc dont la tangente précédente a pour valeur
à 1265 en prenant pour unité d'espace celle qui
répond pour un hectogramme d'eau. le temps θ est exprimé en
minutes de sorte que $\theta = 365.24.60$ la valeur de h n'est point très
peu plus grande qu'un huitième le rayon r est exprimé en mètres. le coef
un nombre ainsi il est facile de calculer lorsque $\frac{t}{\theta}$ qui devient tout
au plus = 1 à un huitième près la valeur de l'extrême chaleur
grande que doit la valeur de r.

---

il ne reste plus qu'à examiner un dernier point de la question générale,
celui qui se rapporte aux variations de la température. le vase 6
placé au centre de l'horizon est échauffé pendant la durée du jour par
l'astre S qui se lève en E passe au zenith et s'abaisse au dessous de l'horizon
6 l'échauffe ensuite pendant la nuit et se remonte le jour suivant.
il faut faire un usage de la loi générale que nous avons
donnée dans l'article précédent de déterminer les lois de la variation
de température d'un point donné θ on voit comme nous l'avons
ici le quelle on est par rapport aux valeurs du maximum de la
température et du temps de l'époque où ce maximum a lieu
nous considérons l'effet du foyer sur un vase rempli d'un liquide.
retenant les dénominations des articles précédents, nous supposerons par
2 la température variable du foyer. la fonction $\sin\left(\frac{2\pi t}{\theta}\right)$ en désignant par θ la durée de l'époque d'une complète
en minutes sexagésimales. même le temps de 1 à 1 en t[em]s de l'astre
sur l'horizon

la quantité de chaleur communiquée à b par le foyer et pendant la durée θ pendant toute la durée : on voit que cette quantité prend une valeur nulle pour toutes les valeurs de t comprises entre $t=\frac{1}{2}\theta$ et $t=\theta$ c'est cette intermittence de foyer qui donne un caractère particulier à la question que nous cherchons dans cet article.

β désigne la température variable du mur en a. h B b dt pour la quantité de chaleur qui pendant l'élément dt de la surface du mur et répandu dans l'espace entier fait baisser la température répondant au zéro thermométrique. $\frac{g}{\omega} N(\alpha\beta)\alpha\beta \quad \frac{g}{\omega} \cdot s\,b\,(\alpha-\beta)\sin\left(\frac{2\pi t}{\theta}\right) dt$

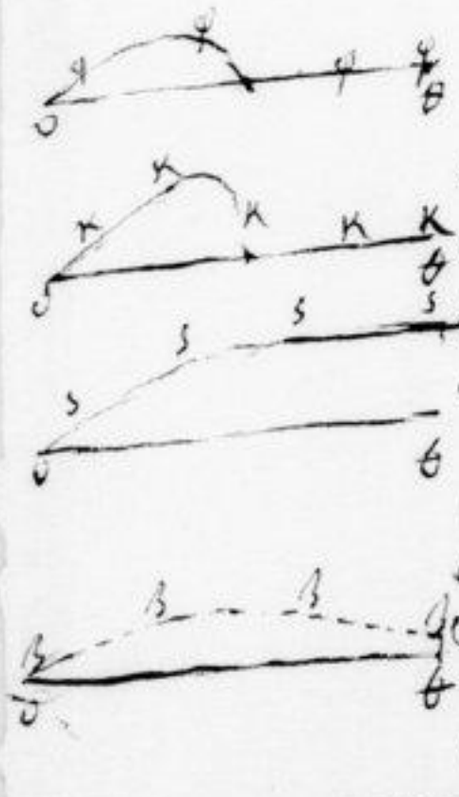
voir la quantité de chaleur que b reçoit de S pendant l'élément dt pour mais durant tout cette quantité de chaleur communiquée est nulle. devient β par rapport à λ. ainsi la quantité de chaleur communiquée par S, ou par la face dont les rayons apparaissent est proportionnelle par $g\rho^2\lambda^2 ft\,dt$. la fonction ft est discontinue elle équivaut à $\sin\left(\frac{2\pi t}{\theta}\right)$ lorsque t est entre 0 et $\frac{1}{2}\theta$ elle est nulle lorsque t est entre $\frac{1}{2}\theta$ et θ. cette fonction est périodique la durée d'une période est θ. on aura maintenant

$$\frac{(g\rho^2 b\,2ft - h\beta b)\,dt}{r\cdot b\cdot c\cdot D} = d\beta \quad \text{ou} \quad \frac{d\beta}{dt} = \frac{g\rho^2\lambda}{rc\cdot D} ft - \frac{h}{rc\cdot D}\beta$$

ou $\frac{d\beta}{dt} + K\beta = \varphi t$ en faisant $\varphi t = \frac{g\rho^2\lambda}{rc\cdot D} ft$ et $K = \frac{h}{rc\cdot D}$

ou $\varphi t = aft$ en faisant $a = \frac{g\rho^2\lambda}{r\cdot c\cdot D}$

cette équation est l'équation différentielle 2 de la page 53 et l'on en tire $\beta = e^{-Kt}\int_0^t dt\, e^{Kt}\varphi t$. il faut regarder dans t et l'intégrale et φt l'ordonnée. cette ligne est représentée par la ligne $\varphi\varphi\varphi\varphi$ on remplacera cette ligne avec celle dont l'ordonnée est e^{Kt} la courbe ainsi tracée peut être facilement en multipliant ordonnée par ordonnée la courbe auxiliaire dont l'ordonnée est ordonnée par ordonnée est représentée par la ligne K K K K.



on prendra l'arc formé par cette seconde courbe avec une ordonnée d'une troisième courbe représentée par S S S S. enfin on courbe nouvelle cette troisième courbe avec celle dont l'ordonnée est e^{-Kt} en multipliant ordonnée par ordonnée et l'on trouvera une quatrième courbe dont l'ordonnée est β et qui est représentée par la ligne β. cette ligne β dont il faut connaître la nature marque relativement pour tout les autres points de l'intervalle de 0 à θ mais pour tout les autres points

---

Soit i le nombre des périodes écoulées, en sorte que l'on ait $t = i\theta + T$ dans l'intervalle de $t=i\theta$ à $t=(i+1)\theta$ la courbe φ φ φ φ est une ordonnée $\sin\left(\frac{2\pi T}{\theta}\right)$ depuis $T=0$ jusqu'à $T=\frac{1}{2}\theta$. la courbe K K K K a pour ordonnée $e^{Ki\theta}\cdot e^{KT}\cdot\sin\left(\frac{2\pi T}{\theta}\right)$ depuis $T=0$ jusqu'à $T=\frac{1}{2}\theta$ et la ordonnée est nulle depuis $T=\frac{1}{2}\theta$ jusqu'à $T=\theta$

$\frac{4\pi r^2 \cdot n}{4t} = 1$

$\frac{4\pi \cdot 1000 \cdot 10}{36h \cdot 24 \cdot 60} r = n$ $r =$

$r = \frac{36h \cdot 24 \cdot 60}{4\pi \cdot 10000}$ $r = \frac{36h \cdot 24 \cdot 60}{4\pi \cdot 10000} q$ $q = \frac{4\pi}{36h} \cdot 36$

$r = \frac{36h \cdot 24}{4\pi} q$ $\frac{q \cdot 1000}{6}$

$tang = 10000q$

$r = \frac{36h \cdot 24 \cdot 6}{4\pi} q$

$\frac{30h \cdot 36}{5}$ $6350.$ $q = \frac{1}{10}$

$\frac{30h}{12}$ $tang = 100$

438^0

Reste à voir dans l'hypothèse actuelle la marche du phénomène en commençant d'abord dans la première moitié de la première période · appelant β la température on aura $\frac{d\beta}{dt} + k\beta = a \sin 2\omega t$ d'où l'équation

$$\beta = e^{-kt}\left\{\int_0^t dt\, e^{kt} a \sin 2\omega t + C\right\} = e^{-kt}\left\{\frac{a}{4\omega^2+k^2}\left(e^{kt}\left(k\sin 2\omega t - 2\omega\cos 2\omega t\right) + 2\omega\right) + C\right\}$$

ou $\beta = \frac{a}{4\omega^2+k^2}\left(k\sin 2\omega t - 2\omega\cos 2\omega t\right) + \frac{2\omega a}{4\omega^2+k^2} + Ce^{-kt}$

et $\beta = e^{-kt}\int_0^t dt\, e^{kt} a\sin\left(\frac{2\omega t}{\theta}\right)$ en effet on a $d\beta = -k\beta dt + e^{-kt+kt} a\sin\left(\frac{2\omega t}{\theta}\right) dt$

Dernière équation $\beta = -k\beta + e^{-kt+kt} a\sin\left(\frac{2\omega t}{\theta}\right)$ et

lorsque l'on fait $t=0$ on a $\beta = 0$ ce qui est bien l'hypothèse : pour

Mesurer l'intégration on fait $\frac{2\omega t}{\theta} = x$, $dt = \frac{\theta}{2\omega} dx$

et il faut prendre l'intégrale $\frac{\theta}{2\omega}\int_0^x dx\, e^{\frac{k\theta}{2\omega}x} a\sin x$

$$\beta = e^{-\frac{k\theta}{2\omega}x}\left(\int dx\, e^{\frac{k\theta}{2\omega}x} a\sin x + C\right)$$

par une formule connue $\int_0^x dx\, e^{mx}\sin x = \frac{1+e^{mx}(m\sin x - \omega x)}{1+m^2}$ $\frac{k\theta}{2\omega} = m$ on a

en effet on entier $e^{mx}\sin x = \frac{e^{mx}(m\cos x + \sin x) + me^{mx}(m\sin x - \cos x)}{1+m^2}$

$$= e^{mx}\frac{\sin x(1+m^2)}{1+m^2} = e^{mx}\sin x \quad \text{on a donc}$$

$$\beta = e^{-kt}\left\{\frac{1+e^{\frac{k\theta}{2\omega}x}\left(\frac{k\theta}{2\omega}\sin\left(\frac{2\omega t}{\theta}\right) - \cos\left(\frac{2\omega t}{\theta}\right)\right)}{1+\left(\frac{k\theta}{2\omega}\right)^2}\right\}$$

$$\sin\beta = \frac{e^{-kt}}{2\omega}a\left(\frac{1+e^{kt}\left(\frac{k\theta}{2\omega}\sin\left(\frac{2\omega t}{\theta} - \cos\left(\frac{2\omega t}{\theta}\right)\right)\right)}{1+\left(\frac{k\theta}{2\omega}\right)^2}\right)$$

~~$(a+p)^n$~~

$1\ (p+a)^6$

$1^r\ p^6+ab$

$2\ p^6+ap^2+ab$

$3\ p^6+ap^3+ap^2+ab$

$4\ p^6+ap^4+ap^3+ap^2+ab$

$p+a\ b^i+a(b^i+b^{i-1}+b^{i-2}\ \ +b)$

$p+a\ b^i+a(b+b^2+b^3+\ldots\ b^{i-1}+b^i)$

$s=b+b^2+b^3+\qquad\qquad b^i$

$bs=b^2+b^3+b^4\qquad\quad +b^{i+1}$

$bs-s=b^{i+1}-b$

$s=\dfrac{b-b^ib}{1-b}=\dfrac{b}{1-b}(1-b^i)=b\left(\dfrac{1-b^i}{1-b}\right)$

$pb^i+ab^i+\dfrac{ab}{1-b}(1-b^i)$

$\dfrac{ab}{1-b}+\left(p+a-\dfrac{ab}{1-b}\right)b^i$

$\dfrac{\mu e^{-\frac{i\kappa\theta}{2}}}{1-e^{-\frac{\kappa\theta}{2}}}+\mu\left(\dfrac{1-2e^{-\frac{\kappa\theta}{2}}}{1-e^{-\frac{\kappa\theta}{2}}}\right)e^{-\frac{i\kappa\theta}{2}}$

$\beta_i\ A+B\nu^i$

$\beta_{i+1}\ A+B\nu^i\nu$

$A\nu+\mu\nu+B\nu^{i+1}$

$A=A\nu+\mu\nu$

$A+B=0$

$p=0$

$a=\mu$

$b=e^{-\frac{\kappa\theta}{2}}$

$b^i+\dfrac{b}{1-b}\to\dfrac{b^ib}{1-b}$

$2\nu-3\nu^2+\nu^i-3\nu^{i+1}$

$(A+B\nu^i+\mu)\nu-$

$A=-\dfrac{\mu\nu}{1-\nu}$

$B=-A$

$1-\dfrac{b}{1-b}$

$a\dfrac{1-2b}{1-b}b^i$

20

$$\text{ou } \beta = \frac{a\varepsilon\cdot\theta\cdot 1}{2\omega\ 1+\left(\frac{K\theta}{2\omega}\right)^2}\, e^{-Kt} + \frac{a\theta}{2\omega\left(1+\frac{K\theta}{2\omega}\right)}\left\{\frac{K\theta}{2\omega}\sin\frac{2\omega t}{\theta} - \cos\frac{2\omega t}{\theta}\right\}$$

c'est la valeur exacte de β depuis $\beta=0$ jusqu'à $\beta=\frac{1}{2}\theta$ $-\frac{K\theta}{2}$

lorsque $t=\frac{1}{2}\theta$ on a $\beta = \frac{a\varepsilon}{2\omega}\cdot\frac{e^{-\frac{K\theta}{2}}\cdot\theta}{1+\left(\frac{K\theta}{2\omega}\right)^2}$ $\beta = \frac{a\theta}{2\omega}\frac{1}{1+\left(\frac{K\theta}{2\omega}\right)^2}\left(1+e^{-\frac{K\theta}{2}}\right)$

---

rendrait la seconde partie de la période la fonction φt qui entre dans l'équation différentielle elle est nulle alors la valeur variable de β est exprimée par l'équation $\frac{d\beta}{dt}+K\beta=0$ qui donne $\beta = A e^{-Kt}$ en désignant par A la valeur initiale qui est ici celle qu'avait β à la fin de la première moitié de la première période c'est ce que nous désignons par $\beta_{\frac{1}{2}}$

* au commencement de la seconde moitié de la période.

ainsi pendant la première période on a depuis $t=0$ jusqu'à $t=\frac{1}{2}\theta$ $\chi = \varepsilon a e^{-1}$

$$\beta = \frac{a\theta}{2\omega}\frac{1}{1+\left(\frac{K\theta}{2\omega}\right)^2}\left\{e^{-Kt} + \frac{K\theta}{2\omega}\sin\frac{2\omega t}{\theta} - \cos\frac{2\omega t}{\theta}\right\}$$

et depuis $t=\frac{1}{2}\theta$ jusqu'à $t=\theta$ on a

$$\beta = \frac{a\theta}{2\omega}\frac{\left(1+e^{-\frac{K\theta}{2}}\right)}{1+\left(\frac{K\theta}{2\omega}\right)^2}\, e^{-Kt}$$

ici t est égal à $\frac{1}{2}\theta+T$

lorsque $t=\theta$ nous avons $\beta_1 = \frac{a\theta}{2\omega}\cdot\frac{\left(e^{-\frac{K\theta}{2}}+e^{-K\theta}\right)}{1+\left(\frac{K\theta}{2\omega}\right)^2}$

Dans la période suivante il faut compter le temps à partir de $t=\theta$ c'est à dire faire $t=\theta+T$ et désigner la valeur initiale de β par β_1 en général nous ferons $t=i\theta+T$ et nous désignerons la valeur initiale de β par β_i on prendra dans l'équation $\frac{d\beta}{dT}+K\beta = a\sin\left(2\omega\frac{t}{\theta}\right)$ pour déterminer la valeur de β dans la première moitié de la période suivante $(i+1)^{ième}$ et nous désignerons par β_i la valeur initiale de β ou celle qui répond à $T=0$ on prendra l'intégrale $\beta = e^{-KT}\int dT\, e^{KT}\varphi T$. car on écrira $\frac{d\beta}{dT} = -K\beta + e^{-Kt}e^{KT}\varphi T$. mais il faut remarquer que la limite de l'intégrale ne sont pas déterminées.

$$\frac{d\beta}{dt} + \kappa\beta = \varphi t$$

$$\beta = e^{-\kappa t}\left(\int \partial t\, e^{\kappa t}\varphi t + \text{const}\right)$$

$$\partial\beta = -\kappa\beta + e^{-\kappa t}e^{\kappa t}\varphi t \qquad \varphi t = a\sin\left(\frac{2\pi t}{\theta}\right)$$

$$\frac{\partial\beta}{\partial t} = e^{-\kappa t}\left(\quad \beta = 0 + c\right)$$

$$\beta = e^{-\kappa t}\left(\beta + \int_0 \partial t\, e^{\kappa t}\varphi t\right)$$

$$\beta = e^{-\kappa t}\left(\beta + \left\{(a + e^{\kappa T}\left(\frac{\kappa\theta}{2\pi}a\sin\frac{2\pi T}{\theta} - a\omega\left(\frac{2\pi T}{\theta}\right)\right)\right\}\right)$$

$$\beta_i = e^{-\kappa T}\left\{\beta_i + \frac{\theta}{2\pi}\frac{1}{1+\left(\frac{\kappa\theta}{2\pi}\right)^2}\right\}$$

$$\beta_{i+\frac{1}{2}} = e^{-\kappa\frac{1}{2}\theta}\left\{\beta_i + \frac{2a\theta}{2\pi}\frac{1}{1+\left(\frac{\kappa\theta}{2\pi}\right)^2}\right\}$$

$$\beta_{i+1} = e^{-\kappa\theta}\left\{\beta_i + \frac{2a\theta}{2\pi}\frac{1}{1+\left(\frac{\kappa\theta}{2\pi}\right)^2}\right\}e^{-\kappa T}$$

$$\beta = e^{-\kappa\theta}\left\{\beta_i + \frac{2a\theta}{2\pi}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{\kappa\theta}{2\pi}\right)^2}\right\}$$

$$t = i\theta + T$$

$$\beta_i = e^{-\kappa(t-i\theta)}\left\{\beta_i + \frac{2a\theta}{2\pi}\frac{1}{1+\left(\frac{\kappa\theta}{2\pi}\right)^2}\left\{\frac{\kappa\theta}{2\pi}\sin\frac{2\pi t}{\theta} - \omega\frac{2\pi T}{\theta}\right\}\right.$$

$$\beta_i = e^{-\kappa(t-i\theta)}\left\{\beta_i + \frac{2a\theta}{2\pi}\frac{1}{1+\left(\frac{\kappa\theta}{2\pi}\right)^2}\left\{\frac{\kappa\theta}{2\pi}\sin\frac{2\pi t}{\theta} - \omega\frac{2\pi T}{\theta}\right\}\right.$$

$$\sin x - \omega x = 0 \qquad \tan\frac{2\pi t}{\theta} = \frac{2\pi}{\kappa\theta}$$

$$\frac{\sin x}{\omega x} = \frac{1}{p} \qquad T = \frac{\theta}{2\pi}\arctan\left(\frac{2\pi}{\theta}\,\text{r.c.n}\right)$$

$$t = \frac{1}{2}\theta$$

$$\frac{1}{2}\theta$$



6,

pour les déterminer on écrira β_i

$\beta = e^{-KT}\left(\int dT\, e^{KT}\varphi T + \text{const}\right)$ et faisant commencer l'intégrale lorsque $T=0$ on aura $\beta_i = \dots + \text{const}$.

Donc $\beta = \beta_i + e^{-KT}\int_0^{T'} dT\, e^{KT}\, a.\sin\frac{2\pi T}{\theta}$ faisant $\frac{2\pi T}{\theta} = x$

$T = \frac{\theta}{2\pi}x$, on a

$$\beta = \beta_i + e^{-KT}\frac{a\theta}{2\pi}\int_0^{x'} dx\, e^{\frac{K\theta}{2\pi}x}\sin x \quad \text{ou}$$

$$\beta = \beta_i + e^{-KT}\frac{a\theta}{2\pi}\left(\frac{1+e^{\frac{K\theta}{2\pi}x}\left(\frac{K\theta}{2\pi}\sin x - \omega\cos x\right)}{1+\left(\frac{K\theta}{2\pi}\right)^2}\right)$$

$$\text{ou } \beta = \beta_i + \frac{a\theta}{2\pi}e^{-KT}\left(\frac{1}{1+\left(\frac{K\theta}{2\pi}\right)^2} + \frac{\frac{K\theta}{2\pi}\cdot\sin\left(\frac{2\pi T}{\theta}\right) - \omega\cos\frac{2\pi T}{\theta}}{1+\left(\frac{K\theta}{2\pi}\right)^2}\right) \quad (e)$$

cette équation exprime la valeur de β depuis $t=i\theta$ jusqu'à $t = i\theta + \frac{1}{2}\theta$ et tant que T reste $< \frac{1}{2}\theta$; elle exprime l'accroissement $\beta - \beta_i$ que va avoir la température lorsqu'il s'est écoulé un nombre i de périodes plus un temps T compris entre 0 et une demi période. Lorsque T est $\frac{1}{2}\theta$ on trouve $\beta = \beta_i + \frac{a\theta}{2\pi}e^{-\frac{K\theta}{2}}$

$$\beta_{i+\frac{1}{2}} = \beta_i + \frac{\frac{a\theta}{2\pi}\left(1+e^{-\frac{K\theta}{2}}\right)}{1+\left(\frac{K\theta}{2\pi}\right)^2}$$

pendant la seconde moitié de cette même période la valeur de β est exprimée par l'équation

$$\beta = \beta_{i+\frac{1}{2}}\cdot e^{-KT}$$

en commençant à compter T lorsque $t = i\theta + \frac{1}{2}\theta$ et lorsque $t = (i+1)\theta$ on a

$$\beta_{i+1} = \beta_{i+\frac{1}{2}}e^{-\frac{K\theta}{2}} \quad \text{ou} \quad \beta_{i+1} = \beta_i e^{-K\theta} + \frac{\frac{a\theta}{2\pi}\left(e^{-\frac{K\theta}{2}}+e^{-K\theta}\right)}{1+\left(\frac{K\theta}{2\pi}\right)^2}$$



$\int_0^{\frac{1}{2}\theta} e^{kx} \sin\left(\frac{2\pi}{\theta}x\right)$ | $\frac{2\pi x}{\theta} = y$ | $kx = \frac{k\theta}{2\pi} y$ | $m = \frac{k\theta}{2\pi}$

$x = \frac{\theta}{2\pi} y$ | $dx = \frac{\theta}{2\pi} dy$ | $kx = my$

$\frac{\theta}{2\pi} \int_0^{\pi} dy\, e^{\frac{k\theta}{2\pi} y} \sin y$ | $\frac{\theta}{2\pi} y = 0 \dots \frac{\theta}{2}$

$y = 0 \dots \pi$

$\frac{\theta}{2\pi} \int dy\, e^{my} \sin y$ $\quad e^{my}\left(\frac{m \sin y - \cos y}{1+m^2}\right) + \text{cost}$ $\quad c = -\frac{1}{1+m^2} + \text{costante}$

$\frac{\theta}{2\pi} \int \frac{1 + e^{my}(m \sin y - \cos y)}{1+m^2}$ $\quad \frac{\theta}{2\pi}\left(1 + e^{kx}\left(\frac{k\theta}{2\pi}\sin\left(\frac{2\pi x}{\theta}\right) - \cos\left(\frac{2\pi x}{\theta}\right)\right)\right) \Big/ \left(1+\left(\frac{k\theta}{2\pi}\right)^2\right)$

$T = 0$

$\frac{e^{ki\theta}\cdot\theta}{2\pi} \frac{a}{1+\left(\frac{k\theta}{2\pi}\right)^2}$ $\left(1 + e^{kT}\left(\frac{k\theta}{2\pi}\sin\left(\frac{2\pi}{\theta}T\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{\theta}T\right)\right)\right) \Big/$ $\frac{2e^{ki\theta}\cdot\theta a}{2\pi\left(1+\left(\frac{k\theta}{2\pi}\right)^2\right)}$

$e^{-ki\theta - kT} \int_0^{i\theta+T} dT\, e^{kT} e^{ki\theta} \varphi +$ | $e^{-kT}\int_0^{i\theta} dT\, e^{kT}\varphi(i\theta+T) + e^{-kT}\int_0^{T} dT\, e^{kT}\varphi(i\theta)$

$e^{-ki\theta}\frac{e^{-kT}\left(1+e^{ki\theta}\right)(+1)}{1+\left(\frac{k\theta}{2\pi}\right)^2}$ | $a\sin\left(\frac{2\pi T}{\theta}\right)$ | $0 \dots \frac{1}{2}\theta \dots \theta$ | B_i tempo che serve aprire $i\theta$

$\frac{dB}{dT} + kB_i + kB = \frac{1}{a}\sin\frac{2\pi T}{\theta} \dots 0$

$\frac{dy}{dx} + kA + ky = x$ $\quad y = \frac{-A}{*} + z$ | $\frac{dz}{dx} + A = A + kz = x$ $\quad \frac{2\pi(i\theta+\varphi)}{\theta}$

$\frac{dz}{dx} + kz = x$ $\quad \zeta = B_i + \gamma$

$y = -A + z$

$\frac{dz}{dx} + kz = x$ $\quad z = e^{-kx}\int_0^{kx} dx\, e^{kx}$

$\frac{d\gamma}{dt} + kB_i + k\gamma = a\sin\left(\frac{2\pi T}{\theta}\right)$

les équations précédentes résolvent entièrement la question car elles font connaître la valeur de β pour une époque de quelconque.

soit $\mu = \frac{a\theta}{2\omega} \frac{1+e^{-\frac{H\theta}{2}}}{1+\left(\frac{H\theta}{2\omega}\right)^2}$ on aura $\beta_{i+\frac{1}{2}} = \beta_i + \mu$

et $\beta_{i+1} = (\beta_i + \mu) e^{-\frac{H\theta}{2}}$ soit $e^{-\frac{H\theta}{2}} = \nu$ on a

$\beta_{i+1} = (\beta_i + \mu)\nu$ on en conclura

[illegible]

on en conclura facilement la valeur de β_i en fonction de i

$\beta_i = A + B\nu^i$ on il faut déterminer A et B

on aura $\beta_{i+1} = A + B\nu^i\nu = (\mu + A + B\nu^i)\nu = \mu\nu + A\nu + B\nu^i\nu$

d'où l'on conclut $A = \mu\nu + A\nu$ d'où l'on a toujours $\beta_0 = 0$

donc $0 = A + B$ donc $A = \frac{\mu\nu}{1-\nu}$ et $B = \frac{-\mu\nu}{1-\nu}$

donc $\beta_i = \frac{\mu\nu}{1-\nu} - \frac{\mu\nu\cdot\nu^i}{1-\nu}$ ouvrant parlaque ν ou $e^{-\frac{H\theta}{2}}$ étant une fraction. la valeur de β_i converge de plus en plus vers une valeur fixe qui est $\frac{\mu\nu}{1-\nu}$ ainsi après un très grand nombre de périodes la température β_i qui a lieu à la fin d'une période est aussi à peu près la même.

$$\beta_i = \frac{\mu\nu}{1-\nu} = \frac{e^{-\frac{H\theta}{2}}}{1-e^{-\frac{H\theta}{2}}} \left\{ \frac{a\theta}{2\omega} \cdot \frac{(1+e^{-\frac{H\theta}{2}})}{1+\left(\frac{H\theta}{2\omega}\right)^2} \right\}$$

---

après t tems $t\theta + T$ lorsque le nombre i est devenu extrêmement grand la valeur de β est donnée par cette équation.

$$\beta = \beta_i + \frac{a\theta}{2\omega} e^{-HT} + \left(\frac{H\theta}{2\omega} \sin\left(\frac{2\omega T}{\theta}\right) - \cos\left(\frac{2\omega T}{\theta}\right) \right) \frac{\frac{a\theta}{2\omega}}{1+\left(\frac{H\theta}{2\omega}\right)^2}$$

$$1+\left(\frac{H\theta}{2\omega}\right)^2$$

55

Sur l'action du Soleil sur la terre

Donc $R = \frac{1}{2}\alpha + \beta \tang l$, $\sin R = 1 - \frac{1}{2}\beta^2 \tang^2 l$

ou en remplaçant $q = 2\cos l + \alpha\beta \sin^2 l$ ou $q = 2\cos l + \alpha\beta \sin^2 l$

cette valeur de q exprime l'action diurne du Soleil sur le centre de l'horizon. lorsque l'ascension droite α de l'équateur sur l'écliptique est une fraction très petite.

Dans le mouvement elliptique la longitude ν ne croît pas proportionnellement au temps

Soit γ l'équinoxe du printemps et p le périhélie et ε l'arc γp qui détermine la position absolue du périhélie.

en appelant t le temps écoulé depuis le passage de l'astre[m] au périhélie p et v l'angle $m S p$ on a si l'excentricité e est une fraction très petite

$$v = \frac{2\pi t}{\theta} + 2e \sin\left(\frac{2\pi t}{\theta}\right)$$ on désigne par θ le nombre de jours θ période qui ramène l'astre du périhélie au périhélie t est le nombre de jours écoulés depuis le passage au périhélie l'angle de temps et le jour qui ramène le méridien terrestre d'une étoile à la même étoile en désignant par ν la longitude de l'astre on a $v = \gamma + \varepsilon$

on a donc pour déterminer γ en fonction du temps l'équation

$$\gamma = -\varepsilon + \frac{2\pi t}{\theta} + 2e \sin\left(\frac{2\pi t}{\theta}\right)$$

---

maintenant en désignant par a la distance moyenne de l'astre au soleil et par r la distance variable on a

$$\frac{r}{a} = 1 - e\cos\left(\frac{2\pi t}{\theta}\right) \quad \text{on a donc} \quad \left(\frac{r}{a}\right)^{-2} = \left(1 - e\cos\frac{2\pi t}{\theta}\right)^{-2}$$

$$= 1 + 2e\cos\frac{2\pi t}{\theta}$$ or l'action diurne du soleil n'est pas seulement proportionnelle à la quantité que l'on désigne par q elle est proportionnelle à $q r^{-2}$ ou $q\left(1 + 2e\cos 2\pi\frac{t}{\theta}\right)$

---

la distance du périhélie à l'équinoxe du printemps varie avec le temps écoulé t cette distance ε est égale à $\frac{2\pi t}{T'}$ que l'on désigne ici par T'

le nombre de jours qui ramènent l'équinoxe du printemps du périhélie p au périhélie. Ce nombre de jours est extrêmement grand il détermine une très longue période qui est celle du mouvement de la ligne des absides il faut donc partir d'une époque fixe qui par exemple de celle où l'équinoxe du printemps coïncidait avec le périhélie l'instant de temps est le jour sydéral t est le nombre de jours écoulés θ est le nombre de jours de la période qui ramène la planète du périhélie au périhélie et T' est le nombre de jours qui ramènent l'équinoxe du périhélie au périhélie.

on a en général $p = 2\pi\frac{t}{T} + 2\pi\frac{t}{\theta} + 2e\sin\left(2\pi\frac{t}{\theta}\right)$

Si t est nul la longitude de l'astre est nulle conformément à l'hypothèse

θ $\quad \tau' = n\theta$ $\qquad t = i\theta + t'$ $\qquad 2\pi\frac{i}{n}$



$2\pi\left(\frac{i}{n} + \frac{t}{\theta}\right)$ $\qquad \frac{t}{\theta} = i + \frac{t'}{\theta}$

$\theta = n\theta$

$\sin 2\omega t \left(\frac{1}{\tau'} + \frac{1}{\theta}\right)$ $\qquad \frac{1}{n\theta} + \frac{1}{\theta}$

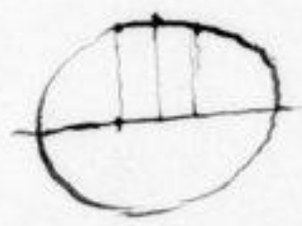


$2\omega\frac{t}{\theta}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ $\qquad \frac{n+1}{n}$

$\sin\beta = \sin\gamma\left(2 - \frac{2^2}{2\cdot 2}\right)$



$\beta = 2\sin\gamma$ $\qquad \omega\, R = -\beta\tan l$



$R = \frac{1}{2}\omega + \beta\tan l$

$q = 2\cos l\left(1 - 2^2\sin^2\gamma\right) + \left(\omega + 2\beta\tan l\right) 2\sin\gamma$ $\qquad 4\omega\cos l$

$q = 2\cos l - 2\cdot 2^2\cos l\sin^2\gamma + \omega 2\sin\gamma + 2\cdot 2^2\sin^2\gamma\tan l$ $\qquad 2\omega + \omega\sin^2\theta$

$q = 2\cos l + \omega 2\sin\gamma + 2^2\left(2\tan l\sin^2\gamma - \cos l\right)\sin^2\gamma$

$\sin^2\gamma = \sin\gamma\sin\gamma = \frac{1}{2}\cos(\gamma - \gamma) - \frac{1}{2}\cos(\gamma + \gamma)$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\gamma$

$\frac{1}{2}\cdot 2\gamma - \frac{1}{2}\cos 2\gamma\cdot 2\gamma$

$\sin\frac{1}{2}\gamma - \frac{1}{2\cdot 2}\sin 2\gamma$

$\frac{1}{2}\gamma - \frac{1}{4}\sin 2\gamma$

$Q = 4\omega\cos l + \omega 2^2\left(\frac{2\sin l}{\cos l} - \cos l\right)$

Si $t=\theta$ c'est-à-dire si l'astre est revenu à son périhélie
la longitude qui est celle du périhélie est $2\varpi\frac{\theta}{T'}$ cette longitude
de l'astre est la seule chose qui le ramène à son périhélie
va toujours en croissant avec le nombre de ces révolutions elle est
$2\varpi\frac{i\theta}{T'}$ après i révolutions $i^{\text{ème}}$ on aura enfin

$$\gamma = 2\varpi\frac{i\theta}{T'} + 2\varpi\frac{t}{\theta} + \varepsilon \sin 2\varpi\frac{t}{\theta}$$

on désigne par i le nombre
des révolutions égales à θ qui se sont écoulées depuis l'époque fixe
et par t le nombre de jours de la période θ qui est partagée en
n parties

---

il faut maintenant prendre l'expression de $\sin\gamma$ qui entre dans
la valeur de q.

on a donc $\gamma = 2\varpi\frac{t}{T'} + 2\varpi\frac{t}{\theta} + 2\varepsilon \sin 2\varpi\frac{t}{\theta}$ ou

$$\gamma = 2\varpi t\left(\frac{1}{T'} + \frac{1}{\theta}\right) + 2\varepsilon \sin\left(2\varpi\frac{t}{\theta}\right)$$

or $T' = n\theta$ (le
nombre n est extrêmement grand) on a

$$\gamma = 2\varpi\frac{t}{\theta}\left(\frac{1}{n}+1\right) + 2\varepsilon \sin 2\varpi\frac{t}{\theta}$$

si le nombre n était infini
on aurait $\gamma = 2\varpi\frac{t}{\theta} + 2\varepsilon \sin 2\varpi\frac{t}{\theta}$ ce qui serait contraire à l'hypothèse
car on aurait alors $\gamma = 0$.

en général on a $\sin\gamma = \sin\left(2\varpi\frac{t}{\theta}\left(\frac{1}{n}+1\right)\right)\cos\left(2\varepsilon \sin 2\varpi\frac{t}{\theta}\right)$

$+ \cos\left(2\varpi\frac{t}{\theta}\left(\frac{1}{n}+1\right)\right)\sin\left(2\varepsilon \sin 2\varpi\frac{t}{\theta}\right)$ et si l'on remarque que
ε est par hypothèse une très petite fraction on aura

$$\sin\gamma = \sin\left\{2\varpi\frac{t}{\theta}\left(\frac{1}{n}+1\right)\right\} + \varepsilon \sin\left(2\varpi\frac{t}{\theta}\right)\cos\left\{2\varpi\frac{t}{\theta}\left(\frac{1}{n}+1\right)\right\}$$

donc

$$q = 2\omega t + \omega^2 a \sin t\left\{\sin\left(2\varpi\frac{t}{\theta}\frac{1}{n}+1\right) + 2\varepsilon \sin\frac{2\varpi t}{\theta}\cos\left(2\varpi\frac{t}{\theta}\frac{1}{n}+1\right)\right\}$$

il ne reste plus qu'à multiplier cette quantité par r^{-2} ou
$1 + 2\varepsilon\cos\frac{2\varpi}{\theta}$ pour avoir l'inégalité exacte de l'action diurne

$$q = 2\omega l + \omega\varepsilon \sin l \left\{ \begin{matrix} A_1 \sin 2\omega t/\theta' + A_2 \sin 2\cdot 2\omega t/\theta' + \cdots \\ + B_1 \omega 1\, 2\omega t/\theta' + B_2 \cos 2\cdot 2\omega t/\theta' \end{matrix} \right\}$$

$$\bar{r}^2 = a + a_1 \sin 2\omega t/\theta + \cdots + b_1 \cos 2\omega t/\theta$$

$$\left(A_0 + A_1 \sin 2\omega t/\theta' + B_1 \cos 2\cdot 2\omega t/\theta'\right)\left(a + a_1 \sin \omega t/\theta + B_1 \omega 1\, 2\omega t/\theta\right)$$

$$q\bar{r}^{-2} = 2a\omega l$$

$$2A + 2A_1 \sin 2\omega t/\theta' + A_1 a_1 \sin 2\omega t/\theta' \sin 2\omega t/\theta + 2B_1 \omega 1\, 2\omega t/\theta'$$

$$\cos\left(2\omega t/\theta' - 2\omega t/\theta\right) - \omega 1\left(2\omega t/\theta' + 2\omega t/\theta\right)$$

$$\frac{r}{a} = 1 - \varepsilon \omega 1\, 2\omega t/\theta$$

$$\gamma = 2\omega t/T' + 2\omega t/\theta' = 2\omega t/\theta'\left(\tfrac{1}{n} + 1\right)$$

$$\sin\gamma = \sin$$

4/26

en désignant par φ l'équation de l'éclipse diurne ou annulaire,

$$\varphi = \left\{ 2\omega l + \omega^2 2 \sin l \left\{ \sin\left(\frac{2\omega t}{\theta} \frac{n+1}{n}\right) + 2e \sin\left(\frac{2\omega t}{\theta}\right) \omega\left(\frac{2\omega t}{\theta} \frac{n+1}{n}\right) \right\} \right\} \left(1 + 2e \omega \frac{2\omega t}{\theta}\right)$$

$$= 2\omega l + 4e \omega l \, \omega\left(\frac{2\omega t}{\theta}\right) + \omega^2 2 \sin l \sin\left(\frac{2\omega t}{\theta} \frac{n+1}{n}\right) +$$

$$+ 2\omega^2 2e \sin l \sin \frac{2\omega t}{\theta} \omega\left(\frac{2\omega t}{\theta} \frac{n+1}{n}\right)$$

$$+ 2\omega^2 2e \sin l \sin\left(\frac{2\omega t}{\theta} \frac{n+1}{n}\right) \omega \frac{2\omega t}{\theta}$$

ou $\varphi = 2\omega l + 4e \omega l \, \omega \frac{2\omega t}{\theta} + \omega^2 2 \sin l \sin\left(\frac{2\omega t}{\theta} \frac{n+1}{n}\right)$

$$+ 2\omega^2 2e \sin l \sin \frac{2\omega t}{\theta}\left(1 + \frac{n+1}{n}\right)$$

ou $\varphi = 2\omega l \left(1 + 2e \omega \frac{2\omega t}{\theta}\right) + \omega^2 2 \sin l \left\{ \sin\left(\frac{2\omega t}{\theta} \frac{1+1}{n}\right) + 2e \sin\left(\frac{2\omega t}{\theta} \frac{2+1}{n}\right) \right\}$

cette valeur de φ ne change point lorsqu'on écrit $t + n\theta$ au lieu de t elle est une fonction périodique du temps t et la période valeur de la période de elle est $n\theta$: il retrouve dans la valeur de φ une partie périodique pour laquelle l'intervalle est $t = \theta$ c'est le coefficient de $\cos l$ et il retrouve une autre partie qui est aussi fonction périodique de t et pour laquelle l'intervalle de la période est $t = n\theta$

---

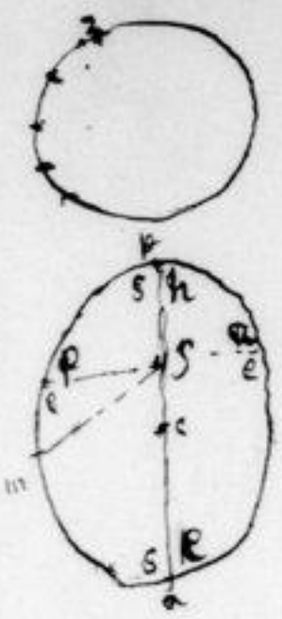
on pourrait supposer par exemple l'excentricité e si petite que la valeur de φ se réduise à

$$\varphi = 2\omega l + \omega^2 2 \sin l \sin\left(\frac{2\omega t}{\theta} \frac{1+1}{n}\right).$$ on voit que cette valeur de φ ne revient pas lorsque le temps t est augmenté d'une quantité θ' telle que l'on ait $\theta' = \frac{n\theta}{n+1}$ quantité moindre que θ

---

quoique l'excentricité ne soit pas nulle, la valeur de φ est toujours composée de deux parties dont l'une ne revient pas lorsque le temps t est augmenté de θ et dont l'autre ne revient pas lorsque le temps t est augmenté de l'intervalle θ' ou $\frac{n\theta}{n+1}$ qui est moindre que θ.

il faut donc faire le calcul en ayant égard à la seconde partie de l'excentricité.



on supposera maintenant que la terre se trouve auparihelie au solstice d'hiver et que cette position demeure fixe en sorte que le solstice d'été arrive avec l'aphelie et que toujours ainsi de l'orbe terrestre passe constamment par la ligne des solstices. on sait que cet axe n'est point immobile mais qu'il se meut très lentement et revient à la ligne des solstices après une révolution extrêmement longue. on fait ici abstraction de ce mouvement de rotation de l'axe de l'orbe terrestre. on suppose aussi le cas où l'hémisphère boréal est plus petit que l'hémisphère austral et on suppose aussi que l'équateur soit très peu incliné sur l'écliptique en sorte que l'angle d qui mesure cette inclinaison soit une très petite fraction.

on conçoit donc que le soleil décrit la tropique d'hiver et quand il est le plus près possible de la terre qu'il décrit quelque arc de l'équateur parallèle de la au tropique d'été et quand il est le plus éloigné on voit du tropique vers l'équateur qu'il arrive aussi à la moitié d'un tropique à l'autre.

Soient comme auparavant les valeurs pour deux jours ici l'effet des variations diurnes mais très lentement lavariation annuelle qui résulte du changement de distance nous supposerons que le soleil décrit l'équateur en un jour d'une durée infiniment petite et répondant avec la petite dx sous infiniment courte, on fait disparaître les variations diurnes de sorte pour ne tenir compte que les variations annuelles

que la chaleur que le soleil donne en un jour étant calculée on connaîtra l'effet produit par le soleil pendant toute l'année. cet effet servira à une loi pour la variation de la chaleur et c'est l'origine des variations annuelles.

---

si maintenant on a cet effet pour la première et une quelconque (M)

on voit page 3 le résultat suivant.

on désigne par q la quantité de chaleur que pendant la durée d'un jour le centre de l'horizon reçoit du soleil lorsque la déclinaison du soleil est B. on désigne par γ la longitude du soleil et par d l'obliquité de l'écliptique sur l'équateur et par l la latitude du lieu

$$q = 2 \sin R \cos l \cos B + 2R \sin l . \sin B$$

$$\cos R = -\tan g\, l . \tan g\, B$$

$$\sin B = \sin d \sin \gamma .$$

on détermine R par la 1re onde équation et B par la troisième on a alors la seconde q par la première.

si par exemple $l = \frac{\pi}{2}$ la latitude est nulle et la déclinaison est nulle on a

$\cos R = 0$ et $q = 2$

supposons maintenant l'angle d une fraction extrêmement petite d

on aura $\sin B = d \sin \gamma$; ... $\cos B = 1 - \frac{1}{2} d^2 \sin^2 \gamma$ ... $\tan g\, B = d \sin \gamma + \ldots$

$\cos R = -B \tan g\, l = -l(\frac{1}{2} d + \ldots)$ ou $1 - \cos R = l B + \ldots$ ou

$R = B \tan g\, l$ $\sin R = R \tan g\, l$, $R = d \sin \gamma \tan g\, l$, &c

$2R = d \sin \gamma \tan g\, l$ donc $q = d \sin \gamma \tan g\, l \cos l + d \sin \gamma \tan g\, l \sin l$

ou $q = d \sin \gamma \tan g\, l$ etc.

$R = \frac{1}{2} d + B \tan g\, l$

$\cos R = -\sin(B \tan g\, l)$

$= -B \tan g\, l$

$\sin R = \cos(B \tan g\, l)$

$= 1 - \frac{1}{2}(B \tan g\, l)^2 + \ldots$

2.

et comme à cette même quantité entièrement petite s'ajoutera de même β
entière qui aura $R = \frac{1}{2}\varpi + \beta \operatorname{tang} l = \frac{1}{2}\varpi + \delta \sin N \operatorname{tang} l$
$\sin R = 1 - \frac{\delta^2}{2}\sin^2 N \operatorname{tang}^2 l$. on aura donc

~~$q = \cos l \left(1 - \frac{1}{2}\delta^2 \sin^2 N \operatorname{tang}^2 l\right)\left(1 - \frac{\delta^2}{2}\sin^2 N \operatorname{tang}^2 l\right)$~~
~~$+ (2\cdots 2\sin l \operatorname{tang} l) \sin(\cdots \delta \sin N)^2 \sin l$~~

(voyez le calcul au verso)

ou $q = 2\cos l + 2.\varpi \sin T \sin l$.

voilà donc la valeur de q lorsque l'inclinaison 2 est extrêmement petite. elle est composée d'une quantité $2\cos l$ qui ne varie pas dans le cours de l'année et d'une autre proportionnel à $\sin T$.

---

on ne doit pas seulement avoir égard ici à la quantité de chaleur q que le soleil envoye sur chaque de l'horizon lorsque la distance de cet astre est une quantité fixe prise pour unité. il est manifeste que cette quantité doit être divisée par le quarré de la distance du soleil à la terre.

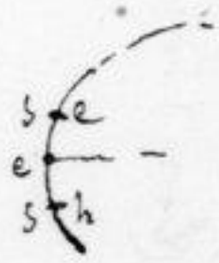
or en employant les notations déjà indiquées par N à la IXème page on a

$\frac{r}{a} = 1 - e\cos nt$ la moyenne distance est a le rayon vecteur est r
l'excentricité est e que l'on suppose une fraction extrêmement petite.
le nombre n est tel que $n\theta = 2\varpi$ en désignant par θ la durée de
l'année qui ramène l'astre au périhélie ainsi l'on a

$\frac{r}{a} = 1 - e\cos\left(2\varpi\frac{t}{\theta}\right)$ la quantité t est le nombre de jours écoulés
depuis que la planète est partie du périhélie. et θ est le nombre de jours
de la période qui ramène l'astre au périhélie.

---

nous supposons que le soleil décrit uniformément une forme elliptique
ainsi sur l'équateur et passe ainsi du tropique d'hyver à l'équateur puis
au tropique d'été et alternativement est 2^0. que la distance de cet astre
à la terre est variable. ainsi nous faisons varier le rayon de l'ecliptique.
lorsque $t=0$ la longitude du soleil est $T = \frac{3}{2}\varpi$ puisque l'astre est en h au solstice
d'hyver alors le rayon r est tel que l'on a $\frac{r}{a} = 1 - e$ ce rayon est
le plus petit possible. employons donc $T = \frac{3}{2}\varpi + 2\varpi\frac{t}{\theta}$ ainsi lorsque $t = \frac{1}{4}\theta$ on a $T = 2\varpi$.



d'un autre côté on a $r^{-2} = \left(1 - e\cos 2\varpi\frac{t}{\theta}\right)^{-2} = 1 - 2e\cos\left(2\varpi\frac{t}{\theta}\right)$

il suit de là que l'action du soleil pour échauffer $\alpha = (2\cos l + 2\varpi \sin^2 l \cdot \sin T)\left(1 - 2e\cos\left(2\varpi\frac{t}{\theta}\right)\right)$

$q = \left(1 - 2e\cos\left(2\varpi\frac{t}{\theta}\right)\right)\left(2\cos l + 2\varpi \sin^2 l \cdot \sin\left(\frac{3}{2}\varpi + 2\varpi\frac{t}{\theta}\right)\right)$

$R = \frac{1}{2}\varpi + \beta \tan l \quad , \beta = \alpha \sin\gamma. \qquad \cos\beta = 1 - \frac{1}{2}\alpha^2 \sin^2\gamma$

$\sin R = 1 - \frac{1}{2}\alpha^2 \sin^2\gamma \tan^2 l \qquad R = \frac{1}{2}\varpi + \alpha \sin\gamma \tan l$

$\cos R = -\alpha \sin\gamma \tan l$

$q = (2 - \alpha^2 \sin^2\gamma \tan^2 l) \cos l \left(1 - \frac{1}{2}\alpha^2 \sin^2\gamma\right)$

$+ (\varpi + 2\alpha \sin\gamma \tan l) \sin l \; \alpha \sin\gamma.$

$q = 2\cos l + \varpi \alpha \sin l \sin\gamma$

$\frac{4}{1685}$

$\frac{1}{60} \qquad \frac{1}{421}$

200

$60 \qquad 100$

60

$30 \qquad 30$

$31 \qquad 31 + \frac{1}{200}$

$6000 \qquad 1^{\text{degré}}$

$2 \qquad 2 + \frac{1}{3600} \qquad \varepsilon = \frac{e}{400}$

$2 + e^2 + 2e\varepsilon$

$e^2 + e^2 \frac{2}{400}$

$2 + \frac{1}{3600}$

$2 + \frac{1}{3600} + \frac{1}{200} \cdot \frac{1}{3600}$

$\sin^2 a =$

$\cos(a - a) = \cos^2 a + \sin^2 a$

$\cancel{1 = \cos}$

$2 \sin a \sin b = -\cos(a+b) + \cos(a-b)$

$2 \sin^2 a = 1 - \cos 2a$

$\frac{1}{4} \cos b \sin 2a - \sin b (1 - \cos 2a)$

$2 \sin a \cos a \cos b + \frac{b}{4} \cos b \sin 2a - 2 \sin b \sin^2 a$

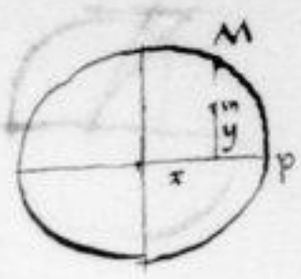
$\sin(2a) \cos b + \cos b \sin 2a + \frac{1}{4} \cos b \sin 2a - 2 \sin b \sin^2 a$

$\sin(2a+b) + \frac{1}{8}(\sin(b+2a) - \sin(b-2a))$

$-\sin b \cos 2a + \frac{1}{2}\sin(b+2a) + \frac{1}{2}\sin(b-2a)$

$\sin(2a+b) + \frac{b}{8}\{\sin(b+2a) + \sin(b-2a)\}$

(Se rapporte aux températures terrestres)



(manque la feuille 4)

$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1}{y}\frac{\partial v}{\partial y} = 0$ (1)

y est la distance d'une molécule intérieure du globe à l'axe de l'équateur. x est la distance de cette molécule au plan de l'équateur v est la température fixe de ce point. L'équation précédente a été découverte par Mr. Laplace (1807 page 67).

La molécule M de la surface et dont la distance au plan de l'équateur soit x est constante et donne lui-même cette température d'équilibre.

La température du pole p est supposée nulle.

Mr. Poisson a représenté par $\varphi(y)$ la série

$1 + \frac{y^2}{2^2} + \frac{y^4}{2^2 \cdot 4^2} + \frac{y^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \&c.$ qui est la seule intégrale finie (voir le même auteur et page citée)

cela posé la valeur $v = \cos\left(i\frac{\varpi x}{2r}\right)\varphi\left(i\frac{\varpi y}{2r}\right)$ satisfait à l'équation (1)

En effet si l'on fait $x = r$ la valeur de v est nulle quelque soit que i soit un nombre impair. Depuis cette valeur de v satisfait à l'équation différentielle (1) ainsi cette valeur générale sera exprimée ainsi

$v = a\cos\frac{\varpi x}{2r}\varphi\frac{\varpi y}{2r} + b\cos\frac{3\varpi x}{2r}\varphi\frac{3\varpi y}{2r} + c\cos\frac{5\varpi x}{2r}\varphi\frac{5\varpi y}{2r} + \&c.$

ou a $\varphi\frac{\varpi y}{2r} = 1 + \left(\frac{\varpi^2 y^2}{2^2 r^2}\right)\frac{1}{2^2} + \left(\frac{\varpi^4 y^4}{2^4 r^4}\right)\frac{1}{2^2 \cdot 4^2} + \&c.$ et $\psi\left(\frac{\varpi^2 y^2}{2^2 r^2}\right)$ cette fonction. on aura

$v = a\cos\left(\frac{\varpi x}{2r}\right)\psi\left(\frac{\varpi^2 y^2}{2^2 r^2}\right) + 6\cos\frac{3\varpi x}{2r}\psi\left(\frac{3^2\varpi^2 y^2}{2^2 r^2}\right) + \&c.$

enfin soit $1 + \frac{i^2\theta^2}{2^2} + \frac{i^4\theta^4}{2^2 \cdot 4^2} + \frac{i^6\theta^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \&c. = F(i^2\theta^2)$ on aura

$$\frac{1 + \frac{i^2}{2^2} + \frac{i^4}{2^2 \cdot 4^2} + \frac{i^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \&c.}{}$$

prendre

$v = a\cos\frac{\varpi x}{2r} F\left(\frac{\varpi^2 y^2}{2^2 r^2}\right) + 6\cos\left(\frac{3\varpi x}{2r}\right) F\frac{3^2\varpi^2 y^2}{2^2 r^2} + \&c.$ les coefficients

$a, b, c, \ldots$ restent point connus que l'on a déjà plus haut par les mêmes lettres

en général on prendra

$v = \sum a_{i-1}\cos\left(\overline{2i-1}\frac{\varpi x}{2r}\right)\varphi\left(\overline{2i-1}\frac{\varpi y}{2r}\right)$ le signe $\sum$ doit être développé

(2) $v = \sum_{i=1}^{i=\frac{1}{0}} a_{2i-1}\frac{\cos\left(\overline{2i-1}\frac{\varpi x}{2r}\right)\varphi\left(\overline{2i-1}\frac{\varpi y}{2r}\right)}{\varphi\left(\overline{2i-1}\cdot\frac{\varpi}{2}\right)}$

en donnant à i toutes les valeurs entières 1, 2, 3, &c

Il est aisé de voir que la valeur de v donnée par cette équation 2 satisfait à la question en effet chaque terme du second membre est composé et de cette forme

$A \cos(px)\,\varphi(py)$ le coefficient A est constant (il contient i et non x ni y)

le produit [illegible]

$\cos(px)\,\varphi(py)$ ou $u \cos px$ donnant tout multiplié dans l'équation (1)

$-p^2u + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{y}\frac{\partial u}{\partial y}$. faisant $u = 1 + \frac{p^2y^2}{1^2} + \frac{p^4y^4}{1^2\cdot 4^2} + \&c$

on a $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 1\cdot 2\cdot \frac{p^2}{1^2} + 3\cdot 4\,\frac{p^4y^2}{1^2\cdot 4^2} + \cdots$ d'où l'on tire $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{y}\frac{\partial u}{\partial y} = p^2u$

$$\frac{1}{y}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2\cdot p^2}{1^2} + \frac{4\cdot p^4y^2}{1^2\cdot 4^2}$$

$$p^2u = p^2 + \frac{p^4y^2}{1^2\cdot 4} + \cdots$$

De plus x dans l'équation (2) valant $x = r$ chaque terme devient nul il reste maintenant à assujettir la fonction v à la condition que donne de la surface. Soit $\varphi(py) = \psi(p^2y^2) = 1 + \frac{p^2y^2}{1^2} + \frac{p^4y^4}{1^2\cdot 4^2} + \&c$

on aura

$$v = \sum a_{2i-1}\cos\overline{2i-1}\left(\frac{\varpi x}{2r}\right)\cdot\frac{\psi\left(\frac{\overline{2i-1}^2\varpi^2y^2}{2^2r^2}\right)}{\psi\,\overline{2i-1}^2\frac{\varpi^2}{2^2}}$$

si l'on fait dans cette équation $y^2 = (r^2 - x^2)$ il est nécessaire que la valeur de v devienne $f x$ on aura donc pour déterminer les coefficients inconnus a, b, c et l'équation

$$(3)\quad fx = a\cos\left(\frac{\varpi x}{2r}\right)\frac{\psi\left(\frac{\varpi^2}{2^2}\left(1-\frac{x^2}{r^2}\right)\right)}{\psi\left(\frac{x^2}{r^2}\right)} + b\cos\left(\frac{3\varpi x}{2r}\right)\frac{\psi\left(\frac{3^2\varpi^2}{2^2}\,\overline{1-\frac{x^2}{r^2}}\right)}{\psi\left(\frac{3^2\varpi^2}{2^2}\right)} + c\cos\left(\frac{5\varpi x}{2r}\right)\frac{\psi\left(\frac{5^2\varpi^2}{2^2}\,\overline{1-\frac{x^2}{r^2}}\right)}{\psi\left(\frac{5^2\varpi^2}{2^2}\right)} + \&c$$

c'est au moyen de cette équation qu'il faut déterminer les coefficients, a, b, c &c il faut que l'équation précédente (3) soit vérifiée depuis $x=0$ jusqu'à $x=r$ supposons par exemple que l'on fasse successivement $x=0$, $\frac{1}{3}r$, $\frac{2}{3}r$ dans le premier cas on aura par exemple que l'on fasse successivement $x=0$, $\frac{1}{3}r$, $\frac{2}{3}r$ dans le premier cas on aura

$$f(0) = a + b + c$$

dans le second cas on aura

$$f\left(\frac{r}{3}\right) = a\alpha + b\beta + c\gamma$$

et dans le troisième

$$f\left(\frac{2r}{3}\right) = a\alpha' + b\beta' + c\gamma'$$

les quantités $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ seront des fractions connues on déterminera donc facilement les valeurs de a, b, c.

après ce premier calcul on fera $x = 0, \frac{1}{4}r, \frac{2}{4}r, \frac{3}{4}r$ et l'on aura de la même manière quatre équations et quatre inconnues on déterminera ces quatre inconnues $a' b' c' d'$ et on les comparera aux trois précédentes a, b, c.

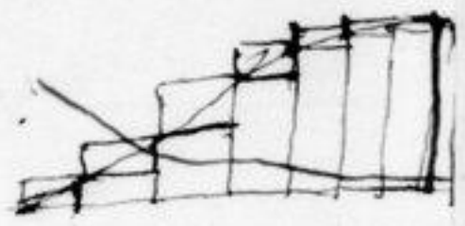
$\int dq\, e^{-\omega|q}\, e^{\left(1-\frac{q^2}{2}+\frac{q^4}{1\cdot2\cdot4}-\frac{q^6}{1\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6}+\cdots\right)}$ $\int dq\, e^{\frac{q^2}{2}}$

$e^{\,2-\frac{q^4}{2}-q^6}$

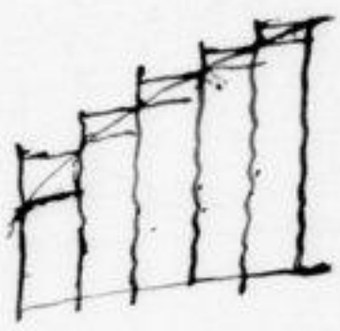
$y=\sqrt{r^2-x^2}$

$y=r\left(1-\frac{x^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}}$

$\frac{y}{r}=\left(1-\frac{x^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}}$



$\int dq\, e^{-y\,\sin\nu\,q}$



$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$

$2\sin^2\left(\frac{1}{2}x\right) = 1-\cos x$

$\log|2| + 2\log\sin\left(\frac{1}{2}q\right) = \log\sin\nu - q$

$1-\cos q = \sin\nu$

$\partial\sin q = \partial_q \sin q$

$\frac{1}{2}\left(y_0+y_1+y_2+y_3+y_4\right)$

$2\left(y_1+y_2+y_3+y_4+y_5\right)$

$\int_0^{\pi} \sin\nu\cdot x = 2\sin^2\left(\frac{1}{2}x\right)$

$e^{-2\sin^2\left(\frac{1}{2}q\right)}$

$\log j + \log\left(\frac{\omega}{2}\right) + \log 2 + 2\log\sin\left(\frac{1}{2}q\right) + \frac{1}{2}\log\left(1-\frac{x^2}{r^2}\right)$



$\log j$

$\log\frac{\omega}{2}$

$\log 2$

$2\left(y_3-y_0\right)$

$q_1\ q_2\ q_3\ q_4\ q_5\ q_6$

$\frac{1}{2}q\ \ \frac{1}{2}q_2\ \ \frac{1}{2}q_3\ \ \frac{1}{2}q_4\ \ \frac{1}{2}q_5\ \ \frac{1}{2}q_6$

$\log\sin\nu \quad e^{-y\sin\nu\omega}$

$2\log\sin$

$\log 2+\log\left(\frac{1}{2}\omega\right)$ $e^{-2\nu+}$ $\left(q-e^{-2y}\right)2$ $\frac{\omega}{n}$

$\frac{\omega}{n}\left(1-e^{-2y}\right)$ $\frac{3}{10}$ $3{,}14$ $0{,}3$

$\int dq\, e^{-y\sin\nu\cdot q}$

$\int dq\left(\frac{e^{-g\sin\nu\cdot q}}{g\sin q}\, g\sin q\,,\right) = \frac{e^{-g\sin\nu\cdot q}}{g\sin q} + w$

$e^{-g\sin\nu\cdot q} = e^{-g\sin\nu\cdot q} + e^{-g\sin\nu\cdot q}\left(\frac{1}{g\sin q}\right)' + \frac{\partial w}{\partial q}$

$w = -\int dq\left(\frac{1}{g\sin q}\right)' e^{-g\sin\nu\cdot q} = \int dq\, e^{-g\sin\nu q}\, g\sin q\left(\frac{1}{-g\sin q}\right)'$

$= e^{-g\sin\nu\cdot q}\, \frac{1}{g\sin q}\left(\frac{1}{g\sin q}\right) + w$

on fera de même sur le calcul pour cinq équations et cinq inconnues en donnant à x les valeurs $0, \frac{r}{5}, \frac{2r}{5}, \frac{3r}{5}, \frac{4r}{5}$, et l'on connaîtra les nouvelles valeurs des cinq coefficients.

comme les valeurs de (x) sont données en nombres par les observations très multiplié dans ces calculs il est nécessaire que il faudra donc continuer ces calculs jusqu'à ce que je reconnaisse que les nouveaux coefficients sont extrêmement petits et que les coefficients qui avaient été déterminés par les calculs précédents ne changent presque plus de valeurs. on sera alors assuré que les coefficients inconnus $a, b, c, d,$ &c sont déterminés avec une précision suffisante

ce procédé de calcul est à la vérité imparfait mais il est régulier et il se vérifie par lui même. comme la question dont il s'agit est purement théorique il serait peut être superflu d'employer une autre analyse et d'ailleurs cette analyse ne pourrait avoir pour objet que de perfectionner le procédé même qui est fondamental et de même genre.

Dans le calcul précédent on suppose nulle la température du pole. par conséquent il faudra dans les applications former d'après les observations connues une table de température moyennes pour les divers parallèles exprimée en degrés du thermomètre centésimal. 2° retrancher de chaque température celle du pole. 3° rapporter ce calcul aux distances d'après les mêmes tables, mesurées au plus grand cercle.

L'une des équations $v = A \cos(px)\, \varphi(ky)$ satisfait à l'équation (1), et l'on a

$$\varphi y = 1 + \frac{1}{2^2} y^2 + \frac{1}{2^2 \cdot 4^2} y^4 + \frac{1}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} y^6 + \&c \qquad \text{ou} \quad \varphi y = \int_0^{\omega} dq\, e^{y \cos q}$$

l'intégrale étant prise depuis $q = 0$ jusqu'à $q = \omega$ le second membre est une fonction de y égale à la limite. on aura aussi

$$(2) \qquad v = a \cos\left(\frac{\omega x}{2r}\right) \frac{\varphi\left(\frac{\omega y}{2r}\right)}{\varphi\left(\frac{\omega}{2}\right)} + b \cos\left(\frac{3\omega x}{2r}\right) \frac{\varphi\left(\frac{3\omega y}{2r}\right)}{\varphi\left(\frac{3\omega}{2}\right)} + c \cos\left(\frac{5\omega x}{2r}\right) \frac{\varphi\left(\frac{5\omega y}{2r}\right)}{\varphi\left(\frac{5\omega}{2}\right)}$$

cette équation n'est autre chose que l'équation précédente (2)

ou aussi $$v = \sum_{i=1}^{i=\infty} a_i \cos\left(\overline{2i-1} \cdot \frac{\omega x}{2r}\right) \frac{\varphi\left(\overline{2i-1}\, \frac{\omega y}{2r}\right)}{\varphi\left(\overline{2i-1}\, \frac{\omega}{2}\right)}$$ si l'on suppose $y^2 + x^2 = r^2$

on aura $$fx = \sum a_i \cos\left(\overline{2i-1} \cdot \frac{\omega}{2} \frac{x}{r}\right) \frac{\varphi\left(\overline{2i-1}\, \frac{\omega}{2}\left(1 - \frac{x^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)}{\varphi\left(\overline{2i-1} \cdot \frac{\omega}{2}\right)}$$ et c'est par

cette équation qu'il faut déterminer les coefficients a_i.

on a $\varphi(y) = \int_0^{\omega} dq\, e^{y \cos q} = e^y \int_0^{\omega} dq\, e^{-y \sin^2 q}$.

on développera par à la fraction $\left(1 - \frac{x^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}}$

$1 - \frac{1}{2}\frac{j^2}{m^2}$

$1 - \frac{j^2}{2m^2}$

$e^{\frac{\omega}{2} - \frac{j^2\omega}{4m^2}} = e^{\frac{\omega}{2}} e^{-\frac{j^2\omega}{4m^2}}$

$e^{-\frac{\omega}{4}\frac{j^2}{m^2}} = e^{-\omega}$

$e^{-\frac{\omega}{4}\frac{j^2}{m^2}} \quad e^{\frac{1}{2}}$

$\frac{\omega}{m^2} e^{-\frac{3}{4}} \quad e^{-\frac{3\omega}{10}}$

$e^{-\frac{1}{2}}$

$m^2 - j^2$

$\frac{9}{25} \quad \frac{3}{5}$

$\log K = \frac{\omega}{2}\left(\frac{m^2-j^2}{m^2}\right)^{\frac{1}{2}} \log e$

$\frac{\omega}{2} \log e$

$\frac{\frac{\omega}{2}\log e \left(m^2-j^2\right)^{\frac{1}{2}}}{m}$

$\frac{1}{2m}\omega \log e \cdot \sqrt{m^2-j^2}$

$e^{\frac{\omega}{2}} - e^{-\frac{\omega}{2}}$

$e^{-\frac{\omega}{2}}$

$\frac{e}{1-e^{-\omega}}$

$\log \log K = \log \sqrt{2i-1} + \log\left(\frac{1}{2}\omega\right) + \log\log e + \frac{1}{2}\log(m^2-j^2) - \frac{1}{2}\log m^2$

$\log \frac{1}{2}\omega + \log\log e - \frac{1}{2}\log m^2 + \frac{1}{2}\log(m^2-j^2) + \log(2i-1)$

$-\frac{\log e^2 \, \partial m \sin j\omega}{2m^2} \quad \frac{\partial m}{2m}$

$-\int \left(\frac{1}{m^2}\right) \tan\left(\frac{j\omega}{2m}\right)$

$\frac{1}{2}\left(1-\frac{j^2}{m^2}\right)^{-\frac{1}{2}} 2j \frac{\partial m}{m^2}$

$\frac{j^2\left(1-\frac{j^2}{m^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \int \frac{\partial m}{m^2}}{\left(1-\frac{j^2}{m^2}\right)^{\frac{1}{2}}}$

$\int \frac{j^2}{m^2} \frac{1}{1-\frac{j^2}{m^2}} \quad \int \frac{j^2 \, \partial m}{m^2 - j^2}$

$\int^3 \frac{1}{27} + \frac{1}{2} e^{-\frac{7\omega}{m^2}}$

$\log \log$

$10^x = e^{x'}$

$x = x' \log e$

$e^{\frac{\omega}{2}\left(\frac{m^2-j^2}{m^2}\right)^{\frac{1}{2}}} = K$

$\frac{\omega}{2}\left(\frac{m^2-j^2}{m^2}\right)^{\frac{1}{2}} \log e = \log K$

$\log\log K = \log\log e + \log\frac{1}{2}\omega + \frac{1}{2}\log\left(\frac{m^2-j^2}{m^2}\right)$

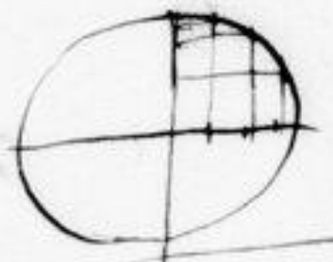
j^2-1	24	$\sqrt{24}$
j^2-2^2	21	$\sqrt{21}$
j^2-3^2	16	4
j^2-4^2	9	3

$e^{\frac{\omega}{2}}$

$\frac{24}{25} \quad \frac{21}{25}$

$\frac{9}{25} \quad \frac{3}{5}$

3^2 9	30
3^3 27	900
3^4 81	810
3^4 243	27000



$\log(1-x)$

a

$\tan\frac{j\omega}{2m} \quad \frac{e}{1-e^{-\omega}}$

$\arccos x = y \quad -\frac{\omega}{2}\log e - \log\left(1-e^{-2}\right)$

$x = \omega^y$

$\log x = \log \omega^y$

$-\omega$

$1 - e$

-2ω

$1 - e$

$-\log(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

$e^{-\omega} + \frac{1}{2}e^{-2\omega} + \frac{1}{3}e^{-3\omega}$

$1 - \frac{1}{\omega}$

e

$3^{3\ 1-\frac{1}{27}}$

$\frac{1}{e^{\frac{1}{2}\omega} - e^{-\frac{1}{2}\omega}}$

$-\frac{1}{2}\omega$

$\frac{e}{1-e^{-\omega}}$

$e^{-\frac{1}{2}\omega}\left(1 + e^{-\omega} + e^{-2\omega} + e^{-3\omega} + e^{-4\omega} + \cdots\right)$

$-\frac{3\omega}{2}$

$\frac{e}{1-e^{-3\omega}}$

$e^{-\frac{3\omega}{2}}\left(1 + e^{-3\omega} + e^{\cdots}\right)$

$\frac{m^2-1^2}{m^2} \quad 2m^2 - m^2 + 2m - 1 \quad \frac{1}{2} \quad \omega \frac{m-1}{m}\frac{\omega}{2} \quad \omega\frac{\omega}{2} \quad \omega\frac{\omega}{2m}$

$\frac{2m}{m^2} \quad \frac{2}{m}\left(\frac{m}{2}\right)$

$\frac{\omega}{2} - \frac{\omega}{2m} \quad -\sin\frac{\omega}{2} \quad \sin\frac{\omega}{2m} \quad 1 + \frac{\omega^2}{m}$

$\sqrt{m} \quad e^{\frac{\omega}{\sqrt{m}}} - e^{-\frac{\omega}{\sqrt{m}}}$

$\frac{2}{\sqrt{m}}$

$a \cdot \frac{\omega}{2m}\sqrt{m} \quad \frac{a\omega}{\sqrt{m}}$

$1 + \frac{\omega}{\sqrt{m}} + \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{m}$

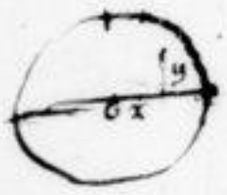
$1 - \frac{\omega}{\sqrt{m}} + \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{m}$

$$\text{et on en conclura } \varphi(y) = \frac{e^{y}\left(1-e^{-2y}\right)}{2y} = \frac{e^{y}-e^{-y}}{2y}$$

ainsi on trouvera pour la valeur de v. donnée par l'équation (2)

$$v = a\cos\left(\frac{\varpi x}{2r}\right)\left(\frac{e^{\frac{\varpi y}{2r}} - e^{-\frac{\varpi y}{2r}}}{e^{\frac{\varpi}{2}} - e^{-\frac{\varpi}{2}}}\right)\frac{r}{y} + \alpha$$

$$(2)) \quad v = a\cos\left(\frac{\varpi x}{2r}\right)\frac{r}{y}\left(\frac{e^{\frac{\varpi y}{2r}} - e^{-\frac{\varpi y}{2r}}}{e^{\frac{\varpi}{2}} - e^{-\frac{\varpi}{2}}}\right) + b\cos\frac{3\varpi x}{2r}\cdot\frac{r}{y}\left(\frac{e^{\frac{3\varpi y}{2r}} - e^{-\frac{3\varpi y}{2r}}}{e^{\frac{3\varpi}{2}} - e^{-\frac{3\varpi}{2}}}\right) + \alpha$$



mais on ne doit pas perdre de vue qu'on a ici une valeur seulement approchée on fera maintenant $y = (r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$ et l'on fera $v = fx$. afin de déterminer les coefficients inconnus a, b, c &c soit ϖ divisé en un nombre m de parties, on fera $x = j\frac{r}{m}$ dans le second membre de l'équation (2) et dans le premier on aura donc

$$(3) \quad f\left(j\frac{r}{m}\right) = a\cos\left(\frac{j\varpi}{2m}\right)\left(1-\frac{j^2}{m^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{e^{\frac{\varpi}{2}\left(1-\frac{j^2}{m^2}\right)^{\frac{1}{2}}} - e^{-\frac{\varpi}{2}\left(1-\frac{j^2}{m^2}\right)^{\frac{1}{2}}}}{e^{\frac{\varpi}{2}} - e^{-\frac{\varpi}{2}}} + \&c.$$

$$+ b\cos\left(\frac{3j\varpi}{2m}\right)\left(1-\frac{j^2}{m^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{e^{\frac{3\varpi}{2}\left(1-\frac{j^2}{m^2}\right)^{\frac{1}{2}}} - e^{-\frac{3\varpi}{2}\left(1-\frac{j^2}{m^2}\right)^{\frac{1}{2}}}}{e^{\frac{3\varpi}{2}} - e^{-\frac{3\varpi}{2}}}$$

$$+ \&c$$

si l'on fait successivement $j = 0, 1, 2, 3, 4 \ldots m-1$ on aura m équations on prendra donc les coefficients a, b, c, d, &c en nombre m la première de ces équations sera

$$f(0) = a + b + c + d + \&c$$

continuée jusqu'à ce qu'il y ait m coefficients pour calculer plus facilement ces équations (3) on fera les remarques suivantes on prendra d'abord la valeur de $\varpi\log e$ en divisant par log 2 le logarithme hyperbolique de $e^{-\varpi}, e^{-2\varpi}, e^{-3\varpi}, e^{-4\varpi}$ en cherchant les nombres dont on déterminera aussi les logarithmes $-\varpi\log e, -2\varpi\log e, -3\varpi\log e$. Il sera facile de connaître le logarithme de $\frac{1}{e^{\frac{\varpi}{2}} - e^{-\frac{\varpi}{2}}}$ ou de $\frac{e^{-\frac{1}{2}\varpi}}{1-e^{-\varpi}}$ ce logarithme est la quantité suivante $-\frac{1}{2}\varpi\log e - \log(1-e^{-\varpi})$ ou $-\frac{1}{2}\varpi\log e + \left(e^{-\varpi} + \frac{e^{-2\varpi}}{2} + \frac{e^{-3\varpi}}{3} + \ldots\right)\log e$

on a aussi $\log\left(\frac{1}{e^{\frac{3\varpi}{2}} - e^{-\frac{3\varpi}{2}}}\right) = -\frac{3}{2}\varpi\log e + \left(e^{-3\varpi} + \frac{1}{2}e^{-6\varpi} - \ldots\right)\log e$

$$\log\frac{1}{e^{\frac{3\varpi}{2}} - e^{-\frac{3\varpi}{2}}} = -\frac{3}{2}\varpi\log e + \left(e^{-3\varpi} - \ldots\right)\log e$$

ainsi le logarithme des fractions qui servent de dénominateurs seront d'abord connus.

$$1+x+\frac{x^2}{2\cdot3}+\frac{x^3}{1\cdot2\cdot4}+\frac{x^4}{1\cdot2\cdot4\cdot5}+\frac{x^5}{1\cdot2\cdot4\cdot6\cdot7}+\frac{x^6}{2\cdot3\cdot4\cdot6\cdot7\cdot8}+\cdots$$

$$1-x+\frac{x^2}{1\cdot2}-\frac{x^3}{1\cdot2\cdot4}+\frac{x^4}{1\cdot2\cdot4\cdot5}-\frac{x^5}{1\cdot2\cdot4\cdot5\cdot7}+\cdots$$

$$\frac{e^x-e^{-x}}{2x}$$

$$1+\frac{x^2}{2\cdot3}+\frac{x^4}{1\cdot3\cdot4\cdot5}+\frac{x^6}{1\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}+\cdots$$

$$\frac{1}{1\cdot3\cdot4\cdot5\cdot7}-\frac{1}{2\cdot2\cdot4\cdot6\cdot7}$$

$$1+\frac{x^2}{2\cdot2}+\frac{x^4}{2\cdot2\cdot4\cdot4}+\frac{x^6}{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6}+\cdots$$

$$\frac{1}{2\cdot4\cdot6}\left(\frac{1}{3\cdot5\cdot7}-\frac{1}{2\cdot4\cdot6}\right)$$

$$x^2\left(\frac{1}{1\cdot3}-\frac{1}{2\cdot2}\right)+x^4\left(\frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5}-\frac{1}{2\cdot2\cdot4\cdot4}\right\}+\cdots$$

$$\frac{x^2}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)+\frac{x^4}{1\cdot4}\left(\frac{1}{3\cdot5}-\frac{1}{2\cdot4}\right)$$

$$+\frac{x^6}{1\cdot4\cdot6}\left(\frac{1}{3\cdot5\cdot7}-\frac{1}{2\cdot4\cdot6}\right)$$

$$-\log(1-x)=x+\frac{x^2}{2}\cdots$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots$$

$$\frac{x^2}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\frac{x^4}{3\cdot4}\left(\frac{1}{2\cdot4}-\frac{1}{3\cdot5}\right)+\frac{x^6}{1\cdot4\cdot6}\left(\frac{1}{2\cdot4\cdot6}-\frac{1}{3\cdot5\cdot7}\right)$$

$$1+\frac{x^2}{1\cdot3}+\frac{x^4}{1\cdot3\cdot4\cdot5}+\frac{x^6}{1\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}+\cdots$$

$$+\cdots\frac{1}{m+2\cdot m+4}-\frac{1}{m+3\cdot m+5}$$

$$\frac{m^2+8m+3\cdot5}{-m^2-6m-7\cdot4}$$

$$\frac{2m+3\cdot5-2\cdot4}{m^4}$$

$$\frac{3}{2}\quad\frac{3\cdot5}{2\cdot4}\quad\frac{3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6}\quad\frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{a\,b\,c\,d\,e}-\frac{1}{a+1\;b+1\cdot c+1\cdot d+1\;e+1}$$

$$\frac{a+1}{b+1}$$
$$\frac{ab+a+b+1}{c}$$

$$a+b+c+c-d$$

$$\frac{105}{48}\quad\frac{5}{64}\quad\frac{1}{80}$$
$$\frac{57}{48\cdot105}$$

$$\frac{1}{6}\quad\frac{7}{120}$$

$$\frac{1}{6},\frac{1}{17}\quad\frac{1}{80}$$

$$\frac{e^{m\lambda}-e^{-m\lambda}}{e^m-e^{-m}}$$

$$\frac{e^{m\lambda}}{e^{m}}\left\{\frac{1-e^{-2m\lambda}}{1-e^{-2m}}\right\}$$

$$m\log e-m\log e$$

$$m\log e(\lambda-1)+e^{-2m}+e^{-4m}+e^{-6m}$$
$$-e^{-2m\lambda}-e^{-4m\lambda}-e^{-6m\lambda}$$
$$+e^{-2m\lambda}+e^{-4m\lambda}+e^{-6m\lambda}$$
$$-e^{-2m}-e^{-4m}-e^{-6m}$$
$$+e^{-2m}+e^{-4m}+e^{-6m}$$
$$+e^{-2m}-e^{-4m}+e^{-6m}-e^{-8m}$$

on calculera $\left(1-\frac{d^2}{m^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ depuis $d=0,1,2$ jusqu'à $d=m-1$

ce qui donnera lieu de construire le logarithme de $\left(1-\frac{d^2}{m^2}\right)^{\frac{1}{2}}$

il faudra multiplier $\frac{\varpi}{2}$ log par les valeurs trouvées de $\left(1-\frac{d^2}{m^2}\right)^{\frac{1}{2}}$

après avoir ainsi préparé le calcul on trouvera facilement les logarithmes de toutes les quantités qui multiplient $a, b, c,$ &c en ordonnant ainsi l'opération on trouvera les équations qui doivent donner $a, b, c, d,$ &c en nombre m.

après cela on doublera le nombre m en supposant $x = \frac{r}{2m}, \frac{2r}{2m}, \frac{3r}{2m}, \frac{4r}{2m}$ &c ce qui donnera lieu de calculer un nombre $2m$ de nouvelles équations et un nombre $2m$ d'inconnues $a, b, c, d,$ &c. on comparera le résultat du second calcul au résultat du premier et l'on trouvera que le nombre m est alors grand en négligeant que les m coefficients du premier calcul n'diffèrent que très peu des m premiers coefficients du second. par ce moyen on pourra déterminer ces nombres les valeurs des coefficients a, b, c, d &c et les substituant dans l'équation (2) de la page 3 on aura la solution cherchée.

---

on peut aussi se rappeler que si dans cette équation (2) de la page 3 on fait $y=0$ la fonction φ qui contient y devient égale à l'unité on a donc

$$v = \frac{a}{\varphi(\frac{1}{2}\omega)} \cos\frac{\omega x}{2r} + \frac{b}{\varphi(\frac{2}{2}\omega)} \cos\left(\frac{3\omega x}{2r}\right) + \frac{c}{\varphi(\frac{3}{2}\omega)} \cos\left(\frac{5\omega x}{2r}\right) + \&c$$

cette valeur de V exprime la température des points de l'axe du cylindre en désignant donc par Fx cette température d'un point quelconque de l'axe on a

$$Fx = \frac{a}{\varphi(\frac{1}{2}\omega)} \cos\frac{\omega x}{2r} + \&c$$

supposons donc que l'on ait trouvé la fonction Fx en sorte que l'on ait

$$Fx = \alpha \cos\left(\frac{\omega x}{2r}\right) + \beta \cos\left(\frac{3\omega x}{2r}\right) + \gamma \cos\left(\frac{5\omega x}{2r}\right) + \&c$$

on aura $a = \alpha\,\varphi(\frac{1}{2}\omega)$, $b = \beta\,\varphi(\frac{3}{2}\omega)$, $c = \gamma\,\varphi(\frac{5}{2}\omega)$

$$f_x = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{1-2x} + \frac{c}{1-3x} + \frac{d}{1-4x}$$

$$a + ax + ax^2 + ax^3 + ax^4 + ax^5$$

$$b + 2b + 2^2b + 2^3b + 2^4b + 2^5b$$

$$c + 3c + 3^2c + 3^3c + 3^4c + 3^5c$$

$$d + 4d + 4^2d + \cdots$$

$$a + b + c + d \cdots = A$$

$$a + 2b + 3c + 4d \cdots = B$$

$$a + 2^2b + 3^2c + 4^2d \cdots = C$$

2

$$f_x = \frac{a}{1+x} + \frac{b}{1+2x} + \frac{c}{1+3x} + \frac{d}{1+4x} + \cdots$$

$$f'_x =$$

$$f_x = a\log(1+x) + \frac{1}{2}b\log(1+2x) + \frac{1}{3}c\log(1+3x) + \cdots$$

$$\log(1+x)^a + \log(1+2x)^{\frac{b}{2}} + \cdots$$

$$a + b = 1 \qquad 4a + 5b = 0$$

$$\frac{2}{3}a + \frac{1}{2}b = 0$$

$$a + b = 1$$

$$\frac{a}{1+\frac{1}{2}} + \frac{b}{1+\frac{2}{2}} = 0$$

$$a + b = 1$$

$$\frac{a(1+\frac{2}{2})}{1+\frac{1}{2}} + b = 0$$

$$a\left(\frac{1+\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} - \frac{1+\frac{2}{2}}{1+\frac{1}{2}}\right) = 1$$

$$a = -\frac{1}{3}$$

$$b = \frac{4}{3}$$

$$a + b + c = 1$$

$$\frac{a}{1+\frac{1}{3}} + \frac{b}{1+\frac{2}{3}} + \frac{c}{1+\frac{3}{3}} = 0$$

$$\frac{a}{1+\frac{2}{3}} + \frac{b}{1+\frac{4}{3}} + \frac{c}{1+\frac{6}{3}} = 0$$

$$a + b + c = 1$$

$$\frac{2a}{1+\frac{1}{3}} + \frac{2b}{1+\frac{2}{3}} + c = 0$$

$$\frac{3a}{1+\frac{2}{3}} + \frac{3b}{1+\frac{4}{3}} + c = 0$$

$$a\left(1 - \frac{2}{1+\frac{1}{3}}\right) + b\left(1 - \frac{2}{1+\frac{2}{3}}\right) = 1$$

$$a\left(1 - \frac{3}{1+\frac{2}{3}}\right) + b\left(1 - \frac{3}{1+\frac{4}{3}}\right) = 1$$

$$a\,\frac{1-\frac{2}{1+\frac{1}{3}}}{1-\frac{2}{1+\frac{2}{3}}} + b = \frac{1}{1-\frac{2}{1+\frac{3}{3}}}$$

$$a\,\frac{1-\frac{3}{1+\frac{1}{3}}}{1-\frac{3}{1+\frac{4}{3}}} + b = \frac{1}{1-\frac{3}{1+\frac{4}{3}}}$$

$$1 - \frac{2.3}{3} \quad -\frac{1}{3}$$

$$1 - \frac{3.3}{7}$$

$$1 - \frac{3.3}{7} \quad -\frac{2}{7}$$

$$\frac{-b}{4} \quad 1 - \frac{3.3}{4}$$

$$1 - \frac{2.3}{4} \quad -\frac{3}{4}$$

$$1 - \frac{3}{2}$$

$$-\frac{1}{2} : -\frac{1}{3} \quad 1 - \frac{3.3}{3}$$

$$1 - \frac{2.3}{3} \quad -\frac{1}{2}$$

$$\frac{5}{2}a + b = -\frac{3}{3}$$

$$\frac{33}{6}a + b = -\frac{7}{2}$$

$$\frac{13}{8}a = \frac{17}{2}$$

$$13a = 4.17$$

$$a = 68$$

(se rapporte aux températures terrestres)

on aura l'intégrale suivante :

$$v = \frac{2b.\pi}{k\omega} \int_0^\infty \frac{dp\, e^{-p^2 \frac{k\theta}{c.D}}}{p^2 + \frac{\pi^2}{k^2}} \left(\frac{\pi}{k.k} \frac{\sin(p\pi)}{p^2} + \cos p\pi \right)$$

pour exprimer la valeur de la température ayant la terre θ dans un solide infiniment profond échauffé également dans toute sa masse et dont la surface se dirige par la loi de Dans le vide entretenue à une température constante 0. Sur la température initiale et sa profondeur.

Soit $g = \frac{\pi}{k}$, $\frac{k\theta}{c.D} = t$ on aura $\frac{v\sigma}{2b} = g \int_0^\infty \frac{dp\, e^{-p^2 t}}{p^2+g^2} \left(\frac{g}{p} \sin p\pi + \cos p\pi \right)$

$$\frac{v\sigma}{2bg} = \int_0^\infty \frac{dp\, e^{-p^2 t}}{p^2+g^2} \left\{ 1 + gu - \left(\frac{u^2}{2} + \frac{gu^3}{1.3} \right) p^2 + \left(\frac{u^4}{2.3.4} + \frac{gu^5}{1.3.4.5} \right) p^4 - \alpha \right\}$$

Soit $\varphi = \int_0^\infty \frac{dp\, e^{-p^2 t}}{p^2+g^2}$ | on aura $\frac{d\varphi}{dt} = -t \int_0^\infty \frac{dp \cdot p^2 e^{-p^2 t}}{p^2+g^2}$ | $\frac{d^2\varphi}{dt^2} = t^2 \int_0^\infty \frac{dp\, p^4 e^{-p^2 t}}{p^2+g^2}$

$$\frac{d^3\varphi}{dt^3} = -t^3 \int_0^\infty \frac{dp\, p^6 e^{-p^2 t}}{p^2+g^2}$$ on aura donc

$$\frac{dv}{2bg} = \overline{1+gu} \cdot \varphi + \left(\frac{u^2}{2} + \frac{gu^3}{1.3} \right) \frac{1}{t} \cdot \frac{d\varphi}{dt} + \frac{u^4}{2.3.4} + \frac{gu^5}{2.3.4.5} \cdot \frac{1}{t^2} \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \&c$$

$$\text{ou } \frac{dv}{2bg} = \overline{1+gu} \cdot \varphi + \frac{u^2}{2t} \cdot \frac{d\varphi}{dt} \left(1 + \frac{gu}{3} \right) + \frac{u^4}{2.3.4} \frac{1}{t^2} \left(1 + \frac{gu}{5} \right) \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{u^6}{2.3.4.6.t^3} \left(1 + \frac{4u}{7} \right) \frac{d^3\varphi}{dt^3}$$

en désignant par V la température variable de la surface, on a $V = \frac{2bg}{\omega} \varphi$. donc

$$(1) \quad v = \overline{1+gu} \cdot V + \frac{u^2}{2t} \overline{1+\frac{gu}{3}} \cdot \frac{dV}{dt} + \frac{u^4}{2.3.4t^2} \cdot \overline{1+\frac{gu}{5}} \cdot \frac{d^2V}{dt^2} + \frac{u^6}{2.3.4.6t^3} \left(1 + \frac{gu}{7} \right) \frac{d^3V}{dt^3} + \&c$$

par cette équation la température variable v d'un point quelconque placé à la profondeur u se trouve en fonction au moyen de la fonction V qui exprime la température variable de la surface, et l'on voit comment cette fonction et ses différentiels de divers ordres entrent avec u et t dans l'expression de v. Il faut maintenant calculer cette valeur de V

on a $V = \frac{2b\pi}{k\omega} \int_0^\infty \frac{dp\, e^{-p^2 \frac{k\theta}{c.D}}}{p^2 + \frac{\pi^2}{k^2}}$ et on en a enfin $V = \frac{2b}{\sqrt{\pi}} e^{X^2} \int_X^\infty dx\, e^{-x^2}$ la limite X est celle donnée $X = \frac{\pi\sqrt{\theta}}{\sqrt{k.c.p}}$. Il reste donc à calculer l'intégrale indéfinie $\int dx\, e^{-x^2}$. pour cela on a les équations suivantes

$$\int x\, e^{-x^2} = c - \frac{e^{-x^2}}{2x^0} + \frac{e^{-x^2}}{2^2x^2} - \frac{3e^{-x^2}}{2^3x^4} + \frac{3.5.e^{-x^2}}{2^4x^6} - \frac{3.5.7\, e^{-x^2}}{2^5x^8} + W$$

$$e^{-x^2} = e^{-x^2} + \frac{1}{2x^2} e^{-x^2} - \frac{1}{2x^4} e^{-x^2} - \frac{3}{2^2x^6} e^{-x^2} + \frac{3.5}{2^3x^8} e^{-x^2} + \frac{3}{2^2x^4} e^{-x^2} - \frac{3.5}{2^3x^6} e^{-x^2} - \frac{3.5.7}{2^4x^8} e^{-x^2}$$

$$+ \frac{3.5.7\, e^{-x^2}}{2^4x^8} + \frac{3.5.7.9}{2^5x^{10}} e^{-x^2} + \frac{dW}{dx}$$

$$\int \frac{x\,e^{-x^2}}{x^2} < \frac{1}{x} - \frac{1}{x}$$

$$\int \frac{x\,e^{-x^2}}{x^4} < \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{3x^3}$$

$$-\frac{1}{2x} + \frac{3}{2^2}\cdot\frac{1}{3x^3} - \frac{3\cdot5}{2^3}\cdot\frac{1}{5x^5} + \frac{3\cdot5\cdot7}{2^4}\cdot\frac{1}{7x^7} - \frac{3\cdot5\cdot7}{2^5}\cdot\frac{1}{9x^9}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{x} + \frac{1}{2^2}\frac{1}{x3} - \frac{3}{2^3}\cdot\frac{1}{x^5} + \frac{3\cdot5}{2^4}\frac{1}{x^7}$$

$$t = \frac{k\theta}{c\cdot v}$$

$$h^2 t = \frac{H^2}{K^2}\cdot\frac{k\theta}{c\cdot v} = \frac{H^2\theta}{K\cdot c\cdot v}$$

$$\frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}\frac{Kc\cdot v}{H^2\theta}$$

$$\frac{6K\sqrt{c\cdot v}}{h\sqrt{\pi}\sqrt{K}\sqrt{\theta}} = \frac{6\sqrt{Kc\cdot v}}{H\sqrt{\pi}\sqrt{\theta}}$$

$$\frac{6\sqrt{K\cdot c\cdot v}}{H\sqrt{\pi}\sqrt{\theta}}$$

$$n = 365$$

$$\frac{Kc\cdot v}{2h^2\theta} < \frac{1}{n}$$

$$T > \frac{K\cdot c\cdot v\cdot n}{2H^2\cdot 365\cdot 24\cdot 60}$$

$$\frac{Kc\cdot v}{2H^2\theta}$$

$$\theta > \frac{K\cdot c\cdot v\cdot n}{2H^2}$$

$$T > \frac{K\cdot c\cdot v}{2H^2\cdot 24\cdot 60}$$

$$T > \frac{3\cdot 1615\cdot n\cdot 25}{365\cdot 12\cdot 60}$$

$$T > \frac{325\cdot 5\cdot n}{73\cdot 12\cdot 12}$$

$$\frac{144}{73}$$

$$\frac{432}{1005}$$

$$\frac{1008}{1005}$$

$$T > \frac{3\cdot 1615\cdot 25}{2\cdot 24\cdot 60}$$

$$T' > \frac{325\cdot 25}{2\cdot 24\cdot 60}$$

$$\frac{uc\cdot v}{2K\theta} < \frac{1}{n}$$

$$\theta > \frac{u\cdot c\cdot v\cdot n}{2K}$$

$$T' > \frac{1000}{3}\cdot\frac{3\cdot 325\cdot n}{3\cdot 365\cdot 24}$$

$$T > \frac{u\cdot c\cdot v\cdot n}{K\cdot 365\cdot 24\cdot 60}$$



$$T' > \frac{1000\cdot 1615\cdot n}{3\cdot 365\cdot 24\cdot 60}$$

$$\int \frac{2\pi p\,e^{-p^2t}}{p^2+q^2}\,m \qquad y = \int \frac{2\pi p\,e^{-p^2t}}{p^2+\frac{H^2}{K^2}}$$

$$\int \frac{2\pi p\,e^{-p^2t}}{p^2+q^2} \qquad p^2t = q^2 \qquad q = p\sqrt{t}$$

$$p\sqrt{t} = q \qquad \frac{1}{\sqrt{t}}\int \frac{2\pi q\,e^{-q^2}}{\frac{q^2}{t}+q^2}$$

$$dp = \frac{dq}{\sqrt{t}}$$

$$y = \frac{2\pi g\sqrt{t}}{\omega}\int \frac{2\pi q\,e^{-q^2}}{q^2+g^2t}$$

$$\sqrt{t}\cdot\int \frac{2\pi q\,e^{-q^2}}{q^2+g^2t}$$

on obtient par ω un qui manque pour compléter l'intégrale.
or la seconde équation fait voir que l'on a $\omega = -\int \frac{3\cdot5\cdot7\cdot9}{2^5 z^{10}} e^{-z^2} dz$ $\left.\right\}$
on déterminera la constante C en sorte que l'intégrale commence lorsque $z = X$ et l'on aura pareillement à la même condition l'intégrale qui donne la valeur de ω on aura:

$$\int_X^x dz e^{-z^2} = \left(\frac{e^{-x^2}}{2x} - \frac{e^{-x^2}}{2x}\right) - \left(\frac{e^{-x^2}}{2^2x^3} - \frac{e^{-x^2}}{2^2x^3}\right) + \left(\frac{3e^{-x^2}}{2^3x^5} - \frac{3e^{-x^2}}{2^3x^5}\right) - \left(\frac{3\cdot5e^{-x^2}}{2^4x^7} - \frac{3\cdot5e^{-x^2}}{2^4x^7}\right)$$

$$+ \left(\frac{3\cdot5\cdot7e^{-x^2}}{2^5x^9} - \frac{3\cdot5\cdot7e^{-x^2}}{2^5x^9}\right) - \int_X^\infty \frac{3\cdot5\cdot7\cdot9}{2^5x^{10}} e^{-z^2}$$ s'achevant en subst $z = \frac{1}{0}$

ou aussi

$$\int_X^\infty dz e^{-z^2} = \frac{e^{-x^2}}{2x} - \frac{e^{-x^2}}{2x^3} + \frac{3e^{-x^2}}{2^3x^5} - \frac{3\cdot5e^{-x^2}}{2^4x^7} + \frac{3\cdot5\cdot7e^{-x^2}}{2^5x^9} - \int_X^\infty \frac{3\cdot5\cdot7\cdot9}{2^5x^{10}} e^{-z^2}$$

$$\text{ou} \int_X^\infty dz e^{-z^2} = \frac{e^{-x^2}}{2x}\left(1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{3}{(2x^2)^2} - \frac{3\cdot5}{(2x^2)^3} + \frac{3\cdot5\cdot7}{(2x^2)^4} - \frac{x^2}{e^{x^2}}\int_X^\infty \frac{3\cdot5\cdot7\cdot9}{(2x^2)^5} e^{-z^2}\right)$$

on peut dans certains cas par la série qui donnera la valeur de l'intégrale cherchée. on peut encore par exemple

$$\int_X^\infty dz\, e^{-z^2} = \frac{e^{-x^2}}{2x} - \frac{1}{2^2}\int_X^\infty \frac{dz e^{-z^2}}{z^2}$$

$$= \frac{e^{-x^2}}{2x} - \frac{e^{-x^2}}{2^2x^3} + \frac{3}{2^2}\int_X^\infty \frac{dz e^{-z^2}}{z^4}$$

$$= \frac{e^{-x^2}}{2x} - \frac{e^{-x^2}}{2^2x^3} + \frac{3e^{-x^2}}{2^3x^5} - \frac{3\cdot5}{2^3}\int_X^\infty \frac{dz e^{-z^2}}{x^6}$$ ainsi de suite.

il est exactement démontré par ce développement que le 1er terme $\frac{e^{-x^2}}{2x}$ est plus grand que l'intégrale cherchée, que la somme des deux premiers est trop petite que la somme des trois premiers est trop grande ainsi de suite. et ce la est incontestable puisque la somme exprimée [illegible] il suit de là que l'on peut chaque fois exprimer la valeur de $\int_x^\infty dz e^{-z^2}$ par l'équation suivante

$$(2)\quad \frac{x^2}{e}\int_X^\infty dz e^{-z^2} = \frac{1}{2x}\left(1 - \frac{1}{(2x^2)^1} + \frac{3}{(2x^2)^2} - \frac{3\cdot5}{(2x^2)^3} + \frac{3\cdot5\cdot7}{(2x^2)^4} - \frac{3\cdot5\cdot7\cdot9}{(2x^2)^5} + \cdots\right)$$

et que la série reste [illegible] en donnant toujours une valeur limite.
on a trouvé $\gamma = \frac{2b}{\sqrt{\pi}}$ $\frac{x^2}{e}\int_X^\infty dz e^{-z^2}$ et $X = \frac{H\sqrt{\theta}}{\sqrt{K\cdot C\cdot D}}$ donc $2x^2 = \frac{2H^2\theta}{K\cdot C\cdot D}$ par conséquent si x ou $\frac{H\sqrt{\theta}}{\sqrt{KC\cdot D}}$ [illegible] $\frac{H^2\theta}{KC\cdot D}$ [illegible]

$$\frac{1000}{363} \cdot \frac{200}{73} \frac{1}{24.6} \quad \frac{100}{73.72} \qquad \frac{73}{72}$$

$$T > \frac{K \cdot C \cdot D}{H^2} \cdot \frac{1}{52} \qquad 1.46$$

$$T > \frac{3.1625 \cdot 55}{52} \qquad \frac{511}{323.6}$$

$$V = \frac{2}{c} \cdot \frac{H}{K} \int_0^a \frac{dp\, e^{-p^2 \frac{K\theta}{cD}}}{p^2 + \frac{H^2}{K^2}}$$

$$V = \frac{16g}{\pi} q$$

$$q = \int \frac{dp\, e^{-p^2 t}}{p^2 + g^2}$$

$$\frac{1000}{c}$$

$$\frac{K\theta}{c \cdot}$$

$$V = \frac{6}{5}$$

$$V = \frac{6}{5\frac{1}{2}}$$

Sur les températures terrestres

et par conséquent la valeur trouvée pour V en tenant au premier terme de la série sera fort exacte. elle deviendrait trop petite, si l'on retranchait d'elle même sa vingt millième partie. on voit par là que l'on doit écrire

$V = \frac{1,26}{2X^{\frac{1}{2}}}$ ou $V = \frac{6\sqrt{K \cdot C \cdot D}}{H\sqrt{\omega}\sqrt{\theta}}$ et que cette valeur est toujours approchée

par défaut à $\frac{1}{20}$ près pourvu que l'on ait la condition $\frac{H\sqrt{\theta}}{\sqrt{K \cdot C \cdot D}} > 100$

ou $H^2\theta > 10\,000\, K C \cdot D$. le nombre θ est compté en minutes si on le compte en années soit T le nombre d'années on aura

$H^2 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot T > 10\,000\, K C \cdot D$ ou $T > \frac{10\,000 \cdot K \cdot C \cdot D}{365 \cdot 24 \cdot 60\, H^2}$

$\frac{1000}{6} \frac{1}{365 \cdot 24}$ $\left\{ \frac{200}{6 \cdot 73 \cdot 24} \right.$

ou $T > \frac{1}{52} \cdot \frac{K \cdot C \cdot D}{H^2}$ mettant pour K, C, D, H les valeurs qui conviennent

$\frac{100}{73 \cdot 72}$ $\frac{1}{52,36}$

$\frac{72}{146}$

$\frac{11}{1752}$

alors on aura $T > \frac{3 \cdot 1625 \cdot 25}{52 \cdot 2}$ et $H > \frac{3}{4}$ et $T > \frac{3 \cdot 1625}{50 \cdot 2}$

ou $T > \frac{3}{4} \cdot 1625$ année ou $T > \frac{1}{4} \cdot 4875$ ou $T > 1219$ ans.

Donc ayant donné cent années environ, il y a au moins que la valeur de v soit réduite au premier terme et le temps est beaucoup trop grand pour les matières dont le globe de la terre est formé par conséquent si l'on veut calculer l'état actuel utile il faut employer l'équation très simple $V = \frac{6\sqrt{K \cdot C \cdot D}}{H\sqrt{\omega}\sqrt{\theta}} =$

soit $v = \mu t^{-\frac{1}{2}}$

on aura en outre en outre $\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{2}\mu t^{-\frac{3}{2}}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \mu t^{-\frac{5}{2}}$, $\frac{\partial^3 v}{\partial t^3} = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \mu t^{-\frac{7}{2}}$

$x = \sqrt{c \cdot \lambda} t$

$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\sqrt{\lambda c}\, \partial t}$

$v = \frac{6\sqrt{K \cdot C \cdot D}}{\sqrt{\omega}\sqrt{\theta}}$

$\frac{K\theta}{C \cdot D} = t$

$v = \frac{6\sqrt{K \cdot C \cdot D}}{\sqrt{\omega}\sqrt{C \cdot D}\sqrt{t}}$

$\sqrt{K}$

$v = \frac{6K}{\sqrt{\omega}\sqrt{t}}$

ou $v = (1 + gu) - \frac{u}{2t}\left(1 + \frac{2u}{3}\right)^2 + \frac{1}{e}\left(\frac{u}{2t}\right)^4 \left(1 + \frac{2u}{5}\right) - \frac{1}{2 \cdot 3}\left(\frac{u}{2t}\right)^6 \left(1 + \frac{2u}{9}\right)$

$+ \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4}\left(\frac{u}{2t}\right)^8 \left(1 + \frac{2u}{11}\right)$.

ou mettant pour t la valeur $\frac{K\theta}{C \cdot D}$

$\frac{v}{V} = (1 + gu) - \left(\frac{u \cdot C \cdot D}{2K\theta}\right)^2 \left(1 + \frac{2u}{3}\right) + \left(\frac{u \cdot C \cdot D}{2K\theta}\right)^4 \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2u}{5}\right) - \frac{1}{2 \cdot 3}\left(\frac{u \cdot C \cdot D}{2K\theta}\right)^6 \left(1 + \frac{2u}{7}\right)$

$+ \&c$

ou $\frac{v}{V} = \mu t^{-\frac{1}{2}} \left\{ (1 + gu) - \left(\frac{u}{2t}\right)^2 \left(1 + \frac{2u}{3}\right) + \left(\frac{u}{2t}\right)^4 \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2u}{5}\right) - \frac{1}{2 \cdot 3}\left(\frac{u}{2t}\right)^6 \left(1 + \frac{2u}{7}\right) \right.$

$\left. + \left(\frac{u}{2t}\right)^8 \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 4}\left(1 + \frac{2u}{9}\right) - \&c \right\}$

$\frac{\pi u^3 c^1 D^2}{2^2 n^1 t^2 \cdot 3 \cdot K} < \frac{1}{1000}$

$t^2 > \frac{1000 \pi u^3 c^1 D^2}{24 K^3}$

$t > \frac{6u\sqrt{u}\, c \cdot D\sqrt{\pi}}{4\sqrt{K}}$

$\frac{uc \cdot D}{2K\theta} = \frac{1}{1000}$

$\theta = \frac{1000\, uc \cdot D}{2K}$

$T = \frac{1000\, uc \cdot D}{2K \cdot 365 \cdot 24 \cdot 60}$

$\frac{uc \cdot D}{2K\theta} = \frac{1}{100}$

$\theta = \frac{100\, uc \cdot D}{2K}$

$T = \frac{100 \cdot uc \cdot D}{2K \cdot 365 \cdot 24 \cdot 60}$

$T = \frac{2000u}{7^2}$

$u = 4000$ metres

$\frac{4000 \cdot 16\pi}{3 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot T}$

$\frac{1}{3 \cdot 24 \cdot 12}$

$v = V\left(1 + \frac{2}{13}u\right)$

$v = \frac{K\Delta}{H}\left(1 + \frac{2}{13}u\right)$

$1 + \frac{Hu}{K}$

$\frac{v}{V} = 1 - \frac{2}{13}u$

on aura

$$\frac{v}{v} = \left(1 + \frac{Hu}{K}\right) - \left(\frac{u.c.v}{2K\theta}\right)\left(1 + \frac{Hu}{3K}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{u.c.v}{2K\theta}\right)^2\left(1 + \frac{Hu}{5K}\right) - \frac{1}{2.3}\left(\frac{u.c.v}{2K\theta}\right)^3\left(1 + \frac{Hu}{7K}\right)$$

Sur cette formule il est facile de calculer la valeur de v + v_0 à une profondeur u et pour une température θ proposée 1200 années. Le nombre θ exprime un nombre de mètres.

par exemple supposons que la durée θ du refroidissement soit de six mille années ce qui est $6000.365\frac{1}{4}.24.60$ on aura $\frac{u.c.v}{2K\theta} < \frac{u.c.v}{2K.365\frac{1}{4}.24.60.6000}$

Si $c.v = 1,6\,cl$ et $K = \frac{3}{2}$, $h = \frac{3}{5}$

$\frac{u.c.v}{2.H\theta} < \frac{u.c.v}{2K.365\frac{1}{4}.24.60.6000}$ ou encore $< \frac{u}{72.12.6000}$ de sorte que si u

$\frac{u.c.v}{2K\theta} < \frac{u.1\,cl}{3.365\frac{1}{4}.24.60.6000}$ ou plutôt

et douze mille mètres la quantité $\frac{u.c.v}{2K\theta}$ sera moindre $\frac{1}{432}$ c'est à dire une très petite fraction. La quantité $\frac{hu}{3K}$ sera $\frac{2}{15}.12000$ ou 1600 par conséquent le premier terme de la formule ou une multiple de ce nombre diminué d'une unité qui est la température de la surface sera plus que la fraction de la quantité v qui est la température de la surface moins que la fraction de la quantité v qui est la température à la profondeur de 12000 mètres dans un globe solide de fer dont l'état variable est actuellement représenté à très peu près par cette relation simple $v = V\left(1 + \frac{H}{K}u\right)$ on ne commettra donc point d'erreur qui mérite attention en comptant jusqu'à douze mille mètres le même accroissement que celui qui est observé à la surface. Et cet accroissement $\frac{1}{30}$ de degré par mètre ou aura pour la température à 12000 mètres de profondeur 400 degrés centigrades

---

Nous regardons la solution exprimée par l'équation (1) page 1 elle donne la valeur de v développée suivant les puissances croissantes de θ chaque coefficient est une fonction de x et on a trouvé

$$v = \frac{2b}{\omega}.\varphi = \frac{2b}{\omega}\int_0^\omega \frac{dp\, e^{-p^2}}{p^2 + g^2} = \frac{2b}{\sqrt{\omega}}\, e^{x^2}\int_x^\omega dx\, e^{-x^2} \quad \text{et} \quad X = \frac{H\sqrt{\theta}}{\sqrt{KC.D}}$$

on a fait $\frac{K\theta}{C.D} = t$ donc $\frac{\theta}{C.D} = \frac{t}{K}$, $\frac{\theta}{KC.D} = \frac{t}{K^2}$, $H\sqrt{\frac{\theta}{KCD}} = \frac{H}{K}\sqrt{t}$

Donc $X = g\sqrt{t}$ et $v = \frac{2b}{\sqrt{\omega}}\, e^{g^2t}\int_{g\sqrt{t}}^\omega dx\, e^{-x^2}$. on a trouvé ainsi l'équation (2) page 2 dans laquelle il faut remettre pour X la valeur $g\sqrt{t}$ il entre un multiple par $\frac{2b}{\sqrt{\omega}}$ ou aura enfin la valeur de v on trouve ainsi

$$(3)\quad v = \frac{2b}{\sqrt{\omega}}\,\frac{1}{2g\sqrt{t}}\left\{1 - \frac{1}{2g^2t} + \frac{3}{(2g^2t)^2} - \frac{3.5}{(2g^2t)^3} + \frac{3.5.7}{(2g^2t)^4} - \cdots\right\}$$

Si l'on veut chercher v en développant selon les puissances ascendantes de θ et chaque coefficient est développé selon les puissances croissantes de t.

$$g\sqrt{2.0} = 0.216$$

(4)

$$v = \frac{b}{g\sqrt{\quad}}$$

dérivation $\frac{gv\sqrt{u}}{6} = t^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2g^1}t^{-\frac{3}{2}} + \frac{3}{(2g^2)^2}t^{-\frac{5}{2}} - \frac{3\cdot5}{(2g^2)^3}t^{-\frac{7}{2}} + \frac{3\cdot4}{(2g^2)^4}t^{-\frac{9}{2}}\ldots$

on tire $\frac{gv\sqrt{u}}{6}\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}\frac{1}{(2g^2)}t^{-\frac{5}{2}} - \frac{3\cdot5}{2}\frac{1}{(2g^2)^2}t^{-\frac{7}{2}} + \frac{3\cdot5\cdot7}{2}\frac{1}{(2g^2)^3}t^{-\frac{9}{2}}\ldots$

$\frac{gv\sqrt{u}}{6}\frac{d^2v}{dt^2} = \frac{1\cdot3}{2^2}t^{-\frac{5}{2}} - \frac{3\cdot5}{2^2}\cdot\frac{1}{2g^1}t^{-\frac{7}{2}} + \frac{3\cdot5\cdot7}{2^2}\frac{1}{(2g^2)^2}t^{-\frac{9}{2}} - \frac{3\cdot5\cdot7}{2}\cdot\frac{9}{2}\frac{1}{(2g^2)^3}t^{-\frac{11}{2}}$

$\frac{gv\sqrt{u}}{6}\frac{d^3v}{dt^3} = -\frac{3\cdot5}{2^3}t^{-\frac{7}{2}} + \frac{3\cdot5\cdot7}{2^3}\cdot\frac{1}{2g^2}t^{-\frac{9}{2}} - \frac{3\cdot5\cdot7\cdot9}{2^3}\frac{1}{(2g^2)^2}t^{-\frac{11}{2}} + \frac{3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11}{2^3}\frac{1}{(2g^2)^3}t^{-\frac{13}{2}}$

ainsi de suite.

si maintenant on substitue dans l'équation (1) on trouve

$$\frac{gv\sqrt{u}}{6} = \left|\begin{array}{l} t^{-\frac{1}{2}} \\ -\frac{t^{-\frac{3}{2}}}{2g^2} \\ +\frac{3t^{-\frac{5}{2}}}{(2g^2)^2} \\ -\frac{3\cdot5t^{-\frac{7}{2}}}{(2g^2)^3} \\ +\ldots \end{array}\right| - \frac{u^2}{2\cdot2}\left(1+\frac{5u}{3}\right)\left|\begin{array}{l} t^{-\frac{5}{2}} \\ -\frac{3}{2g^2}t^{-\frac{7}{2}} \\ +\frac{3\cdot5}{(2g^2)^2}t^{-\frac{9}{2}} \\ -\frac{3\cdot5\cdot7}{(2g^2)^3}t^{-\frac{11}{2}} \\ +\ldots \end{array}\right| + \frac{u^4}{2\cdot3\cdot4\cdot2}\left(1+\frac{5u}{5}\right)\left|\begin{array}{l} 3t^{-\frac{9}{2}} \\ -\frac{3\cdot5}{2g^2}t^{-\frac{11}{2}} \\ +\frac{3\cdot5\cdot7}{(2g^2)^2}t^{-\frac{13}{2}} \\ \vdots \end{array}\right| - \ldots$$

ou

$$\frac{gv\sqrt{u}}{6} = (1+5u)\left|\begin{array}{l} t^{-\frac{1}{2}} \\ -\frac{t^{-\frac{3}{2}}}{2g^2} \\ +\frac{3t^{-\frac{5}{2}}}{(2g^2)^2} \\ -\frac{3\cdot5t^{-\frac{7}{2}}}{(2g^2)^3} \\ +\ldots \end{array}\right| - \frac{1}{2}\left(1+\frac{5u}{3}\right)\frac{u^2}{2}\left|\begin{array}{l} \frac{1}{t^2} \\ -\frac{3}{2g^2t^3} \\ +\frac{3\cdot5}{(2g^2)^2t^4} \\ -\frac{3\cdot5\cdot7}{(2g^2)^3t^5} \\ +\ldots \end{array}\right| + \frac{1}{2^2}\left(1+\frac{5u}{5}\right)\frac{u^4}{2\cdot3\cdot4}\left|\begin{array}{l} \frac{3}{t^4} \\ -\frac{3\cdot5}{(2g^2)t^5} \\ +\frac{3\cdot5\cdot7}{(2g^2)^2t^6} \\ -\frac{3\cdot5\cdot7\cdot9}{(2g^2)^3t^7} \\ +\ldots \end{array}\right| - \frac{1}{2^3}\left(1+\frac{5u}{7}\right)\frac{u^6}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}\left|\begin{array}{l} \frac{3\cdot5}{t^6} \\ -\frac{3\cdot5\cdot7}{2g^2t^7} \\ +\frac{3\cdot5\cdot7\cdot9}{(2g^2)^2t^8} \\ -\ldots \end{array}\right| + \ldots$$

(4) $v = \frac{6}{g\sqrt{u}\sqrt{t}}\left\{(1+5u)\left|\begin{array}{l} 1 \\ -\frac{1}{2g^2t} \\ +\frac{3}{(2g^2)^2t^2} \\ -\frac{3\cdot5}{(2g^2)^3t^3} \\ +\frac{3\cdot5\cdot7}{(2g^2)^4t^4} \\ -\ldots \end{array}\right| - \frac{1}{2}\left(1+\frac{5u}{3}\right)\frac{u^2}{2}\left|\begin{array}{l} 1 \\ -\frac{3}{2g^2t^3} \\ +\frac{3\cdot5}{(2g^2)^2t^4} \\ -\frac{3\cdot5\cdot7}{(2g^2)^3t^5} \\ +\ldots \end{array}\right| + \frac{1}{2^2}\left(1+\frac{5u}{5}\right)\frac{u^4}{2\cdot3\cdot4}\left|\begin{array}{l} 1 \\ -\frac{3\cdot5}{(2g^2)t^5} \\ +\frac{3\cdot5\cdot7}{(2g^2)^2t^6} \\ -\frac{3\cdot5\cdot7\cdot9}{(2g^2)^3t^7} \\ +\ldots \end{array}\right| - \frac{1}{2^3}\left(1+\frac{5u}{7}\right)\frac{u^6}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}\left|\begin{array}{l} 1 \\ -\frac{3\cdot5\cdot7}{2g^2t^7} \\ +\frac{3\cdot5\cdot7\cdot9}{(2g^2)^2t^8} \\ -\ldots \end{array}\right| + \ldots\right\}$

cette équation (4) donne la solution cherchée sous une forme à laquelle le calcul s'applique facilement. si l'on fait $u=0$, on a $V = \frac{6}{g\sqrt{u}\sqrt{t}}\left(1 - \frac{1}{2g^2t} + \frac{3}{(2g^2)^2t^2} - \frac{3\cdot5}{(2g^2t)^3} + \frac{3\cdot5\cdot7}{(2g^2t)^4} - \ldots\right)$

reprenons l'équation (3) mettons pour t la valeur $\frac{H\theta}{C\cdot D}$ et pour g la valeur $\frac{H}{K}$ on a $t = \frac{K\theta}{C\cdot D}$ $g^2t = \frac{H^2}{K^2}\frac{K\theta}{C\cdot D} = \frac{H^2\theta}{K\cdot C\cdot D}$, $\frac{1}{g^2t} = \frac{K\cdot C\cdot D}{H^2\theta}$.

$\frac{1}{g\sqrt{t}} = \frac{\sqrt{K\cdot C\cdot D}}{H\sqrt{\theta}}$, $\frac{1}{2g^2t} = \frac{K\cdot C\cdot D}{2H^2\theta}$ donc

(5) $V = \frac{6\sqrt{KC\cdot D}}{H\sqrt{C}\sqrt{\theta}}\left\{1 - 1\cdot\frac{K\cdot C\cdot D}{2H^2\theta} + 3\cdot\left(\frac{KC\cdot D}{2H^2\theta}\right)^2 - 3\cdot5\left(\frac{KC\cdot D}{2H^2\theta}\right)^3 + 3\cdot5\cdot7\left(\frac{K\cdot C\cdot D}{2H^2\theta}\right)^4 - \ldots\right\}$

$\frac{1}{2}\frac{1}{8}$

$\frac{1}{9\sqrt{t}} =$

$\frac{1}{t} =$

$\frac{1}{9t\sqrt{t}} =$

$t = \frac{k\theta}{c \cdot D}$

$t^2 = \frac{k^2\theta}{c^2 D^2}$

il arrivera alors promptement que la grandeur $\frac{K.C.D}{2H^2\theta}$ deviendra une fraction très petite comme un millième ou un dix millièmes ou bien cependant en prenant le premier terme ou même négligeant la millième partie de la grandeur cherchée il aura $\frac{K.C.D}{2H^2\theta} < \frac{1}{n}$ le nombre n représentant cette unité on a alors.

$\theta > \frac{K.C.D.n}{2H^2}$ et si l'on compte le temps en année on aura

$364.24.60.T > \frac{K.C.D.n}{2H^2}$ ou $T > \frac{K.C.D\,n}{2.H^2.364.24.60}$

faisant $n = 1000$ on a $T > \frac{K.C.D.1000}{2H^2.364.24.60}$ en disant

K, C, D, H les valeurs qui conviennent au lieu on a

$T > \frac{3.1623.1000.25}{2.365.24.60}$ ou $T > 116$ années. ainsi

après 116 années il n'y a aucun doute que la température V de la surface soit entièrement représentée par le premier terme V

c'est à dire par l'équation $V = \frac{6\sqrt{K.C.D}}{H\sqrt{\pi}\sqrt{\theta}}$ le temps θ étant pris

comme unité et le commencement du refroidissement

en employant cette equation l'erreur commise est moindre que la millième partie de la grandeur cherchée : le rapport de l'erreur à la grandeur cherchée est dix fois moindre si le temps écoulé est dix fois plus grand. ce rapport serait aussi dix fois moindre si l'on voulait choisir deux fois plus petit le nombre K devenant dix fois plus petit.

$\frac{1}{2}\ \frac{32}{73}\ \frac{30}{3}\ 25$

$\frac{1623.30.25}{2.365.8.3}$

$\frac{32.30.25}{2.73.8.3}$

$\begin{array}{r} 32 \\ 1250 \\ \hline 1623 \\ 630 \\ \hline 325 \\ \hline 406250 \\ 3504 \\ \hline .3486 \\ 3504 \\ \hline 20510 \end{array}$ $\begin{array}{r} 73 \\ 48 \\ \hline 584 \\ 292 \\ \hline 3504 \\ \hline 116 \end{array}$

nous allons maintenant tirer de l'équation (1) la valeur de $\frac{dv}{dt}$ en cas

$\frac{dv}{dt} = \sqrt{1+gu}\,\frac{d}{dt}.V + \frac{u^2}{2}\left(1+\frac{gu}{3}\right)d\left(\frac{1}{t}\frac{dV}{dt}\right) + \frac{u^4}{2.3.4}\left(1+\frac{2u}{3}\right)d\left(\frac{1}{t}.\frac{d^2V}{dt^2}\right) + \&$

alors il vient $\frac{dv}{dt} = \frac{dV}{dt}$ et remarquant que l'équation de la page 6

ou $\frac{dV}{dt} = \frac{-6}{2g\sqrt{\pi}\sqrt{t}}\left(t^{-1} - \frac{3}{2g^2}t^{-2} + \frac{3.5}{(2g^2)^2}t^{-3} - \frac{3.5.7}{(2g^2)^3}t^{-4} + \ldots\right)$

ou $\frac{dV}{dt} = \frac{-6}{2g\sqrt{\pi}.t\sqrt{t}}\left(1 - \frac{3}{2g^2t} + \frac{3.5}{(2g^2t)^2} - \frac{3.5.7}{(2g^2t)^3} + \&\right)$

ou $\frac{dV}{dt} = -\frac{6C.D\sqrt{C.D}}{2\sqrt{\pi}.H\sqrt{K}.\theta\sqrt{\theta}}\left\{1 - 3\left(\frac{KC.D}{2H^2t}\right) + 3.5\left(\frac{K.C.D}{2H^2\theta}\right)^2 - \&\right\}$

$\frac{1}{g\sqrt{t}} = \frac{\sqrt{K.C.D}}{H\sqrt{\theta}}$

$\frac{1}{t} = \frac{C.D}{K\theta}$

$\frac{1}{g\sqrt{t}} = \frac{\sqrt{C^3.D^3}}{H\sqrt{K}\sqrt{\theta}}$

$t = \frac{K\theta}{C.D}$ $dt = \frac{K.d\theta}{C.D}$

$t^2 = \frac{K^2\theta^2}{C^2D^2}$ $\frac{u^2}{t^2} = \frac{u^2C^2D^2}{K^2\theta^2}$

mettant pour dt la valeur $\frac{K}{C.D}d\theta$ il vient dans le premier membre $\frac{dV}{d\theta} = -\frac{6\sqrt{K.C.D}}{2H\sqrt{\pi}.\theta\sqrt{\theta}}\left(1 - 3\left(\frac{KC.D}{2H^2\theta}\right) + 3.5\left(\frac{KC.D}{2H^2\theta}\right)^2 - \&\right)$

$$v = \frac{2bH}{K\omega} \int_0^\infty \frac{\partial p\, e^{-p^2 K\theta / c\cdot D}}{p^2 + \frac{H^2}{K^2}} \left(\frac{H}{K} \frac{\sin p\omega}{p} + \cos p\omega \right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = -\frac{K}{c\cdot D} \frac{2bH}{K\omega} \int \frac{\partial p\, p\, e^{-p^2 K\theta / c\cdot D}}{p^2 + \frac{H^2}{K^2}} \left(\frac{H}{K} \frac{\sin p\omega}{p} + \cos p\omega \right)$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial \theta} \right)_{u=v} = -\frac{K}{c\cdot D} \cdot \frac{2bH}{K\omega} \int \frac{\partial p\, p\, e^{-p^2 K\theta / c\cdot D}}{p^2 + \frac{H^2}{K^2}}$$

$$(v) = \frac{2bH}{K\omega} \int \frac{\partial p\, e^{-p^2 K\theta / c\cdot D}}{p^2 + \frac{H^2}{K^2}}$$

$$\frac{2bH}{K\omega} \cdot \int \frac{\partial p\, e^{-p^2}}{p^2 + g^2} = \frac{2b}{\sqrt{K}} e^{x^2} \int \partial x\, e^{-x^2} \times$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{2b}{\sqrt{K}} 2xx' e^{x^2} \int \partial p\, e^{-p^2 - \xi x^2}$$

ou enfin $\frac{dv}{d\theta} = \frac{-V}{2\theta}\left(1 - 3\left(\frac{KC\cdot D}{2H^2\theta}\right) + 3\cdot 5\left(\frac{KC\cdot D}{2H^2\theta}\right)^2 - \alpha\right\}^{3/2}$.

lorsque $\frac{KC\cdot D}{2H^2\theta}$ est comme on le suppose ordinairement petite fraction exprimant

arrive à peu quelque fois celle une cette problème très simple

$\frac{dv}{d\theta} = \frac{-V}{2\theta}$. ainsi la variation de la température dans la

surface divisée par le double du temps a coulé depuis l'origine de

refroidissement ce temps étant supposé exprimé en années.

---

si dans l'équation (4) on suppose comme précédemment que $\frac{1}{2g^2t}$ ou

$\frac{KC\cdot V}{2H^2\theta}$ est une très petite fraction, on simplifiera beaucoup la valeur

de v en omettant qu'une partie fort petite de chaque terme on trouve donc

$$v = \frac{6}{g\sqrt{2}\sqrt{t}}\left\{(1+gu) - \frac{1}{2}\cdot\frac{u^2}{2t^2}\left(1+\frac{gu}{3}\right) + \frac{3}{2\cdot3\cdot4}\left(\frac{u^2}{2t^2}\right)^2\left(1+\frac{gu}{5}\right) - \frac{3\cdot5}{2\cdot3\cdot4\cdot6}\left(\frac{u^2}{2t^2}\right)^3\left(1+\frac{gu}{7}\right) + \alpha\right.$$

$t = \frac{KD}{C\cdot D}$

$\frac{1}{2t^2} = \frac{C^2D^2}{2K^2\theta}$

$\frac{u^2}{4t^2} = \frac{u^2C^2D^2}{4K^2\theta^2}$

$\frac{g^2u^3}{2\cdot3}\cdot\frac{C^2D^2}{2K^2\theta^2}$

$\frac{g^3u^3}{2\cdot3\cdot4\cdot5}\left(\frac{C^2D^2}{2K^2\theta}\right)^2$

ou

$$v = \frac{6}{g\sqrt{2}\sqrt{t}}\left\{(1+gu) - \frac{1}{2}\left(\frac{u^2}{2t^2}\right)\left(1+\frac{gu}{3}\right) + \frac{1}{2\cdot4}\left(\frac{u^2}{2t^2}\right)^2\left(1+\frac{gu}{5}\right) - \frac{1}{2\cdot4\cdot6}\left(\frac{u^2}{2t^2}\right)^3\left(1+\frac{gu}{7}\right) + \alpha\right.$$

ou

$$v = \frac{6}{g\sqrt{2}\sqrt{t}}\left\{(1+gu) - \frac{u^2}{4t^2}\left(1+\frac{gu}{3}\right) + \frac{1}{1\cdot2}\left(\frac{u^2}{4t^2}\right)\left(1+\frac{gu}{5}\right) - \frac{1}{1\cdot2\cdot3}\left(\frac{u^2}{4t^2}\right)^3\left(1+\frac{gu}{7}\right) + \alpha\right\}$$

ou

$$v = V\left\{\left(1+\frac{Hu}{K}\right) - \left(1+\frac{Hu}{3K}\right)\frac{u^2C^2D^2}{4K^2\theta^2} + \frac{1}{2}\left(1+\frac{Hu}{5K}\right)\left(\frac{u^2C^2D^2}{4K^2\theta^2}\right)^2 - \frac{1}{2\cdot3}\left(1+\frac{Hu}{7K}\right)\left(\frac{u^2C^2D^2}{4K^2\theta^2}\right)^3 + \frac{1}{2\cdot3\cdot4}\left(1+\frac{Hu}{9K}\right)\left(\frac{u^2C^2D^2}{4K^2\theta^2}\right)^4\right.$$

ou

$$v = V\left\{\left(1+\frac{Hu}{K}\right) - \left(1+\frac{Hu}{3K}\right)\left(\frac{uC\cdot D}{2K\theta}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(1+\frac{Hu}{5K}\right)\left(\frac{uC\cdot D}{2K\theta}\right)^4 - \frac{1}{2\cdot3}\left(1+\frac{Hu}{7K}\right)\left(\frac{uC\cdot D}{2K\theta}\right)^6 + \alpha\right\}$$

$$v = V\cdot\left(1+\frac{Hu}{K}\right)\left\{1 - \frac{1+\frac{Hu}{3K}}{1+\frac{Hu}{K}}\left(\frac{uC\cdot D}{2K\theta}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1+\frac{Hu}{5K}}{1+\frac{Hu}{K}}\right)\left(\frac{uC\cdot D}{2K\theta}\right)^4 - \frac{1}{2\cdot3}\cdot\frac{1+\frac{Hu}{7K}}{1+\frac{Hu}{K}}\left(\frac{uC\cdot D}{2K\theta}\right)^6 + \&c\right\}$$

lorsque le temps θ sera devenu assez grand pour que $\left(\frac{uC\cdot D}{2K\theta}\right)^2$ soit une petite fraction la valeur de v sera représentée d'une manière fort approchée par la première terme et l'on aura $v = V\left(1+\frac{Hu}{K}\right)$

$$\left(1+\frac{n}{n}\right)^{n+1}$$

l'équation (4) peut être mise sous cette forme

$$v=\frac{6}{g\sqrt{\omega}\sqrt{t}}\left(1-\frac{1}{2g^2t}+\frac{3}{(2g^2t)^2}-\frac{3.5}{(2g^2t)^3}\cdots\right)\left\{\sqrt{1+gu}-\frac{A}{1-\frac{1}{2g^2t}+\cdots}+\frac{B}{1-\frac{1}{2g^2t}+\cdots}-\frac{C}{1-\frac{1}{2g^2t}+\cdots}\right\},$$

(X) (note de Hermite)

Cette remarque est fondée sur ce que les séries deviennent alternées et les différences successives finissent par devenir et rester plus petites que les unités des rangs correspondants. On arrête pour A quand l'expression de $\int_x^\infty dx\,e^{-x^2}$ que donne la série commence à croître. Pour B on arrête de même à un terme plus éloigné et ainsi de suite. Les coefficients de $\frac{1}{1+gu}$ $\frac{1+\frac{a}{2}}{1+gu}$ $\frac{1+\frac{a}{3}}{1+gu}$ dans les quatre premières approximations sont évidemment les nombres entiers successifs. Ces quatre premières approximations peuvent alors être exprimées par des intégrales définies dont les limites sont 0 et ∞ et qui peuvent alors être calculées par les méthodes connues. Cependant il est bon de remarquer que si l'on cherche des approximations successives plus éloignées on trouve des coefficients qui vont en croissant indéfiniment et qui finissent par devenir plus grands que 1 et 2 pour lesquels $\int_x^\infty dx\,e^{-x^2}$ prend une valeur plus petite que $\int_x^\infty dx\,e^{-x^2}$ et ainsi de suite. Il faut donc arrêter les approximations successives à un terme déterminé. Ce terme est toujours facile à trouver et il donne la valeur de $\int_x^\infty dx\,e^{-x^2}$ avec une grande précision pourvu que l'on prenne avec un degré d'approximation d'autant plus élevé que la température initiale est plus basse. /

où il faut remplacer $A, B, C, \ldots$ les différentes parties de la valeur de v. On aura

$$v=V\left\{1+gu-a\cdot\frac{1-\frac{3}{2g^2t}+\frac{b}{(2g^2t)^2}-\cdots}{1-\frac{1}{2g^2t}+\frac{3}{(2g^2t)^2}-\cdots}+b\cdots\right.$$

pour terminer ce calcul par quoi il le présente une remarque importante concernant la valeur de v exprimée par l'équation (4)

Les coefficients sont tout exprimés par des termes qui deviennent divergents ainsi on ne pourrait tirer de cette série aucune conséquence entièrement rigoureuse. X

on a trouvé $V=\frac{2bg}{\omega}\int_0^\infty\frac{dp\,e^{-p^2t}}{p^2+g^2}=\frac{2b}{\sqrt{\omega}}\,e^{x^2}\int_x^\infty dx\,e^{-x^2}$ la limite X est égale à $g\sqrt{t}$. en supposant t donné par l'équation $V=\frac{2b}{\sqrt{\omega}}\,e^{x^2}\int_x^\infty dx\,e^{-x^2}$ on

en augmente x de dx la quantité V subit un accroissement de dV et l'on aura $V+dV=\frac{2b}{\sqrt{\omega}}\,e^{x^2+2x\,dx}\int_{x+dx}^\infty dx\,e^{-x^2}$. cette équation

$\int_{x+dx}^\infty dx\,e^{-x^2}$ devient $\int_x^\infty dx\,e^{-x^2}-dx\,e^{-x^2}$ de sorte que l'on a

$$V+dV=\frac{2b}{\sqrt{\omega}}\,e^{x^2}(1+2x\,dx)\left(\int_x^\infty dx\,e^{-x^2}-dx\,e^{-x^2}\right) \text{ ou}$$

$$V+dV=\frac{2b}{\sqrt{\omega}}\,e^{x^2}\int_x^\infty dx\,e^{-x^2}+\frac{2b}{\sqrt{\omega}}\,e^{x^2}\cdot 2x\,dx\int_x^\infty dx\,e^{-x^2}-\frac{2b}{\sqrt{\omega}}\,e^{x^2}dx\,e^{-x^2}$$

$$\text{et } dV=dx\left(\frac{2b}{\sqrt{\omega}}\cdot 2x\cdot e^{x^2}\int_x^\infty dx\,e^{-x^2}-\frac{2b}{\sqrt{\omega}}\right)=\frac{2b\,dx}{\sqrt{\omega}}\left(2x\,e^{x^2}\int_x^\infty dx\,e^{-x^2}-1\right)$$

ou $dV=\left(2x\cdot V-\frac{2b}{\sqrt{\omega}}\right)dx$ et comme $dx=\frac{1}{2}gt^{-\frac{1}{2}}dt$ on a

$$dV=\left(2x\cdot V-\frac{2b}{\sqrt{\omega}}\right)\frac{\frac{1}{2}g\,dt}{\sqrt{t}} \quad \text{ou} \quad \frac{dV}{dt}=\frac{gx\cdot V}{\sqrt{t}}-\frac{bg}{\sqrt{\omega}\sqrt{t}}=g^2V-\frac{bg}{\sqrt{\omega}\sqrt{t}}$$

d'un autre côté on a trouvé $V=\frac{2b}{\sqrt{\omega}}\frac{1}{g\sqrt{t}}\left\{1-\frac{1}{2g^2t}+\frac{3}{(2g^2t)^2}-\cdots\right\}$

$$\frac{dV}{dt}=\frac{b}{g\sqrt{\omega}\sqrt{t}}\left(-\frac{1}{2}t+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2g^2t}-\frac{3.5}{2}\frac{1}{(2g^2t)^2}+\cdots\right)$$

$$g^2V=\frac{bg}{\sqrt{\omega}\sqrt{t}}\left(1-\frac{1}{2g^2t}+\frac{3}{(2g^2t)^2}-\cdots\right)$$

retranchant de $g^2 v$ le terme $\frac{6g}{\sqrt{\omega}\sqrt{t}}$ il reste $\frac{6g}{\sqrt{\omega}\sqrt{t}}\left(-\frac{1}{2g^2t} + \frac{3}{(2g^2t)^2} \cdots\right)$

ou $\frac{6}{g\sqrt{\omega}\cdot t\sqrt{t}}\left(1 - \frac{3}{2g^2t} + \cdots\right)$ expression équivalente à $\frac{dv}{dt}$ voir page 6

il était facile donc d'obtenir l'équation que l'on vient de trouver

$$\frac{dv}{dt} = \frac{-6g}{\sqrt{\omega}\sqrt{t}} + g^2 v \quad \text{or} \quad v = \frac{6}{g\sqrt{\omega}\sqrt{t}}\left(1 - \frac{1}{2g^2t} + \frac{3}{(2g^2t)^2} - \cdots\right)$$

donc $\frac{dv}{dt} = \frac{-6g}{\sqrt{\omega}\sqrt{t}} + \frac{6g}{\sqrt{\omega}\sqrt{t}}\left(1 - \frac{1}{2g^2t} + \frac{3}{(2g^2t)^2} - \cdots\right)$

ou $\frac{dv}{dt} = -\frac{6g}{\sqrt{\omega}\sqrt{t}}\left(\frac{1}{2g^2t} - \frac{3}{(2g^2t)^2} + \cdots\right) = -\frac{6}{2t\cdot g\sqrt{\omega}\sqrt{t}}\left(1 - \frac{3}{2g^2t} + \right)$

donc si le quantité $\frac{3}{2g^2t}$ est une très petite fraction une

et si $\frac{1}{2g^2t}$ est une très petite fraction.

$$\frac{dv}{dt} = \frac{-6}{g\sqrt{\omega}\sqrt{t}} \cdot \frac{1}{2t}$$

on a $dv = \frac{6}{g\sqrt{\omega}\sqrt{t}}$. donc on a donc de cas $\frac{dv}{dt} = \frac{-v}{2t}$.

d'une autre côté on a l'équation fondamentale $K\frac{dv}{du} = Hv$ donc

$\frac{dv}{dt} = -\frac{K}{H}\frac{dv}{du}\cdot\frac{1}{2t}$. le coefficient $\frac{dv}{du}$ est l'accroissement d'hauteur par

par mètre à partir de la surface soit Δ cet accroissement donné par l'observation et que l'on cherche à déterminer comme égale à $\frac{1}{30}$ de degré centigrade ou $\frac{1}{40}$ on aura donc $\frac{dv}{du}$ égale à la même de $-\frac{dv}{dt}$ c'est-à-dire de l'abaissement de température pendant l'unité de temps (désignant par δ cet abaissement) $\delta = \frac{K}{H}\cdot\frac{\Delta}{2t}$

pour les expériences supposer $\frac{K}{H}$ égal à $\frac{1}{2}$ il est vraisemblable que pour les montagnes qui entourent le globe on aurait une valeur de $\frac{K}{H}$ beaucoup inférieure par exemple sept huit mille fois moindre et ainsi

$$\frac{A}{n} = = \frac{V}{}$$

(Se rapporte aux températures terrestres) –

1

la température variable de la surface est ainsi exprimée

$$v = \frac{2}{\omega} \int_0^\infty \frac{\partial p\, e^{-p^2 \frac{Kt}{c \cdot D}}}{p^2 + \frac{H^2}{K^2}}\, p \int_0^\omega \partial\lambda \sin p\lambda \left(\frac{H}{K} F\lambda - F'\lambda \right)$$



Soit $F\lambda = A + B\lambda$ en désignant par A et B des coefficients constants

on aura $F'\lambda = B$ il faut donc prendre l'intégrale

$$\int_0^\omega \partial\lambda \sin p\lambda \left(\frac{H}{K} A + \frac{H}{K} B\lambda - B \right)$$

ou $\left(A \cdot \frac{H}{K} - B \right) \int_0^\omega \partial\lambda \sin p\lambda + \frac{H}{K} B \int_0^\omega \partial\lambda\, \lambda \sin p\lambda$ (1)

on a $\int \partial\lambda\, \lambda \sin p\lambda = -\frac{\lambda}{p} \cos p\lambda + \frac{1}{p^2} \sin p\lambda + C$ car en intégrant

$\lambda \sin p\lambda = \lambda \sin p\lambda - \frac{1}{p} \cos p\lambda + \frac{1}{p} \cos p\lambda$. la constante C est nulle lorsqu'on prend l'intégrale depuis $\lambda = 0$ jusqu'à donc

$$\int_0^m \partial\lambda\, \lambda \sin p\lambda = -\frac{m}{p} \cos pm + \frac{1}{p^2} \sin pm$$

on a aussi $\int \partial\lambda \sin p\lambda = C - \frac{1}{p} \cos p\lambda$ la constante C est $\frac{1}{p}$

donc $\int_0^m \partial\lambda \sin p\lambda = \frac{1}{p} (1 - \cos pm) = \frac{1}{p} \operatorname{Sin Ver} \cdot pm$

l'intégrale (1) est donc $\left(A \frac{H}{K} - B \right) \frac{1}{p} (1 - \cos pm)$

$$+ \frac{H}{K} B \left(\frac{1}{p^2} \sin pm - \frac{m}{p} \cos pm \right)$$

ou enfin $v = \frac{2}{\omega} \int_0^\omega \frac{\partial p\, e^{-p^2 \frac{Kt}{c \cdot D}}}{p^2 + \frac{H^2}{K^2}} \left\{ \left(A \frac{H}{K} - B \right) (1 - \cos pm) + \frac{H}{K} B \left(\frac{1}{p} \sin pm - m \cos pm \right) \right\}$ (2)

Si donc la fonction $F\lambda = A + B\lambda$ n'aurait de valeur subsistante que de $\lambda = 0$ jusqu'à $\lambda = 1$ on en prend $\lambda = m$ la valeur de v deviendra

calculée par l'expression (2) en donnant à m la valeur 1 ou $2m$

Si la fonction [illegible] la valeur de m est bien grande les parties de

les quantités qui [illegible] deviennent [illegible] donnent

des résultats nuls ainsi obtenus par $\cos pm$ et il en sera de même pour [illegible] en $\cos pm$ tandis que ceux qui multiplient $\sin pm$ donneront

de tels [illegible] dernières expressions. Dans cet ordre d'idées la valeur de v est ainsi exprimée $v = \frac{2}{\omega} \int_0^\omega \frac{\partial p\, e^{-p^2 \frac{Kt}{c \cdot D}}}{p^2 + \frac{H^2}{K^2}} \left\{ \left(A \frac{H}{K} - B \right) \right.$

$\left. + \frac{H}{K} B \frac{1}{p} \sin pm \right\}$ il faut examiner maintenant quelle peut être la

$$\int \partial x\, x^2 \sin px = -\frac{x^2}{p}\cos px$$

$$\int \partial x\, x^2 \sin px = -\frac{x^2}{p}\cos px + \frac{2x}{p^2}\sin px + \frac{2}{p^3}\cos px + \text{Const.}$$

$$x^2 \sin px = x^2 \sin px + \frac{2x}{p}\cos px - \frac{2}{p^2}\sin px$$
$$-\frac{2x}{p}\cos px + \frac{2}{p^2}\sin px$$

$$\int_0^\infty \partial x\, x^2 \sin px = \left(1 - \cos px\right)\frac{x^2}{p} + \frac{2x}{p^2}\sin px - \left(1 - \cos px\right)\frac{2}{p^3}$$

$$= \frac{x^2}{p}\sin px + \frac{2x}{p^2}\sin px - \frac{2}{p^3}\sin px$$

$$\int \frac{\partial p}{p^2}\sin pm$$

$$pm = q$$
$$m\,\partial p = \partial q$$
$$\frac{1}{m}\int \partial q \cdot \frac{m^2}{q}\sin q$$
$$m\int \frac{\partial q}{q}\sin q$$
$$\frac{q}{m} = 0 \qquad \frac{q}{m} = \frac{h}{0}$$
$$m\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{\partial q}{q}\sin q$$

$$\int_T^\infty \partial x\, e^{-x^2} = \frac{1}{T} - \frac{1}{2}\frac{1}{T^3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{T^5} - \frac{1}{2}\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{7}\frac{1}{T^7}$$

$$2T^2 > 800$$
$$T^2 > 400$$
$$T > 20$$
$$\frac{H\sqrt{t}}{\sqrt{Kc\cdot n}} > 20$$
$$\sqrt{t} > \frac{\sqrt{Kc\cdot n}\cdot 20}{H}$$
$$t > \frac{Kc\cdot 0\cdot 400}{H^2}\cdot\frac{3}{2}\cdot 25\cdot 1615\cdot 25$$
$$t > \frac{3}{2}\cdot 25\cdot 1615\cdot 400$$
$$t^{ann} > \frac{3\cdot 25\cdot 1615\cdot 400}{60\cdot 24\cdot 365}$$
$$t > \frac{25}{20}\,\frac{325}{73}\cdot\frac{30}{3}$$
$$t > \frac{125\cdot 325}{6\cdot 73}$$

$$\partial p = \partial$$
$$\frac{\sqrt{c\cdot n}}{\sqrt{Kt}}$$
$$\frac{c\cdot n}{Kt}$$
$$\frac{c\cdot n}{Kt}$$

valeur de l'intégrale $\int_0^\infty dp\, fp \cdot \frac{1}{p} \sin(pm)$ lorsque m est un nombre réel

la fonction fp étant $\frac{e^{-p^2 \frac{Kt}{c \cdot D}}}{p^2 + \frac{H^2}{K^2}}$ · pour cela il faut envisager que l'ordonnée

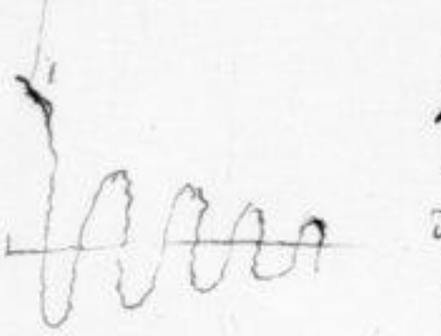
$\frac{1}{p} \sin pm$ appartient à une courbe sinusoïde qui coupe l'axe aux points de

ordonnée nulle $\frac{\pi}{m}$ · en multipliant cette ordonnée par celle de $\frac{1}{p}$ on

a une nouvelle courbe qui participe du caractère des deux précédentes

il ne reste plus qu'à multiplier l'ordonnée de cette courbe par fp

et à prendre l'intégrale depuis $p=0$ jusqu'à $p = \frac{1}{0}$.



à la limite on a des valeurs de p comprises entre P et $P+\Delta$ (Δ étant infiniment petit et P n'étant pas zéro mais une valeur finie quelconque) dans l'intervalle Δ la fonction fp conserve sensiblement la même valeur (fp ne varie que dans l'intervalle Δ infiniment petit) de même de la fonction $\frac{1}{p}$ quant au facteur $\sin(pm)$ il change très rapidement de valeur et l'on peut prendre l'intervalle Δ qui le contient petit tel que l'intégrale $\int fp \cdot \sin pm$ prise sur le commencement de l'intervalle Δ jusqu'à la limite nouvelle déterminable fasse fp et $\frac{1}{p}$ ne changent pas dans cet intervalle Δ l'intégrale $\int_P^{P+\Delta} fp \cdot \sin pm$ prise sur le même intervalle reste nulle. il faut dès lors pour prendre l'intégrale totale $\int_0^\infty \frac{dp}{p} fp \sin pm$ il faut de-

prendre l'intégrale depuis $p=0$ jusqu'à p égale à une quantité

quantité ω où fp a l'unité est $\frac{1}{\frac{H^2}{K^2}}$ donc l'intégrale cherchée

est $\frac{K^2}{H^2} \int_0^\omega \frac{dp}{p} \sin(pm)$ · quant à l'intégrale $\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{dp}{p} \sin pm$ ou

$\int_0^\omega \frac{dp}{p} \sin pm$ elle est la même sauf que la limite soit entièrement

relative au lieu de p on a $pm = q$ donc $m\,dp = dq$ et $\frac{dq}{q} = \frac{dp}{p}$

on a donc $\int \frac{dq}{q} \sin q$ et les limites sont depuis $\frac{q}{m} = 0$ jusqu'à $\frac{q}{m} = \omega$ ou

de $q=0$ à $q = \frac{1}{0}$ où l'intégrale $\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{dq}{q} \sin q$ est connue elle vaut $\frac{1}{2}\pi$

on conclut de cette analyse la valeur de v qui est

$$v = \left(A \frac{H}{K} - B\right) \int_0^\infty \frac{dp\, e^{-p^2 \frac{Kt}{C \cdot D}}}{p^2 + \frac{H^2}{K^2}} + \frac{K}{H} \frac{\pi}{2} B$$ il ne reste donc plus qu'à $\frac{1}{0}$

trouver l'intégrale $\int_0^\infty \frac{dp\, e^{-p^2 \frac{Kt}{C \cdot D}}}{p^2 + \frac{H^2}{K^2}}$ soit $\frac{p^2 Kt}{C \cdot D} = x^2$, l'intégrale cherchée sera

$\frac{\sqrt{K t}}{\sqrt{C \cdot D}} \int_0^{\frac{1}{0}} \frac{dx\, e^{-x^2}}{x^2 + \frac{H^2 t}{K \cdot C \cdot D}} \times$ [illegible]

$\frac{\sqrt{C \cdot D}}{\sqrt{Kt}} \frac{Kt}{C \cdot D} \Big| \frac{\sqrt{Kt}}{\sqrt{C \cdot D}}$

$p \sqrt{\frac{Kt}{C \cdot D}} = x$.

$dp = dx \sqrt{\frac{C \cdot D}{Kt}}$

$\frac{\sqrt{C \cdot D}}{\sqrt{Kt}} \int dx\, e^{-x^2}$

$\frac{x^2 \cdot C \cdot D}{Kt} + \frac{H^2}{K^2}$

$\frac{C \cdot D}{Kt} \left(x^2 + \frac{H^2}{K^2} \cdot \frac{Kt}{C \cdot D}\right)$

$\frac{C \cdot D}{Kt} \left(x^2 + \frac{H^2 t}{K \cdot C \cdot D}\right)$

$$3 \quad \text{ou} \quad \frac{\sqrt{kt}}{\sqrt{c\cdot p}} \left\{ \int_0^\infty \frac{\partial r}{2^2} e^{-r^2} - \frac{H^2 t}{kc\cdot p} \int_0^\infty \frac{\partial r}{2^4} e^{-r^2} + \frac{H^4 t}{k\cdot c\cdot p} \int_0^\infty \frac{\partial r}{2^6} e^{-r^2} + \alpha \right\} //$$

$$\frac{1}{\frac{H^2 t}{kc\cdot p}\left(1+\frac{2^2 kc\cdot p}{H^2 t}\right)} \quad \text{ou} \quad \frac{k^2}{H^2}\frac{\sqrt{c\cdot p}}{\sqrt{kt}} \int_0^\infty \frac{\partial r\, e^{-r^2}}{1+\frac{r^2 kc\cdot p}{H^2 t}} \quad \text{ou}$$

$$\frac{\sqrt{kt}}{\sqrt{c\cdot p}} \frac{1}{\frac{H^2 t}{kc\cdot p}\left(1+\frac{r^2 kc\cdot p}{H^2 t}\right)}$$

$$\frac{kc\cdot p}{H^2 t}\cdot\frac{\sqrt{kt}}{\sqrt{c\cdot p}}$$

$$\frac{k^{\frac{3}{2}}\sqrt{c\cdot p}}{H^2\sqrt{t}}$$

$$\frac{k^2}{H^2}\frac{\sqrt{c\cdot p}}{\sqrt{kt}}$$

$$\frac{k^2}{H^2}\frac{\sqrt{c\cdot p}}{\sqrt{kt}} \int_0^\infty \frac{\partial r\, e^{-r^2}}{1+\frac{r^2 kc\cdot p}{H^2 t}} \quad \text{ou}$$

$$\frac{k^2}{H^2}\frac{\sqrt{c\cdot p}}{\sqrt{kt}} \int_0^\infty \partial r e^{-r^2}\left\{1 - r^2\frac{kc\cdot p}{H^2 t} + r^4\left(\frac{kc\cdot p}{H^2 t}\right)^2 - r^6\left(\frac{kc\cdot p}{H^2 t}\right)^3 + \alpha\right\}$$

$$\text{ou} \quad \frac{k^2}{H^2}\frac{\sqrt{c\cdot p}}{\sqrt{kt}} \left\{ \int_0^\infty \partial r e^{-r^2} - \frac{kc\cdot p}{H^2 t}\int_0^\infty \partial r\, r^2 e^{-r^2} + \left(\frac{kc\cdot p}{H^2 t}\right)^2 \int_0^\infty \partial r\, r^4 e^{-r^2} - \alpha \right\}$$

on a suivant un théorème connu

$$\int_0^\infty \partial r e^{-r^2} r^{2i} = \frac{1}{2}\,\frac{3}{2}\,\frac{5}{2}\cdots\frac{2i-1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\omega}$$

et l'on a aussi $\int_T^\infty \partial r e^{-r^2} = \frac{e^{-T^2}}{2T}\left(1 - \frac{1}{2}T^{-2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}T^{-4} - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}T^{-6} + \cdots\right)$

donc $\frac{1}{T} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{T^3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\frac{1}{T^5} - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{T^7} = 2e^{T^2}\int_T^\infty \partial r e^{-r^2}$

on remarque $\int_0^\infty \partial r e^{-x^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\omega}$ | $\int_0^\infty \partial x e^{-x^2} x^2 = \frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\sqrt{\omega}$ |

$\int_0^\infty \partial r e^{-r^2} r^4 = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\,\frac{1}{2}\sqrt{\omega}$ | $\int_0^\infty \partial r e^{-r^2} r^6 = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\,\frac{1}{2}\sqrt{\omega}$

l'intégrale cherchée devient

$$2e^{T^2}\cdot\frac{K^2}{H^2}\frac{\sqrt{c\cdot p}}{\sqrt{kt}}\,\frac{1}{2}\sqrt{\omega}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{kc\cdot p}{H^2 t} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\left(\frac{kc\cdot p}{H^2 t}\right)^2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\left(\frac{kc\cdot p}{H^2 t}\right)^3 + \alpha\right)$$

il faut avoir $\frac{kc\cdot p}{H^2 t} = \frac{1}{T^2}$ et l'intégrale sera

$$\frac{K^2}{H^2}\frac{\sqrt{c\cdot p}}{\sqrt{kt}}\,\frac{1}{2}\sqrt{\omega}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{1}{T^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\frac{1}{T^4} + \alpha\right)\left\{2e^{T^2}\int_T^\infty \partial r e^{-r^2} = \frac{K^2\sqrt{c\cdot p}}{H^2\sqrt{k}}\cdot 2\frac{H\sqrt{t}}{\sqrt{k\cdot c\cdot p}T}\int_T^\infty \partial r e^{-r^2}\right.$$

ou $\frac{K^2\sqrt{c\cdot p}}{H^2\sqrt{kt}}\,\frac{1}{2}\sqrt{\omega}\,2Te^{T^2}\int_T^\infty \partial r e^{-r^2}$ ou $T = \frac{H\sqrt{t}}{\sqrt{kc\cdot p}}$ on en tire pour la valeur de U

$$\text{ou} \quad \frac{K}{H}\sqrt{\omega}\int_T^\infty \partial r e^{-r^2} \quad \text{et} \quad T' = \frac{H\sqrt{t}}{\sqrt{kc\cdot p}}$$

$$v = \left(\frac{AH}{K} - B\right)\frac{K}{H}\sqrt{\omega}e^{T^2}\int_{T'}^\infty \partial r e^{-r^2} + \frac{K}{H}\frac{1}{2}\omega B = A\sqrt{\omega}\int_T^\infty \partial r e^{-r^2} + \frac{B\cdot K}{H}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\omega} - e^{T^2}\int_T^\infty \partial r e^{-r^2}\right)$$

$$= A\sqrt{\omega}e^{T^2}\int_T^\infty \partial r e^{-r^2} + B\frac{K}{H}\sqrt{\omega}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\omega} - e^{T^2}\int_{T'}^\infty \partial r e^{-r^2}\right) = \left(A\sqrt{\omega}e^{T^2}\int_T^\infty \partial r e^{-r^2} + \frac{B\cdot K}{H}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\omega} - e^{T^2}\int_T^\infty \partial r e^{-r^2}\right)\right)$$

4

représentons la valeur générale de v donnée par l'équation (30) sur cet

$$\frac{\omega v}{2} = \int_0^\infty \frac{dp\, e^{-p^2 \frac{kt}{c\cdot D}}}{p^2 + \frac{H^2}{k^2}} \left\{ \frac{H}{k} \sin px + p \cos px \right\} \int_0^\infty d\lambda \sin p\lambda \left(\frac{H}{k} F\lambda - \frac{d}{d\lambda} F\lambda \right) \Big\}$$

on a $F\lambda = F_0 + \lambda F'_0 + \frac{\lambda^2}{2} F''_0 + \dots$ la fonction $\frac{H}{k} F\lambda - F'\lambda$ est

$$F'\lambda = F'_0 + \lambda F''_0 + \frac{\lambda^2}{1} F'''_0 + \dots$$

$$\frac{H}{k} F_0 + \lambda \frac{H}{k} F'_0 + \dots = \frac{H}{k} F_0 - F'_0 + \lambda \frac{H}{k} F'_0 + \dots$$

$$- F'_0$$

on le donne ici à la première puissance de λ. et la fonction est

ainsi exprimé $\mu + \lambda \nu$ en faisant $\mu = \frac{H}{k} F_0 - F'_0$ et $\nu = \frac{H}{k} F'_0$

il faut maintenant considérer la nature de l'intégrale

$\int_0^\omega d\lambda \sin(p x) (\mu + \nu \lambda)$ on a d'abord

$\int_0^\omega d\lambda \sin(p\lambda) = c - \frac{1}{p} \cos p\lambda + \frac{1}{p^2} \sin p\lambda$ car en différentiant on a

$\lambda \sin p\lambda = \lambda \sin p\lambda + \frac{1}{p} \cos p\lambda$ donc $\int_0^\omega d\lambda\, \lambda \sin p\lambda = \left(\lambda - \frac{1}{p} \cos p\lambda \right) \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} \sin p\lambda$

on a aussi $\int_0^\omega d\lambda \sin p\lambda = c - \frac{1}{p} \cos p\lambda$ car en différentiant on trouve

$\sin p\lambda = \sin p\lambda$ donc $\int_0^\lambda d\lambda \sin p\lambda = (1 - \cos p\lambda) \frac{1}{p}$

on trouve ainsi

$$\frac{\omega v}{2} = \int_0^\infty \frac{dp \cdot e^{-p^2 \frac{kt}{c\cdot D}}}{p^2 + \frac{H^2}{k^2}} \left\{ \frac{H}{k} \sin px + p \cos px \right\} \left\{ \mu (1 - \cos p\lambda) \frac{1}{p} + \nu \left(\frac{1}{p^2} \sin p\lambda - \frac{\lambda}{p} \cos p\lambda \right) \right\}$$

il faut examiner maintenant la valeur que prend l'intégrale lorsque $\lambda = 0$

et considérons d'abord le cas où le terme multiplié par $\frac{1}{p}$ disparaît

lorsque la valeur de la fonction est $\frac{e^{-p^2 \frac{kt}{c\cdot D}}}{p^2 + \frac{H^2}{k^2}}$ devient fp on aura

$$\frac{\omega v}{2} = \int_0^\infty dp\, fp \quad \mu (1 - \cos p\lambda) + \nu \left\{ \frac{1}{p} \sin p\lambda - \lambda \cos p\lambda \right\} \quad (1)$$

si p est une valeur non nulle fp qui varie depuis P jusqu'à $P + \Delta$ quand

que fp conservera sensiblement la même valeur dans l'intervalle Δ si cet intervalle est suffisamment petit il en sera de même de la variable p qui ne différera guère de P dans cet intervalle mais $\cos p\lambda$ prendra dans la même intervalle des valeurs très différentes quelque λ est un nombre fixé et l'intervalle Δ pourra être pris tel que pour quelque soit petit l'arc $\int_P^{P+\Delta} d\lambda \cos p\lambda$ soit nul. la même variable p fait varier également l'expression à la fonction $\sin p\lambda$ mais différemment par exemple de sorte que les valeurs de fp que l'on considère depuis $p = P$ jusqu'à $p = P + \Delta$ soit toutes finies il faut dans que dans l'expression (1) on prenne l'intégrale que depuis $p = 0$ jusqu'à $p = \omega$ valeur telle que pour quelque soit nombre fixé exprimé par λ les termes qui contiennent λ.

$$\int \sin^3 x \cos^2 x \, dx = \int \sin x (1-\cos^2 x)\cos^2 x \, dx = \int (\cos^2 x - \cos^4 x)\sin x \, dx$$

$$= -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} + C$$

$$\int \sin^3 x \cos^3 x \, dx = \int \sin^3 x (1-\sin^2 x)\cos x \, dx = \int (\sin^3 x - \sin^5 x)\cos x \, dx$$

$$= \frac{\sin^4 x}{4} - \frac{\sin^6 x}{6} + C$$

$$\int \sin^4 x \cos^4 x \, dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{16}\int (1-\cos^2 2x)(1+\cos 2x)^2 \, dx$$

$$= \frac{1}{16}\int (1-\cos^2 2x)(1+2\cos 2x+\cos^2 2x)\, dx$$

$$= \frac{1}{16}\int (1+2\cos 2x - \cos^2 2x - 2\cos^3 2x)\, dx$$

$$= \frac{1}{16}\left[x + \sin 2x - \frac{1+\cos 4x}{2} - 2\int (1-\sin^2 2x)\cos 2x \, dx\right]$$

$$= \frac{1}{16}\left[x + \sin 2x - \frac{x}{2} - \frac{\sin 4x}{8} - 2\sin 2x + \frac{2\sin^3 2x}{3}\right] + C$$

$$= \frac{1}{16}\left[\frac{x}{2} - \sin 2x - \frac{\sin 4x}{8} + \frac{2\sin^3 2x}{3}\right] + C$$

$$\int \sin^5 x \cos^2 x \, dx = \int \sin x (1-\cos^2 x)^2 \cos^2 x \, dx = \int (\cos^2 x - 2\cos^4 x + \cos^6 x)\sin x \, dx$$

$$= -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{2\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^7 x}{7} + C$$

$$\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{4}\int (1-\cos^2 2x)\, dx = \frac{1}{4}\int \left(1 - \frac{1+\cos 4x}{2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 4x}{8}\right] + C$$

$$= \frac{x}{8} - \frac{\sin 4x}{32} + C$$

$$\int \sin^4 x \cos^2 x \, dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{8}\int (1-\cos 2x)(1-\cos^2 2x)\, dx$$

$$= \frac{1}{8}\int (1 - \cos 2x - \sin^2 2x + \cos 2x \sin^2 2x)\, dx$$

$$= \frac{1}{8}\left[x - \frac{\sin 4x}{4} - \int \sin^2 2x \, dx + \int \sin^2 2x \cos 2x \, dx\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left[x - \frac{\sin 4x}{4} - \frac{x}{2} + \frac{\sin 4x}{8} + \frac{\sin^3 2x}{6}\right] + C$$

$$= \frac{1}{16}\left[x - \frac{\sin 4x}{2} + \frac{\sin^3 2x}{3}\right] + C$$

$$\int \sin^3 x \cos^3 x \, dx = \int \sin^3 x (1-\sin^2 x)\cos x \, dx = \int (\sin^3 x - \sin^5 x)\cos x \, dx$$

$$= \frac{\sin^4 x}{4} - \frac{\sin^6 x}{6} + C$$

$$\int \sin^5 x \cos^2 x \, dx = \int \sin x (1-\cos^2 x)^2 \cos^2 x \, dx = \int (\cos^2 x - 2\cos^4 x + \cos^6 x)\sin x \, dx$$

$$= -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{2\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^7 x}{7} + C$$

$$\int \sin^4 x \cos^3 x \, dx = \int \sin^4 x (1-\sin^2 x)\cos x \, dx = \int (\sin^4 x - \sin^6 x)\cos x \, dx$$

$$= \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^7 x}{7} + C$$

$$\int \sin^6 x \cos^3 x \, dx = \int \sin^6 x (1-\sin^2 x)\cos x \, dx = \int (\sin^6 x - \sin^8 x)\cos x \, dx$$

$$= \frac{\sin^7 x}{7} - \frac{\sin^9 x}{9} + C$$

$$\int \sin^3 x \cos^4 x \, dx = \int \sin x (1-\cos^2 x)\cos^4 x \, dx = \int (\cos^4 x - \cos^6 x)\sin x \, dx$$

$$= -\frac{\cos^5 x}{5} + \frac{\cos^7 x}{7} + C$$

$$\int \sin^5 x \cos^4 x \, dx = \int \sin x (1-\cos^2 x)^2 \cos^4 x \, dx = \int (\cos^4 x - 2\cos^6 x + \cos^8 x)\sin x \, dx$$

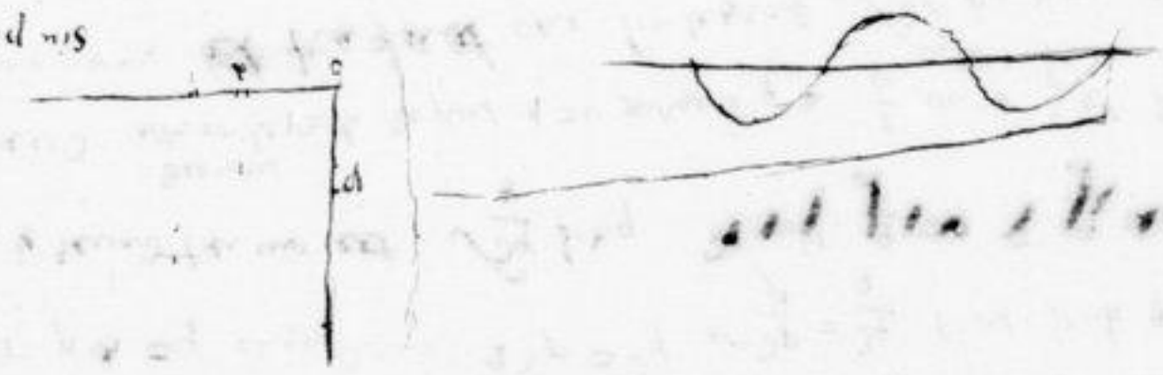
$$= -\frac{\cos^5 x}{5} + \frac{2\cos^7 x}{7} - \frac{\cos^9 x}{9

ωv

$\frac{\omega v}{2}$

$\frac{\omega v}{2} = \mu \int_0^{\frac{\omega}{2}} dp\, fp + \nu \int_0^{\omega} dp\, fp \cdot \frac{1}{p} \cdot \sin p\, a\, fg.$

$\frac{\omega v}{2} = \mu \int_0^{\frac{\omega}{2}} dp\, fp + \nu \int_0^{\omega} dp\, fp \cdot \frac{1}{p} \cdot \sin p\, a


sin px
a
0

ou en conclud $v = \frac{K}{H} F'_0 + \sqrt{\frac{H}{k}} F_0 - F'_0 \Big) \frac{H\sqrt{K\cdot C\cdot D}}{H^2\sqrt{t}} \left\{ 1 - \frac{KC\cdot D}{2H^2 t} + \left(\frac{KC\cdot D}{H^2 t}\right)^{\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}} \right.$

ou $v = \left\{ F_0 \cdot \frac{\sqrt{KC\cdot D}}{H\sqrt{K\cdot C\cdot D}\sqrt{t}} + F'_0 \left(\frac{K}{H} \frac{-K\sqrt{KC\cdot D}}{\sqrt{2} H^2 \sqrt{t}} \right) \right\} \left(1 - \frac{KC\cdot D}{2H^2 t} + 2 \right)^{-2} \Big\}$

si le coefficient $F'(0)$ était nul on aurait

$v = F_0 \cdot \frac{\sqrt{K\cdot C\cdot D}}{H\sqrt{2}\sqrt{t}} \left(1 - \frac{KC\cdot D}{2H^2 t} + 2 \right)$ ce résultat est précisément celui qui a trouvé dans les notes précédentes. Lorsque le coefficient F' subsiste on trouve

$v = \frac{K}{H} F'_0 + \left(F_0 - \frac{K}{H} F'_0 \right) \frac{\sqrt{K\cdot C\cdot D}}{H\sqrt{2}\sqrt{t}} \left\{ 1 - \frac{KC\cdot D}{2H^2 t} + 2 \right\}$

Supposons maintenant que le terme $\frac{KC\cdot D}{2H^2 t}$ soit une très petite fraction $\frac{1}{n}$ ou plus petit que cette fraction ensorte que l'on ait $\frac{KC\cdot D}{2H^2 t} < \frac{1}{n}$

ou $t > \frac{n\cdot K\cdot C\cdot D}{2H^2}$ écrivons $K = \frac{3}{2}$ $C\cdot D = 16\,23$ et $H = \frac{1}{3}$ on aura

$t > \frac{3}{2} \frac{16\,23}{2\cdot 36}$ n. 23 ici l'unité de temps est 1 heure on aura donc en comptant en années on aura $t > \frac{3\cdot 16\,23\cdot n\cdot 23}{2\cdot 24\cdot 60\cdot 24\cdot 36\,23}$ ou

$t > \frac{1}{20} \frac{1}{96} \frac{16\,23\cdot n\cdot 23}{36\,23}$ soit $n = 730$ on aura $t > \frac{16\,23\cdot 23}{2\cdot 96}$

il faut donc que t surpasse 212 ans pour que le terme $\frac{KC\cdot D}{2H^2 t}$ soit plus petit qu'un 730ième et si K était neuf fois plus grand les autres coefficients demeurant les mêmes le temps t pourrait être neuf fois moindre ou vingt ans ce qui la somme très considérable à laquelle si le temps d'une époque dépasse l'unité de durée il faut dépasser un siècle. il faut de la que la valeur de v est exprimée aussi encore d'une manière qu'on peut la déduire dans les cas dans il s'agit pour cette fonction

$v = A + B \frac{\sqrt{K\cdot C\cdot D}}{H\sqrt{2}\sqrt{t}}$ la valeur de A est $\frac{K}{H} F'_0$ et celle de B est $F_0 - \frac{K}{H} F'_0$ ..

une supposition extrême relative à la valeur initiale exprimée par $F_0 + 2F'_0$. si l'état initial de la ville était tel dans une maison inférieure et si en même temps on avait $H F_0 - K F'_0 = 0$ il est évident que l'état initial ne pourrait changer et la température de la maison se serait toujours en F_0 c'est ce qui fait la raison pour l'analyse précédente parce que le coefficient B devient nul.

16,23 · n / 20 · 24 · 36 h

3,23 · n / 20 · 24 · 73

n = 730

3,23 · 730 / 20 · 24 · 73

3,23 / 2,24

16 23 / 23 / 8123

3250 / 40624 / 384 / 222 / 192 / 30 h | 192 / 211

Pequemmoins calculde la page 4 nous apprtenons à l'expression de $F\lambda$ un terme $\rho\lambda^2$ et nous cherchons ce que cet terme doit donner dans l'evaluation de $\frac{\pi V}{2}$ ou l'appelle en vol $u=0$ ... il faut donc calculer d'abord l'expression

$$\int_0^\infty dp\, fp \int_0^\infty d\lambda \sin p\lambda \left(\frac{\#}{k}\rho\lambda^2 - 2\rho\lambda\right)$$ termes on a commencé précédemment

à l'aide de l'integrale qui répond à $2\rho\lambda$ et le calcul est le même que dans le cas précédent. il reste à examiner la nature de l'integrale

$$\int_0^\infty dp\, fp \int_0^\infty d\lambda\, \lambda^2 \sin p\lambda. \quad \text{on a} \int d\lambda\, \lambda^2 \sin p\lambda =$$

$$C - \frac{\lambda^2}{p}\cos p\lambda + \frac{2\lambda}{p^2}\sin p\lambda + \frac{2}{p^3}\cos p\lambda \quad \text{car en différentiant on a}$$

$$\lambda^2 \sin p\lambda = \lambda^2 \sin p\lambda - \frac{2\lambda}{p}\cos p\lambda + \frac{2\lambda}{p^2}\cos p\lambda + \frac{2}{p^2}\sin p\lambda - \frac{2}{p^2}\sin p\lambda$$

$$\text{donc} \int_0^\lambda d\lambda\, \lambda^2 \sin p\lambda = -\frac{\lambda^2}{p}\cos p\lambda + \frac{2\lambda}{p^2}\sin p\lambda + \frac{2}{p^3}(1-\cos p\lambda)$$

il faut maintenant faire dans le second membre $\lambda = \infty$, puis multiplier la fonction de p par $dp\, fp$ et intégrer de $p=0$ à $p=\frac{1}{0}$

si l'on considère une valeur de p appartenant à un nombre fini δ et que l'on donne à la variable p toutes les valeurs de puis δ jusqu'à $\delta+\Delta$ en désignant par Δ un intervalle infiniment petit, on sait que la valeur de p changera infiniment peu dans cet intervalle. il en sera de même de la fonction fp dont nous connaissons elle changera infiniment peu. quant aux fonctions $\sin p\lambda$ $\cos p\lambda$ elles changeront très rapidement dans cet intervalle de δ à $\delta+\Delta$ parce que la quantité λ est infinie. il suit de là que l'on peut prendre l'intervalle infiniment petit Δ en sorte que toutes les parties de l'integrale de δ à $\delta+\Delta$ dans le tout intervalle de δ à $\delta+\Delta$ soit insignifiante ne s'appliquent point aux premières valeurs de p depuis $p=0$ jusqu'à $p=\omega$ quantité infiniment grande toutes quantités finies δ. où toujours la fonction fp conserve la valeur finie mais la valeur de $\frac{1}{p^3}$ change très rapidement et extrêmement grande il faut conclure de ces raisonnements que la valeur de l'integrale $\int_0^\infty p^2 dp\, fp \int_0^\lambda d\lambda\, \lambda^2 \sin p\lambda$ est

celle-ci $f(0)\int_0^\omega dp \left\{-\lambda^2\cos p\lambda + \frac{2\lambda}{p}\sin p\lambda - \frac{2}{p^2}(1-\cos p\lambda)\right\}$ la limite ω

de l'integrale est plus petite que toute quantité finie

ou l'integrale qui multiplie $f(0)$, pourra être quelconque γ et exactement si l'on donne cet à λ une valeur finie connue, et que la part l'integrale depuis $p=0$ jusqu'à $p=\frac{1}{0}$ ou infini ou celle-ci quelle qui varierait si l'on faisait $\lambda=2$ ou $\lambda=3$ c'est la limite de cette nombre qui est l'integrale cherchée car il est indifférent de la prendre jusqu'à $p=\frac{1}{0}$ ou jusqu'à $p=\omega$ lorsque λ est infini ou aura donc pour valeur de cette $\gamma f(0)$ en désignant par γ un nombre qu'on n'apprendra rien jusqu'à maintenant.

$1 - p^2\frac{\lambda^2}{2} + p^4\frac{\lambda^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}$

$p^2\frac{\lambda^2}{2} + p^4\frac{\lambda^4}{3\cdot4}$ X

$p^2\lambda^2 + p^4\frac{\lambda^4}{3\cdot4}$

$\lambda^2 + \frac{2}{3\cdot4}p^2\lambda^4$

$p\lambda - \frac{p^3\lambda^3}{1\cdot2\cdot3}$

$\lambda^2 - \frac{p^2}{2\cdot3}\lambda^4$

X ces inégalités sont évidentes il faut donner une autre forme au calcul.

nous représenterons l'équation de la page 4 qui exprime la valeur de v et faisant en cet $u = 0$ nous aurons à interpréter à notre façon $\frac{\pi v}{2}$

$$\frac{\pi v}{2} = \int_0^\infty \frac{dp\, e^{-p^2 \frac{Ht}{c\cdot n}}}{p^2 + \frac{\pi^2}{k^2}} \cdot p \int_0^\infty dx \sin p\lambda \left(\frac{\pi}{k} F x - F' \lambda \right).$$

désignons $\frac{\pi}{k} F\lambda - F'\lambda$ par $\varphi\lambda$ nous voyons que l'intégrale $\int_0^\lambda d\lambda \sin p\lambda \cdot \varphi\lambda$ est une fonction impaire de p c'est à dire une fonction qui devient négative lorsque p est négative en conservant d'ailleurs la même valeur. Soit donc

$$p \int_0^\infty dx \sin px\ \varphi\lambda = a + bp^2 + cp^4 + dp^6 + \text{ la somme étant limitée à } 6 \text{ c. d.}$$

tout coefficient qui ne peut contenir que $\frac{\pi}{k}$.

pour connaître la valeur de la fonction déjà exprimée $\int_0^\infty d\lambda \sin p\lambda \varphi\lambda$ il faut se représenter la surface dont p et λ sont les coordonnées y et x et dont l'ordonnée z est $\sin p\lambda$. la forme de cette surface est facile à se faire : on la verra entière si la surface étant limitée z est $\varphi\lambda$. et l'on verra aussi la surface complète dont l'ordonnée z est $\sin p\lambda \cdot \varphi\lambda$. cette surface est la surface ondulée $\varphi\lambda$ recouverte de la fonction connue $\sin p\lambda$ rendue périodique. si par ex si l'on coupe la surface complète par un plan vertical parallèle au λ. on aura une section dont l'aire sera la table depuis de la valeur de p c'est cette aire qu'exprime la fonction de p que l'on cherche

par exemple si $\varphi\lambda$ est une constante A on aurait $\int_0^\lambda d\lambda \sin p\lambda \cdot A =$
$A\left(\frac{1 - \cos p\lambda}{p}\right)$ qui est encore une fonction impaire. aussi la fonction

$p \int_0^\lambda d\lambda \sin p\lambda \cdot \varphi\lambda$ est $A(1 - \cos p\lambda)$. si λ était la variable seule et que A fut 1 la fonction $p \int_0^\lambda d\lambda \sin p\lambda\ \varphi\lambda$ serait $\sin$ Vers. $(1000\, p)$ cette fonction de p varie d'autant plus rapidement que le nombre λ est plus grand et les mêmes valeurs se reproduisent dans une étendue infiniment petite. en outre qu'il peut arriver que la variable p contienne les valeurs négatives dans tout l'intervalle. nous allons supposer comme ci-dessus

$$p \int_0^\infty dx \sin(px) \cdot \varphi(x) = a + bp^2 + cp^4 + \text{ &c}$$

actuellement tout $e^{-p^2 \frac{Ht}{c\cdot n}} = e^{-x^2}$ ou $x^2 = p^2 \frac{Ht}{c\cdot n}$, $x = p\sqrt{\frac{Ht}{c\cdot n}}$

$$p = x\sqrt{\frac{c\cdot n}{Ht}}, \quad dp = dx \sqrt{\frac{c\cdot n}{Ht}} \qquad \frac{e^{-x^2}}{1 + p^2 \frac{H^2}{k^2}} = \frac{e^{-x^2}}{\frac{H^2}{k^2}\left(1 + p^2 \frac{k^2}{H^2}\right)} = \frac{e^{-x^2}}{\frac{H^2}{k^2}\left(1 + \frac{k^2 x^2 c\cdot n}{H^2 Ht}\right)}$$

$$= \frac{k^2}{H^2} \frac{e^{-x^2}}{1 + x^2 \frac{k\, c\cdot n}{H^2 t}}$$ il faut encore multiplier cette dernière expression par dp

ce qui donne $\frac{k^2}{H^2} \frac{\sqrt{c\cdot n}}{\sqrt{Ht}} dx \frac{e^{-x^2}}{1 + x^2 \frac{k\, c\cdot n}{H^2 t}}$ ou en outre

$$\frac{\pi v}{2} = \frac{k}{H^2} \frac{\sqrt{k\, c\cdot n}}{\sqrt{t}} \int_0^\infty dx\, e^{-x^2} \left\{ 1 - x^2 \frac{k\, c\cdot n}{H^2 t} + x^4 \left(\frac{k\, c\cdot n}{H^2 t}\right)^2 - x^6 \left(\frac{k\, c\cdot n}{H^2 t}\right)^3 + \text{ &c} \right\}$$
$$(a + bp^2 + cp^4 + \text{ &c})$$

$f(x) = a + be^{-x} + ce^{-2x} + de^{-3x} + \dots$

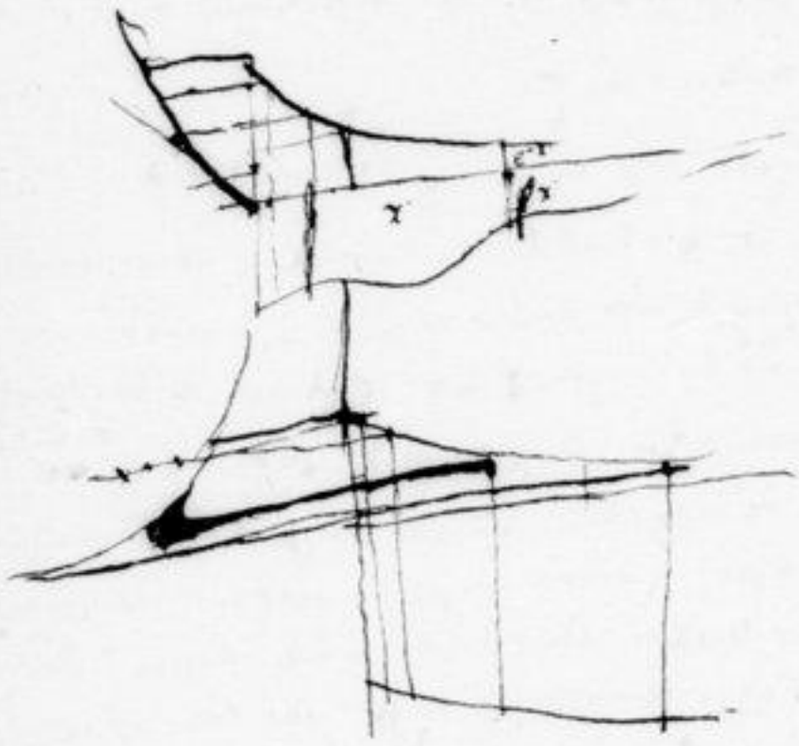
$e^{-x} = u \qquad f_x = \varphi(u)$

$-x = \log u$

$f_x = \varphi(e^{-x})$



$a + bu + cu^2 + du^3 + \dots$



$$\frac{\varpi}{2} = \frac{k}{H^2}\frac{\sqrt{KC\cdot D}}{\sqrt{t}}\int_0^\infty dx\, e^{-x^2}\left\{1 - \frac{x^2 KC\cdot D}{H^2 t} + x^4\left(\frac{KC\cdot D}{H^2 t}\right)^2\right\}\left(a + b\frac{x^2 C\cdot D}{Kt} + c\,x^4\left(\frac{C\cdot D}{Kt}\right)^2 + \dots\right)$$

$$= \frac{k}{H^2}\frac{\sqrt{KC\cdot D}}{\sqrt{t}}\int_0^\infty dx\, e^{-x^2}\left\{a + \frac{x^2}{t}\left(\frac{bC\cdot D}{K} - a\frac{KC\cdot D}{H^2}\right) + \frac{x^4}{t^2}\left\{c\left(\frac{C\cdot D}{K}\right)^2 - b\frac{KC\cdot D}{H^2}\frac{C\cdot D}{K} + a\left(\frac{KC\cdot D}{H^2}\right)^2\right\} + \dots\right\}$$

$$= \frac{k}{H^2}\frac{\sqrt{KC\cdot D}}{\sqrt{t}}\left\{a\,\frac{1}{2}\sqrt{\pi} + \left(\frac{bC\cdot D}{K} - a\frac{KC\cdot D}{H^2}\right)\frac{1}{2t}\frac{1}{2}\sqrt{\pi} + \frac{k_2}{t^2}\right\}$$

Developpée suivant les valeurs de ν qui est la température de la surface le terme
Developpée suivant les valeurs de ν qui est la température de la surface le terme
Devenant de plus en plus grand à mesure que t décroit de plus en plus
Suffit pour exprimer cette quantité inconnue ν qu'on a alors comme
Fonction connue de t.

Dans le cas précédent lorsque la courbe $F'\lambda$ est $A + B\lambda$ on a trouvé
un résultat différent et l'on a vu que dans ce cas $F'\lambda = B$
on considère spécialement le cas où $F\lambda = A + B\lambda$ d'où $F'\lambda = B$
donne $\varphi\lambda = \frac{H}{K}A - B + \frac{BH}{K}\lambda = \mu + \nu\lambda$ il s'agit de considérer
les valeurs de l'intégrale $\int_0^\infty d\lambda\, \sin(\rho\lambda)(\mu + \nu\lambda)$ ou bien

$$\int d\lambda \sin\rho\lambda\,(\mu + \nu\lambda) = \frac{-1}{\rho}\cos\rho\lambda\,(\mu + \nu\lambda) + \frac{\nu}{\rho^2}\sin\rho\lambda + \text{Cte}$$

on a $\int \sin\rho\lambda\,\sqrt{\mu + \nu\lambda} = \int \sin\rho\lambda\,\sqrt{\mu + \nu\lambda} - \frac{\nu}{\rho}\cos\rho\lambda + \frac{\nu}{\rho}\cos\rho\lambda$ et $c = \frac{\mu}{\rho}$

donc $\int_0^a d\lambda \sin\rho\lambda\,\sqrt{\mu + \nu\lambda} = \frac{\mu}{\rho}(1 - \cos\rho\lambda) + \frac{\nu}{\rho^2}\sin\rho\lambda$ il faut donc

le second membre reste petit λ infini et on a vu que de sorte alors la courbe $\rho\sin\rho\lambda$
on voit que $1 - \cos\rho\lambda$ ou $\sin\text{vers}.\rho\lambda$ reste dans un intervalle infiniment
petit Δ lorsque ρ devient $> \rho'$ et que λ est inférieur à λ et la longueur de cet intervalle est μ
tandis que la fonction $\mu\sin\text{V}(\rho\lambda)$ tend vers λ est infini ne cesse pas plus longtemps
ρ mais devient la constante μ. à l'égard du terme $\frac{\nu}{\rho^2}\sin(\rho\lambda)$ on voit
qu'il exprime aussi une fonction périodique dont la valeur change de signe
Dans un intervalle très petit Δ tel que $\Delta\lambda = 2\varpi$. Si ρ a une valeur telle
β la moyenne valeur de la fonction dans l'intervalle de $\rho = \beta$ à $\rho = \beta + \Delta$
est nulle mais il en sera de même de $\rho = 0$ à $\rho = \Delta$ cette moyenne
valeur de ρ est $\int_0^\Delta \frac{d\rho}{\rho}\sin\rho\lambda$ expression qui tend vers une limite finie
comme est $\frac{1}{2}\varpi$. en opérant de même on trouve pour moyenne une grandeur différente
le résultat que l'on avait déjà trouvé pour le cas où la fonction $F\lambda$ est $A + B\lambda$

Soit en général $F\lambda = A + B\lambda + C\lambda^2 + D\lambda^3 + \dots$ d'où

$$F'\lambda = B + 2C\lambda + 3D\lambda^2 + \dots$$

$$\frac{H}{K}F\lambda - F'\lambda = \overline{A\frac{H}{K} - B} + \overline{\frac{H}{K}B - 2C}\,\lambda + \overline{\frac{H}{K}C - 3D}\,\lambda^2 + \dots \quad \lambda = \mu + \nu\lambda + \rho\lambda^2 + \delta\lambda^3 + \dots$$

10 donc $\frac{\omega v}{2} = \int_0^\infty dp\, f(p) \cdot p \int_0^\infty d\lambda \sin p\lambda \,(\mu + \gamma\lambda + \rho\lambda^2 + \delta\lambda^3 + \dots)$

or $\int d\lambda \sin p\lambda \varphi\lambda = C - \frac{1}{p}\varphi\lambda \cdot \cos p\lambda + \frac{\varphi'\lambda}{p^2}\sin p\lambda + \frac{\varphi''\lambda}{p^3}\cos p\lambda - \frac{\varphi'''\lambda}{p^4}\sin p\lambda + \dots$

cor en effectuant on trouve

$$\sin p\lambda \cdot \varphi\lambda = \varphi\lambda \sin p\lambda + \frac{1}{p}\varphi'\lambda \cos p\lambda - \frac{1}{p^2}\varphi''\lambda \sin p\lambda - \frac{1}{p^3}\varphi'''\lambda \cos p\lambda$$
$$- \frac{1}{p}\varphi'\lambda \cos p\lambda + \frac{1}{p^2}\varphi''\lambda \sin p\lambda + \frac{1}{p^3}\varphi'''\lambda \cos p\lambda \quad \vdots\lambda$$

$$\text{et } 0 = C - \frac{1}{p}\varphi 0 + \frac{1}{p^3}\varphi''(0) - \frac{1}{p^5}\varphi^{IV}0 + \lambda$$

donc $\int_0^\lambda d\lambda \sin p\lambda \varphi\lambda = \frac{1}{p}\varphi 0 - \varphi\lambda \cos p\lambda + \frac{1}{p^2}\varphi'\lambda \cdot \sin p\lambda - \frac{1}{p^3}(\varphi''0 - \varphi''\lambda \cos p\lambda)$

$$- \frac{1}{p^4}\varphi'''(\lambda) \sin p\lambda$$

ou l'intégrale devient nulle lorsque $\lambda = 0$ et

la différentielle devient une équation identique

ou a donc

$$p\int_0^\lambda d\lambda \sin p\lambda \varphi\lambda = \varphi 0 - \varphi\lambda \cos p\lambda + \frac{1}{p}\varphi'\lambda \cdot \sin p\lambda - \frac{1}{p^2}(\varphi''0 - \varphi''\lambda \cos p\lambda)$$
$$- \frac{1}{p^3}\varphi'''\lambda \sin p\lambda$$

Il faut maintenant supposer λ infiniment considérable quelle est la limite de p que on prend. or il est certain que si p va en croissant par valeurs de plus $p = \beta$ quantité finie pour $p = \beta + \Delta = \beta + \frac{2\varpi}{\lambda}$ il arrivera que dans cet intervalle infiniment petit Δ égal à $\frac{2\varpi}{\lambda}$ les quantités $\cos p\lambda$ et $\sin p\lambda$ reprennent toutes leurs valeurs simultanément dans une période et dans cet intervalle la valeur moyenne de $\cos p\lambda$ ou de $\sin p\lambda$ sera la même que dans le même intervalle infiniment petit Δ ou la valeur de p ne changera point la même conséquence n'aura lieu si l'on considère les premières valeurs de p infiniment petites de 0. il suit de là que de désignant par ω une quantité infiniment petite la valeur de $\int_0^\lambda d\lambda \sin p\lambda \varphi\lambda$ entre ces limites

$$\int_0^\omega dp \left\{ \overline{\varphi 0 - \varphi\lambda \cos p\lambda} + \frac{1}{p}\varphi'\lambda \sin p\lambda - \frac{1}{p^2}(\varphi''0 - \varphi'\lambda \cos p\lambda) + \Omega \right\}$$

(E) quantité qui contient une intégrale double dans laquelle $p = 0$ et $p = \frac{1}{0}$ prise dans toute l'étendue de l'intégrale au-dessous d'une certaine limite infiniment petite et de l'intégrale au-dessus d'une certaine limite infiniment grande. Or on peut prouver que la quantité $p\int_0^\omega d\lambda \sin p\lambda \varphi\lambda$ n'est jamais infinie lorsque p est infiniment grand quelque soit λ depuis 0 jusqu'à une valeur finie de la fonction $\varphi\lambda$ ou des coefficients qui dépendent de son développement. Soit donc γ la valeur absolue que cette quantité atteint et $p\int_0^\lambda d\lambda \sin p\lambda \varphi(\lambda)$ sera évidemment plus petite que γ dans cet intervalle. Mais il y a ici une difficulté à lever car dans la dernière expression Σ il faut tenir compte des termes qui n'ont pas été multipliés par p savoir $\overline{\varphi 0 - \varphi\lambda \cos p\lambda}$ comme cette fonction doit être multipliée par dp et intégrée entre les limites 0 et ω il suit que les seuls termes de terme qui contient $\cos p\lambda$ donneront une quantité infiniment petite du premier ordre tandis que la première partie $\varphi 0$ donnera $\varphi 0 \int_0^\omega \frac{dp}{p}$

quant aux termes qui contiennent p au dénominateur soit seul soit avec $\sin p\lambda$ ou $\cos p\lambda$ ne doivent être employés que pour déterminer la fonction φp qui répond à p infiniment petite. mais il n'en est pas de même de $\varphi''\lambda$

X (voir objection) # est de l'ordre de $\frac{H}{K}$

on conclut de là que la valeur de $\frac{\omega v}{2}$ sur l'origine

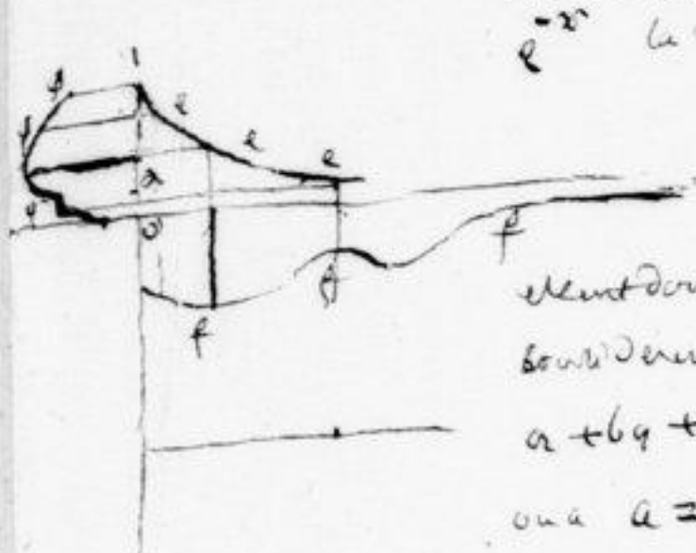
$$\frac{\omega v}{2} = \int_0^\infty dp \, f_p \left(\varphi_0 - \frac{1}{p^2}\varphi''_0 + \frac{1}{p^4}\varphi^{IV}_0 \ldots \right) + f_0 \int_0^\infty dp \left(\frac{\varphi'_0}{p^2}\sin px + \frac{\varphi'''_0}{p^4}\sin px - \frac{\varphi^V_0}{p^6}\sin px \right)$$

il est facile d'employer cette expression lorsque $\varphi\lambda$ est une constante ou est égale à $A + B\lambda$ mais il n'en est pas de même quand $\varphi\lambda$ contient des puissances plus élevées

---

il faut maintenant donner une autre forme à la solution

reprenons l'équation de la page 4 et supposons $u = 0$ il faut d'abord rechercher l'équation $p \int_0^\infty d\lambda \sin p\lambda \left(\frac{H}{k} F\lambda - F'\lambda \right)$ si la valeur $\frac{H}{k} F\lambda - F'\lambda$ ou $\varphi\lambda$ est $\pi e^{-g\lambda}$ désignant par g et π des nombres constants on pourra achever le calcul graphiquement.



la courbe fff a pour ordonnée f_x la courbe $eee\ldots$ a pour ordonnée e^{-x} la courbe $\varphi\varphi\varphi\ldots$ a des ordonnées que l'on a vu se déduire graphiquement de celles de $fff\ldots$ de sorte que connaissant λ les abscisses portées sur l'axe des x donnent $\lambda\varphi$ lorsque $\varphi(e^{-\lambda})$ a pour courbe fff étant donnée il est très facile de construire la courbe $\varphi\varphi\varphi$ connaissant maintenant la fonction $\varphi(q)$ et développant en série on a $a + bq + cq^2 + dq^3 \ldots$ donc une série $f(\lambda) = a + be^{-\lambda} + ce^{-2\lambda} + de^{-3\lambda} + \ldots$ on a $a = \varphi_0$, $b = \varphi'_0$ $c = \frac{1}{2}\varphi''_0$ $\ldots$

Supposons donc que la fonction $F\lambda$ que l'on cherche l'ordonnée de bbb soit exprimée par $F\lambda = a + be^{-\lambda} + ce^{-2\lambda} + de^{-3\lambda} + \ldots$

donc $F'\lambda = -be^{-\lambda} - 2ce^{-2\lambda} - 3de^{-3\lambda} - \ldots$

$$\frac{H}{k} F\lambda = \frac{H}{k} a + e^{-\lambda}\left(\frac{H}{k} + 1\right) + e^{-2\lambda} c \left(\frac{H}{k} + 2\right) + e^{-3\lambda} d \left(\frac{H}{k} + 3\right) + \ldots$$

$$-F'\lambda = \mu + \nu e^{-\lambda} + \rho e^{-2\lambda} + \delta e^{-3\lambda}$$

il faut considérer généralement la quantité $p \int_0^\infty d\lambda \sin p\lambda e^{-i\lambda}$

or $\int d\lambda \sin p\lambda e^{-i\lambda} = -\frac{1}{p}\cos p\lambda e^{-i\lambda} - \frac{i}{p^2}\sin p\lambda e^{-i\lambda} - i^2 \int \frac{p}{p^2}\sin p\lambda e^{-i\lambda} + C$

ou $\int d\lambda \sin p\lambda e^{-i\lambda} = -\frac{i}{p}\cos p\lambda e^{-i\lambda} + \frac{i^2}{p^2}\sin p\lambda e^{-i\lambda} + \frac{i^2}{p^2}\int d\lambda \sin p\lambda e^{-i\lambda}$

ou différentiant $\sin p\lambda e^{-i\lambda} = \sin(p\lambda) e^{-i\lambda} + \frac{i}{p}\cos(p\lambda) e^{-i\lambda} + \frac{i^2}{p^2}\sin p\lambda e^{-i\lambda}$

$$\left(1 + \frac{i^2}{p^2}\right) \int d\lambda \sin p\lambda e^{-i\lambda} = C - \frac{i}{p}\cos(p\lambda) e^{-i\lambda} - \frac{i^2}{p^2}\sin p\lambda e^{-i\lambda}$$

et $\int_0^\infty d\lambda \sin p\lambda e^{-i\lambda} = \frac{i}{p}\left(1 + \cos p\lambda e^{-i\lambda}\right) - \frac{i^2}{p^2}\sin(p\lambda) e^{-i\lambda}$

$$= \frac{i}{p}\left(1 - \cos(p\lambda) e^{-i\lambda}\right) - \frac{i^2}{p^2}\sin(p\lambda) e^{-i\lambda}$$

et si l'on fait λ infini on a $\int_0^\infty d\lambda \sin p\lambda e^{-i\lambda} = \frac{i}{p^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{i^2}{p^2}}$

Donc $p \int_0^\infty d\lambda \sin p\lambda e^{-i\lambda} = \frac{1}{1 + \frac{i^2}{p^2}}$

$$f\lambda = e^{-g\lambda} \qquad \frac{H}{K}e^{-g\lambda}+ge^{-g\lambda} \;\Big|\; e^{-g\lambda}\left(\frac{H}{K}+g\right)$$
$$f'\lambda = -ge^{-g\lambda}$$

$$\int d\lambda \sin p\lambda e^{-g\lambda} = -\frac{1}{p}\cos p\lambda e^{-g\lambda} - \frac{g}{p^2}\sin p\lambda e^{-g\lambda} - g^2\int \frac{d\lambda}{p^2}\sin p\lambda e^{-g\lambda}$$

$$\sin p\lambda e^{-g\lambda} = \sin p\lambda e^{-g\lambda} - \frac{g}{p}\cos p\lambda e^{-g\lambda} - \frac{g}{p^2}\sin p\lambda e^{-u\lambda}$$
$$+\frac{g}{p}\cos p\lambda e^{-g\lambda} + \frac{g^2}{p^2}\sin p\lambda e^{-g\lambda}$$

$$\left(1+\frac{g^2}{p^2}\right)\int d\lambda \sin p\lambda e^{-g\lambda} = c - \frac{1}{p}\cos p\lambda e^{-g\lambda} - \frac{g}{p^2}\sin p\lambda e^{-g\lambda}$$

$$0 = c - \frac{1}{p}$$

$$\int d\lambda \sin p\lambda e^{-g\lambda} = \frac{\frac{1-\cos p\lambda e^{-g\lambda}}{p} - \frac{g}{p^2}\sin p\lambda e^{-g\lambda}}{1+\frac{g^2}{p^2}}$$

$$= \frac{p - p\cos p\lambda e^{-g\lambda} - g\sin p\lambda e^{-g\lambda}}{p^2+g^2} \qquad = \frac{p}{p^2+g^2}$$

$$p\int_0^\infty d\lambda \sin p\lambda e^{-g\lambda} = \frac{p^2}{p^2+g^2}.$$

$$\int_0 p \frac{}{p^2+\frac{H^2}{K^2}} \quad \frac{p^2}{p^2+g^2} \;\Big|\; \frac{\frac{1}{g^2}p^2}{1+\frac{p^2}{g^2}}$$

$$\frac{H^2}{K^2}\left(1+\frac{p^2K^2}{H^2}\right.$$

$$\frac{K^2}{H^2}\frac{p^2}{g^2}\frac{e}{\left(1+\frac{p^2K^2}{H^2}\right)\left(1+\frac{p^2}{g^2}\right)}$$

$$\varphi x = a+bx+cx^2+dx^3+ex^4+\dots$$
$$x = e^{-g\lambda}$$
$$\varphi(e^{-g\lambda}) = a+be^{-g\lambda}+ce^{-2g\lambda}+\dots$$

$$ae^{-g\lambda}+be^{-2g\lambda}+ce^{-3g\lambda}$$
$$e^{-g\lambda} = \beta$$

$$f\lambda = a+be^{-\lambda}+ce^{-2\lambda}+de^{-3\lambda}$$
$$f'\lambda = +be^{-\lambda}+2ce^{-2\lambda}+3de^{-3\lambda}$$
$$e^{\lambda}f'\lambda = -b-2ce^{-\lambda}+\dots$$
$$b = -e^{\frac{1}{0}}f'\left(\tfrac{1}{0}\right)$$
$$a = f\left(\tfrac{1}{0}\right)$$
$$b = e^{\lambda}f'(\lambda)$$
$$f\lambda - a = -be^{-\lambda}$$
$$e^{\lambda}f\lambda - a = -b$$
$$\varphi(e^{-g\lambda}) = f\lambda$$
$$e^{\frac{1}{0}}f\tfrac{1}{0} = f\tfrac{1}{0}$$

12 on aura maintenant 86.

$$\int_0^\infty \partial\lambda \sin p\lambda \,(\mu + \nu e^{-\lambda} + \rho e^{-2\lambda} + \delta e^{-3\lambda} + \dots) = \mu + \frac{\nu}{1+\frac{1}{p^2}} + \frac{\rho}{1+\frac{4}{p^2}} + \frac{\delta}{1+\frac{9}{p^2}} + \dots$$

$$= \mu + \frac{\nu p^2}{1+p^2} + \frac{\rho p^2}{4+p^2} + \frac{\delta p^2}{9+p^2} + \dots = \mu + \frac{\nu p^2}{1+p^2} + \frac{1}{4}\rho \frac{p^2}{1+\frac{1}{4}p^2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{9}\delta \frac{p^2}{1+\frac{1}{9}p^2} + \dots$$

on a maintenant

$$\frac{\varpi v}{2} = \int_0^\infty \partial p \, \frac{e^{-p^2 \frac{kt}{c\cdot D}}}{p^2 + \frac{H^2}{k^2}} \left(\mu + \frac{\nu p^2}{1+p^2} + \frac{\frac{1}{4}\rho p^2}{1+\frac{1}{4}p^2} + \dots \right)$$

$$= \frac{k^2}{H^2} \int \partial p \, \frac{e^{-p^2 \frac{kt}{c\cdot D}}}{\left(1 + p^2 \frac{k^2}{H^2}\right)} \left(\mu + \frac{\nu p^2}{1+p^2} + \frac{1}{4}\rho \frac{p^2}{1+\frac{1}{4}p^2} + \dots \right)$$

(dernier facteur est $\mu + \nu p^2(1 - p^2 + p^4 - p^6 + \dots) + \frac{1}{4}\rho p^2 (1 - \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{16}p^4 - \frac{1}{64}p^6 + \dots)$

ou $\mu + p^2\left(\nu + \frac{1}{4}\rho + \frac{1}{9}\delta \dots\right) - p^4\left(\nu + \frac{1}{16}\rho + \frac{1}{81}\delta \dots\right) + \frac{1}{9}\delta p^2 \left(1 - \frac{1}{9}p^2 + \frac{1}{81}p^4 \dots\right)$

cette dernière quantité doit être multiplié par

$$1 - p^2\frac{k^2}{H^2} + p^4\left(\frac{k^2}{H^2}\right)^2 - p^6\left(\frac{k^2}{H^2}\right)^3 + \dots$$

Donc le facteur complet est

$$\mu + p^2\left(-\mu\frac{k^2}{H^2} + \nu + \frac{1}{4}\rho + \frac{1}{9}\delta + \dots\right) + p^4\left\{\left(\frac{k^2}{H^2}\right)^2 - \frac{k^2}{H^2}\left(\nu + \frac{1}{4}\rho + \dots\right) - \left(\nu + \frac{1}{16}\rho + \dots\right)\right\}$$

Soit $p^2\frac{kt}{c\cdot D} = x^2$ ou $p = x\sqrt{\frac{c\cdot D}{kt}}$ $\partial p = \partial x \cdot \frac{\sqrt{c\cdot D}}{\sqrt{kt}}$

ou aussi $\frac{\varpi v}{2} = \frac{k^2}{H^2}\frac{\sqrt{c\cdot D}}{\sqrt{kt}} \int_0^\infty \partial x\, e^{-x^2}\left\{\mu + \frac{kD}{kt}x^2\left(-\mu\frac{k^2}{H^2} + \nu + \frac{1}{4}\rho + \dots\right)\right.$

$$\left. + \left(\frac{cD}{kt}\right)^2 x^4 \left(\left(\frac{k^2}{H^2}\right)^2 - \frac{k^2}{H^2}\left(\nu + \frac{1}{4}\rho + \dots\right) - \nu \dots\right)\right\}$$

ou $\frac{\varpi v}{2} = \frac{k\sqrt{kc\cdot D}}{H^2\sqrt{t}}\left\{\mu\frac{1}{2}\sqrt{\varpi} + \frac{1}{2}\frac{1}{2}\sqrt{\varpi}\,\frac{c\cdot D}{kt}\left(-\mu\frac{k^2}{H^2} + \nu + \frac{1}{4}\rho\right)\right.$

$$\left. + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\,\frac{1}{2}\sqrt{\varpi}\left(\frac{cD}{kt}\right)^2\left\{\left(\frac{k^2}{H^2}\right)^2 - \frac{k^2}{H^2}\sqrt{\nu + \frac{1}{4}\rho} - \nu\right\} + 2n\right.$$

$-\frac{c\cdot D\rho}{Ht}$ $\frac{1}{4^2}\frac{c\cdot D}{kt}\left(\frac{k}{H}a - \nu - \frac{1}{4}\rho \dots\right)\lambda^2_n$ ainsi le terme correspondant à l'infini. La valeur de v est ainsi [illegible]

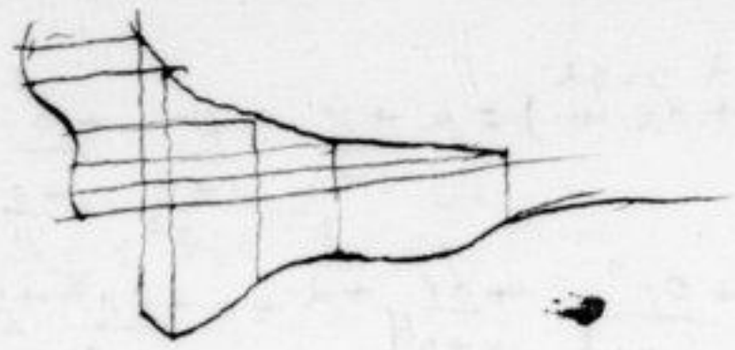
$+\frac{1}{4^2}\frac{c\cdot D}{kt}\left(\frac{k}{H}a - \nu - \frac{1}{4}\rho \dots\right)$ $v = \frac{k\mu\sqrt{kc\cdot D}}{H^2\sqrt{\varpi}\sqrt{t}} + 2n$ aussi dans tous les cas où la fonction $f'\lambda$

$+\frac{H}{k}\frac{c\cdot D}{kt}\left(\frac{k}{H}a - \nu - \frac{1}{4}\rho \dots\right)$ peut se développer suivant les puissances de λ la valeur de v finit par devenir infinie comme $\frac{a}{t}$ quelque soit d'ailleurs la valeur de a.

$+\frac{H}{2}\left(\frac{c\cdot D}{k} - \nu\frac{c\cdot D\cdot H}{ka} - \right)$ Dans le cas où $a = \mu\frac{H}{k}$ donc $v = \frac{a\sqrt{kc\cdot D}}{H\sqrt{\varpi}\sqrt{t}}$

ou $\nu = 6\left(\frac{H}{k} + 1\right)$ $\rho = c\cdot\frac{H}{k} + 1$ $\frac{k^2}{H^2}\mu = \frac{k}{H}a$

$$-\frac{1}{4}\frac{k^2}{H^2}\nu + \frac{1}{4}\rho + \frac{1}{9}\delta + \dots = -a\frac{k}{H} + \left(6\frac{H}{k} + 1\right) + \frac{\rho}{4}c\left(\frac{H}{k} + c\right) + \dots$$



$$F\lambda = a + be^{-\lambda} + ce^{-2\lambda} + de^{-3\lambda} + \dots$$

$$f\left(\tfrac{1}{0}\right) = a$$

$$F'\lambda = -be^{-\lambda} - 2ce^{-2\lambda} - 3de^{-3\lambda} - \dots$$

$$e^{\lambda} \int e^{\lambda} F\lambda = a\lambda - be^{-\lambda} - \frac{c}{2}e^{-2\lambda} - \frac{d}{3}e^{-3\lambda}$$

$$\frac{1}{2}\int e^{\lambda} F\lambda = a - \dots$$

$$F'\lambda = -be^{-\lambda} - 2ce^{-2\lambda} - 3de^{-3\lambda} - \dots$$

$$e^{\lambda} F'\lambda = -b - 2ce^{-\lambda} - \dots$$

$$e^{\frac{1}{0}} F'\left(\tfrac{1}{0}\right) = -b$$

$$F''\lambda = be^{-\lambda} + 2^2 ce^{-2\lambda} + \dots$$

$$(F\lambda - a)e^{\lambda} = b + ce^{-\lambda} + de^{-2\lambda}$$

$$e^{\frac{1}{0}}\left(F\left(\tfrac{1}{0}\right) - a\right) = b$$

$$F'\lambda = -be^{-\lambda} - 2ce^{-2\lambda} - \dots$$

$$e^{\lambda} F'\lambda = -b - 2ce^{-\lambda} - \dots$$

$$e^{\frac{1}{0}} F'\left(\tfrac{1}{0}\right) = -b$$

$$b = -e^{\frac{1}{0}} F'\left(\tfrac{1}{0}\right)$$

$$F(2\sqrt{-1}) = a + be^{-2\sqrt{-1}} + ce^{-2\cdot 2\sqrt{-1}} + \dots$$

$$F(-2\sqrt{-1}) = a + be^{2\sqrt{-1}} + ce^{2\cdot 2\sqrt{-1}} + \dots$$

$$\frac{1}{2}F(2\sqrt{-1}) + \frac{1}{2}F(-2\sqrt{-1}) = a + b\cos 2\lambda + c\cos 2\cdot 2\lambda + d\cos 3\cdot 2\lambda + \dots$$

supposons maintenant que la fonction $f\lambda$ qui entre dans l'intégrale soit donnée et que l'on ait résolu la question relative à cet état initial, on veut connaître le changement qui en résulterait si l'on ajoutait une fonction à $f\lambda$ et si cette fonction additionnelle n'avait de valeurs sensibles que depuis $\lambda = m$ jusque $\lambda = n$ on sait déjà que la partie additionnelle qui a pour valeurs tabulaires de $\lambda = m$ à $\lambda = n$ toutes les autres valeurs étant nulles, il résulte évidemment de la forme de la solution qu'il faut prendre comme la correction de la fonction primitive

écrire $\frac{\varpi}{2} w = \int_0^\infty d\rho\, f\rho \cdot \rho \int_0^\infty d\lambda \sin\rho\lambda \left\{ \frac{\pi}{\mu} \varphi\lambda - \varphi'\lambda \right\}$ supposons que

$\varphi\lambda$ soit une partie de la fonction $e^{-g\lambda}$ depuis $\lambda = m$ à $\lambda = n$ quand la partie complémentaire de

$\frac{\pi}{\mu} \varphi\lambda - \varphi'\lambda = \left(\frac{\pi}{\mu} + g\right) e^{-g\lambda}$

on a $\frac{\varpi w}{2} = \int_0^\infty d\rho\, f\rho \cdot \rho \int_m^n d\lambda \sin\rho\lambda \cdot \left(\frac{\pi}{\mu} + g\right) e^{-g\lambda}$

on trouve par les formules connues $\int_m^n d\lambda \sin\rho\lambda\, e^{-g\lambda} = \frac{\rho}{\rho^2 + g^2} \left(e^{-gm} \cos\rho m - \cos\rho\lambda\, e^{-g\lambda} \right) + \frac{g}{\rho^2} \left(e^{-gm} \sin\rho m - \sin\rho\lambda\, e^{-g\lambda} \right)$

$\left(1 + \frac{g^2}{\rho^2}\right) \int_m^n d\lambda \sin\rho\lambda\, e^{-g\lambda} = C - \frac{1}{\rho} \cos\rho\lambda\, e^{-g\lambda} - \frac{g}{\rho} \sin\rho\lambda\, e^{-g\lambda}$ faisant $\lambda = m$ on a

$$v = C - \frac{1}{\rho} \cos\rho m\, e^{-gm} - \frac{g}{\rho} \sin\rho m\, e^{-gm}$$

donc $\left(1 + \frac{g^2}{\rho^2}\right) \int_m^\lambda d\lambda \sin\rho\lambda \cdot e^{-g\lambda} = \frac{1}{\rho} \left(e^{-gm} \cos\rho m - \cos\rho\lambda\, e^{-g\lambda} \right) + \frac{g}{\rho} \left(e^{-gm} \sin\rho m - \sin\rho\lambda\, e^{-g\lambda} \right)$ et si

l'on suppose que la dernière limite n est infinie on a

$$\int_m^\infty d\lambda \sin\rho\lambda\, e^{-g\lambda} = \frac{1}{\rho} e^{-gm} \frac{\cos\rho m + g \sin\rho m}{1 + \frac{g^2}{\rho^2}}$$ on donne

$$\frac{\varpi w}{2} = \int_0^\infty d\rho\, f\rho \left(\frac{\pi}{\mu} + g \right) \frac{e^{-gm}}{1 + \frac{g^2}{\rho^2}} (\cos\rho m + g \sin\rho m)$$ pareillement si $g = 0$

on a $\frac{\varpi w}{2} = \frac{\pi}{\mu} \int_0^\infty d\rho\, f\rho \cdot \frac{1}{1 + \frac{g^2}{\rho^2}} \cdot \cos\rho m$ il faut maintenant

connaître la valeur de l'intégrale $\int_0^\infty d\rho\, f\rho \cdot \cos\rho m$ lorsque m est infiniment très grand. Concevons pour cela l'axe des abscisses ρ partagé d'une infinité d'intervalles dont chacun est égal à $\frac{\varpi}{2m}$ on voit que dans chacun de ces intervalles la fonction $\cos\rho m$ prendra toutes les valeurs depuis l'une 1 jusqu'à la dernière zéro nous prendrons pour la moyenne de ces valeurs la quantité $\frac{2}{\varpi}$ et dans l'intervalle suivant égal à $\frac{\varpi}{2m}$ la fonction $\cos\rho m$ reprendra les mêmes valeurs mais négatives de sorte qu'en nommant β la valeur de la variable ρ qui répond au commencement du premier intervalle, on pourra prendre $f\beta \cdot \frac{2}{\varpi} \cdot \frac{\varpi}{2m}$ ou $\frac{1}{m} f\beta$ pour la première de l'intégrale dont il s'agit qui répond au

$\int_0^{\frac{1}{2}\varpi} d\rho \cos\rho$

$0 \quad 1 - \cos\rho$

$\frac{1}{2}\varpi$



1

(se rapporte aux températures terrestres)
(manque la feuille 4)



Le Sphéroïde ab est emporté à l'action des rayons Soit) d'un foyer infiniment éloigné
elle tourne Sur le Diamètre a b dont la direction est perpendiculaire à la de l'anneau
c S du foyer.
on suppose le mouvement de rotation infiniment rapide
La température permanente de tous les points de l'espace est 0
la conductibilité de la surface du solide est h par rapport à l'espace c'est à dire
que l'unité de surface élevée à la température 1 donneroit à l'espace pendant l'unité
de tems une quantité de chaleur égale à h
la conductibilité de la surface par rapport au foyer est g c'est à dire que l'unité de
surface reçoit quelque soit la température une quantité de chaleur g pendant
l'unité de tems cette chaleur g provenant du foyer.

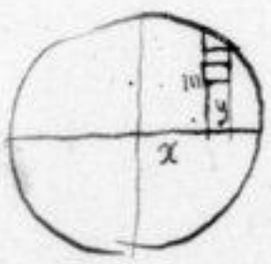
1. Si la Sphere n'étoit point solide mais remplie d'un liquide dont toutes les parties se
mêlerient à chaque instant la température cherchée v seroit uniforme et
fixe.
le rayon etant r. la surface est $4\varpi r^2$. la quantité de chaleur qu'elle
communique à l'espace pendant l'instant dt est $4\varpi h r^2 v\,dt$
celle qu'elle reçoit est $\varpi r^2 g\,dt$ ou aussi $4hv = g$ ou $v = \frac{1}{4}\frac{g}{h}$

la température cherchée est indépendante du rayon.

2. Soit a la température de l'espace
la quantité de chaleur dissipée est $4\varpi r^2 dt (v-a)$ la quantité de
chaleur reçue est $\varpi r^2 g\,dt$ ou aussi $4h\overline{v-a} = g$ ou

$$v = a + \frac{1}{4}\frac{g}{h}$$

3



Supposons que d'un point m du solide on abaisse une perpendiculaire sur le
diamètre une perpendiculaire y et soit x l'abaisse comptée entre le pied
de cette perpendiculaire et le centre
on peut concevoir l'aire circulaire divisée en une infinité de rectangles infiniment
voisins les coordonnées x, et y chacun de ces rectangles engendre un
anneau.
la surface intérieure de l'anneau est $2\varpi y\,dx$
la surface extérieure est $2\varpi \overline{y+dy}\,dx$
la surface latérale est de part et d'autre $2\varpi y\,dy$.
Soit v la température fixe du point dont les coordonnées sont x et y
la quantité de chaleur qui traverse la surface intérieure de l'anneau en s'éloignant
du centre est $-K\cdot\frac{dv}{dy}\,2\varpi y\,dx$
celle qui traverse la surface latérale en s'éloignant de la ligne de l'équateur est
$-K\frac{dv}{dx}\,2\varpi y\,dy$

2 [illegible]

la quantité de chaleur qui sort de la surface extérieure de

$-K\left(\frac{dv}{dy} + \frac{d^2v}{dy^2}dy\right) 2\varpi y dy dx'$ trouvé en ajoutant à

$-K\frac{dv}{dy} 2\varpi y dx'$ sa différentielle prise par rapport à y

et en retranchant la chaleur qui sort de celle qui entre on aura

la différentielle de $K\frac{dv}{dy} 2\varpi y dx$ prise par rapport à y

ou $2K\varpi\left(y\frac{d^2v}{dy^2}dx' + \frac{dv}{dy}\right) dy dx'$

la quantité de chaleur qui sort par la surface latérale se trouve en ajoutant à $-K\frac{dv}{dx'} 2\varpi y dx'$ sa différentielle prise par rapport à x seulement

et en retranchant la chaleur qui sort de celle qui entre on aura la

Différentielle de $K\frac{dv}{dx'} 2\varpi y dy$ prise par rapport à x seulement

ou $2K\varpi\frac{d^2v}{dx^2} y\, dy dx'$

or la chaleur ne doit point acquérir de chaleur on aura l'équation

$$\frac{d^2v}{dx^2}y + \frac{d^2v}{dy^2}y + \frac{dv}{dy} = 0 \quad \text{ou}$$

$$\frac{1}{y}\frac{dv}{dy} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dx^2} = 0$$

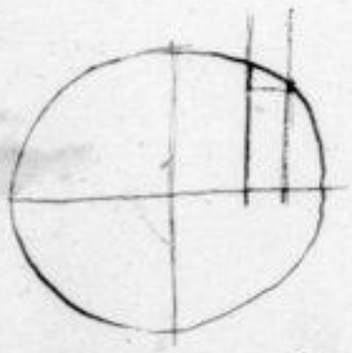
c'est l'équation qui exprime le mouvement permanent de la chaleur dans la sphère solide enveloppé dans un rayon donné

4. la surface intérieure de l'anneau extrême qui communique avec l'espace est $2\varpi r dx$ en désignant par r le rayon de la sphère.

cet anneau tronqué reçoit par la surface intérieure une quantité de chaleur égale à $-K\cdot 2\varpi y dx \frac{dv}{dy}$

par la surface latérale intérieure une quantité égale à

$-K\, 2\varpi y dy \frac{dv}{dx'}$



il reçoit aussi du foyer par la surface extérieure une quantité de chaleur égale à $2\varpi\, dx\cdot g$

il perd dans l'espace par la surface extérieure une quantité égale à $2\varpi r dx\, hv$

il faut donc que l'on ait

$$r dx\, hv = y dx\, g - Ky dy\frac{dv}{dx'} - Ky dx\frac{dv}{dy}$$

or a $x^2+y^2=r^2$ ou $x dx + y dy = 0$ mettant donc dans l'équation précédente pour dy sa valeur $-\frac{x}{y}$ on a

$$r\frac{h}{k}v = \frac{yg}{K\varpi} + x\frac{dx}{dx'} - y\frac{dv}{dy} \quad \text{ou}$$

c'est l'equation de conditions relative à la surface; elle doit être satisfaite lorsque l'on a $x^2+y^2=r^2$

3 avec la fonction v des deux variables x et y est donnée par les conditions suivantes

1° elle satisfait à l'equation aux differentielles partielles

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{1}{y}\frac{\partial v}{\partial y}=0 \qquad (a)$$

2° si quelque soit x cette fonction v ou devient infinie trouve en x et y les valeurs de $\frac{\partial v}{\partial x}$ et de $\frac{\partial v}{\partial y}$ et qu'on les substitue dans l'equation

$$x\frac{\partial v}{\partial x}+y\frac{g}{k v}=y\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{rh}{n}v \qquad (b)$$

on aura une equation en x et y qui est vérifiée lorsque $y^2=r^2-x^2$

3° il est necessaire que la fonction $\frac{dv}{dx}$ soit nulle toutes les fois que x est nulle et quelque soit y car il est evident qu'il ne passera de chaleur d'une atmosphere à l'autre à travers l'ignorance.
il est manifeste que la valeur de v ne change point de signe lorsque x change de signe ou lorsque y change de signe

6. Soit $v=a+bx^2+cx^4+dx^6+ex^8+$ &c a, b, c, d &c des fonctions de y on aura

$$\frac{dv}{dx}=2bx+4cx^3+6dx^5+8ex^7+\text{ &c}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=2b+3.4cx^2+5.6dx^4+7.8ex^6+\text{ &c}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=a''+x^2b''+x^4c''+x^6d''+x^8e''+\ldots$$

$$\frac{1}{y}\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{a'}{y}+x^2\frac{b'}{y}+x^4\frac{c'}{y}+x^6\frac{d'}{y}+x^8\frac{e'}{y}+\text{ &c}$$

donc $12b+a''+\frac{a'}{y}=0$ si la fonction a etoit donnée on auroit b, c, d, &c

$3.4c+b''+\frac{b'}{y}=0$ il n'entre donc qu'une seule fonction arbitraire a.

$5.6d+c''+\frac{c'}{y}=0$

&

K

c'est l'equation de condition relative à la surface; elle doit être satisfaite lorsque l'on a $x^2+y^2=r^2$

3 avec la fonction v de deux variables x et y est donnée par les conditions suivantes

1° elle satisfait à l'equation aux differentielles partielles

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{1}{y}\frac{\partial v}{\partial y}=0 \qquad (a)$$

2° si quelque soit x cette fonction v ou devient infinie trouve en x et y les valeurs de $\frac{\partial v}{\partial x}$ et de $\frac{\partial v}{\partial y}$ et qu'on les substitue dans l'equation

$$x\frac{\partial v}{\partial x}+y\frac{g}{k\sigma}=y\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{rh}{n}v \qquad (b)$$

on aura une equation en x et y qui est vraie lorsque $y^2=r^2-x^2$

3° il est necessaire que la fonction $\frac{dv}{dx}$ soit nulle toutes les fois que x est nulle quelque soit y car il est evident qu'il ne passera de chaleur d'une hemisphere à l'autre à travers l'equateur.
il est manifeste que la valeur de v ne change point de signe lorsque x change de signe ou lorsque y change de signe

6. Soit $v=a+bx^2+cx^4+dx^6+ex^8+$ &c a, b, c, d &c des fonctions de y on aura

$$\frac{dv}{dx}=2bx+4cx^3+6dx^5+8ex^7+\text{ &c}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=2b+3\cdot4cx^2+5\cdot6dx^4+7\cdot8ex^6+\text{ &c}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=a''+x^2b''+x^4c''+x^6d''+x^8e''+\ldots$$

$$\frac{1}{y}\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{a'}{y}+x^2\frac{b'}{y}+x^4\frac{c'}{y}+x^6\frac{d'}{y}+x^8\frac{e'}{y}+\text{ &c}$$

donc $12b+a''+\frac{a'}{y}=0$ si la fonction a etoit donnée on auroit $b, c, d,$ &c

$3\cdot4c+b''+\frac{b'}{y}=0$ il n'entre donc qu'une seule fonction arbitraire a.

$5\cdot6d+c''+\frac{c'}{y}=0$

&

$+e\{\cos 2+\frac{\omega}{2}\ldots \quad \frac{6'}{}$

5

l'inclinaison 2 étant très petite on aura comme à la page 2 q.

$q = 2\omega s l + \omega 2 \sin \gamma . \sin l$

ou aura $v = \frac{2\pi t}{\theta} + 2e \sin \frac{2\pi t}{\theta} + \frac{5}{4} e^2 \sin 2 . \frac{2\pi t}{\theta}$ on développe toujours

par θ la durée de l'année qui rapporte l'attro du perihelie au

perihelie on a aussi

$\frac{r}{a} = 1 - e \cos \frac{2\pi t}{\theta} + \frac{1}{2} e^2$. donc $\left(\frac{r}{a}\right)^{-2} = 1 - 2\left(\frac{1}{2}e^2 - e \cos \frac{2\pi t}{\theta}\right) \cdot 2$

$+ 3\left(\frac{1}{2}e^2 - e \cos \frac{2\pi t}{\theta}\right)$

ou $\left(\frac{r}{a}\right)^{-2} = 1 + 2e \cos \frac{2\pi t}{\theta} + \frac{1}{2} e^2$

ou a aussi $\gamma = \frac{2\pi t}{T'} + \frac{2\pi t}{\theta} + 2e \sin \frac{2\pi t}{\theta} + \frac{5}{4} e^2 \sin 2 . \frac{2\pi t}{\theta}$

ou $\gamma = 2\frac{\pi t}{\theta} \frac{n+1}{n} + 2e \sin \frac{2\pi t}{\theta} + \frac{5}{4} e^2 \sin 2 . \frac{2\pi t}{\theta}$

$\sin \gamma = \sin \left(2\frac{\pi t}{\theta'}\right) \left(1 - \frac{1}{2} 2^2 e^2 \sin^2 \frac{2\pi t}{\theta}\right)$

$+ \cos \left(\frac{2\pi t}{\theta'}\right) \left(2e \sin \frac{2\pi t}{\theta} + \frac{5}{4} e^2 \sin 2 . \frac{2\pi t}{\theta}\right)$

$= \sin \frac{2\pi t}{\theta'} + 2e \sin \frac{2\pi t}{\theta} \cdot \cos \frac{2\pi t}{\theta'} + e^2 \left\{ \frac{5}{4} \cos \frac{2\pi t}{\theta'} \sin 2 . \frac{2\pi t}{\theta} \right.$

$\left. - 2 \sin \frac{2\pi t}{\theta'} \sin^2 \frac{2\pi t}{\theta} \right\}$

ou ramenant pour la valeur de q.

$q = 2\cos l + \omega 2 \sin l \left\{ \sin \frac{2\pi t}{\theta'} + 2e \sin \frac{2\pi t}{\theta} \cos \frac{2\pi t}{\theta'} + e^2 \left\{ \frac{5}{4} \cos \frac{2\pi t}{\theta'} \sin 2 . \frac{2\pi t}{\theta} - 2 \sin \frac{2\pi t}{\theta'} \sin^2 \frac{2\pi t}{\theta} \right\} \right\}$

il faut multiplier cette valeur de q par $\left(1 + 2e \cos \frac{2\pi t}{\theta} + \frac{1}{2} e^2\right)$

ou aura ainsi pour l'action diurne φ

$\varphi = 2\cos l + \omega 2 \sin l \sin \frac{2\pi t}{\theta'} + e \left(4 \cos l \cos \frac{2\pi t}{\theta} + 2\omega 2 \sin l \left(\sin \frac{2\pi t}{\theta'} \cos \frac{2\pi t}{\theta} + \omega 2 \sin l \sin \frac{2\pi t}{\theta} \cos \frac{2\pi t}{\theta'} \right) \right.$

$+ e^2 \left\{ \cos l + \frac{\omega 2}{2} \sin l \sin \frac{2\pi t}{\theta'} + 4\omega 2 \sin l \sin \frac{2\pi t}{\theta} \cos \frac{2\pi t}{\theta} \cos \frac{2\pi t}{\theta'} + \left(\frac{5}{4} \cos \frac{2\pi t}{\theta'} \sin 2 . \frac{2\pi t}{\theta} - 2 \sin \frac{2\pi t}{\theta'} \sin^2 \frac{2\pi t}{\theta} \right) \times \right.$

$\left. + \omega 2 \sin l \right.$

ou

$$\varphi = 2\omega l + e\,2\sin l \sin\frac{2\omega t}{\theta'} + e\left(4\cos l\cos\frac{2\omega t}{\theta} + e\,2\sin l \sin 2\omega t\left(\frac{1}{\theta'}+\frac{1}{\theta}\right)\right)$$

$$+e^2\left\{\omega l + e\,2\sin l\left(\frac{1}{2}\sin\frac{2\omega t}{\theta'} + 2\sin\frac{2\omega t}{\theta}\cos\frac{2\omega t}{\theta}\cos\frac{2\omega t}{\theta'} + \frac{5}{4}\cos\frac{2\omega t}{\theta'}\sin 2\cdot\frac{\omega t}{\theta} - 2\sin\frac{2\omega t}{\theta'}\sin^2\frac{2\omega t}{\theta}\right)\right\}$$

Soit $\frac{2\omega t}{\theta'} = x$ et $\frac{2\omega t}{\theta} = y$ le polynome multiplié par $e\,2\sin l$ dans le coefficient

de e^2 est $\frac{1}{2}\sin x + 2\sin y\cos y\cos x + \frac{5}{4}\cos x\sin 2y - 2\sin x\sin^2 y$

mettant pour $2\sin y\cos y$ la valeur $\sin 2y$ et mettant pour $2\sin^2 y$

la valeur $1-\cos 2y$

on trouve pour le polynome $\frac{1}{2}\sin x + \cos x\sin 2y + \frac{5}{4}\cos x\sin 2y$

$$-\sin x + \sin x\cos 2y$$

ou $-\frac{1}{2}\sin x + \sin(x+2y) + \frac{5}{8}\left\{\sin(x+2y) - \sin(x-2y)\right\}$

BIBLIOTHÈQUE IMPÉRIALE MSS.

~~$\cos^2 y - \sin^2 y$~~
~~$1 - 2\sin^2 y$~~ $= \cos 2y$

ces diverses valeurs sont vraies que le coefficient de e^2 comme celui de e ou termes de termes périodiques dans durée comparable à θ ou θ'

il reste donc le terme $e^2\cos l$ qui varie avec le temps.

---

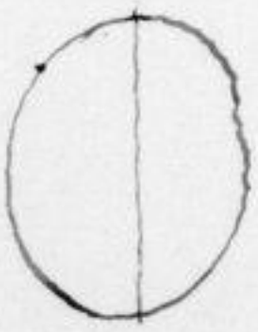
il faut maintenant considérer le cas où l'obliquité 2 était augmentée ou emploie toutes les puissances de l'excentricité e

on a $\gamma = 2\omega\frac{t}{T'} + 2\frac{\omega t}{\theta} + a\sin\frac{2\omega t}{\theta} + b\sin 2\cdot\frac{2\omega t}{\theta} + \ldots$

les coefficients a b c ... sont des fonctions de e qui contiennent des puissances de plus en plus élevées. soit $\frac{1}{T'}+\frac{1}{\theta} = \frac{1}{n\theta}+\frac{1}{\theta} = \frac{n+1}{n}\frac{1}{\theta} = \frac{1}{\theta'}$

~~$M = k\omega l$~~ parce que $\theta' = \frac{n\theta}{n+1}$ on aura

$$\gamma = \frac{2\omega t}{\theta'} + a\sin\frac{2\omega t}{\theta} + b\sin 2\cdot\frac{2\omega t}{\theta} + \ldots$$



en effet pour trouver la longitude de l'astre après un tems donné il faut prendre la longitude du périhélie et ajouter la différence de l'astre au périhélie or cette distance est $\frac{2\omega t}{\theta} + a\sin\frac{2\omega t}{\theta} + \ldots$ d'un autre côté la longitude excentrique du périhélie est $2\omega\frac{t}{T'}$ laquelle donne l'équation moyenne du périhélie de γ. maintenant on aura

$$\sin\gamma = \sin\frac{2\omega t}{\theta'}\cos\left(a\sin\frac{2\omega t}{\theta} + \ldots\right) + \cos\frac{2\omega t}{\theta'}\sin\left(a\sin\frac{2\omega t}{\theta} + \ldots\right)$$

7 on a successivement $x\frac{\partial v}{\partial x} = 2bx^2 + 4cx^4 + 6dx^6 + 8ex^8 + \&$

$$y\frac{\partial v}{\partial y} = a'y + b'yx^2 + c'yx^4 + d'yx^6 + e'yx^8 + \&$$

$$\frac{g}{k\omega}y = \frac{g}{k\omega}y.$$

$$\frac{rh}{k}v = \frac{rh}{k}a + \frac{rh}{k}bx^2 + \frac{rh}{k}cx^4 + \frac{rh}{k}dx^6 + \frac{rh}{k}ex^8 + \&$$

$$\frac{rh}{k}v = a'y + \frac{rh}{k}a$$

$$v = b'y + \frac{rh}{k}b$$

il faut écrire $r^2 - y^2$ au lieu de x^2 et l'on aura

$$\frac{gy}{k\omega} + 2b(r^2-y^2) + 4c(r^2-y^2)^2 + 6d(r^2-y^2)^3 + \&$$

(e) $$= \frac{rh}{k}a + a'y + \left(\frac{rh}{k}b + b'\right)(r^2-y^2) + \left(\frac{rh}{k}c + c'y\right)(r^2-y^2)^2 + \&$$

la fonction a étant supposée pour son développement

$$a = \alpha + \beta y^2 + \gamma y^4 + \delta y^6 + \&$$

les coefficients α, β, γ &c formeront comme les coefficients qui entrent dans le développement des autres fonctions, b, c, d, e &c. Si on substituant dans l'équation précédente et on déterminera les coefficients $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, &c

7 on trouve $b = -\frac{a''}{1\cdot 2} - \frac{a'y^{-1}}{1\cdot 2}$ $c = -\frac{b''}{3\cdot 4} - \frac{b'y^{-1}}{3\cdot 4}$ &c

$$a = \left[\frac{a''y^1}{1\cdot 2} + \frac{a'y^{-1}}{1\cdot 2}\right] + \alpha'$$

avec $\varepsilon = \left[\frac{a^{IV}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{a'''y^{-1}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\right]$

soit $a = \alpha + \beta y^2 + \gamma y^4 + \delta y^6 + \&$

donc $a' = 2\beta y + 4\gamma y^3 + 6\delta y^5 + \&$

$$a'' = 2\beta + 3\cdot 4\gamma y^2 + 5\cdot 6\delta y^4 + \&$$

$$a'y^{-1} = 2\beta + 4\gamma y^2 + 6\delta y^4 + \&$$

$$-1\cdot 2\,b = 4\beta + 4\cdot 4\gamma y^2 + 6\cdot 6\delta y^4 + \&$$

donc $b = 2\beta + \frac{1}{1\cdot 2}4^2\gamma y^2 + \frac{1}{1\cdot 2}6^2\delta y^4 + \frac{1}{1\cdot 2}8^2\varepsilon y^6$

$$-b' = \frac{4^2}{1\cdot 2}2\gamma y + \frac{6^2}{1\cdot 2}4\delta y^3 + \frac{8^2}{1\cdot 2}6\varepsilon y^5 + \cdots$$

$$-b'' = \frac{4^2}{1\cdot 2}2\gamma + \frac{6^2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 2}\delta y^2 + \frac{8^2}{1\cdot 2}5\cdot 6\varepsilon y^4 + \&$$

$$-b'y^{-1} = \frac{4^2}{1\cdot 2}2\gamma + \frac{6^2}{1\cdot 2}4\delta y^2 + \frac{8^2}{1\cdot 2}6\varepsilon y^4 + \&$$

(se rapporte aux températures terrestres)

Si on conçoit un tel état des corps à b, c d... vient à changer de distance à l'axe, et que ce corps soit a, on aura

$$-w = 2\mu \frac{q u^1}{a u^2 + b u^2 + c p^1 + \dots}$$ ainsi la valeur de w sera

laquelle convient au cas précédent diminuée dans le rapport

de $a u^2$ à $a u^2 + b u^1 + c p^1 + \dots$

on aura $-w = 2\mu \left\{ \frac{a u^2 + b u \frac{v}{\mu} + c p^1 \frac{\varpi}{\mu} + \dots}{a u^2 + b u^1 + c p^1 + \dots} \right\}$

Si dans la surface d'un corps le refroidissement affecte peu la masse du corps dans l'intérieur, la température de la surface aura changé tant que la température de toute la surface soit affectée d'une variation insensible.

on aura w est double de μ tant que la contraction du volume est négligée dans toute l'étendue de la masse. mais μ peut avoir une valeur fort grande et w conserver une valeur fort petite si le numérateur du coefficient de 2μ est fort petit par rapport au dénominateur. par exemple s'il en était la deux millième partie $-w$ serait plus petit que μ étant supposé égale à dix fois un cent millième. $-w$ serait la cent millième partie d'un cent millième.

---

une Sphère entièrement est grande dont la température initiale est b dans tous les points de la masse commence à se refroidir ou de ligne par sa profondeur d'une couche sphérique et par v la température actuelle de cette couche, et par t le temps écoulé. Depuis le commencement de refroidissement on trouvé par une analyse exacte l'équation suivante

$$v = \frac{2b}{k\varpi} \int_0^\infty \frac{dp\, e^{-\frac{\mu k t}{c \cdot D}}}{p^2 + \frac{h^2}{k^2}} \left\{ \frac{h}{kp} \sin p u + \cos p u \right\}$$. Si la surface se refroidit

on aura $\frac{v}{b} = \frac{2h}{k\varpi} \int_0^\infty \frac{dp\, e^{-\frac{p^2 k t}{c \cdot D}}}{p^2 + \frac{h^2}{k^2}}$ équation dont la valeur de v

à la surface. cette expression peut être mise sous la forme p. 31.

$$v = \frac{2b}{\sqrt{\varpi}} e^{R^2} \int_R^\infty dr\, e^{-r^2}$$ en faisant $R = \frac{h\sqrt{t}}{\sqrt{kc \cdot D}}$ et

on $\int_R^\infty dr\, e^{-r^2} = \frac{e^{-R^2}}{2R} \left(1 - \frac{1}{2R^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \frac{1}{R^4} - \dots \right)$

Supposons que R ou $\frac{h\sqrt{t}}{\sqrt{kc \cdot D}}$ soit plus grand que cent on prend la première

$\int_R^\infty dr\, e^{r^2}$ égale à $\frac{e^{-R^2}}{2R}$ tant donc $\frac{h\sqrt{t}}{\sqrt{kc \cdot D}} > 10$ ou $t > 10000 \frac{kc \cdot D}{h^2}$

on aura $v = \frac{2b}{\sqrt{\varpi}} \frac{e^{\frac{h^2 t}{kc \cdot D}} \cdot e^{-\frac{h^2 t}{kc \cdot D}}}{2\frac{h\sqrt{t}}{\sqrt{kc \cdot D}}}$.

(M)

$\frac{v'}{b} = \frac{\sqrt{K \cdot C \cdot D}}{h\sqrt{\varpi}\sqrt{t}}$ ou $\frac{v'}{b} = \frac{\sqrt{K \cdot C \cdot D}}{h\sqrt{\varpi}\sqrt{t}}$ il ne faut pas se tromper de ce résultat la

condition $t > \frac{10000\ K \cdot C \cdot D}{h^2}$ par exemple on aura pour un

globe pour $t > 10000 \cdot \frac{3.1625 \cdot 5 \cdot 5}{2 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 60}$ et comptant le temps t

en années car dans le calcul précédent le temps est compté en

minutes on aura $t > \frac{10000 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 1625 \cdot 5 \cdot 5}{2 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 60}$ dans la

question des températures pour trouver le nombre t satisfaisant à la condition

dont il s'agit on doit supposer que dans cette question la température

variable de la surface peut être exprimée aussi $\frac{v}{b} = \frac{\sqrt{K \cdot C \cdot D}}{h\sqrt{\varpi}\sqrt{t}}$

elle décroit en raison inverse de la racine quarrée des temps.

---

l'équation $K \frac{dv}{du} = hv$ exprime une propriété qui le

rapporte à la surface doit donc $\frac{dv}{du}$ donnée par des observations. on aura $q = 1^{deg}$ cent. pour

un métal en prenant le degré centigrade pour unité dans la nature

des températures on a $q = \frac{1}{30}$, d'où $\frac{K}{30} = hv$ ou $v = \frac{K}{30h}$

par exemple si la chaleur que l'on considère est celle on a $K = \frac{3}{2}$ et $h = \frac{1}{5}$

ainsi $v = \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 30} = \frac{1}{4}$ degré centigrade en général on a $v = \frac{K}{30h}$

on pourrait regarder le nombre h comme différent selon les corps

qu'il a pour but de K: quant au nombre K il est beaucoup plus exact que $\frac{3}{2}$

ainsi la valeur absolue de v devient $\frac{1}{4}$ est extrêmement beaucoup

plus grande. on a en général $v = \frac{K}{30h}$ ou $v = \frac{K}{qh}$. en mettant pour

v sa valeur dans l'équation $\frac{v}{b} = \frac{\sqrt{K \cdot C \cdot D}}{h\sqrt{\varpi}\sqrt{t}}$ on a $\frac{K}{30h} =$

$\frac{K}{30hb} = \frac{\sqrt{K \cdot C \cdot D}}{h\sqrt{\varpi}\sqrt{t}}$ en sorte que h disparaît et l'on a

$\sqrt{K} = \frac{30b\sqrt{C \cdot D}}{\sqrt{\varpi}\sqrt{t}}$ ou $\frac{K}{C \cdot D} \cdot \frac{\varpi}{900} = \frac{b^2}{t}$ ou $t = \frac{b^2 \cdot 900 \cdot C \cdot D}{K \cdot \varpi}$

et si l'on compte le temps en année on a $t = \frac{b^2 \cdot 900 \cdot C \cdot D}{K \cdot 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot \varpi}$

ou $b^2 = \frac{Kt}{C \cdot D} \frac{365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot \varpi}{900} = \frac{Kt}{C \cdot D}(1834,6902)$ $K \cdot 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot \varpi$

cette relation $\frac{b^2}{t} = \frac{K}{C \cdot D}(1834,6902)$ est double en ce que

quarré b^2 de la température initiale et le temps t écoulé depuis

l'origine du refroidissement la température b est comptée en

degré centigrade et le temps t en année l'unité de longueur est

le mètre.

$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2t}$

$\frac{1}{24}$ en vallée aux.

6000 aux $\frac{1}{40}$ en vallée

10000 $\frac{1}{10}$

~~2000~~ 1

~~1500~~

$\frac{1}{7h}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{150}$

$\frac{1}{}$ en 2000 aux.

$\frac{99}{}$

ou à l'équilibre $\frac{v}{b} = \frac{\sqrt{K\,C\cdot D}}{h\sqrt{\varpi}\sqrt{t}}$ et celle ci $\frac{b^2}{t} = \frac{K\varpi}{900\,C\cdot D}$

$\frac{K\,C\cdot D}{h^2\varpi}\,\frac{b^2}{v^2} > \frac{10000\,K\,C\cdot D}{h^2}$

les quantités v et b sont exprimées en degrés centigrades l'unité de longueur est le mètre l'unité de tems est la minute. la relation $v = \frac{K}{30h}$ subsiste lorsque l'accroissement de température soit $\frac{1}{30}$ de degré marche conformément aux observations. pourque la première équation soit exacte il faut que l'on ait la condition $t > \frac{10000\,K\cdot C\cdot D}{h^2}$

$\frac{v^2}{b^2} < \frac{1}{10000}$

$\frac{v}{b} < \frac{1}{100\sqrt{\varpi}}$

ou $v < \frac{b}{100\sqrt{\varpi}}$

$\frac{h\sqrt{t}}{\sqrt{C\cdot D}\,K} > 100$

$\frac{K}{30h} < \frac{b}{100\sqrt{\varpi}}$

~~$\frac{K}{3h} < \frac{1}{2t}$~~

$\frac{3\cdot 3}{2\cdot 30}$

$b = \frac{\sqrt{K}\sqrt{\varpi}\sqrt{t}}{30\sqrt{C\cdot D}}$

~~$\frac{dv}{dt} = \frac{-\sqrt{K}\sqrt{\varpi}\sqrt{t}}{2h\sqrt{\varpi}\,t\sqrt{t}}$~~

~~$\frac{dv}{dt} = -\frac{\sqrt{K}\sqrt{30}\sqrt{t}}{30\sqrt{C\cdot D}}\,\frac{\sqrt{K\,C\cdot D}}{2h\sqrt{30}\,t\sqrt{t}}$~~

~~$= \frac{-K}{2\cdot 30 h t}$~~

~~$\frac{d^2v}{dt^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\,\frac{\sqrt{K}\sqrt{30}\sqrt{t}}{30\sqrt{C\cdot D}}\,\frac{\sqrt{K\,C\cdot D}}{h\sqrt{30}\,t\sqrt{t}}$~~

$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\,\frac{K}{30 h t^2}$

~~$v = \frac{\sqrt{K}\sqrt{30}\sqrt{t}}{30\sqrt{C\cdot D}}\,\frac{\sqrt{K}\sqrt{30}\sqrt{C\cdot D}}{h\sqrt{30}\sqrt{t}}$~~

$= \frac{K}{30h}$

$t = \frac{900\,b^2\,C\cdot D}{K\varpi}$

$\frac{1}{2t} = \frac{K\varpi}{1800\,b^2\,C\cdot D}$

ou à l'équilibre $\frac{v}{b} = \frac{\sqrt{K\,C\cdot D}}{h\sqrt{\varpi}\sqrt{t}}$ et celle ci $\frac{b^2}{t} = \frac{K\varpi}{900\,C\cdot D}$

les quantités v et b sont exprimées en degrés centigrades l'unité de longueur est le mètre l'unité de tems est la minute. la relation $v = \frac{K}{30h}$ subsiste lorsque l'accroissement de température soit $\frac{1}{30}$ de degré marche conformément aux observations. pourque la première équation soit exacte il faut que l'on ait la condition $t > \frac{10000\,K\cdot C\cdot D}{h^2}$

alors on a $\frac{dv}{dt} = -\frac{b\sqrt{K\cdot C\cdot D}}{2h\sqrt{\varpi}\cdot t\sqrt{t}}$ l'accroissement de la vitesse $\frac{dv}{dt}$

la température aura aussi $\frac{d^2v}{dt^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\,b\,\frac{\sqrt{K\,C\cdot D}}{h\sqrt{\varpi}\,t^2\sqrt{t}}$

et mettant pour b la valeur tirée de la seconde équation on a

$v = \frac{K}{30h}$, $\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{2t}\frac{K}{30h}$ $\frac{d^2v}{dt^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\,\frac{K}{30h}\,\frac{1}{t^2}$

ou $v = \frac{K}{30h}$ $\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{2t}\cdot v$ $\frac{d^2v}{dt^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\,v\,\frac{1}{t^2}$

on avu que pour un globe de fer la vitesse v est environ $\frac{1}{24}$ de degré centigrade en augmentant autant de $\frac{1}{2}$ de t la valeur tirée de la seconde équation et

l'on a $v = \frac{K}{30h}$ $\frac{dv}{dt} = \frac{-v\cdot K\varpi}{1800\,b^2\,C\cdot D}$ $\frac{d^2v}{dt^2} = \frac{1}{2}\,\frac{3}{2}\,v\,\frac{K^2\varpi^2}{(900)^2 b^4 (C\cdot D)^2}$

ou $v = \frac{K}{30h}$ $\frac{dv}{dt} = -\frac{v}{2}\left(\frac{K\varpi}{900\,b^2\,C\cdot D}\right)$ $\frac{d^2v}{dt^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\,v\cdot\left(\frac{K\varpi}{900\,b^2\,C\cdot D}\right)^2$

si l'etonnement est compté en années on a $\frac{b^2}{t} = \frac{K}{C\cdot D}\,(1834{,}6902)$ pour

cet intervalle de tems et comme le refroidissement ou la température commune etoit b pendant cet intervalle de tems et devient ou $\frac{K}{30h}$ lorsque $b = 100$ on aura

$t = \frac{C\cdot D}{K}\,\frac{10000}{1834{,}6902}$

~~1000~~ ~~200~~ 2000

$$\frac{v}{b} = \frac{\sqrt{\kappa \cdot c \cdot \rho}}{h\sqrt{\omega}\sqrt{t}} \qquad \frac{v^2}{b^2} = \frac{\kappa \cdot c \cdot \rho}{h^2 \omega} \frac{1}{t}$$

$$\frac{3 \cdot 16 Gh \cdot 4h}{\omega^2 t}$$

$$\frac{3 \cdot 16 Gh \cdot 2h}{\omega^2 t} \cdot 36 \cdot 24 \cdot 60 \cdot T$$

$$\frac{3 \cdot 16 Gh \cdot 2h}{2} \quad \frac{3 \cdot 2h \cdot 2h Gh}{2}$$

$$\frac{v}{b} = \frac{1}{h}\sqrt{\frac{\kappa \cdot c \cdot \rho}{\omega t}} = \frac{1}{h}\sqrt{\frac{3 \cdot 16 Gh}{2\omega \cdot t}}$$

$$3 \cdot h \cdot 13 \cdot 2h \cdot 2h$$

$$\frac{v}{b} = \frac{1}{h}\sqrt{\frac{\kappa \cdot c \cdot \rho \cdot 36h \cdot 24 \cdot 60}{\omega \cdot T}}$$

$$= \frac{h}{100}$$

$$\frac{\sqrt{\kappa \cdot c \cdot \rho}}{\sqrt{t}} =$$

$$\frac{h\sqrt{t}}{\sqrt{\kappa c \cdot \rho}} = 100 \qquad \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\kappa c \cdot \rho}} = 100 \qquad \frac{v}{t} \frac{Gv}{100\sqrt{\omega}}$$

$$\frac{v}{b} = \frac{1}{h}\sqrt{\omega} \cdot \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\kappa c \cdot \rho}} \qquad \frac{v}{b} = \frac{1}{100h\sqrt{\omega}}$$

$$\frac{1}{100} = \frac{1}{h}\sqrt{\frac{\kappa c \cdot \rho}{\omega \cdot 36h \cdot 24 \cdot 60 \cdot T}} = \frac{1}{h}\sqrt{\frac{\frac{3 \cdot 16 Gh}{2} \cdot 2h}{2\omega \cdot 36h \cdot 24 \cdot 60 \cdot T}}$$

$$\omega^2 T = 3 \cdot 16 Gh$$

$$\frac{2h}{2 \cdot 36h \cdot 24 \cdot 60} \qquad \frac{1}{\frac{1}{3} \cdot 24 \cdot 24}$$

$$\frac{R}{2 \cdot 73 \cdot 24 \cdot 12} \qquad \frac{1}{\frac{1}{24} \cdot 8} \qquad \frac{1}{192}$$

$$\frac{h}{200} \qquad \frac{1}{40}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{-v}{2t}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} \cdot 36h \cdot 24 \cdot 60 = \frac{-v}{2\theta} \cdot 36h \cdot 24 \cdot 60$$

$$\frac{1}{4} \qquad \frac{1}{4992} \qquad \frac{1}{48}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{-u}{2\theta} \qquad \frac{u}{12000} \qquad \frac{1}{42000}$$

$$1000 \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{-u}{2 \cdot \frac{\theta}{1000}} \cdot h$$

$$\frac{1}{4} \quad \frac{1}{24}$$

9/4.

Sur le mouvement de la chaleur dans une sphere.

Soit b une quantité infinie l'équation 23 mars 315

devient $W = \frac{1}{4\omega} \int_0^{2\omega} d\theta' \int_0^{\omega} d\psi' \sin\theta' \frac{b}{r'} \left\{ P_0 + 3\frac{r}{r'} P_1 + 5\left(\frac{r}{r'}\right)^2 P_2 + 7\left(\frac{r}{r'}\right)^3 P_3 + \&c \right\}$ (A)

ou supposons qu'il y a un seul element de la surface retenu à une température variable donnée 1 et que tous les autres elements de la surface sont retenus à température zero l'element echauffé est celui au pole dont la latitude comptée en arriere est 0 c'est à dire au pole. Il en résulte que dans l'expression de W que nous venons de trouver le coefficient dont le developpement est un terme P_n le coefficient de λ le réciproque $\cos\theta$ ainsi $\left(1 - 2\lambda\cos\theta + \lambda^2\right)^{-\frac{1}{2}} = P_0 + P_1\lambda + P_2\lambda^2 + \ldots P_n\lambda^n + \&c$

Supposons que l'on veuille que la fraction $\frac{r}{r'}$ soit aussi petite en nombre qu'il soit de calculer la température des differentes couches interieures de la sphere ou ne conservera dans l'expression de W que la premiere puissance de $\frac{r}{r'}$ et comme on n'a pas à s'occuper de la disparition plus ou moins prompte de la chaleur à la surface il suffira de faire $\theta = 0$ dans les autres elements de la surface et on aura $W = \frac{b}{4\omega}\left(P_0 + 3\left(\frac{r}{r'}\right) P_1\right)$ ou $P_0 = 1$, $P_1 = \cos\theta$

$\left(1 - 2\lambda\cos\theta + \lambda^2\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}\left(-2\lambda\cos\theta + \lambda^2\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{1}{2}\left(-2\lambda\cos\theta + \lambda^2\right)^2 - \&c$

$= 1 + \lambda\cos\theta$ en se bornant à la premiere puissance de λ donc $P_1 = \cos\theta$

et l'expression cherchée est $\frac{b}{4\omega}\left(1 + 3\left(\frac{r}{r'}\right)\cos\theta\right)$.

Il en résulte par le raisonnement que la température appliquée à une molecule de la surface retenue à la température variable 1 (tous les autres points de la surface et autres sont à la température variable zero) affecte les parties de plus en plus voisines du centre le rapport $\frac{b}{4\omega}$, il en résulte également le rapport de l'étendue de l'élément de surface à la surface de la sphere car si une sphere entiere a le rayon 1 on a de même une portion b il faudra une sphere dont le rayon est l echauffer une étendue bl^2 et la superficie de la sphere sera $4\omega l^2$

si θ était $\frac{1}{2}\omega$ en sorte que les points echauffés environnant un point de la température variable donnée l'equateur entier serait $W = \frac{b}{4\omega}$ qui est la température du centre mais les points d'un plan d'un equateur d'une sphere interieure visible du centre participent également à la chaleur du pole.

Pour cette même sphere interieure un parallele superieur et plus echauffé que la partie de l'equateur et chaque parallele inferieur est un peu echauffé l'accroissement est proportionnel à $\cos\theta$ c'est à dire au sinus de la latitude.

On en conclut par le résultat l'effet permanent que produit dans l'interieur du globe sur les parties les plus voisines du centre par exemple dans une sphere d'une lieue de rayon la température d'un élément de la surface supposée au pole.

Il faut remarquer que la température du centre est toujours la valeur moyenne de la température de la surface car le résultat $W = \frac{b}{4\omega}$ fait voir que de la même manière quelconque de la surface si cette portion était échauffée également dans la même proportion de la même élément.

Donc toutes les couches interieures d'un rayon quelconque à la même température moyenne quelconque quelconque. car cette valeur ne dépend que de la température du centre

~~1000~~

~~1000~~

2000

pour connaître la grandeur de la chaleur contenue dans une couche, il faudrait multiplier la température moyenne de la surface par le volume de la couche ainsi la grandeur de la chaleur contenue dans toute la sphère et le produit de la température moyenne de la surface extérieure par le volume de la sphère. ainsi la température moyenne de la surface extérieure, exprimerait de même la chaleur totale c'est à dire le terme dépendant de la température moyenne de la totalité de l'hémisphère

---

Si de l'équation (A) on tire la valeur de $\frac{dw}{dx}$ qui représente le flux de chaleur dans le sens de la verticale on voit que cette valeur du flux contient le facteur $\frac{1}{t}$. ainsi lorsque le temps t est infiniment grand le flux normal à la surface a une valeur infinie. cette conséquence est très importante dans la question des températures terrestres car il en résulte que la température fixe d'une élément donné de la surface est précisément proportionnelle à la grandeur de la chaleur absorbée que cet élément reçoit en cette quantité peut être déterminée par la question. on peut donc arriver à la solution de la question (A).

---

cette équation A peut être facilement transformée.
on remarque d'abord qu'elle ne contient que r et ω, et en effet pour qu'il y ait quelque élément de la surface échauffé, il est visible que la température variable d'un point donné de la sphère ne dépend que de la distance r de ce point et de la chaleur communiquée à l'origine. et si le point échauffé n'était pas au pole il n'entre dans l'expression de la température variable du point de la sphère qu'on considère un point déterminé par la distance de ce pole. c'est pourquoi la solution de la question ne contient que la distance de ce point à l'origine et l'angle θ que cette distance fait avec l'axe des z.
c'est pour cette raison que le coefficient de $2A$ est
$\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\psi-\psi')$ car ce coefficient est le carré de l'arc de cercle qui mesure la distance.
il faut considérer maintenant que la valeur de Ψ contient 6 produits formés de la série $1 \; 3 \; 5 \; 7 \; 9$ &c pour $\frac{r}{t}\Phi_1$, $\frac{r^2}{t^2}\Phi_2$ &c
cette dernière est fournie par l'expression $\left(1 - 2\left(\frac{r}{t}\right)\cos\theta + \left(\frac{r}{t}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}$
ainsi la série complète qui forme Ψ relative au produit formé de deux séries dont l'une est $1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + 9x^4 +$ &c
et l'autre a pour terme $\left(1 - 2x\cos\theta + x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$ et se construit facilement chaque terme est égal au précédent multiplié par $2x$ moins le précédent multiplié par x^2 on aura donc une fonction dont nous développerons les coefficients de la première série. on a ainsi les termes de la seconde série dont il est facile de connaître les termes de la série composée. on aura semblablement pour Ψ en $\frac{r}{t}$ et θ

---

cette expression de Ψ satisfera à la condition générale de l'équation de la chaleur qui exprime généralement quelque soit la figure du solide que l'on considère la loi de la chaleur qui en résulte

2° si l'on suppose $r = l$ l'accroissement de ω sera nulle excepté le seul cas où θ sera égal à l ou a $\theta = 0$ c'est-à-dire pour le point de la surface échauffé.

---

on voit comparativement la plus grande intensité de deux sphères dont la surface extérieure resterait constamment à des états thermométriques différents. car lorsque l'équilibre de température sera établi entre elles, pour tout point quelconque appartenant à une première sphère l'autre sera au second instant une même température. et pour que cela arrive il faut que chaque élément de la surface chaud échauffe aussi bien une multitude d'éléments échauffés.

---

il est visible de remarquer que le flux normal n'est indépendant que d'une sphère est extrêmement grande c'est dans le cas seulement que la température variable d'un élément de la surface est proportionnelle à la quantité de chaleur qu'il reçoit et transmet extérieurement.

---

la température du fond des caves est moyenne différence en plus de $\frac{4}{100}$ celle de la surface des continents il est impossible en voir que l'observation ait jamais donné la température d'un point quelconque intérieur du globe.

Supposant donc une sphère d'une très grande étendue primitivement échauffée d'une manière quelconque, retenue à une température fixe et constante à la surface. Imaginons un foyer tel que celui qui entoure la chaleur à cette sphère. Cherchons quelle sera l'état final de chaleur de cette sphère. Cette détermination dépend de l'intégration de l'équation aux différences partielles que nous allons établir pour l'intérieur de la sphère

il est évident que la température variable de la région polaire est différente de celle de la température fixe de l'équateur.

---

pour transformer immédiatement le second membre de l'équation (A)

on a $y = \left(1 - 2\frac{r}{l}\omega\theta + \frac{r^2}{l^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = P_0 + \frac{r}{l}P_1 + \frac{r^2}{l^2}P_2 + \&c$

d'où $\frac{dy}{dr} = \frac{1}{l}P_1 + \frac{2r}{l^2}P_2 + \frac{3}{l^3}r^2P_3 + \&$

et par conséquent $r\frac{dy}{dr} = \frac{r}{l}P_1 + 2\frac{r^2}{l^2}P_2 + 3\frac{r^3}{l^3}P_3 + 4\frac{r^4}{l^4}P_4 +$

$\frac{dy}{dr} = -\frac{1}{2}\left(1 - 2\frac{r}{l}\omega\theta + \frac{r^2}{l^2}\right)^{-\frac{3}{2}}$

donc $2r\frac{dy}{dr} + y = P_0 + 3\frac{r}{l}P_1 + 5\frac{r^2}{l^2}P_2 + 7\frac{r^3}{l^3}P_3 + \&$

donc $\omega = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{\pi} \sin\theta' d\theta' \zeta' \left(2r\frac{dy}{dr} + y\right)$ donc $y = \left(1 - \frac{2r}{l}\omega\mu + \frac{r^2}{l^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$

$\left(1 - 2\frac{r}{l}\omega\theta + \frac{r^2}{l^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$

$-\left(-\frac{1}{2}\omega\theta + \frac{2r}{l^2}\right)\left(1 - 2\frac{r}{l}\omega\theta + \frac{r^2}{l^2}\right)^{-\frac{3}{2}}$

$\frac{dy}{dr} = \left(-\frac{4r}{l}\omega\theta + 4\frac{r^2}{l^2}\right)\left(1 - 2\frac{r}{l}\omega\mu + \frac{r^2}{l^2}\right)^{-\frac{3}{2}}\left(-\frac{1}{2}\right)$

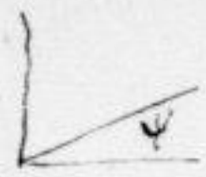
donc $2r\frac{dy}{dr} = \left(-\frac{4r}{l}\omega\theta + 4\frac{r^2}{l^2}\right)\left(1 - 2\frac{r}{l}\omega\mu + \frac{r^2}{l^2}\right)^{-\frac{3}{2}}\left(-\frac{1}{2}\right)$

donc $y + 2r\frac{dy}{dr} = \left(1 - 2\frac{r}{l}\omega\mu + \frac{r^2}{l^2}\right)^{-\frac{1}{2}} + \left(1 - 2\frac{r}{l}\omega\mu + \frac{r^2}{l^2}\right)^{-\frac{3}{2}}\left(-\frac{4r}{l}\omega\mu + 4\frac{r^2}{l^2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)$

$= \left(1 - 2\frac{r}{l}\omega\mu + \frac{r^2}{l^2}\right)^{-2}\left(1 - 2\frac{r}{l}\omega\mu + \frac{r^2}{l^2} + 1 - 2\frac{r}{l}\omega\mu + \frac{r^2}{l^2}\right) = \frac{\left(1 - \frac{r^2}{l^2}\right)}{\left(1 - 2\frac{r}{l}\omega\mu + \frac{r^2}{l^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$

donc $\omega = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{\pi} \sin\theta' d\theta' \zeta' \frac{1 - \frac{r^2}{l^2}}{\left(1 - 2\frac{r}{l}\omega\mu + \frac{r^2}{l^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$

faisons pour simplifier $t=1$ et considérons la fonction $\frac{1-r^2}{(1-2r\cos\theta+r^2)^{\frac{3}{2}}}$



une sphère a son centre au point O

nous considérons le trièdre rectangulaire x y z

le rayon vecteur r qui joint un point m de la sphère avec le centre O fait avec l'axe des z l'angle φ et le plan vertical qui passe par Oz avec le plan des z et x l'angle ψ.

Dans l'équation générale $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=0$ on fera $z=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta\sin\varphi$, $x=r\sin\theta\cos\psi$

après les substitutions on trouvera

$$(1)\quad \frac{\partial^2}{\partial r^2}(rv)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\sin\theta\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}(rv)\right\}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2(rv)}{\partial\psi^2}=0$$

l'appareil nous enseigne qu'au rôle qui répond à l'ordonnée d'un point de la sphère hétérochauffée, et qu'elle le fait uniformément au tour du pôle dans une étendue terminée par un cercle parallèle à l'équateur, il est visible que la température v d'un point intérieur quelconque de la sphère ne dépend que de r et de θ elle ne varie point avec ψ de sorte que l'équation devient

$$(2)\quad \frac{\partial^2}{\partial r^2}(rv)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\cdot\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}(rv)=0$$

or la valeur $v=\frac{1-r^2}{(1-2r\cos\theta+r^2)^{\frac{3}{2}}}$ satisfait à l'équation (2)

$$(3)\quad v=\frac{1-r^2}{(1-2r\cos\theta+r^2)^{\frac{3}{2}}}$$

en effet on a $\frac{\partial(rv)}{\partial\theta}=(r-r^3)\left(-\frac{3}{2}\right)(+2r\sin\theta)(1-2r\cos\theta+r^2)^{-\frac{5}{2}}$

multipliant par $\sin\theta$ et différentiant selon θ divisant par $\partial\theta$ on a

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\cdot\frac{\partial(rv)}{\partial\theta}\right)=(r-r^3)\left(-\frac{3}{2}\right)4r\sin\theta\cos\theta(1-2r\cos\theta+r^2)^{-\frac{5}{2}}$$
$$+(r-r^3)\left(-\frac{3}{2}\right)2r\sin\theta(-2\cos\theta+2r)\left(-\frac{5}{2}\right)(1-2r\cos\theta+r^2)^{-\frac{7}{2}}$$

que l'on divisera par $r^2\sin\theta$

ou aussi $\frac{\partial}{\partial r}(rv)=(1-3r^2)(1-2r\cos\theta+r^2)^{-\frac{3}{2}}+(1-r^2)\left(-\frac{3}{2}\right)(-2\cos\theta+2r)(1-2r\cos\theta+r^2)^{-\frac{5}{2}}$

il faut multiplier la première partie par $(1-2r\cos\theta+r^2)^{-1}$ et diviser par $(1-2r\cos\theta+r^2)^{-1}$ on aura donc

$$\frac{\partial}{\partial r}(rv)=(1-2r\cos\theta+r^2)^{-\frac{5}{2}}\left\{\overline{1-3r^2}(1-2r\cos\theta+r^2)+3\overline{1-r^2}(\cos\theta-1)\right\}$$

$$=(1-2r\cos\theta+r^2)^{-\frac{5}{2}}\left\{1-2r\cos\theta+r^2-3r^2+6r^3\cos\theta-3r^4+3\cos\theta-3-3r^2\cos\theta+3r^2\right\}$$

supposons le calcul achevé et qu'on fasse la valeur $(1-r^2)(1-2r\cos\theta+r^2)^{-\frac{3}{2}}$ satisfait à l'équation 2. si l'on substitue à toutes les puissances de la température valeur v en partie sur l'équation (3) la condition générale de l'équilibre sera satisfaite,

de plus si l'on fait $r=1$ la valeur de v est nulle pour un angle θ ne soit pas nulle aussi si l'on fait $\theta=0$ on trouve $v=\frac{1-r^2}{(1-2r+r^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1-r^2}{(1-r)^3}$

et dès que $r=1$ la valeur de v devient infiniment grande si $r=1-g$ en désignant par g une quantité infiniment petite et si $\theta=0$ on a $\frac{2}{g^2}$ pour l'expression de v

Soit $\rho = 1-\varepsilon$ et $\theta = \omega + x$ en désignant par ε et x des grandeurs très petites

on aura $\dfrac{1-\overline{1-\varepsilon}^2}{\left(1-2\overline{1-\varepsilon}\left(1-\frac{x^2}{2}\right)+(1-\varepsilon)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$ ou $\dfrac{2\varepsilon}{1-2(1-\varepsilon)+2\overline{1-\varepsilon}\,\frac{x^2}{2}+1-2\varepsilon+\varepsilon^2}$

$= \dfrac{2\varepsilon}{(x^2+\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}$ ou bien l'expression $v = \dfrac{1-r^2}{(1-2r\cos\theta+r^2)^{\frac{3}{2}}}$ appartient donc à

un cas très singulier tous les points de la surface ont une température nulle

le pole sud a une température infinie

ainsi il faut concevoir qu'une sonde appliquée à la surface retient tous les points

excepté le pole à la température zero et que ce pole est maintenu à une température infinie.

pour le premier cas il faut concevoir qu'une sonde appliquée à la surface retient tous les points

de cette surface excepté le pole à la température zero et que ce pole est maintenu à une température infinie.

pour le second cas il faut concevoir 1° que l'on retient tous les points d'une calotte sphérique polaire à une même température zero. l'hémisphère

1 et tous les autres points de la surface à la température zero. l'hémisphère

de forme et chaque point intérieur du solide prend une température fixe.

2° que l'on retient tous les points d'une calotte sphérique polaire et que l'on

De la température 1 on donne à chaque point la température 2

lui conserve ainsi de manière à faire varier l'étendue de la portion échauffée

on continue ainsi de même jusqu'à ce que la portion échauffée

et de donner la température en chacun des points de l'hémisphère qui avoisinent

chacun de ces cas et ce sera que l'on devra définir ait la limite de tous les

cas que l'on a formés. c'est l'élément qui convient à cette sorte qui

et l'on aura l'équation $v = \dfrac{1-r^2}{(1-2r\cos\theta+r^2)^{\frac{3}{2}}}$

Soit un élément $d\omega$ de la surface dynamique dont la position est déterminée par les

quantités coordonnées θ' (θ' est le complément de la latitude) et ψ'

longitude on mesure dans l'intérieur de la sphère un point dont la

position est déterminée par θ ψ et le rayon r. l'élément ω est

entretenu à la température ξ' et tous les autres éléments de la surface

sont retenus à la température zero. l'élément évidemment pesant ω est

égale à $d\theta'.\sin\theta' d\psi'$, $d\theta'$ est la hauteur de l'élément dans le sens du

méridien et $\sin\theta' d\psi'$ est sa longueur dans le sens du parallèle.

ce la posé on donne à tous les points de la surface la température ξ'

qui $\dfrac{d\omega}{4\pi}$ est un élément dans le cercle tous les points de la sphère

environnant cette même température. on retire la surface hémisphérique

$d\omega$ ou l'élément $d\theta'\sin\theta' d\psi'$ et l'on augmente bientôt la température

en raison inverse de Valeur de la surface enlevée que la température

moyenne ne change pas il en résulte que la température de ω

est $\dfrac{\xi' d\theta' \sin\theta' d\psi'}{4\pi}$. $\dfrac{d\omega}{d\theta'\sin\theta' d\psi'}$ ou $\dfrac{\xi'}{4\pi}$ tous les éléments sont

De la surface tout entière à la température zero on trouve

d'après cela que la température v d'un point de l'intérieur qui répond

aux coordonnées $r\ \theta\ \psi$ est exprimée $v = \dfrac{d\theta'\sin\theta'\psi'\xi'.(1-r^2)}{4\pi\left(1-2r.\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\psi-\psi')\right)^{\frac{3}{2}}}$

on verra de la même manière pour tous les éléments de la surface échauffée

tel que $d\theta' \sin\theta' d\psi'$, on cherche quelle température doit donner au point M la condition qui satisfait exactement à la température ζ' et tout le corps à la température zéro. en outre on suppose que le point M est extérieur à la sphère. on arrive à l'équation

$$v = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} d\theta' \int_0^{2\pi} d\psi' \sin\theta' \zeta' \frac{1-r^2}{\left(1-2r[\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\psi-\psi')]+r^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

en désignant par ζ la température locale.

$$v = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} d\theta' \int_0^{2\pi} d\psi' \sin\theta' f(\theta'\psi') \left(1-\frac{r^2}{l^2}\right) \left\{1-\frac{2r}{l}[\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\psi-\psi')]+\frac{r^2}{l^2}\right\}^{-\frac{1}{2}}$$

ou $$v = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} d\theta' \int_0^{2\pi} d\psi' \sin\theta' f(\theta'\psi') \frac{l^2-r^2}{\left(l^2-2r[\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\psi-\psi')]+r^2\right)^{\frac{3}{2}}} \quad (C)$$

c'est cette équation qui donne la solution de la question proposée.
elle exprime l'état final d'une sphère dont le rayon est l et dont tous les points de la surface sont retenus à des températures données.
la fonction $f(\theta'\psi')$ est la température donnée et continue de la surface
de la sphère dont la colatitude complémentaire est θ' et la longitude ψ'
le pôle est l'extrémité du premier rayon de l'une des 2. le premier méridien est celui parallèle au plan des z et l'axe des x.

---

[1] Remarque $\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\psi-\psi')$ est l'arc qui mesure la différence de deux points sur la surface sphérique dont le rayon est 1, dont l'une a pour coordonnées θ et ψ et l'autre θ' et ψ'

---

[2] Soit $\theta = \frac{1}{2}\pi$ c'est à dire que le point où doit v est sur la température est dans le plan de l'équateur on aura $v = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} d\theta' \int_0^{2\pi} d\psi' \sin\theta' f(\theta'\psi') \left(1-\frac{r^2}{l^2}\right)$

$$\frac{}{\left(1-\frac{2r}{l}\sin\theta'\cos(\psi-\psi')+\frac{r^2}{l^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

si $f(\theta'\psi')$ ne dépend pas de ψ' on voit que cette fonction conserve la même valeur quelque soit ψ' la fonction $f\theta'\psi'$ ne change plus tant que l'on suit le grand cercle mené

$$v = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta' f(\theta') \left(1-\frac{r}{l}\right)\left(1+\frac{2r}{l}\sin\theta'\cos(\psi-\psi')+\frac{r^2}{l^2}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

Soit $f(\theta'\psi')$ une fonction quelconque définie sur la sphère de rayon l et dont le centre est à l'origine des coordonnées. on aura

$$v = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} d\theta' \int_0^{2\pi} d\psi' \sin\theta' f(\theta'\psi') \left(1-\frac{r^2}{l^2}\right)\left(1+\frac{2r}{l}\sin\theta'\cos(\psi-\psi')+\frac{r^2}{l^2}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

examinons le cas où $\frac{r}{l}$ est une petite quantité c'est à dire lorsque le rayon de la terre considéré la température est alors variable de couche en couche parce que $\frac{r}{l}$ bien que petite fraction comme $\frac{1}{100}$

le facteur $\left(1-2\frac{r}{l}\cos\mu+\frac{r^2}{l^2}\right)^{-\frac{3}{2}}$ devient sensiblement $1+3\frac{r}{l}\cos\mu$ en négligeant

$$v=\frac{1}{4\omega}\int_0^{\omega}d\theta'\int_0^{2\omega}d\psi'\sin\theta'\cdot f(\theta'\psi')\left(1+3\frac{r}{l}\cos\mu\right)$$

or $\cos\mu=\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\left(\cos\psi\cos\psi'+\sin\psi\sin\psi'\right)$

Soit $\int_0^{\omega}d\theta'\int_0^{2\omega}d\psi'\sin\theta'\cos\theta' f(\theta'\psi')=2\cdot 4\omega$

$\int_0^{\omega}d\theta'\int_0^{2\omega}d\psi'\sin\theta' f(\theta'\psi')\sin\theta'\cos\psi'=\beta\cdot 4\omega$ et $\int_0^{\omega}d\theta'\int_0^{2\omega}d\psi'\sin\theta' f(\theta'\psi')=A\cdot 4\omega$

$\int_0^{\omega}d\theta'\int_0^{2\omega}d\psi'\sin^2\theta' f(\theta'\psi')=\gamma\cdot 4\omega$

(2) $v=A+3\frac{r}{l}\left(2\cos\theta+\beta\sin\theta\cos\psi+\gamma\sin\theta\sin\psi\right)$ les quantités A,β,γ sont des nombres donnés qui dépendent des intégrales définies dans lesquelles entre la fonction $f(\theta'\psi')$ l'équation 2 montre également que les températures de l'intérieur de la planète dont ω point aller visible du centre pour que $\frac{r}{l}$ soit une petite fraction

A est la température moyenne de la surface dont le point θ est la distance r du centre

β et γ sont des moyennes de même genre données par des intégrales définies pour différentes points dont le même rayon et dont la position dépend de celle du centre θ et ψ sont les variables des quantités dont la température en chaque point de la surface est fonction

Tout revient donc à r.

La valeur de $\frac{dv}{dr}$ a une importance $\frac{1}{l}$ ainsi dans une sphère comparable à la terre $\frac{6}{\text{fleur rayon}}$ est négligeable est leur.

Nous voulons de l'intérêt donné, si l'on veut connaître la température moyenne de la surface dont le point θ est à la distance r du centre il faut multiplier par $d\theta\cdot d\psi$ et intégrer entre les limites 0 et ω ou 0 et 2ω.

or $\int_0^{\omega}d\theta\cos\theta$ est nulle l'intégrale $\int_0^{2\omega}d\psi\cos\psi$ est nulle

et l'intégrale $\int_0^{2\omega}d\psi\sin\psi$ est nulle il s'en suit que la température moyenne

même surface sphérique que celle qui est celle du centre

si $f(\theta'\psi')$ ne dépend pas de ψ' cela veut que la température d'un de tous les points qui sont à la même latitude de tout la même façon $f\theta$ il est alors évident que β et γ sont nulles ou a donc tout simplement $v=A+3\frac{r}{l}\cdot 2\cos\theta$ et l'on a

$2A\omega=2\int_0^{\omega}d\theta'\sin\theta'\cos\theta'\cdot f(\theta')$ tous les points ~~de la~~ du plan de l'équateur ont la même température valeur celle du centre cela a bien pour tous les points de ce plan qui sont alors visibles du centre

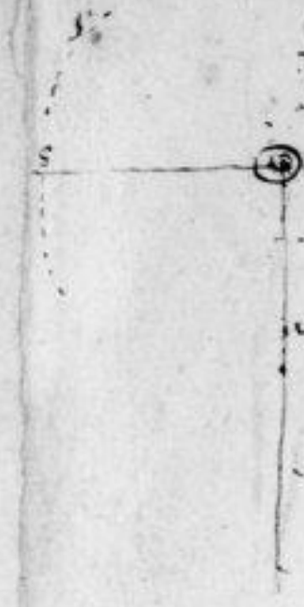
tous les points qui ont la même température tout aussi pour lesquels $\cos\theta$ est

$r\cos\theta$ est constant

toutes ces conséquences sont inadmissibles à ce nouveau

Nous avons aussi considéré le cas où $\frac{r}{l}$ diffère très peu de l'unité, celle du cas où la surface enveloppe des points qui n'ont point de différence de température mais qui sont trop longs à décrire.

Mouvement de la chaleur dans un solide échauffé par un foyer extérieur dont l'action est périodique. 1. 114.



la surface ω appartient au plan qui termine un hémisphère de dimension infinie cette surface est échauffée par un foyer S placé à une distance infinie et qui parcourt pendant la durée d'un jour la circonférence d'un cercle dont ω est le centre la température commune à tout l'espace est c. l'intensité du foyer est f c'est à dire que la surface égale à l'unité reçoit pendant le tems 1 une quantité de chaleur f de ce foyer. cette surface étant à la température 1 et l'espace à la température 0 perdroit pendant le tems 1 la quantité de chaleur h.

il s'agit de connoître l'état périodique auquel le solide parvient dans chacun de ses points lorsque la verticale perpendiculaire sur ω. K est la conductibilité spécifique du solide ou suppose que le cylindre qui a pour base ω ne perd point de chaleur par la surface de contact avec le solide ou ce qui est la même que chaque point du solide a toujours la même température que le point du solide qui le touche. pendant que le foyer S de cet hémisphère infiniment éloigné la surface ω n'est point échauffée. v est la température variable

x u est la profondeur verticale dont le point [illegible] est le centre de rotation : v est fonction de u et de t.

on a d'abord l'équation générale $\frac{dv}{dt} = \frac{K}{C \cdot D} \frac{d^2v}{du^2}$ ou $\frac{dv}{dt} = K \frac{d^2v}{du^2}$ en désignant par K la quantité $\frac{K}{C \cdot D}$

soit $v = e^{-gu} \cos(2g^2Kt - gu)$ on aura $\frac{dv}{du} = -g e^{-gu} \cos(2g^2Kt - gu) + g e^{-gu} (\sin 2g^2Kt - gu)$

et $\frac{d^2v}{du^2} = g^2 e^{-gu} (\cos(2g^2Kt - gu) - g^2 e^{-gu} \sin(2g^2Kt - gu) - g^2 e^{-gu} (\sin 2g^2Kt - gu) - g^2 e^{-gu} \cos(2g^2Kt - gu)$

$= g^2 e^{-gu} (\cos(2g^2Kt - gu) - \sin 2g^2Kt - gu) = -2g^2 e^{-gu} \sin(2g^2Kt - gu)$ mais aussi

$\frac{dv}{dt} = -2g^2K e^{-gu} \sin(2g^2Kt - gu)$ et par conséquent $K \frac{d^2v}{du^2} = \frac{dv}{dt}$. Mais aussi $v = e^{-gu} \sin(2g^2Kt - gu)$

on aura $\frac{dv}{du} = -g e^{-gu} \sin(2g^2Kt - gu) - g e^{-gu} \cos(2g^2Kt - gu)$ et $\frac{d^2v}{du^2} =$ — — — — —

$= g^2 e^{-gu} \sin(2g^2Kt - gu) + g^2 e^{-gu} \cos(2g^2Kt - gu) + g^2 e^{-gu} \cos(2g^2Kt - gu) - g^2 e^{-gu} \sin(2g^2Kt - gu)$

$= 2g^2 e^{-gu} \cos(2g^2Kt - gu)$ d'où aussi $\frac{dv}{dt} = 2g^2K e^{-gu} \cos(2g^2Kt - gu)$ donc $\frac{dv}{dt} = K \frac{d^2v}{du^2}$

donc on pourra prendre pour v la quantité $a e^{-gu} \cos(2g^2Kt - gu) + b e^{-gu} \sin(2g^2Kt - gu)$

g est un nombre quelconque et les constantes a et b sont aussi arbitraires en sorte que supposant la valeur de v d'autant de valeurs particulières lorsque l'on voudra.

la quantité $-K \frac{dv}{du}$ fait connoître la chaleur qui pendant un instant se coule en un point donné dans le sens suivant lequel u augmente or on a $\frac{dv}{du} = -ag e^{-gu} \cos(2g^2Kt - gu) + ag e^{-gu} \sin(2g^2Kt - gu)$ — — — — —

$-bg e^{-gu} \sin(2g^2Kt - gu) - bg e^{-gu} \cos(2g^2Kt - gu)$ et en désignant par $\bar{v}$ la température lorsque $u = 0$

on a $\bar{v} = a \cos 2g^2Kt + b \sin 2g^2Kt$ et $\frac{d\bar{v}}{du} = -ag \cos 2g^2Kt + ag \sin 2g^2Kt - bg \sin 2g^2Kt - bg \cos 2g^2Kt$

ou $\frac{d\bar{v}}{du} = ag - bg \sin 2g^2Kt - ag + bg \cos 2g^2Kt$ d'un autre côté.

la quantité de chaleur que le solide perd à la surface dépend 1° de celle qu'il communique à l'espace environnant dont la température est c. 2° de celle qu'il reçoit du foyer.

$h(v-c)$ est celle que le solide donne au corps environnant et $f\sin t$ est celle qu'il reçoit du foyer lorsque λ étant l'arc décrit par s au dessus de l'horizon et k peut supposer $\lambda = kt$. donc le solide reçoit $f\sin t - h(\bar{v}-c)$ quantité qui doit être la même que $-K\frac{d\bar{v}}{du}$ on aura donc l'équation déterminée $-K\frac{d\bar{v}}{du} = f\sin t - h(\bar{v}-c)$

ou $h\bar{v} - K\frac{d\bar{v}}{du} = (bh - \overline{ag - bg}\cdot K)\sin 2g^2 Kt + (ah + (\overline{ag+bg}|K)\cos 2g^2 Kt + \Omega$

le second membre doit être égal à $f\sin t + hc$. la constante hc peut être développée en

~~cosinus d'arcs multiples et l'on a~~ $\frac{1}{4} = \cos\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}\cos\frac{1}{5}x + \frac{1}{5}\cos\frac{1}{7}x - \frac{1}{7}\cos\frac{1}{9}x$

l'équation $\bar{v} = a\cos 2g^2 Kt + b\sin 2g^2 Kt + \Omega$ doit donner pour $\bar{v}$ la même valeur lorsqu'on fait $t = t$ ou $t = t + \theta$ le nombre θ étant l'intervalle de tems après lequel la température se rétablissent on aura donc $2g^2 K\theta = 2i\varpi$ i étant un nombre entier quelconque ainsi $2g^2 Kt = 2i\varpi\frac{t}{\theta}$

et $\bar{v} = a\cos 2i\varpi\frac{t}{\theta} + b\sin 2i\varpi\frac{t}{\theta} + \ldots\ldots$

~~Supposons que le premier membre de l'équation cherchée puisse être développé suivant les cosinus et sinus des arcs multiples de $\frac{2\varpi t}{\theta}$ et $2g^2 Kt = \frac{2\varpi t}{\theta}$ et l'on a seulement~~

$\frac{2\varpi t}{\theta}$ pendant que le foyer est au dessus de l'horizon mais le terme $f\sin kt$ n'entre plus et l'on a seulement $K\frac{d\bar{v}}{du} = h(\bar{v}-c)$ c'est pourquoi il est nécessaire que la quantité $h\bar{v} - K\frac{d\bar{v}}{du}$ soit égale à hc depuis $t = \frac{1}{2}\theta$ jusqu'à $t = \theta$ et qu'elle soit égale à $f\sin(kt) + hc$ depuis $t = 0$ jusqu'à $t = \frac{1}{2}\theta$

soit $h\bar{v} - K\frac{d\bar{v}}{du} = \alpha_0\cos 0t + \beta_0\sin 0t + \alpha_1\cos 2\varpi\frac{t}{\theta} + \beta_1\sin 2\varpi\frac{t}{\theta} + \alpha_2\cos 4\varpi\frac{t}{\theta} + \beta_2\sin 4\varpi\frac{t}{\theta} + \Omega$

il faut que le second membre soit $hc + f\sin(kt)$ depuis $t=0$ jusqu'à $t = \frac{1}{2}\theta$ et qu'il soit seulement hc depuis $t = \frac{1}{2}\theta$ jusqu'à $t = \theta$. d'un autre côté on prendra $k = \frac{2\varpi}{\theta}$ afin que $\sin(kt)$ ou $\sin 2\varpi\frac{t}{\theta}$ devienne $\sin\varpi$ lorsque $t = \frac{1}{2}\theta$. on a en général le développement de φx en sinus et arcs quelque soit la fonction φx on pourra donc déterminer les coefficients $\alpha_0\ \alpha_1\ \alpha_2$ $\beta_1\ \beta_2$ et en conséquent les coefficients a et b

$ah + (ag+bg|K = \alpha$ $\quad a(h+gK) + bgK = \alpha$ $\quad a = \frac{\alpha - bgK}{h+gK}$

$bh - (ag - bg|K = \beta$ $\quad b(h+gK) - agK = \beta$ $\quad a = \frac{b(h+gK) - \beta}{gK}$

$a(h+gK)^2 + a\,g^2K^2 = \alpha(h+gK) - \beta gK$ $\quad b(h+gK)^2 - \beta(h+gK) = 2\alpha gK - b(gK)^2$

ou $a = \frac{\alpha(h+gK) - \beta gK}{(h+gK)^2 + (gK)^2}$ $\quad b = \frac{\alpha gK + \beta(h+gK)}{(h+gK)^2 + gK^2}$ $\quad \frac{a}{b} = \frac{\alpha(h+gK) - \beta gK}{\alpha gK + \beta(h+gK)} = \tan\Phi$

$a^2 + b^2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{(h+gK)^2 + gK^2} = \Psi^2$

pour l'équation générale $\varpi\varphi(x) = a_0 + \overset{a_1 \cos x}{b_1 \sin x} + \overset{a_2 \cos 2x}{b_2 \sin 2x} + \overset{a_3 \cos 3x}{b_3 \sin 3x} + \text{etc.}$

qui doit être satisfaite depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 2\varpi$ on sait que

$a_0 = \frac{1}{2\varpi}\int \varphi x\, dx$ les intégrales doivent être prises depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 2\varpi$

$a_1 = \int \varphi x \cos x\, dx$, $b_1 = \int \varphi x \sin x\, dx$

$a_2 = \int \varphi x \cos 2x\, dx$, $b_2 = \int \varphi x \sin 2x\, dx$

α

Soit $x = 2\varpi\frac{t}{\theta}$ on aura

$\varpi\varphi\left(2\varpi\frac{t}{\theta}\right) = \varpi F t = a_0 + \overset{a_1 \cos 2\varpi\frac{t}{\theta}}{b_1 \sin 2\varpi\frac{t}{\theta}} + \overset{a_2 \cos\left(2\frac{2\varpi t}{\theta}\right)}{b_2 \sin\left(2\frac{2\varpi t}{\theta}\right)} + \alpha$

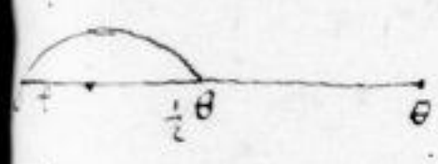
et l'on aura $a_0 = \frac{1}{2\varpi}\int F t\, dt$

$a_1 = \int F t \cos\left(2\varpi\frac{t}{\theta}\right) d\left(2\varpi\frac{t}{\theta}\right)$ $\quad b_1 = \int F t \sin\left(2\varpi\frac{t}{\theta}\right) d\left(2\varpi\frac{t}{\theta}\right)$

et en général $a_i = \frac{2\varpi}{\theta}\int F t \cos\left(i\,2\varpi\frac{t}{\theta}\right) dt$ $\quad b_i = \frac{2\varpi}{\theta}\int F t \sin\left(i\,\frac{2\varpi t}{\theta}\right) dt$

les intégrales doivent être prises depuis $t = 0$ jusqu'à $t = \theta$

Supposons que la fonction Ft soit telle que sa valeur soit $\sin\left(2\varpi\frac{t}{\theta}\right)$, tant que t est compris entre 0 et $\frac{1}{2}\theta$ et que cette valeur soit nulle lorsque t est compris entre $\frac{1}{2}\theta$ et θ. il faudra dans ce cas prendre l'intégrale



$\int Ft \cos i\left(2\varpi\frac{t}{\theta}\right) dt$ depuis $t = 0$ jusqu'à $t = \frac{1}{2}\theta$ en supposant $Ft = \sin\left(2\varpi\frac{t}{\theta}\right)$ et ensuite il faudra prendre la partie de l'intégrale en supposant $Ft = 0$

ou aura $\int \sin\left(2\varpi\frac{t}{\theta}\right) \cos\left(i\,2\varpi\frac{t}{\theta}\right) dt = \frac{\theta}{2\varpi}\int \sin u \cos i u\, du$ - - - - - -

$= \frac{\theta}{4\varpi}\int du \left\{ \sin u(1+i) + \sin u(1-i) \right\} = \frac{\theta}{4\varpi}\left(\cos - \frac{1}{i+1}\cos(u+iu) - \frac{1}{1-i}\cos(u-iu) \right)$

ou trouve ensuite $\text{cont} = \frac{1}{1+i} + \frac{1}{1-i} = \frac{2}{1-i^2}$ l'intégrale est donc

$\frac{\theta}{4\varpi}\left(\frac{\text{Sin Ver. } u(1+i)}{1+i} + \frac{\text{Sin Ver. } u(1-i)}{1-i} \right)$ il faut présentement faire $u = \frac{2\varpi t}{\theta} = 2\varpi$

~~si i vaut 1 [illegible] l'intégrale devient nulle [illegible] pour a_0 on a $i = 1$ $\frac{2\varpi}{\theta}\int$~~

~~tout nombre de la quelconque [illegible] a_1 a_2 a_3 [illegible]~~

Si le nombre i est pair le sinus verse sera nul. Si le nombre i est impair le sinus verse vaudra 2. on a donc 0 pour la valeur de a_2 a_3 a_5 ... a_n et ~~pour~~ $\frac{2\varpi}{\theta}\frac{2\theta}{4\varpi}\left(\frac{2}{1-i^2}\right)$ pour la valeur de a_1 a_4 a_5 ... 2

pour a_0 on a $\frac{1}{2}\frac{2\varpi}{\theta}\int \sin\left(\frac{2\varpi t}{\theta}\right) dt = \cos - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{2\varpi t}{\theta}\right)$ ou $\frac{1}{2}\left(\text{Sin V } \frac{2\varpi t}{\theta}\right)$

on aura donc $a_0 = 1$ puisque la dernière valeur de t est $\frac{1}{2}\theta$

on a ensuite $b_i = \frac{2\varpi}{\theta}\int \sin\left(i\,\frac{2\varpi t}{\theta}\right) \sin\left(2\varpi\frac{t}{\theta}\right) dt = \int \sin(iu)\sin(u)\, du$

10/.

ou $B_i = \frac{1}{2}\int\left\{\cos(iu - u) - \cos(iu + u)\right\}du = \frac{1}{2}\frac{\sin a(i-1)}{i-1} - \frac{1}{2}\frac{\sin(u.i+1)}{i+1}$

il faut préalablement supposer $u = \varpi$ on sorte que toutes les valeurs de B_i sont nulles.

on en conclut sauf erreur de calcul que $\alpha_0 = 1$ et $\alpha_i = \frac{2}{1-i^2}$ lorsque i est pair

on a donc $\varpi f(t) = \varpi \sin\left(2\varpi\frac{t}{\theta}\right) = 1 + \frac{2}{1-2^2}\cos\left(2.2\varpi\frac{t}{\theta}\right) + \frac{2}{1-4^2}\cos\left(4\frac{2\varpi t}{\theta}\right) + \frac{2}{1-6^2}\cos\left(6\frac{2\varpi t}{\theta}\right) + \alpha$

ou $\frac{\varpi}{2}\sin x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2-1}\cos 2x - \frac{1}{4^2-1}\cos 4x - \frac{1}{6^2-1}\cos 6x + \alpha$ cette équation

doit être satisfaite pour toutes les valeurs de x comprises entre $x = 0$ et $x = \varpi$ en sorte le second membre doit être nulle pour tout or les valeurs de x comprises entre ϖ et 2ϖ. il y a dans le calcul précédent une remarque singulière qui oblige de rectifier le résultat précédent. en effet le terme $\frac{1}{2}\frac{\sin u(i-1)}{i-1}$ devient nul lorsque fait $u = \varpi$ mais il faut excepter le seul cas ou le nombre i vaut 1 dans ce cas le terme devient $\frac{0}{0}$ et équivaut à $\frac{\varpi}{2}$ toute évaluation faite. il suit de là que le coefficient B_i est nul en général excepté dans le seul cas ou $i = 1$ il faut donc écrire $B_1 = \frac{\varpi}{2}$ ainsi le coefficient de $\sin x$ dans le développement cherché est $\frac{\varpi}{2}$.

on a donc $\varpi \sin x = 1 - \frac{2}{2^2-1}\cos 2x - \frac{2}{4^2-1}\cos 4x - \frac{2}{6^2-1}\cos 6x - \ldots$

$$+ \frac{\varpi}{2}\sin x$$

ou $\frac{\varpi}{2}\sin x = \frac{1}{2} - \frac{1}{1.3}\cos 2x - \frac{1}{3.5}\cos 4x - \frac{1}{5.7}\cos 6x - \alpha$

$$+ \frac{\varpi}{4}\sin x$$

le second membre vaut $\frac{\varpi}{2}\sin x$ lorsque x est compris entre 0 et ϖ ou a trouvé en effet art 69 de même $\frac{\varpi}{4}\sin x = 1 - \frac{\cos 2x}{1.3} - \frac{\cos 4x}{3.5} - \frac{\cos 6x}{5.7} - \ldots$

mais lorsque x est compris entre ϖ et 2ϖ le quantité

$\frac{1}{2} - \frac{\cos x}{1.3} - \frac{\cos 4x}{3.5} - \ldots$ vaut $-\frac{\varpi}{4}\sin x$ et par conséquent le développement précédent se réduit à zero. il suit de là que l'on a l'équation

$$\varpi f(t) = \varpi \sin\frac{2\varpi t}{\theta} = 1 + \frac{\varpi}{2}\sin\left(2\varpi\frac{t}{\theta}\right) - \frac{2\cos 2\left(\frac{2\varpi t}{\theta}\right)}{1.3} - \frac{2\cos\left(4.\frac{2\varpi t}{\theta}\right)}{3.5} - \frac{2\cos\left(6\frac{2\varpi t}{\theta}\right)}{5.7}$$

le développement donné par le 2ème membre équivaut à $\varpi \sin\frac{2\varpi t}{\theta}$ lorsque t est compris entre 0 et $\frac{1}{2}\theta$ et ce développement équivaut à zero lorsque t est compris entre $\frac{1}{2}\theta$ et θ.

ϕ 5

on aura donc $a_0 = 1$ $a_2 = -\frac{2}{1\cdot 3}$ $a_4 = -\frac{2}{3\cdot 5}$ $a_6 = -\frac{2}{5\cdot 7}$

$b_1 = \frac{\varpi}{2}$ toutes les autres coefficients sont nuls

il faut maintenant déterminer $a_0\ a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5 \cdots$
$b_1\ b_2\ b_3\ b_4 \cdots$

on a $2g_i^2 k\theta = 2i\varpi$ ou $g_i = \sqrt{\frac{i\varpi}{k\theta}}$

on aura en 1er lieu $a_0 h = \alpha_0 = \frac{1}{\varpi}$ ou $a_0 = \frac{1}{\varpi h}$ et $b_0 h = \beta_0 = 0$

ensuite on aura $a_1 = \frac{\theta - \frac{1}{2} g_1 k}{(h+g_1 k)^2 + (g_1 k)^2} = \frac{-\frac{1}{2} g_1 k}{(h+g_1 k)^2 + (g_1 k)^2}$, $b_1 = \frac{\frac{1}{2}(h+g_1 k)}{(h+g_1 k)^2 + g_1^2 k^2}$

$a_2 = \frac{\alpha_2 (h+g_2 k)}{(h+g_2 k)^2 + (g_2 k)^2}$ $\quad b_2 = \frac{\alpha_2 g_2 k}{(h+g_2 k)^2 + (g_2 k)^2}$

$a_3 = 0$ $\quad b_3 = 0$

$a_4 = \frac{\alpha_4 (h+g_4 k)}{(h+g_4 k)^2 + (g_4 k)^2}$ $\quad b_4 = \frac{\alpha_4 g_4 k}{(h+g_4 k)^2 + (g_4 k)^2}$

$a_5 = 0$

$a_6 = \frac{\alpha_6 (h+g_6 k)}{(h+g_6 k)^2 + (g_6 k)^2}$

2

ou (at $\frac{h}{k} = r$

$2g_i^2 k\theta = 2i\varpi$

ou $g_i = \sqrt{\frac{i\varpi}{k\theta}}$

on aura en général $a_i = \frac{2}{1-i^2}\frac{(r+g_i)}{(r+g_i)^2 + g_i^2}$ et $k\varpi b_i = \frac{2}{1-i^2}\frac{i g_i}{(r+g_i)^2 + g_i^2}$

le nombre i est successivement 2 4 6 8 &c

on aura enfin $\varpi k a_0 = \frac{1}{r}$ $\quad b_0 = 0$

et $\varpi k a_1 = -\frac{\frac{1}{2} i g_1 \varpi}{(r+g_1)^2 + g_1^2}$ $\quad \varpi k b_1 = \frac{\frac{1}{2}(r+g_1)\varpi}{(r+g_1)^2 + g_1^2}$

on aura donc pour calculer cet ν équation suivante qui donne la valeur de υ

$$\nu = \frac{1}{r} - \frac{\frac{1}{2}\varpi\sqrt{\frac{\varpi}{k\theta}}}{(r+\sqrt{\frac{\varpi}{k\theta}})^2 + \frac{\varpi}{k\theta}} e^{-u\sqrt{\frac{\varpi}{k\theta}}} \cos\left(\frac{2\varpi t}{\theta} - u\sqrt{\frac{\varpi}{k\theta}}\right) - \frac{\frac{2}{3\cdot 5}(r+\sqrt{\frac{2\varpi}{k\theta}})}{(r+\sqrt{\frac{2\varpi}{k\theta}})^2 + \frac{2\varpi}{k\theta}} e^{-u\sqrt{\frac{2\varpi}{k\theta}}} \cos\left(\frac{4\varpi t}{\theta} - u\sqrt{\frac{2\varpi}{k\theta}}\right)$$

$$+ \frac{\frac{\varpi}{2}(r+\sqrt{\frac{\varpi}{k\theta}})}{(r+\sqrt{\frac{\varpi}{k\theta}})^2 + \frac{\varpi}{k\theta}} e^{-u\sqrt{\frac{\varpi}{k\theta}}} \sin\left(\frac{2\varpi t}{\theta} - u\sqrt{\frac{\varpi}{k\theta}}\right) - \frac{2}{3\cdot 5}\frac{\sqrt{\frac{2\varpi}{k\theta}}}{(r+\sqrt{\frac{2\varpi}{k\theta}})^2 + \frac{2\varpi}{k\theta}} e^{-u\sqrt{\frac{2\varpi}{k\theta}}} \sin\left(\frac{4\varpi t}{\theta} - u\sqrt{\frac{2\varpi}{k\theta}}\right) - \&c$$

6

laissons $a e^{-gu}\cos(2g^2\kappa t - gu) + b e^{-gu}\sin(2g^2\kappa t - gu)$ pour retrouver
mettons sous cette forme $\alpha e^{-gu}\sin(2g^2\kappa t - gu + \beta)$ ou

$2\sin\beta\, e^{-gu}\cos(2g^2\kappa t - gu) + 2\cos\beta\, e^{-gu}\sin(2g^2\kappa t - gu)$ en adme

$a = 2\sin\beta$
$b = 2\cos\beta$ ou $\operatorname{tang}\beta = \frac{a}{b}$ et $2^2 = a^2 + b^2$

dans la valeur de v que l'on a trouvée précédemment on a lorsque g est g_1

$\beta = \operatorname{arctang}\frac{g_1}{r+g_1}$ et $2^2 = \frac{\varpi^2}{4}\frac{1}{\sqrt{(r+g_1)^2+g^2}}$

lorsque g est g_2 on a $\beta = \operatorname{arctang}\left[\frac{r+g_2}{g_2}\right]$ et $2 = -\frac{2}{3\cdot 3}$

lorsque g est g_4 on a $\beta = \operatorname{arctang}\frac{r+g_4}{g_4}$ et $2 = -\frac{2}{3\cdot 7}$

on a donc pour la valeur de v l'équation suivante

$$v = \frac{1}{r} + \frac{\frac{1}{2}\varpi e^{-u\sqrt{\frac{\varpi}{\kappa\theta}}}}{\sqrt{(r+g)^2+g^2}}\sin\left(2\varpi\frac{t}{\theta} - u\sqrt{\frac{\varpi}{\kappa\theta}} - \operatorname{arctang}\frac{\sqrt{\frac{\varpi}{\kappa\theta}}}{r+\sqrt{\frac{\varpi}{\kappa\theta}}}\right) - \frac{2}{1\cdot 3}\left\{\frac{e^{-u\sqrt{\frac{2\varpi}{\kappa\theta}}}}{\left((r+\sqrt{\frac{2\varpi}{\kappa\theta}})^2+\frac{2\varpi}{\kappa\theta}\right)^{\frac{1}{2}}}\sin\left(2\varpi\frac{t}{\theta} - u\sqrt{\frac{2\varpi}{\kappa\theta}} + \operatorname{arctang}\frac{r+\sqrt{\frac{2\varpi}{\kappa\theta}}}{\sqrt{\frac{2\varpi}{\kappa\theta}}}\right)\right\}$$

$$- \frac{2}{3\cdot 5}\left\{\frac{e^{-u\sqrt{\frac{4\varpi}{\kappa\theta}}}}{\left((r+\sqrt{\frac{4\varpi}{\kappa\theta}})^2+\frac{4\varpi}{\kappa\theta}\right)^{\frac{1}{2}}}\sin\left(4\frac{2\varpi t}{\theta} - u\sqrt{\frac{4\varpi}{\kappa\theta}} + \operatorname{arctang}\frac{r+\sqrt{\frac{4\varpi}{\kappa\theta}}}{\sqrt{\frac{4\varpi}{\kappa\theta}}}\right)\right\}$$

$$- \frac{2}{5\cdot 7}\left\{\frac{e^{-u\sqrt{\frac{6\varpi}{\kappa\theta}}}}{\left((r+\sqrt{\frac{6\varpi}{\kappa\theta}})^2+\frac{6\varpi}{\kappa\theta}\right)^{\frac{1}{2}}}\sin\left(6\frac{2\varpi t}{\theta} - u\sqrt{\frac{6\varpi}{\kappa\theta}} + \operatorname{arctang}\frac{r+\sqrt{\frac{6\varpi}{\kappa\theta}}}{\sqrt{\frac{6\varpi}{\kappa\theta}}}\right)\right\} - \&c$$

pour vérifier ce résultat on peut recommencer le calcul en partant de cette dernière forme.

soit $v = c + a_1 e^{-gu}\sin(2g^2\kappa t - gu + b) + a_2 e^{-g_2 u}\sin(2g_2^2\kappa t - g_2 u + b_2) + \&c$

on aura d'abord $\frac{\partial v}{\partial t} = a e^{-gu} 2g^2\kappa\cos v$ en dérivant par v l'équation lorsque lim

$$\frac{\partial v}{\partial u} = -a g e^{-gu}\sin v + a g e^{-gu}\cos v$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial u^2} = a g^2 e^{-gu}\sin v + a g^2 e^{-gu}\cos v + a g^2 e^{-gu}\cos v - a g^2 e^{-gu}\sin v$$

$$= 2 a g^2 e^{-gu}\cos v$$

ainsi l'équation $\frac{\partial v}{\partial t} = \kappa\frac{\partial^2 v}{\partial u^2}$ est satisfaite.

il faut maintenant prendre la valeur de $hv - \underline{\kappa}\frac{\partial v}{\partial u}$ à la surface

on aura $\bar v = c + a\sin(2g^2\kappa t + b) + a_2\sin(2g_2^2\kappa t + b_2) + \cdots$

$$\frac{\partial \bar v}{\partial u} = -a g\sin(2g^2\kappa t + b) - a g\cos(2g^2\kappa t + b) - \&c$$

donc $h\bar v - \underline{\kappa}\frac{\partial \bar v}{\partial u} = hc + (ah + \underline{\kappa} a g)\sin(2g^2\kappa t + b) + \underline{\kappa} a g\cos(2g^2\kappa t + b) + \&c$

prenons pour la température θ celle qui est commune à tout le corps. Soit f la chaleur du foyer c'est à dire la quantité de chaleur qu'une surface égale à l'unité reçoit de ce foyer pendant l'unité de temps (il est facile de déterminer f par les précédentes notes précédentes)

on aura aussi

$$h\bar{v} - \underline{\kappa}\frac{\partial \bar{v}}{\partial u} = hc + (ah + \underline{\kappa} ag)\cos b \sin 2g^2 \underline{\kappa} t + (ah + \underline{\kappa} ag)\sin b \cos 2g^2 \underline{\kappa} t + \&$$
$$- \underline{\kappa} ag \sin b \sin 2g^2 \underline{\kappa} t + \underline{\kappa} ag \cos b \cos 2g^2 \underline{\kappa} t$$

la quantité $f \sin\left(\frac{2\varpi t}{\theta}\right)$ exprime combien pendant l'unité de temps il entre de chaleur par la surface entière de l'aire du foyer. Si ensuite on en retranche $h\bar{v}$ qui exprime combien il en sort en vertu du rayonnement on aura la quantité de chaleur effective qui pénètre le solide par la surface et cette dernière quantité est $-\kappa \frac{\partial \bar{v}}{\partial u}$ on a donc l'équation de condition $-\kappa \frac{\partial \bar{v}}{\partial u} = f \sin\left(\frac{2\varpi t}{\theta}\right) - h\bar{v}$
cette condition ne subsiste que pendant le jour parce qu'alors il y a une addition de chaleur provenant du foyer mais pendant la nuit cette condition n'existe pas et il faut que l'on ait comme dans le refroidissement ordinaire $h\bar{v} = \kappa \frac{\partial \bar{v}}{\partial u}$
ainsi la quantité $h\bar{v} - \underline{\kappa}\frac{\partial \bar{v}}{\partial u}$ équivaut à $f \sin\left(\frac{2\varpi t}{\theta}\right)$ lorsque t est compris entre 0 et $\frac{1}{2}\theta$ et elle est nulle lorsque t est compris entre $\frac{1}{2}\theta$ et θ
or on a trouvé précédemment un développement de $f \sin \frac{2\varpi t}{\theta}$ qui satisfait exactement aux deux conditions dont on vient de parler il reste donc à comparer ce développement à celui de $h\bar{v} - \underline{\kappa}\frac{\partial \bar{v}}{\partial u}$

on a trouvé l'équation

$$\varpi f \sin\left(\frac{2\varpi t}{\theta}\right) = f + \frac{f}{2}\varpi \sin\frac{2\varpi t}{\theta} - \frac{2f}{1\cdot 3}\cos\left(2\frac{2\varpi t}{\theta}\right) - \frac{2f}{3\cdot 5}\cos 4\left(\frac{2\varpi t}{\theta}\right) - \frac{2f}{5\cdot 7}\cos 6\left(\frac{2\varpi t}{\theta}\right) - \&$$

on a donc $hc = \frac{f}{\varpi}$ ou $c = \frac{f}{h}\varpi^{-1} = \frac{f\varpi^{-1}\kappa^{-1}}{r}$

$$\frac{1}{2}f = a(h + \underline{\kappa} g_1)\cos b - \underline{\kappa} ga \sin b \quad , \quad o = a(h + \underline{\kappa} g)\sin b + \underline{\kappa} ga \cos b$$

ainsi de suite en comparant terme à terme

on aura $\frac{\sin b}{\cos b} = -\frac{\underline{\kappa} g}{h + \underline{\kappa} g} = -\frac{g}{r + g}$ et $b = -\text{arctang}\left(\frac{g}{r + g_1}\right)$

en quarrant les deux équations on a

$$\frac{1}{4}f^2 = a^2\left\{(h + \underline{\kappa} g)^2 \cos^2 b + 2\kappa g \overline{h + \underline{\kappa} g}\sin b \cos b + \overline{\underline{\kappa} g}^2 \sin^2 b\right\} \text{ et}$$

$$o = a^2\left\{(h + \underline{\kappa} g)\sin^2 b + \overline{\underline{\kappa} g}^2 \cos^2 b - 2\overline{h + \underline{\kappa} g}\ \overline{\underline{\kappa} g} \sin b \cos b\right\}$$

ajoutant on a $\frac{1}{4}f^2 = a^2\left(\overline{h + \underline{\kappa} g}^2 + \overline{\underline{\kappa} g}^2\right)$

ou $a_1 = \frac{\frac{1}{2}f}{\left(\overline{h + \underline{\kappa} g_1}^2 + \overline{\underline{\kappa} g_1}^2\right)^{\frac{1}{2}}}$

on trouve semblable lorsque g est g_2

$$\delta v = \frac{f}{r}$$

$$(ah+\underline{k}ag)\cos\theta - \underline{k}ag\sin\theta = 0$$

$$\text{et } (ah+\underline{k}ag)\sin\theta + \underline{k}ag\cos\theta = -\frac{2}{1.3}\varpi^{-1}f$$

$$\text{ou } \theta = \text{arctang}\left(\frac{r+g}{g}\right)$$

quarrant et ajoutant on a $a^2(h+\underline{k}g)^2 + a^2\underline{k}g^2 = \left(\frac{2}{1.3}\right)^2 f^2\varpi^{-2}$

$$\text{ou } a_2 = \frac{2f}{1.3}\cdot\frac{1}{(\overline{h+kg_2}^2+\overline{kg_2}^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2f\varpi^{-1}\underline{k}^{-1}}{1.3\ (\overline{r+g_2}^2+g_2^2)^{\frac{1}{2}}}$$

on a encore lorsque g est g_3

$$(ah+\underline{k}ag)\cos\theta - \underline{k}ag\sin\theta = 0$$

$$\text{et } ah+\underline{k}ag\cos\theta + \underline{k}ag\cos\theta = 0 \qquad \text{etc } a_3 = 0$$

lorsque g est g_4 on a

$$(ah+\underline{k}ag)\cos\theta - \underline{k}ag\sin\theta = 0$$

$$(ah+\underline{k}ag)\cos\theta + \underline{k}ag\cos\theta = -\frac{2f\varpi^{-1}}{3.3}$$

$$\text{ou } \theta_4 = \text{arc tang}\left(\frac{r+g_4}{g_4}\right)$$

$$\text{et } a_4 = \frac{2f\varpi^{-1}}{3.3}\frac{1}{\left((h+kg_4)^2+\overline{kg_4}^2\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2f\varpi^{-1}\underline{k}^{-1}}{3.3\ (\overline{r+g}^2+g^2)^{\frac{1}{2}}}$$

en comparant ces résultats avec ceux que l'on a trouvés précédemment on en se servira ci-dessus et l'on aura pour en finir la solution cherchée l'équation suivante

$$v = \frac{f}{r} + \frac{\frac{1}{2}\varpi e^{-u\sqrt{\frac{\varpi}{\kappa\theta}}}\cdot f.\ \sin\left\{\frac{2\varpi t}{\theta} - u\sqrt{\frac{\varpi}{\kappa\theta}} - \text{arctang}\left/\frac{\sqrt{\frac{\varpi}{\kappa\theta}}}{r+\sqrt{\frac{\varpi}{\kappa\theta}}}\right.\right\}}{\left/\left(r+\sqrt{\frac{\varpi}{\kappa\theta}}\right)^2+\frac{\varpi}{\kappa\theta}\right.^{\frac{1}{2}}}$$

$$-\frac{2f}{1.3}\frac{e^{-u\sqrt{\frac{2\varpi}{\kappa\theta}}}\ \sin\left\{2\frac{2\varpi t}{\theta} - u\sqrt{\frac{2\varpi}{\kappa\theta}} - \text{arctang}\left/\frac{\sqrt{\frac{2\varpi}{\kappa\theta}}}{r+\sqrt{\frac{2\varpi}{\kappa\theta}}}\right.\right\}}{\left/\left(r+\sqrt{\frac{2\varpi}{\kappa\theta}}\right)^2+\frac{2\varpi}{\kappa\theta}\right.^{\frac{1}{2}}}$$

$$-\frac{2f}{3.3}\frac{e^{-u\sqrt{\frac{3\varpi}{\kappa\theta}}}\ \sin\left\{3\frac{2\varpi t}{\theta} - u\sqrt{\frac{3\varpi}{\kappa\theta}} - \text{arctang}\left/\frac{\sqrt{\frac{3\varpi}{\kappa\theta}}}{r+\sqrt{\frac{3\varpi}{\kappa\theta}}}\right.\right\}}{\left/\left(r+\sqrt{\frac{3\varpi}{\kappa\theta}}\right)^2+\frac{3\varpi}{\kappa\theta}\right.^{\frac{1}{2}}}$$

$$-\ \text{etc}$$

κ est la chaleur de la conductibilité puisque κ est équivalent à $\frac{K}{C\cdot D}$, C est la chaleur spécifique
k est la conductibilité intérieure D est la densité
h est la chaleur de la chaleur du foyer

$$\frac{h}{\underline{K}} = r$$

1 Température de la Sphère. Le rayon est supposé très grand.

le rayon de la Sphere est X le rayon d'une couche Sphérique est x.

l'équation $\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{K}{C \cdot D}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{2}{x}\frac{\partial v}{\partial x}\right)$ (1) exprime le mouvement de la chaleur

H/ théorie de la chaleur pag. 5 &c/ Dans cette Sphere. on écrira $\frac{Kt}{C \cdot D} = t$ et l'on employera l'équation

$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{2}{x}\frac{\partial v}{\partial x}$ (2) il faudra en outre remplacer t par $\frac{Kt}{C \cdot D}$.

Soit $vx = u$ donc $v + x\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}$, $2\frac{\partial v}{\partial x} + x\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{u}{x^2}$ $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{1}{x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{2}{x^2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2u}{x^3}$

Donc $\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, ou $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (3). il faut donc

résoudre cette dernière équation (3) Soit $u = ae^{-n^2 t}\cos nx + be^{-n^2 t}\sin nx$ (4)

Donc $\frac{\partial u}{\partial t} = -n^2 u$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -n^2 u$. ainsi l'on peut prendre pour u

la valeur particulière 4 on aurait alors $v = \frac{u}{x}$ et toutes les valeurs v seront infinies au centre de la Sphere ce qui exclut le terme en entier où nx

Bien se rendre compte donc que $ae^{-n^2 t}\sin nx$ une valeur particulière de u

qui dépend uniquement que la surface de la Sphere soit retenue à une température constante ; il faudra que $\sin(nx)$ soit nul

donc $nx = i\omega$ entier pour i un nombre entier quelconque.

Donc la valeur générale de v est ainsi exprimée

$v = \sum \left\{\frac{a_i}{x}\sin\left(i\omega\frac{x}{X}\right)e^{-\frac{i^2\omega^2}{X^2}t}\right.$

et $u = \sum a_i \sin\left(i\omega\frac{x}{X}\right)e^{-\frac{i^2\omega^2}{X^2}t}$ ainsi la solution générale est exprimée par une

équation de cette forme $v = \sum_i^\infty \left\{\frac{a_i}{x}\sin\left(i\omega\frac{x}{X}\right)e^{-\frac{i^2\omega^2}{X^2}t}\right\}$

il reste alors qu'à déterminer les coefficients a_i de la solution générale en fonction de x

---

Soit fx la température initiale de l'intérieur de la sphere en fonction de x

on aura $xfx = a_1\sin\left(\omega\frac{x}{X}\right) + a_2\sin\left(2\omega\frac{x}{X}\right) + a_3\sin\left(3\omega\frac{x}{X}\right) + \ldots$

on applique ici l'équation (M) de la pag. 2 de la théorie de la chaleur

et l'on aura

$\frac{1}{i}X \cdot xfx = \sin\left(\frac{x}{X}\right)\int_0^X 2f2\sin\left(\omega\frac{2}{X}\right)d2 + \ldots$

et en général $a_i = \frac{2}{X}\int_0^X d2 \cdot 2f2\sin\left(i\omega\frac{2}{X}\right)$ l'intégration étant faite par rapport à 2

2 il reste pour a_i une fonction de x et de i la solution générale est donc alors exprimée

$xv = \sum_0^\infty \frac{2}{X}\sin\left(i\omega\frac{x}{X}\right)\int_0^X d2 \cdot 2f2 \cdot \sin\left(i\omega\frac{2}{X}\right)e^{-\frac{i^2\omega^2}{X^2}t}$ (5)

$\frac{kt}{c \cdot D} \frac{\varepsilon^2}{x^2}$ $\quad$ $\frac{t}{x} \frac{K}{x}$

$\frac{\varepsilon}{tang\,\varepsilon} = 1 - \frac{h}{K} x$ $\quad$ $\frac{K}{x^2} = k'$

$\frac{hx}{k' x^2}$ $\quad$ $\frac{h}{x}$

nous envisagerons maintenant dans l'étude le cas où x a une très grande valeur soit $X = n\varpi$, en désignant un certain nombre d'unités de une somme

$$\text{on a } \upsilon x = \sqrt{\frac{2}{x}} \sum_{0}^{\varpi} \sin\left(\frac{i}{n}\pi\right) \int_{0}^{x} \partial\lambda\, \lambda f\lambda \sin\left(\frac{i}{n}\lambda\right) \cdot e^{-\frac{i^2}{n^2}\cdot t},$$

il faut remplacer tout nombre x par $X - p$ en désignant par p les premiers.

si l'on cherche le terme de υ dont le rang est i on aura pour le terme

$$\frac{1}{X-p} \cdot \frac{2}{X} \cdot \sin\left(i\varpi \cdot \frac{X-p}{X}\right) \int_{0}^{X} \partial\lambda f\lambda \cdot \sin\left(\frac{i\varpi}{X}\lambda\right) \Big/ e^{-\frac{i^2\varpi^2}{X^2}t}$$

le facteur $\sin\left(i\varpi - \frac{i\varpi}{X}p\right)$ est $-\cos i\varpi \cdot \sin\left(\frac{i\varpi}{X}p\right)$

et dans le terme suivant le facteur est $-\cos(i\varpi + \varpi)\sin\left(\frac{i\varpi}{X}p + \frac{\varpi}{X}p\right)$

ou $+\cos i\varpi \sin\left(\frac{i+1}{X}p\right)$. c'est à dire que les termes des deux

termes consécutifs est $\frac{1}{X-p}\cdot\frac{2}{X}\cos i\varpi \, \Delta\left\{\sin\left(\frac{i\varpi}{X}p\right) e^{-\frac{i^2\varpi^2}{X^2}t} \int_{0}^{X} \partial\lambda f\lambda \sin\frac{i\varpi}{X}\lambda\right\}$ (6)

on désigne par Δ la différence finie de la fonction de i placée entre les deux parenthèses

il faudra chercher par rapport aux puissances négatives de X le terme général

désigné par (6.)

---

on considère le cas où la température initiale est linéaire dans toute l'étendue

la plaque on détermine en les coefficients a_1 a_2 a_3 δ dans l'équation

$x = a_1 \sin\left(\frac{\varpi}{X}x\right) + a_2 \sin\left(2\frac{\varpi}{X}x\right) + a_3 \sin\left(3\frac{\varpi}{X}x\right) + \delta$ on obtient encore

l'équation $\frac{1}{2}\pi x = \sin\left(\frac{\varpi}{X}x\right) \int_{0}^{X} \partial\lambda\, \lambda \sin\left(\frac{\varpi}{X}\lambda\right) + \sin\left(2\frac{\varpi}{X}x\right) \int_{0}^{X} \partial\lambda\, \lambda \cdot \sin\left(\frac{2\varpi}{X}\lambda\right) + \frac{\delta}{2}$

or $\int \partial\lambda\, \lambda \sin\left(\frac{i\varpi}{X}\lambda\right) = C - \cos\left(\frac{i\varpi}{X}\lambda\right)\frac{X}{i\varpi} + \sin\left(\frac{i\varpi}{X}\lambda\right)\left(\frac{X}{i\varpi}\right)^2$

d'où $\lambda \sin\left(\frac{i\varpi}{X}\lambda\right) = 2\sin\left(\frac{i\varpi}{X}\cdot\lambda\right) - \cos\left(\frac{i\varpi}{X}\lambda\right)\frac{X}{i\varpi} + \frac{X}{i\varpi}\cos\frac{i\varpi}{X}\lambda$ équation

identique donc $\int_{0}^{X} \partial\lambda \sin\left(\frac{i\varpi}{X}\lambda\right) = \frac{X}{i\varpi}\left(1 - \cos\frac{i\varpi}{X}\lambda\right)\Big|$

$= -\frac{2X}{i\varpi}\cos\left(\frac{i\varpi}{X}\lambda\right) + \left(\frac{X}{i\varpi}\right)^2 \sin\left(\frac{i\varpi}{X}\lambda\right)$ et faisant $\lambda = X$ on a

$\int_{0}^{X} \partial\lambda \sin\left(\frac{i\varpi}{X}\lambda\right) = -\frac{X}{i\varpi}\cdot\cos i\varpi$ on a donc

$\frac{1}{2}\pi x = \sin\left(\frac{\varpi}{X}x\right)\left(-\frac{X}{\varpi}\right) - \frac{X^2}{2}\sin\left(\frac{\varpi}{X}x\right) - \frac{X^2}{3}\sin\left(\frac{3\varpi}{X}x\right) - \delta$

ou $\frac{1}{2}\omega\frac{x}{X}\cdot\frac{x}{X} = \sin\frac{\omega x}{X} - \frac{1}{3}\sin^3\frac{\omega x}{X}$ + &c et s'il vient $X = \omega$

ou $\frac{1}{2}\frac{x}{X} = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x$ equation connue (page 241)

la valeur générale de a_i étant déterminée on aura

$$\frac{xv\omega}{2X} = e^{-\frac{\omega^2 t}{X}}\sin\left(\frac{\omega x}{X}\right) - \frac{1}{2}e^{-\frac{4\omega^2 t}{X^2}}\sin\left(2\omega\frac{x}{X}\right) + \frac{1}{3}e^{-\frac{9\omega^2 t}{X^2}}\sin\left(3\omega\frac{x}{X}\right) - \&c \quad (7)$$

et l'on exprime ainsi la solution car 1° la valeur de v satisfait à l'équation différentielle 2° v devient nulle quelque soit t lorsque $x = 0$

3° si $t = \infty$ on a $v = 1$

il est donc certain que l'équation (7) exprime le mouvement de la chaleur dans une sphère dont le rayon est X, dont tous les points ont reçu une température initiale commune 1 et dont la surface est retenue à la température 0

il faut exprimer attentivement les conséquences de cette solution.

---

si l'on suppose $x = 0$ pour connaître la température du centre on trouve $v = \frac{0}{0}$ et appliquant la règle connue on a

$$\frac{\omega v}{2X} = e^{-\frac{\omega^2 t}{X^2}}\frac{\omega}{X}\cos\left(\frac{\omega x}{X}\right) - \frac{1}{2}e^{-\frac{4\omega^2 t}{4X^2}}\frac{2\omega}{X}\cos\left(2\frac{\omega x}{X}\right) + \&c$$

ou $\frac{v}{2} = e^{-\frac{\omega^2 t}{X^2}} - \frac{1}{2}e^{-\frac{4\omega^2 t}{4X^2}} + \frac{1}{3}e^{-\frac{9\omega^2 t}{3X^2}} - \&c$ résultat très simple qui exprime la température du centre de la sphère après le temps t

Soit $\frac{\omega^2}{X^2} = k$ on aura $\frac{\omega^2}{2} = \frac{1}{2}kt$ si l'on pose $\frac{Kt}{CD}$ au lieu de t on aura

$$\frac{v}{2} = e^{-\frac{\omega^2}{X^2}\frac{Kt}{CD}} - e^{-\frac{4\omega^2}{4X^2}\frac{Kt}{CD}} + \&c$$ et la solution qui convient à tous les cas

devient en général

$$\frac{v}{2}\omega\frac{x}{X} = e^{-\frac{\omega^2}{X^2}\frac{Kt}{CD}}\sin\left(\omega\frac{x}{X}\right) - \frac{1}{2}e^{-\frac{4\omega^2}{4X^2}\frac{Kt}{CD}}\sin\left(2\omega\frac{x}{X}\right) + \&c \quad (8)$$

et remplaçons t au lieu de $\frac{Kt}{CD}$

écrivons maintenant $X - p$ au lieu de x en observant pour commodité les propositions

p on aura

$$\frac{\omega v}{2}\left(1 - \frac{p}{X}\right) = e^{-\frac{\omega^2}{X^2}t}\sin\omega\left(1 - \frac{p}{X}\right) - \frac{1}{2}e^{-\frac{4\omega^2}{4X^2}t}\sin 2\omega\left(1 - \frac{p}{X}\right) + \&c$$

(et comme général on a $\sin\left(i\omega\left(1 - \frac{p}{X}\right)\right)$ ou

$-\cos i\omega\cdot\sin\left(\frac{i\omega}{X}p\right)$ soit $X = m\omega$ on aura

$$\frac{v}{2}\left\{1 - \frac{r}{m\omega}\right\} = -e^{-\frac{t}{m^2}}\cos\omega\sin\left(\frac{p}{m}\right) + \frac{1}{2}e^{-\frac{4t}{m^2}}\cos(2\omega)\sin\left(2\frac{p}{m}\right) \&c$$

si l'on suppose m un très grand nombre on trouve

$$\frac{\pi v}{2} = e^{-\frac{t}{m^2}} \sin\left(\frac{p}{m}\right) + \frac{1}{2} e^{-\frac{2^2 t}{m^2}} \sin\left(\frac{2p}{m}\right) + \frac{1}{3} e^{-\frac{3^2 t}{m^2}} \sin\frac{3p}{m} + \text{&c.}$$

Soit λ une variable qui devient successivement $\partial\lambda$, $2\partial\lambda$, $3\partial\lambda$, $4\partial\lambda$ &c

et $\frac{v}{2}$ = exprimant $\frac{1}{m}$ par $\partial\lambda$ le terme général deviendra $\frac{1}{i} e^{-\frac{i^2 t}{m^2}} \sin\frac{ip}{m}$ ou aussi $\frac{i}{m} = \lambda = \frac{1}{m} = \partial\lambda$

donc $\frac{1}{i} = \frac{\partial\lambda}{\lambda}$ ainsi chaque terme deviendra une différentielle et l'on aura $\frac{\pi v}{2} = \int_0^\infty \frac{\partial\lambda}{\lambda} e^{-\lambda^2 t} \sin(\lambda p)$ ou en mettant pour v sa valeur

deux fois de chaleur qui sort de la base et dont l'expression est $+\frac{\partial v}{\partial p}$

$$+\frac{\partial v}{\partial p} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \partial\lambda\, e^{-\lambda^2 t} \cos\lambda p$$ ou on a en général théorème $\frac{1}{2}$

$$2\int_0^\infty \partial z\, e^{-z^2} \cos 2hz = e^{-h^2}\sqrt{\pi}$$ on fera $\lambda^2 t = z^2$; $\lambda\sqrt{t} = z$

donc $\int \partial\lambda\, e^{-\lambda^2 t} \cos\lambda p = \frac{1}{\sqrt{t}} \int \partial z\, e^{-z^2} \cos\frac{pz}{\sqrt{t}}$ et faisant $\frac{p}{\sqrt{t}} = 2h$

ou $\int_0^\infty \partial\lambda\, e^{-\lambda^2 t} \cos\lambda p = \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^\infty \partial z\, e^{-z^2} \cos 2hz = \frac{1}{2\sqrt{t}} e^{-h^2}\sqrt{\pi}$

$= \frac{e^{-\frac{p^2}{4t}}\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}}$ donc $\frac{\partial v}{\partial p} = \frac{e^{-\frac{p^2}{4t}}}{2\sqrt{t}}$ et v étant

nulle pour les points où p est nulle on a

$$v = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{t}} \int_0^p \partial p\, e^{-\frac{p^2}{4t}}$$ on voit par cette expression le mouvement de la

chaleur dans l'intérieur d'une sphère d'un diamètre extrêmement grand dont la surface est entretenue à la température zéro les deux équations

$$v = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{t}} \int_0^p \partial p\, e^{-\frac{p^2}{4t}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial v}{\partial p} = \frac{e^{-\frac{p^2}{4t}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{t}}.$$

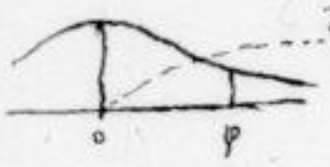
Si les températures qui sont à la distance $\frac{p^2}{4t}$ sont de même valeur si l'on considère au même instant deux points différents p et p' la quantité de chaleur qui traverse le plus éloigné sera comme les facteurs $e^{-\frac{p^2}{4t}}$ $e^{-\frac{p'^2}{4t}}$ mais en supposant $4t = 1$ les facteurs deviennent e^{-p^2} à $e^{-p'^2}$ ainsi le flux est d'autant moindre que la profondeur est plus grande

il est visible qu'en portant successivement de 0 à 60, comptés entre deux branches Donnons de plus en plus de rayon à l'aplat en faisant passer à chaque instant un nouveau chaînon qui n'était pas encore touché à la même température.

Soit $\frac{p^2}{4t} = r^2$, $p = 2r\sqrt{t}$, $dp = 2dr\sqrt{t}$ donc $v = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{t}} \int_0^{2\sqrt{t}} dr\, e^{-r^2}$

ou $v = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{p}{2\sqrt{t}}} dr\, e^{-r^2} = \frac{\int_0^{\frac{p}{2\sqrt{t}}} dr\, e^{-r^2}}{\int_0^{\infty} dr\, e^{-r^2}}$ il faut donner les valeurs de p et t

étant donné calculer la limite $\frac{p}{2\sqrt{t}}$ et prendre le segment de l'aire $\int dr e^{-r^2}$ correspondant à la limite $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.



Si la température initiale est φ on prendra la portion p précédemment comme l'aire égale à la moitié de l'aire totale φ.

On trouvera pour expression de la température relative variable V de cette expression

$\frac{1}{2}V = e^{-\frac{\varepsilon^2}{x^2}\frac{Kt}{c\cdot D}} - e^{-\frac{\varepsilon^2}{x^2}\frac{4Kt}{c\cdot D}} + e^{-\frac{\varepsilon^2}{x^2}\frac{9Kt}{c\cdot D}} -$ de la température initiale

c'est à dire qu'au bout d'un temps t déterminé par la valeur de $\frac{1}{2}V$ la température est à $\frac{1}{10}$ il est facile de voir que la première valeur doit approcher extrêmement de $\frac{1}{10}$ car le second et le quatrième membre de la parenthèse donnent

$e^{-\frac{\varepsilon^2 Kt}{x^2 cD}} = \frac{1}{10}$ ou $\frac{\varepsilon^2 Kt}{x^2 c\cdot D} = \log\text{hyp.}(10)$ Soit R l'unité de surface ou

$2\pi R$ circonférence

$\frac{\varepsilon R}{2}$ grand nombre

$\frac{\varepsilon R}{2} = 10$ millions

$R = \frac{20 \text{ millions}}{\varepsilon}$

$m = \frac{R}{\varepsilon} = \frac{20 \text{ millions}}{\varepsilon^2}$

20000000

$\log(20 \text{ millions}) = 7$

$\log 1080 = 3$

$\log 60 = 1$

$\log 24 = 1,$

$\log 365 = 2,$

$\log \pi = 0,$

masse et $x = m\varepsilon$ ou $\frac{Kt}{m^2 c\cdot D} = \log.10$ si la matière est celle du fer (argile

on prendra $c\cdot D = 1,273$ et $K = \frac{3}{4}$ ainsi $\frac{K}{c\cdot D}$ revient à $\frac{1}{1080}$ précédent

exprimant la fraction q au lieu de $\frac{1}{10}$ nous aurons $\frac{-\varepsilon^2 Kt}{x^2 cD} = \frac{1}{q}$

ou $\frac{\varepsilon^2 Kt}{x^2 c\cdot D} = 1.q$ ou $\frac{tK}{m^2 c\cdot D} = 1.q$ ou $t = 1080 \cdot 1.q \cdot m^2 = 1080 \cdot \left(\frac{20 \text{ millions}}{\varepsilon^2}\right)^2 1.q$

le temps total comptés en minutes si T exprime le nombre d'années on a

$t = 60.24.365.T$ donc $T = \frac{1080}{60.24.365}\left(\frac{20 \text{ millions}}{\varepsilon^2}\right)^2 1.q$ c'est l'expression

donnant qui doit l'on regarde le premier terme de la valeur de $\frac{1}{2}V$ tant la fraction $\frac{1}{q}$. ou $T = \frac{(20 \text{ millions})^2 \cdot 1080}{60.24.365} \cdot \frac{1.q}{\varepsilon^4}$ ou

$T = \frac{(20 \text{ millions})^2 \cdot 1080\ (113)^4}{60.24.365\ (365)^4} 1.q$ on peut prendre pour le coefficient de $\log$ hyp.

de q environ huit milliards deux cent millions d'années c'est le nombre qu'il faut multiplier par le logarithme hyperbolique de q. par exemple si le logarithme hyp. de q est 2 et que l'on prend la fraction q approchée égale à $\frac{1}{7}$ ou $\frac{1}{6}$ le temps T exprimé 16 milliards d'années. on voit ainsi la durée approximativement qu'il faut laisser pour que la partie d'une lame de verre ou de fer de dimension donnée prenne une température donnée.

4

lorsque la fraction $e^{-\frac{\alpha^2}{x^2}\frac{Kt}{C\cdot D}} = q$ est de verme à [illegible] le second terme de l'équation 8 page 5 est entièrement nul.

De sorte que l'état de la tige est exprimé par l'équation

$$\frac{\omega}{2}\frac{v}{x} = q\cdot \sin\left(\omega\frac{x}{x}\right) \quad \text{ou} \quad \frac{v}{2} = \frac{1}{\omega}\cdot q\cdot \frac{\sin\left(\omega\frac{x}{x}\right)}{\omega\cdot\frac{x}{x}}$$

pour un angle tel $x = \frac{1}{6}X$ devenu $\frac{v}{2} = q\cdot \frac{\sin\left(\frac{1}{6}\omega\right)}{\frac{1}{6}\omega} = q\cdot\frac{\sin(30^\circ)}{\frac{1}{6}\omega}$

la ligne qui représente les rapports des températures des différents points de la tige en un même temps est celle dont l'ordonnée égale respectivement $\frac{\sin u}{u}$, u représente $\omega\frac{x}{X}$



l'équation trouvée page 5 $v = \frac{\int_0^{\frac{p}{2\sqrt{t}}} dr\, e^{-r^2}}{\frac{1}{2}\sqrt{\omega}}$ exprimera le mouvement de la chaleur pendant un temps t. ou encore $t = \frac{Kt}{C\cdot D}$ et l'on aura

$$v = \frac{\int_0^{\frac{p}{2\sqrt{\frac{Kt}{C\cdot D}}}} dr\cdot e^{-r^2}}{\frac{1}{2}\sqrt{\omega}}$$

si $\frac{p}{2\sqrt{\frac{Kt}{C\cdot D}}}$ est [illegible] la valeur de v différera

relativement peu de 1 c'est-à-dire que l'on aura à très peu près une différence égale entre p et t une relation qui liera ensemble que les temps voulus pour obtenir de petites différences de température

Surface.

Supposons que la valeur $\frac{p}{2\sqrt{t}}$ soit une valeur très petite on développera e^{-r^2} en $1 - r^2 + \frac{1}{2}r^4 - \dots$ l'intégrale $\int dr\, e^{-r^2}$ sera $r - \frac{1}{3}r^3$ et l'on ne prendra que deux termes si r est une très petite quantité on aura

Dans ce cas $v = \frac{p}{2\sqrt{\frac{Kt}{C\cdot D}}}\cdot\frac{2}{\sqrt{\omega}}$ ou $v = \frac{p\sqrt{C\cdot D}}{\sqrt{\omega}\sqrt{Kt}} = \frac{1}{\sqrt{t}}\frac{p}{\sqrt{\omega}}\sqrt{\frac{K}{C\cdot D}}$

ou $v = \frac{p}{\sqrt{t}\sqrt{\omega}}\sqrt{\frac{C\cdot D}{K}}$ et pour le fer $v = \frac{p}{\sqrt{t}\sqrt{\omega}}\sqrt{1050}$

ou par exemple $v = \frac{p}{\sqrt{t}\sqrt{\omega}}\cdot 33$ [illegible] l'on pourrait employer une équation

il faudrait que $\frac{p}{2\sqrt{t}}$ soit une très petite quantité. par exemple il faudrait que la valeur de v à certaines distances de la surface après un certain nombre de

Désignons T on aura $v = \frac{p}{\sqrt{\omega t}}\cdot\frac{33}{\sqrt{60\cdot 24\cdot 365\cdot\omega}}$

~~après faire~~ ~~quelle~~ ~~fixé~~ ~~la~~ ~~température~~ ~~à~~ ~~la~~ ~~température~~ ~~à~~ ~~température~~

pour une première approximation soit $v = \frac{p}{\sqrt{\omega t}}\sqrt{\frac{30\cdot 30}{60\cdot 24\cdot 365\cdot 3}}$ ou $\frac{p}{\sqrt{\omega t}}\frac{30}{60\cdot 19}$

ou $v = \frac{p}{\sqrt{\omega t}}\frac{1}{38}$ soit dix degrés à la température relative.

$e^{-\frac{R^2 kt}{\lambda^2 c \cdot D}} = a$

$a - a^9 + a^{25} - a^{49} + a$

$a = 1 + q$

$1 - q - \overline{1+q}^4 + \overline{1+q}^9 - \overline{1+q}^{25} +$

$1+q \mid 1-q \quad q(3+7+11$

$1+2q \mid -1+4q \quad \frac{9}{10}$

$1+3q \mid 1-9q \quad \overline{1-q}$

$1-2+4q \mid -1+16q$

$+1-25q$

$-1+36q$

$\sum_{\infty}^{1} 2^{(2i-1)^2} - 2^{(2i)^2}$

$\sum_{\infty}^{1} (1-\frac{1}{m})^{(2i-1)^2} - (1-\frac{1}{m})^{(2i)^2}$

$i =$ 0,99619231
0,99357749
0,00437549

$(1-\frac{1}{m})^{2i} \left(1-\frac{1}{\quad} - 0,00437549\right.$

$(19-10)$

$2(1-2^3) + 2^9(1-2^7) + 2^{25}(1-2^{49}) + 2$

$+ 2^{\overline{i+2}^2}(1- 2^{\overline{i+2}}$

2^i

10 millions

50 millions / (10 millions)^2

$\frac{5}{100000000}$

$\frac{6.365.60.24}{100000000}$

525600

9,31536000

$\frac{3}{10}$ de minute

5.60 $\frac{180}{10}$ "

18"

on aura $v = \frac{p}{\sqrt{T}} \cdot \frac{10}{38}$ si $T = 6400$ années on a $v = \frac{p}{8 \cdot 38} = \frac{p}{304}$ 118.

ainsi à dix mètres au dessous de la surface la température [illegible] $\frac{1}{30}$ de degré si la température primitive était 10 degrés et la chaleur du refroidissement annuel suivant 6400 années la différence du solide étant le fer.

Si la valeur de K était encore moindre la valeur de v serait encore plus grande ainsi dans une telle matière la chaleur employée durant 6400 années le solide ayant 10 degrés de température primitive en traversant à dix mètres au dessous de la surface aura température de $\frac{1}{10}$ de degré

---

si le terrain solide était encore plus grand la température à dix mètres serait $\frac{1}{100}$ de degré.

6400 années passés

pareillement précédents 1 2 3 ... 8 sont trouvés divisés et on [illegible] aussi chaque quotient pour une première recherche à l'extrémité de la 1ère perfectionnement cherchant également l'effet de K pour prolongé de eaux sur la matière solide du globe.

---

* pendant l'unité de temps

la quantité de chaleur que prend la surface du solide est variable elle est en raison inverse de la racine quarrée du temps écoulé *

$$e^{-\frac{D^2}{\lambda^2}\frac{\pi t}{(1)}} = 2$$

$$2 - 2^4 + 2^9 - 2^{16} + 2$$

Sur la température d'une sphère, la surface étant assujettie à une température qui varie périodiquement. — Calcul de la glace fondue dans une saison à la surface de la terre —

l'équation suivante représente le mouvement périodique de la chaleur dans la surface d'une sphère d'un très grand diamètre

$$\frac{v}{g} = e^{-u\sqrt{\frac{\varpi}{K\theta}}} \cos\left(2\varpi\frac{t}{\theta} - u\sqrt{\frac{\varpi}{K\theta}}\right) + \frac{1}{3^2} e^{-u\sqrt{3}\sqrt{\frac{\varpi}{K\theta}}} \cos\left(3\,2\varpi\frac{t}{\theta} - u\sqrt{3}\cdot\sqrt{\frac{\varpi}{K\theta}}\right) + \frac{1}{5^2} e^{-u\sqrt{5}\sqrt{\frac{\varpi}{K\theta}}} \cdot \cos\left(5\,2\varpi\frac{t}{\theta} - u\sqrt{5}\cdot\sqrt{\frac{\varpi}{K\theta}}\right) + \&c$$

en effet en écrivant g au lieu de l'exposant $\sqrt{\frac{\varpi}{K\theta}}$ ou $\sqrt{3}\cdot\sqrt{\frac{\varpi}{K\theta}}$ ou $\sqrt{5}\cdot\sqrt{\frac{\varpi}{K\theta}}$ &c

on a pour $2g^2K$ ..... $\frac{2\varpi}{\theta}$ $\frac{3.2\varpi}{\theta}$ $5.\frac{2\varpi}{\theta}$ ... &c

on aura donc $v = a e^{-gu} \cos(2g^2Kt - gu) + \ldots$ en donnant à g successivement ainsi qu'à la constante a

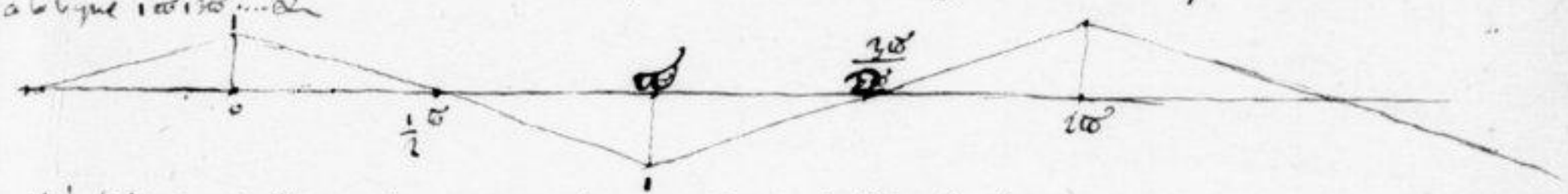
d'un autre côté l'équation $\frac{dv}{dt} = K\frac{d^2v}{du^2}$ qui exprime le mouvement de la chaleur aux environs d'une grande plaque est satisfaite par la valeur de v

de plus en faisant $u = 0$ on a

$$v = \frac{g}{\varpi^2}\left\{\cos 2\varpi\frac{t}{\theta} + \frac{1}{3^2}\cos 3.2\varpi\frac{t}{\theta} + \frac{1}{5^2}\cos 5\,2\varpi\frac{t}{\theta} + \frac{1}{7^2}\cos 7\,2\varpi\frac{t}{\theta}\right\}$$

soit $v = y$ et $2\varpi\frac{t}{\theta} = x$ on a $y = \frac{g}{\varpi^2}\left\{\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \frac{1}{5^2}\cos 5x + \ldots\right\}$ équation qui appartient

à la ligne 1 de 3 ... &c



si l'on fait x ou $2\varpi\frac{t}{\theta} = 2\varpi$ ou $t = \theta$ la valeur de v devient la même que si $t = 0$

soit $gu = \varpi$ ou $u\sqrt{\frac{\varpi}{K\theta}} = \varpi$ ou $\frac{u^2\varpi}{K\theta} = \varpi^2$ ou $u = \sqrt{K\cdot\theta\cdot\varpi}$

$\log \varpi = 0,4971498$

$\log K\theta$ $2,5539044$

$3,0566342$

$1,5283271 = \log(33,754) = \log u$ ainsi à la profondeur d'environ cent pieds le plus grand froid a lieu et que à la surface la plus grande chaleur a lieu

lorsqu'à une certaine profondeur u la quantité $2g^2Kt - gu$ est nulle la plus grande chaleur a lieu en donne en appelant T le temps qui répond à la plus grande chaleur $2g^2KT = gu$ ou $2gKT = u$ ou $T = \frac{u}{2gK} = \frac{u}{2K\sqrt{\frac{\varpi}{K\theta}}}$

ou $T = \frac{1}{2}u\sqrt{\frac{\theta}{K\varpi}}$ ou $\log\sqrt{\frac{\theta}{K\varpi}} = \frac{1}{2}\left(\log\frac{\theta}{K\varpi}\right) = \frac{1}{2}\{\log\theta - \log K - \log\varpi\} = \log\sqrt{\frac{\theta}{K\varpi}}$

$\log K$ $2,8480793$

Soit V la profondeur à laquelle le froid commence lorsque la chaleur commence à la surface on a $V = \sqrt{K\varpi\cdot\theta}$

ou $T = \frac{1}{2}u\sqrt{\frac{\theta}{K\varpi}} = \frac{1}{2}u\theta\sqrt{\frac{1}{K\varpi\theta}} = \frac{1}{2}\theta\cdot\frac{u}{V}$. si par exemple $u = \frac{1}{2}V$ ou $50^{\text{mètres}}$ environ on a

$T = \frac{1}{4}\theta$ ou environ 3 mois.

~~[illegible]~~

Supposons que la surface de 630 lignes quarrées s'avance d'un 30ème de ligne le mercure montera dans le tube de manière à occuper un volume égale à $\frac{630}{30}$ ou 13 lignes cubes c'est à dire qu'il s'élevera de 13 lignes. Supposons maintenant que le piston soit augmenté dans chaque dimension de $\frac{1}{30}$ la surface devra donc augmenter de $\frac{2}{30}$; si dans ce nouvel état le piston s'avançoit encore de $\frac{1}{30}$ de ligne le volume déplacé autera été $630 \cdot \frac{1}{30}$ devoit

$\left(630 + \frac{2.630}{30}\right) \frac{1}{30}$ ou 13 lignes + les $\frac{2}{30}$ de 13 lignes ou $\frac{1}{2}$ ligne environ.
d'un 30ème de ligne

Si le piston variait de $\frac{1}{23}$ de ligne dans l'étendue ~~d'une ligne~~ de mouvement ou devait exposé à la tromper en diminution
de 1 ligne c'est à dire environ $\frac{100}{13}$

. . le pouce du piston peut être d'environ 3 ou 4 lignes il faut que dans cette étendue il soit calibré fort exactement cette condition paroit plus nécessaire que toute autre à la précision de l'instrument.

---

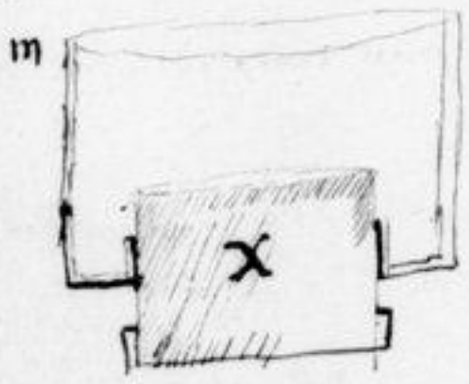
enfin les parties des montans contiguës à celles qui sont plongées éprouvent la chaleur et quelque dilatation mais il me paroit pas qu'elles puissent apporter beaucoup d'incertitudes dans l'emploi de l'instrument puisque dans chaque expérience il y a le même effet ou quelle moins la différence est peu sensible.

il faut encore avoir égard à l'étendue de la colonne de mercure qui s'élève dans le tube car elle augmente de longueur en participant aux variations de la température.

---

il paroit que toute la difficulté de construire cet instrument se réduit à celle ci

Suivante:



un vase de fer m n ~~tenant~~ limé carré et le fond inférieur étant percé pour contenir un piston de fer X peut on construire le tout assez exactement pour que le piston puisse s'enfoncer plus ou moins dans le vase et le mercure ne s'échappe au milieu du fond sans que le mercure s'échappe.

on suppose que l'on presse le piston avec une force insistante aussi grande qu'on voudra

le pouce du piston doit être d'environ 4 lignes il faut que dans cette étendue il soit exactement calibré qu'il n'y ait jamais $\frac{1}{23}$ de ligne de déplacement ou de moins dans le diamètre pas même $\frac{1}{30}$ de ligne ni même $\frac{1}{100}$ ce cela est impossible.

la fonction de t qui exprime à un instant quelconque l'état de la surface est
(en désignant par V ce que devient v lorsqu'on fait u nulle)

$$V = \frac{2}{\varpi}\left\{\cos\frac{2\varpi t}{\theta} + \frac{1}{3^2}\cos 3\left(\frac{2\varpi t}{\theta}\right) + \frac{1}{5^2}\cos 5\left(\frac{2\varpi t}{\theta}\right) + \&\right)$$

$$\text{ou } V = \frac{8}{\varpi^2}\left(\cos\frac{2\varpi t}{\theta} + \frac{1}{3^2}\cos 3\left(\frac{2\varpi t}{\theta}\right) + \frac{1}{5^2}\cos 5\left(\frac{2\varpi t}{\theta}\right) + \ldots\right)$$

$$\frac{\varpi^2 v}{8} = e^{-u\sqrt{\frac{\varpi}{k\theta}}}\cdot\cos\left(\frac{2\varpi t}{\theta} - u\sqrt{\frac{\varpi}{k\theta}}\right) + \frac{1}{3^2}e^{-u\sqrt{\frac{3\varpi}{k\theta}}}\cos\left(3\cdot\frac{2\varpi t}{\theta} - u\sqrt{\frac{3\varpi}{k\theta}}\right) + \&$$

$$e^{-\sqrt{\frac{\varpi}{k\theta}}} = 2$$

$$\frac{\varpi^2 v}{8} = 2^{-\sqrt{3}}\cos\left(\frac{2\varpi t}{\theta} - \sqrt{3}u\right) + \frac{1}{3^2}2^{\sqrt{3}}\cos 3\left(\frac{2\varpi t}{\theta} - \sqrt{3}u\right)$$

$$e^{-\sqrt{\frac{\varpi}{k\theta}}} = 2 \qquad -\sqrt{\frac{\varpi}{k\theta}}\log e = \log 2$$

$$\sqrt{\frac{\varpi}{k\theta}} = 1{,}7781$$

$$\sqrt{\frac{\varpi}{kT}} = \sqrt{\frac{\varpi}{k\cdot\theta}}\frac{1}{\sqrt{365}} = \frac{1{,}7781}{\sqrt{365}}$$

1,7781 | 19
171 | 0,0936
68
57
111

$$\sqrt{\frac{\varpi}{kT}} = 0{,}0936$$

$\log$ de $e = 0{,}4342944$

$- 0{,}0936$

26057664
1302832
39086496

$- 0{,}0406499\,5584$

$0{,}9593500441\,6 = \log 1102$

$2^{-\sqrt{3}}$ $\qquad 2^{\sqrt{3}}$

$\log 2 \qquad \log 2\cdot\sqrt{3}$

$\log 3 = 0{,}47712125$
$0{,}2385606\,2$

1,7321

6,040649\,35
1,7321

4064995
8129990
1219498\,5
284349\,65
40499\,5

$- 0{,}0704097\,7\;8395$
$+ 0{,}0406499\,55$

$- 0{,}0297598\,2 = \sqrt{3}\log 2 - \log 2$

$\log\frac{1}{5} = -0{,}69897000$

69897 | 2975
5950 | 23
10397
9023

$\frac{\sqrt{3}}{u\sqrt{3}}$

$\frac{2}{2^a} = 9$

$u\sqrt{3}\log 2 - u\log 2 = \log 9$

$u(\sqrt{3}\log 2 - \log 2) = \log 9$

$u\sqrt{\frac{\varpi}{k\theta}} = 2\varpi$

$u^2\frac{\varpi^2}{k\theta} = 4\varpi^2$

$u^2 = 4\varpi k\theta$

$u = 2\sqrt{\varpi\cdot k\theta}$

quelle valeur faut il donner à u pour que
que ou $u\sqrt{\frac{\omega}{K\theta}}$ soit égale à $\frac{\omega}{2}$.

ou a $\frac{u^2\omega}{K\theta} = \frac{\omega^2}{4}$ ou $u = \sqrt{K\omega.\theta}$

log ω = 0,4971498

log Kθ = 0,9972116 -1

0,4943614

log 364 2,5622928

3,0566542

3,5248271 = log 33,754

u = 16,877

il faudra ajouter à cette valeur de u environ $\frac{1}{6}$ d'elle
même pour avoir égard à la correction de la valeur de K

16,877
2,813
19,490

log 364 = 2,5622928

1,2811464

19,106 = $\sqrt{364}$

4607,5 Kilog.
767,9
5375,4 kilogrammes
5 mètres

$$v = e^{-u\sqrt{\frac{\varpi}{K\theta}}} \cos\left(\frac{2\varpi t}{\theta} - u\sqrt{\frac{\varpi}{K\theta}}\right)$$



Periodat/.

$$v = \cos\frac{2\varpi t}{\theta}$$

la quantité de chaleur qui pendant la moitié de l'année passe par une surface d'un mètre quarré de la surface du globe dans l'intérieur pourrait fondre ou l'appliquait toute entière 4607,5 Kilogrammes de glace ou une colonne d'un mètre quarré de base sur environ 4 mètres de hauteur

(

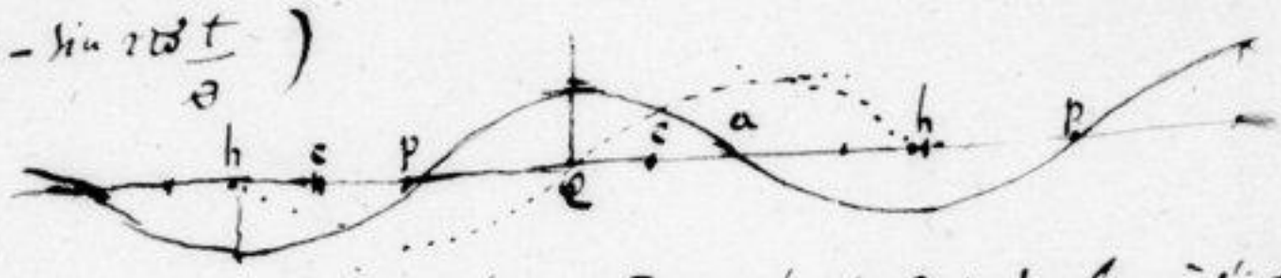
$$v = e^{-gu}\cos\left(2g^2Kt - gu\right)$$

$$\frac{dv}{du} = -g e^{-gu}\cos\left(2g^2Kt - gu\right) + e^{-gu}\cdot g \sin\left(2g^2Kt - gu\right) = g e^{-gu}\left(\sin 2g^2Kt - \cos 2g^2Kt\right)$$

b)

$$\frac{dv}{du} = g e^{-gu}\left(\sin\frac{2\varpi t}{\theta} - \cos\frac{2\varpi t}{\theta}\right)$$

$$-h\frac{dv}{du} = gh e^{-gh}\left(\cos\frac{2\varpi t}{\theta} - \sin\frac{2\varpi t}{\theta}\right)$$



cette expression $-h\frac{dv}{du}dt$ désigne la chaleur qui pendant l'instant dt pénètre de la surface à l'intérieur

cette quantité est positive depuis $t = -\frac{3}{8}\theta$ jusqu'à $t = \frac{1}{8}\theta$ ainsi l'intérieur du globe

commence à se chauffer 1 mois $\frac{1}{2}$ avant l'équinoxe de printemps et finit de se chauffer 1 mois $\frac{1}{2}$ après le solstice d'été.

intégrons depuis $t = -\frac{3}{8}\theta$ jusqu'à $t = \frac{1}{8}\theta$

$$\int -h\frac{dv}{du}dt = \frac{gh\cdot e^{-gh}}{2g^2K}\left(\sin 2g^2Kt + \cos 2g^2Kt + \text{Const}\right)$$ soit $t = -\frac{3}{8}\theta$

le sinus devient $-\sqrt{\frac{1}{2}}$ le cosinus devient $-\sqrt{\frac{1}{2}}$ donc la constante vaut $2\sqrt{\frac{1}{2}}$

soit $t = \frac{1}{8}\theta$ le sinus vaut $\sqrt{\frac{1}{2}}$ le cosinus vaut $\sqrt{\frac{1}{2}}$ on adonc pour la valeur totale de

l'intégrale $\frac{2h}{g\cdot K}\sqrt{\frac{1}{2}}$. mais K vaut ici $\frac{h}{C\cdot D}$ on adonc pour la valeur de l'intégrale

$\frac{C\cdot D}{g}\,2\sqrt{\frac{1}{2}}$ on a $\log\varpi = 0,497149\,8$

$\log K\theta = 2,553504\,4$ (il y a ici une erreur en ce que K doit avoir pour valeur $\frac{K}{C\cdot D}$ et non K)

$\log\left|\frac{\varpi}{K\theta}\right| = 7,937645\,4 - 10 = -2,062354\,6$

$\log\sqrt{\frac{\varpi}{K\theta}} = -1,031773 = \log g$

donc $\log\frac{1}{g} = 1,031773$ donc $\frac{1}{g} = 10,744$

l'excès de la température la plus élevée sur la température moyenne a été prise pour 1 qui représente la température de l'eau bouillante donc le résultat doit être multiplié par 2 fraction qui représente cet excédent au dessus de la chaleur moyenne. Si cet excès était d'un pouplus de 1/8 de degré

on aurait pour la valeur cherchée $4\,C.D\sqrt{\frac{1}{2}}$ le produit $C.D$ vaut environ 1629 ou 4607,3 kilogrammes de glace.

pour la valeur cherchée $\frac{2}{10,744}$ on aurait dans ce cas

on plonge l'instrument 6f dans un vase AB rempli d'un liquide très chaud dont on veut mesurer la température.

le cadre K f g b est supposé très fixe et extrêmement peu dilatable il est plongé lui même jusqu'à la hauteur d comme la barreau de platine. le vase X sur laquelle le barreau s'appuye est de même substance que le cadre.

on adapte le vase K C a b un thermometre t dont la graduation fort du vase le réservoir t peut etre supposé de fer de même que le vase qui contient le mercure.

si maintenant l'instrument est mis en observation et qu'on remarque en même tems la température du thermometre t soit h la hauteur observée dans le grand tube au dessus de 0 (h est un nombre de lignes) soit z la température du thermometre t que l'on doit toujours supposer moindre que celle de l'eau bouillante ou a l'équation

$$13v + 40z = h \quad \text{ou} \quad v = \frac{h - 40z}{13}.$$

supposons qu'on me dit d'abord que l'on trompe de $\frac{1}{100}$ sur la valeur de z ou la trompe d'environ $\frac{1}{33}$ sur la valeur de v c'est à dire de 3 degrés centigrade. une erreur de 1 degré sur la température du mercure dans le vase cause une erreur de 3 degrés sur la température du barreau de platine

---

soit z la température du mercure dans le vase x la température du vase de fer nous avons supposé que $z = x$ mais il peut y avoir quelque différence.

la capacité du vase ~~augmentera de z~~ etant 1 augmentera de $\frac{x}{312}$

le volume de mercure etant 1 augmentera de $\frac{z}{54}$ le mercure en cedant qui le porte dans le tube au dessus de 0 sera donc $\frac{z}{54} - \frac{x}{312}$. le volume initial du mercure est 4.650

appellant g la hauteur de la colonne au dessus du point 0 on aura $g = 4.650\left(\frac{z}{54} - \frac{x}{312}\right)$

si $z = x$ on a à très peu près $g = 40z$ si z est 1 g vaut 40 lignes c'est l'etendue de l'échelle thermometrique la température y que l'on regarderoit comme indiquée par g est donc $\frac{g}{40}$.

on aurait donc $y = 6\frac{1}{2}\left(\frac{z}{54} - \frac{x}{312}\right)$ si $z = x$ on a sensiblement $y = z$.

si x differe de z et que z soit 2 différents. on pourra donc se tromper sur y de $\frac{6\frac{1}{2}z}{312}$ c'est à dire d'environ $\frac{1}{5}$ de z il faudroit donc qu'il y eût entre la température du vase et la température du mercure une différence de 5 degrés pour qu'on se trompât de 1 degré en estimant avec le thermometre la température supposée commune du mercure et du vase, et par conséquent pourque l'on se trompât de 3 degrés en estimant avec l'instrument la température V du barreau de platine.

On a supposé que les montans ag et cf et le cylindre X ne se dilatent point. attribuons aux lignes ag et cf une dilatation comparable à celle de platine par exemple supposons que la dimension 1 devienne en passant de la temp 0 à la température de l'eau bouillante. $1 + \frac{1}{184\,000}$ dilatation deux fois moindre que celle de platine il faudra alors ne compter que $\frac{1}{100}$ de ligne pour la dilatation du barreau on employa un barreau de 46 lignes de long.

ou $v = a e^{-gu} \cos(2g^2 Kt - gu) + \cdots$

donc $\frac{dv}{du} = -ag e^{-gu} \cos(2g^2 Kt - gu) + ag e^{-gu} \sin(2g^2 Kt - gu)$ et pour avoir la valeur de u à la surface on fera $u = 0$ et l'on aura $\frac{dv}{du} = ag(\sin 2g^2 Kt - \cos 2g^2 Kt) = ag\left(\sin 2\pi \frac{t}{\theta} - \cos 2\pi \frac{t}{\theta}\right)$

d'un autre côté on voit par la figure que v augmente depuis $t = \frac{1}{2}\theta$ jusqu'à $t = \theta$ on remarquera que la seconde moitié de cet intervalle qui correspond à l'été et l'autre moitié pendant laquelle la couche extérieure reçoit de chaleur de celle qui est immédiatement au dessus.

on aura $\int \frac{dv}{du} dt$ et il faut prendre cette intégrale depuis $t = \frac{3}{4}\theta$ jusqu'à $t = \theta$. il faut bien remarquer qu'on n'emploiera jamais ici $\frac{dv}{du}$ et pour la valeur de cet intervalle on fera le calcul toute comme celui fait.

$$\int \frac{dv}{du} dt = ag\left(c - \frac{1}{2g^2K} \cos 2g^2 Kt - \frac{1}{2g^2K} \sin 2g^2 Kt\right) = \frac{ag}{2g^2K}\left(c - \cos 2\pi \frac{t}{\theta} - \sin 2\pi \frac{t}{\theta}\right)$$

$0 = \frac{ag}{2g^2K}(c+1)$ on aurait trouvé $c - 1$ au lieu de $c + 1$ si l'on eut employé la seconde valeur de g et alternativement. faisons maintenant $t = \theta$ l'intégrale se réduira à $\frac{ag}{2g^2K}(c+1)$. on a donc tout ce calcul.

$$\int \frac{dv}{du} dt = \frac{ag}{2g^2K}(-1+1) + \frac{ag}{2g^2K}(1+1) + \frac{ag}{2g^2K}(-1+1) + \frac{ag}{2g^2K}(1+1)$$

mais maintenant la quantité de chaleur qui passe de la surface à la couche $-K\frac{dv}{du}$ ..

premièrement l'intégrale depuis $t = 0$ jusqu'à $t = \frac{1}{4}\theta$ car cet intervalle est celui qui répond à l'été.

on a pour déterminer la constante $0 = \frac{ag}{2g^2K}(c+1)$ pour toutes les valeurs de g

faisons maintenant $t = \frac{1}{4}\theta$ les cosinus devenant nuls les sinus sont 1 et -1 alternativement

$$\text{donc } \int \frac{dv}{du} = \frac{ag}{2g^2K}(-1-1) + \frac{ag}{2g^2K}(-1+1) + \frac{ag}{2g^2K}(-1-1) \cdots 2$$

$$\text{et } -K\int \frac{dv}{du} dt = \frac{1}{2g}\left(a_1 + a_3 + a_9 + \cdots\right) = \frac{1}{g}\left\{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{13^2} + \cdots\right\} \text{ ou environ } \frac{1,06}{g}$$

$$10 + \frac{21}{23} + \frac{30}{81} \cdots$$

$\log \varpi = 0,4971498$

$(K\theta = 2,5395044$

$\overline{1},9376454 - 10$

$- 2,0623546$

$- 1,0311773 = \log g$

$\log \frac{1}{g} = 1,0311773 \quad 10,744$

$\frac{1}{g} =$

il paroit que la valeur cherchée diffère peu de 12 on prend ici pour la température qui dans l'été excède la température moyenne. en remplaçant l'unité par $\frac{2}{12}$ on aura environ pour la valeur cherchée 2. il n'est pas difficile de voir que ce nombre doit être multiplié par θ qui vaut environ 1629. il paroit donc que la chaleur qui dans cette saison passe de la surface dans l'intérieur pourroit fondre 3258 kilogrammes de glace, la superficie étant de 1 mètre quarré la hauteur de la glace qui pourroit être fondue seroit donc 3 mètres, 258 au reste ce calcul ne peut être tout à fait exact comme on l'a déjà remarqué il faudroit rectifier par calcul.

Températures d'un solide infini terminé par un plan.

(se rapporte à la température de la terre)

on a trouvé

$$\frac{v\sigma}{2bg} = \int_0^\infty \frac{\partial p\, e^{-p^2 t}}{p^2+g^2}\left| \sqrt{1+gu} - \frac{1}{2}u^2\cdot\sqrt{\frac{1+gu}{3}}\,p^2 + \frac{u^4}{2\cdot3\cdot4}\sqrt{\frac{1+gu}{5}}\,p^4 - \frac{u^6}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}\cdot\sqrt{\frac{1+gu}{7}}\cdot p^6 + \right|$$

pour former $\int \frac{\partial p\, e^{-p^2 t}}{p^2+g^2}$ soit $p^2 t = x^2$, $p\sqrt{t} = x$, $\partial p\sqrt{t} = \partial x$, $p^2 = \frac{x^2}{t}$

on aura $\frac{1}{\sqrt{t}}\int \frac{\partial x\, e^{-x^2}}{\frac{x^2}{t}+g^2}\left\{\sqrt{1+gu} - \frac{u^2}{2}\sqrt{\frac{1+gu}{3}}\,\frac{x^2}{t} + \frac{u^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}\sqrt{\frac{1+gu}{5}}\,\frac{x^4}{t^2} - \text{etc}\right\}$

ou $\frac{1}{\sqrt{t}}\int \frac{\partial x\, e^{-x^2}}{g^2 + \frac{x^2}{t}}\left(\sqrt{1+gu} - \text{etc}\right) = \frac{1}{g^2\sqrt{t}}\int \partial x\, e^{-x^2}\left\{\sqrt{1+gu} - \text{etc}\left(1 - \frac{x^2}{g^2 t} + \frac{x^4}{g^4 t^2} - \text{etc}\right)\right\}$

le produit des deux facteurs exprimés entre ( ) est

$$1+gu - \left\{\frac{u^2}{2}\sqrt{\frac{1+gu}{3}} + \sqrt{1+gu}\,\frac{1}{g^2 t}\right\}x^2 + \left\{\frac{u^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}\sqrt{\frac{1+gu}{5}} + \frac{u^2}{2}\sqrt{\frac{1+gu}{3}}\cdot\frac{1}{g^2 t} + \sqrt{1+gu}\cdot\frac{1}{g^4 t^2}\right\}x^4 -$$

$$- \left\{\frac{u^6}{1\cdot2\cdots6}\sqrt{1+\frac{gu}{7}} + \frac{u^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}\sqrt{\frac{1+gu}{5}}\cdot\frac{1}{g^2 t} + \frac{u^2}{2}\sqrt{\frac{1+gu}{3}}\cdot\frac{1}{g^4 t^2} - \sqrt{1+gu}\cdot\frac{1}{g^6 t^3}\right\}x^6$$

dont la valeur de v est aussi exprimée.

on a $\int_0^\infty \partial x\, e^{-x^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\omega}$

$$\int_0^\infty \partial x\, e^{-x^2}\cdot x^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\omega}$$

$$\int_0^\infty \partial x\, e^{-x^2}\cdot x^4 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\sqrt{\omega}$$

Or

$$v = \frac{2}{\omega}\,6\cdot g\cdot\frac{1}{g^2\sqrt{t}}\,\frac{1}{2}\sqrt{\omega}\left\{\sqrt{1+gu} - \left(\sqrt{1+gu}\cdot\frac{1}{g^2 t} + \frac{u^2}{2}\sqrt{\frac{1+gu}{3}}\right)\frac{1}{2} + \left(\sqrt{1+gu}\cdot\frac{1}{g^4 t^2} + \frac{u^2}{2}\cdot\sqrt{\frac{1+gu}{3}}\cdot\frac{1}{g^2 t} + \frac{u^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}\sqrt{\frac{1+gu}{5}}\right)\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\right.$$

$$\left. - \left(\sqrt{1+gu}\cdot\frac{1}{g^6 t^3} + \frac{u^2}{2}\sqrt{\frac{1+gu}{3}}\cdot\frac{1}{g^4 t^2} + \frac{u^4}{2\cdot3\cdot4}\sqrt{\frac{1+gu}{5}}\cdot\frac{1}{g^2 t} + \frac{u^6}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}\sqrt{\frac{1+gu}{7}}\right)\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2} + \text{etc}\right\}$$

il faut mettre pour t sa valeur $\frac{K\theta}{c\cdot D}$

et pour g sa valeur $\frac{H}{K}$

le terme tout connu est

$$\sqrt{1+gu} - \frac{u^2}{2}\sqrt{\frac{1+gu}{3}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{u^4}{2\cdot3\cdot4}\sqrt{\frac{1+gu}{5}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{u^6}{2\cdot3\cdots6}\sqrt{\frac{1+gu}{7}} + \text{etc}$$

il convient d'en donner raison rapport à t

le coefficient de $\frac{1}{g^2 t}$ est $-\frac{1}{2}\sqrt{1+gu} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{u^2}{2}\sqrt{\frac{1+gu}{3}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{u^4}{2\cdot3\cdot4}\sqrt{\frac{1+gu}{5}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{u^6}{2\cdot3\cdots6}\sqrt{\frac{1+gu}{7}}$ etc

le coefficient de $\frac{1}{g^4 t^2}$ est $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\sqrt{1+gu} - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{u^2}{2}\sqrt{\frac{1+gu}{3}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{u^4}{2\cdot3\cdot4}\sqrt{\frac{1+gu}{5}}$ etc

le coefficient de $\frac{1}{g^6 t^3}$ est $-\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\sqrt{1+gu} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{u^2}{2}\sqrt{\frac{1+gu}{3}}$ etc

ou $v = a e^{-gu} \cos(2y^2 \pi t - gu) + \dots$

donc $dv = -a\pi e^{-gu} \dots \quad -au$

Soient $c_0\ c_1\ c_2\ c_3 \dots$ les coefficients de $\frac{1}{\sqrt{1+5u}}\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{5}+u\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{5}+u\right)^{\frac{3}{2}}$
ces coefficients sont des fonctions dont chacune est developpée en série
ordonnée par $u_0\ u_1\ u_2\ u_3 \dots$ les fonctions $\sqrt{1+5u}$, $\frac{u}{1}\sqrt{1+\frac{5}{3}u}$
$\frac{u^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}\sqrt{1+\frac{5}{5}u}$. $\frac{u^6}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}\sqrt{1+\frac{5}{7}u}$ &c u_0 u_1

ou a $c_0 = u_0 - \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}u_2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}u_3 + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}u_4 - \&c$

$c_1 = \frac{1}{2}u_0 - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}u_2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}u_2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}u_3 + \cdot$

$c_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}u_0 - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}u_1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}u_2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}u_3 + \&c$

$c_3 = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}u_0 - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}u_1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{9}{2}u_2 - \&c$

le terme dans lequel c_0 a l'indice j contient au premier terme les j premiers
facteurs du produit $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{9}{2}\cdot\frac{11}{2}\dots$ Le dernier terme a le reste
un facteur de plus au dernier terme un facteur de plus avec u_0 de suite. le terme d'indice
i dans la fonction c_j a $j+i$ facteurs c'est-à-dire celui qui contient u_i
le terme d'indice $i+1$ dans c_j a $j+i+1$ facteurs et contient
u_{i+1} ou u_i contient au dénominateur les facteurs $1\ 2\ 3 \dots 2i$
ainsi le terme d'indice i dans c_j est au signe près

$$\frac{u^{2i}}{1\cdot2\cdot3\cdots2i}\cdot\sqrt{1+gu}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdots\frac{2(j+i)-1}{2}$$

Donc le terme d'indice $i+1$ dans c_j est égal à celui que l'on vient d'écrire
multiplié par $\frac{1}{2i+1}\cdot\frac{1}{2i+2}\cdot\frac{2(j+i)+1}{1}$ et $\frac{\sqrt{1+gu}}{\sqrt{1+\frac{g}{2i+2}u}}\cdot u^2$

Si l'on considère maintenant que le coefficient c_j multiplié par $\left(\frac{h}{2}\right)^j$
devient pour $h=0$ la fonction c_j il faut supposer pour être conséquent
il faut donc que d'examiner si la fonction pour laquelle
sont multipliés $c_j\ k_i$ pour le terme $c_j\ u_{i+1}$ devient pour $h=0$
avec de même l'unité lorsque entier j augmente à l'infini
Or le rapport de la fraction $\frac{1+gu}{2i+2}$ et $\frac{1+gu}{2i+1}$ est 1 multiplié par
le quotient $\frac{2j+i+1}{2(2i+1)(2i+2)}$ il devient lorsque i augmente à l'infini
la limite $\frac{i}{8i^2}$ ou $\frac{1}{8i}$ il faut donc de même qu'en lorsque i l'infini augmente
i il faut de même que toute fonction c_j finit par être convergente et elle conclut dans
même avoir égard au changement attendu des signes

ou a maintenant $v = \frac{b}{g\sqrt{\omega}\sqrt{t}} \left(c_0 - c_1 \frac{1}{g^2 t} + c_2 \frac{1}{g^4 t^2} - c_3 \frac{9}{g^6 t^3} + c_4 \frac{1}{g^8 t^4} - \right.$

ou $c_j = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{2j-1}{2} u_0 - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{2j+1}{2} u_1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{2j+3}{2} u_2 -$

$c_{j+1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{2j-1}{2}\frac{2j+1}{2} u_0 - \frac{1}{2}\cdots\frac{2j+1}{2}\frac{2j+3}{2} u_1 + \frac{1}{2}\cdots\frac{2j+3}{2}\frac{2j+5}{2} u_2$

la dernière valeur de c_{j+1} a c_j est celle de j à 1 et naturellement soient la série devient divergente c'est à dire que dans l'expression précédente de la valeur de v on peut bien prendre à l'indice j une si grande valeur que la série commence à être divergente et ne cesse de l'être ; ce la n'empêche pas qu'avec petite on puisse employer ces séries pour calculer toutes les racines avec si grand nombre de chiffres exacts que l'on veut.

la valeur générale de v est

$$\frac{\omega v}{2} = \int_0^\infty \frac{dp\, e^{-p^2 \frac{Kt}{c\cdot v}}}{p^2 + \frac{H^2}{K^2}} \left(\frac{H}{K} \sin p\omega + p\omega \cos p\omega \right) \int_0^\infty d\lambda \sin p\lambda \left(\frac{H}{K} f\lambda - \frac{d}{d\lambda} f\lambda \right)$$

il s'agit de mettre cette valeur de v sous une forme telle que l'on puisse facilement la calculer quand on donnera à $f\lambda$ une forme quelconque.

pour cela on peut considérer $f\lambda$ comme formé de plusieurs parties faisant de fonctions savoir $f_1\lambda + f_2\lambda + f_3\lambda + \ldots$ chacune de ces parties n'ayant de valeurs substituées qu'entre deux limites données et hors de ces limites la fonction est nulle ainsi $f_1\lambda$ a toutes les valeurs substituées comprises dans l'intervalle de $\lambda = 0$ à $\lambda = 1$ la seconde partie $f_2\lambda$ a des valeurs substituées entre λ tel que λ est compris entre 1 et 2 et toutes ces valeurs sont nulles avec λ. cette limite de décomposition de la fonction $f\lambda$ proposée $F\lambda$ est indiquée par la nature même de la fonction par ce qu'il est évident que chaque partie possédant à l'origine lorsque $\lambda = 0$ un coefficient d'autant moindre que le rang de la fonction est plus élevé.

pour en exemple cette forme de calcul choisissons le cas où la fonction proposée prend une valeur constante b depuis $\lambda = m$ jusqu'à $\lambda = m+1$ toutes les autres valeurs de la fonction étant nulles et cherchons la valeur de v à la superficie en sorte

$$\frac{\omega v}{2} = \int_0^\infty \frac{dp\, e^{-p^2 \frac{Kt}{c\cdot v}}}{p^2 + \frac{H^2}{K^2}} \left(\int_h^k \ldots + b \int_m^{m+1} d\lambda \cdot \sin p\lambda \text{ ou a } \int d\lambda \sin p\lambda = \epsilon - \frac{1}{p}\omega \cos ph \right.$$

$0 = \epsilon - \frac{1}{p}\omega \cos pm$ et $\int_m^{m+1} d\lambda \sin p\lambda = \frac{1}{p}\omega \cos pm - \frac{1}{p}\omega \cos pn$ ou n est le nombre qui doit

multiplier la différentielle et ici $p \cdot \frac{\omega \cos pm - \omega \cos pn}{p}$ ou $\omega \cos pm - \omega \cos(pm + p)$

il faut maintenant prendre l'intégrale $\int_0^\infty \frac{dp\, e^{-p^2 \frac{Kt}{c\cdot v}}}{p^2 + \frac{H^2}{K^2}} (\omega \cos pm)$

et l'intégrale $\int_0^\infty dp\, e^{-p^2 \frac{Kt}{c\cdot v}} \omega \cos pm$ et le signe $\frac{K}{c\cdot v}$ par p et $\frac{H}{K}$ par g. on aura $\varphi t = \int_0^\infty dp\, e^{-p^2 Kt} \omega \cos pm$ on différentiera plusieurs fois par

par rapport à t et l'on aura $\varphi' t = -k \int_0^\infty dp\, e^{-p^2 kt} \cos pm \cdot p^2$ $\varphi'' t = +k^2 \int_0^\infty dp\, e^{-p^2 kt} p^4 \cos pm$

$\varphi''' t = -k^3 \int_0^\infty dp\, e^{-p^2 kt} p^6 \cos pm$ ainsi de suite

donc $\varphi t + \varphi' t + \varphi'' t + \alpha = \int_0^\infty dp\, e^{-p^2 kt} \cos pm \left(1 - p^2 + p^4 - p^6 + \alpha\right)$

$= \dfrac{\int_0^\infty dp\, e^{-p^2 kt} \cos pm}{1 + p^2}$ le dénominateur est $p^2 + \frac{H^2}{K^2}$ ou $p^2 + s^2$ ou

$\frac{1}{K^2}$ ou $s^2 \left(1 + \frac{p^2}{s^2}\right)$ on a ainsi

$\varphi t + \frac{1}{s^2} \varphi' t + \frac{1}{s^4} \varphi'' t + \frac{1}{s^6} \varphi''' t + \alpha = \int_0^\infty dp\, e^{-p^2 kt} \cos pm \left(1 - \frac{p^2}{s^2} + \frac{p^4}{s^4} - \frac{p^6}{s^6} + \alpha\right)$

$= \dfrac{\int_0^\infty dp\, e^{-p^2 kt} \cos pm}{1 + \frac{p^2}{s^2}}$ il vaut donc φt ou $\int_0^\infty dp\, e^{-p^2 kt} \cos pm$

ou on a remplacé $\sqrt{x} \cdot \int_0^\infty dp\, e^{-q^2 x} \cos(mq) = \frac{1}{2} e^{-\frac{m^2}{4x}} \cdot \sqrt{\varpi}$. il faut donc faire $x = kt$

donc $\int_0^\infty dp\, e^{-p^2 kt} \cos pm = \dfrac{e^{-\frac{m^2}{4kt}}}{2\sqrt{kt}} \sqrt{\varpi} = \varphi t$ donc ϖ représente la valeur cherchée de v qui devient nulle lorsque $t = 0$.

$\frac{\varpi}{2} = \dfrac{e^{-\frac{m^2}{4kt}}}{2\sqrt{kt}} \sqrt{\varpi} + \frac{1}{s^2} \left(\dfrac{e^{-\frac{m^2}{4kt}}}{2\sqrt{kt}}\right)' \sqrt{\varpi} + \frac{1}{s^4} \left(\dfrac{e^{-\frac{m^2}{4kt}}}{2\sqrt{kt}}\right)'' \sqrt{\varpi} + \ldots$

ou $\varpi \sqrt{\varpi} = \dfrac{e^{-\frac{m^2 \cdot c \cdot v}{4kt}}}{\sqrt{\frac{kt}{c \cdot v}}} + \frac{K^2}{H^2} \left(\dfrac{e^{-\frac{m^2 \cdot c \cdot v}{4kt}}}{\sqrt{\frac{kt}{c \cdot v}}}\right)' + \frac{K^4}{H^4} \left(\dfrac{e^{-\frac{m^2 \cdot c \cdot v}{4kt}}}{\sqrt{\frac{kt}{c \cdot v}}}\right)'' + \ldots$

il faut ensuite écrire pz au lieu de m ou mt au lieu de m et raisonner

de même que précédemment.

Il faut donc chercher à déterminer l'état d'un sol initial semblable à une température constante 6 depuis $z = m$ jusqu'à $z = \frac{1}{0}$

en ayant seulement la première partie qui vient d'être écrite. Il faut donc que toutes les autres parties qui viennent à l'exponentielle évanouissent lorsque t ayant une valeur déterminée ne tient sans limite.

Pour faire le calcul avec ordre il faut $\frac{m^2 \cdot c \cdot v}{4kt} = \frac{1}{z^2}$ donc $\frac{kt}{c \cdot v} = \frac{m^2 z^2}{4}$ la

fonction est $\dfrac{e^{-\frac{1}{z^2}}}{\frac{m}{2} \sqrt{z^2}}$ donc $\varphi t = \frac{2}{m} \dfrac{e^{-\frac{1}{z^2}}}{\sqrt{z^2}}$ il faut donc prendre le quotient

de $\dfrac{e^{-\frac{1}{z^2}}}{\sqrt{z^2}}$ et multiplier chacun de ses éléments par $\frac{2}{m}$

ou $\varphi t = \frac{2}{m} \psi z$ donc $\frac{\partial}{\partial t} \varphi t = \frac{2}{m} \cdot \frac{\partial (\psi z)}{\partial t} = \frac{2}{m} \psi' z \cdot \frac{\partial z}{\partial t}$

et $\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{4}{m^2} \frac{K}{c \cdot v}$ donc $\frac{\partial}{\partial t} \varphi t = \frac{2}{m} \psi' z \cdot \frac{4}{m^2} \cdot \frac{K}{c \cdot v} = \frac{2}{m} \frac{K}{c \cdot v} \psi' z$

ou $\frac{K \partial t}{c \cdot v} = \frac{m^2 \partial z}{4}$

on a ensuite $\frac{\partial^2 \varphi t}{\partial t^2} = \frac{2K}{mc \cdot v} \psi'' z \cdot \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{2}{m} \frac{K}{c \cdot v} \frac{4}{m^2} \frac{K}{c \cdot v} \psi'' z = \frac{2}{m} \left(\frac{K}{c \cdot v}\right)^2 \psi'' z$

en outre $\frac{\partial^3}{\partial t^3}(qt) = \frac{2}{m}\left(\frac{K}{C\cdot D}\right)^2 \psi'''_x \cdot \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{2}{m}\left(\frac{K}{C\cdot D}\right)^2 \frac{4}{m^2}\frac{K}{C\cdot D}\psi'''_x = 17$

$\frac{2}{m}\left(\frac{K}{C\cdot D}\right)^3 \psi'''_x$ il suffit donc de savoir une fois pour toutes la dérivée de $\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{\sqrt{x}}$

$\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{\sqrt{x}}$ ou $\left(e^{-x^{-1}}x^{-\frac{1}{2}}\right)' = e^{-x^{-1}}x^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{a_1}{x^2}+\frac{b_1}{x}\right)$

$\frac{1}{x^2}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{\sqrt{x}}$ $e^{-\frac{1}{x}}x^{-\frac{3}{2}}$ $e^{-\frac{1}{x}}x^{-\frac{1}{2}}$

$\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}\right)$ $\left(\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{\sqrt{x}}\right)'' = \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{\sqrt{x}}\left(\frac{a_2}{x^4}+\frac{b_2}{x^3}+\frac{c_2}{x^2}\right) = \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{\sqrt{x}}\left\{\left(-\frac{a}{x^2}-\frac{2b}{x^3}\right)+\left(\frac{a_1}{x^2}+\frac{b_1}{x^2}\right)^2\right\}$

$\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2}x^{-2}-2x^{-3}\right)$ $\left(\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{\sqrt{x}}\right)''' = \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{\sqrt{x}}\left(\frac{a_3}{x^6}+\frac{b_3}{x^5}+\frac{c_3}{x^4}+\frac{d_3}{x^3}\right) = \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{\sqrt{x}}\left(\frac{a_2}{x^3}-\frac{3b_2}{x^4}-\frac{4c_2}{x^5}+\frac{a_1^2}{x^4}+\frac{b_1}{x^3}+\frac{c_1}{x^4}+\frac{a_1b_1}{x^5}\right)$

$\frac{1}{2}x^{-2}$ $\left(-\frac{3}{2}x^{-5}+6x^{-4}\right)$ $\left(\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{\sqrt{x}}\right)^{IV} = \left(-\frac{3a_3}{x^4}-\frac{4b_3}{x^5}-\frac{5c_3}{x^6}-\frac{6d_3}{x^7}+\left\{\frac{a_2}{x^3}+\frac{b_2}{x^4}+\frac{c_2}{x^5}+\frac{d_2}{x^6}\right\}\left(\frac{a_1}{x^2}+\frac{b_1}{x^2}\right)\right)\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{\sqrt{x}}$

$+\left\{\frac{1}{2}x^{-2}\right\}\frac{1}{x}$

$\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{\sqrt{x}}$

$= \left(\frac{a_1a_3}{x^4}-\frac{3a_2}{x^4}+\frac{a_2b_2}{x^5}\right)$

$-\left\{\frac{a_3}{x^4}\right\}+\frac{a_3b_1}{x^5}$

$= \left(\frac{a_1-3}{x^4}\frac{a_3}{x^4}+\frac{a_1-4}{x^5}\frac{b_3+b_1a_3}{x^5}+\frac{a_1-5c_3+b_1b_3}{x^6}+\frac{a_1-6d_3+b_1c_3}{x^7}+\frac{b_1d_3}{x^8}\right)\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{\sqrt{x}}$

$\left(\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{\sqrt{x}}\right)' = \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{1}{x}} + x^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{x}}x^{-2}$

$= e^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{x^{\frac{5}{2}}}\right)$

$\left(\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{\sqrt{x}}\right)'' = e^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{2x^2}-\frac{2}{x^3}\right)$

$+\left(-\frac{1}{2x}+\frac{1}{x^2}\right)\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{\sqrt{x}}\left(-\frac{1}{2x}+1\right)$

$+\left(-\frac{1}{2x}+\frac{1}{x^2}\right)\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{\sqrt{x}}\left(-\frac{1}{2x}+\frac{1}{x^2}\right)$

$= \left(\frac{3}{4}\frac{1}{x^3}-\frac{3}{x^4}+\frac{1}{x^4}\right)\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{\sqrt{x}}$

$\frac{3}{4}\frac{1}{x^2}$ $-\frac{5}{2}\left|\frac{1}{x^3}\right.$ $+\frac{1}{x^4}$

$-\frac{1}{2}\left|\right.$

$\frac{3}{4}\frac{1}{x^2}$ $-3\frac{1}{x^3}$ $+\frac{1}{x^4}$

$-\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{2}\frac{1}{x^4}+3\cdot\frac{7}{2}$ $\left|\frac{1}{x^4}\right.$ $-1\cdot\frac{9}{2}\left|\frac{1}{x^5}\right.$ $+\frac{1}{x^6}$

$+\frac{3}{4}$ $\left|-3\right.$

$\left(\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{\sqrt{x}}\right)^{IV} = \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{\sqrt{x}}\left(\frac{a_4}{x^8}+\frac{b_4}{x^7}+\frac{c_4}{x^6}+\frac{d_4}{x^5}\right)$

$-\frac{15}{8}\frac{1}{x^8}+\frac{46}{4}\frac{1}{x^9}-\frac{15}{2}\frac{1}{x^{10}}+\frac{1}{x^{11}}$

Il faut

pour passer des dérivées qui commencent à une fraction ayant pour terme en x celui qui commence à une fraction ayant pour terme en x celui qui commence à la fraction suivante il faut dans chaque terme de la première fraction multiplier le coefficient par a_1 dérivé de l'exposant de x (qui est plus un) et ajouter le coefficient du terme précédent multiplié par b_1 si dans ce même terme on augmente d'une unité l'exposant on aura le terme cherché. on aura $\left(\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{\sqrt{x}}\right)' = -\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{\sqrt{x}}$

$\frac{a_1}{x^2}$ $\frac{b_1}{x}$

$= e^{-\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{2x}+\frac{1}{x^2}\right)$ donc en outre on a le terme d'une fonction pour trouver chaque terme de la fonction suivante il faut 1° multiplier chaque terme par l'exposant de x divisé par x multiplier le coefficient par a_1 par l'exposant de x divisé par x diminué de 1 et ajouter le produit du terme précédent par $\frac{b_1}{2}$ a_1 est $-\frac{1}{2}$ divisé par x^2 2° ajouter le produit du terme précédent par b_1 et b_1 est 1 ainsi il faut multiplier chaque exposant de x moins $\frac{1}{2}$ et diviser par x 3° ajouter le terme précédent divisé par x^2.

Cette règle s'étend à la dérivée de tous les ordres d'où il résulte que pour avoir la dérivée $n^{ième}$ de φt il faut multiplier en outre par $\frac{2}{m}$ et par la puissance $n^{ième}$ de $\frac{K}{C\cdot D}$ on aura la fonction dérivée de φt multipliant en outre par la même quantité et par la puissance $n^{ième}$ de $\frac{K}{H^2}$ on aura la valeur de la première partie de μ. Si on veut en outre la valeur de $v\sqrt{w}$ en n et que l'on retranche ou ajoutera la valeur de v (ce qui est très facile) que la vitesse initiale trouvé pour n différera de celle qui lui est à un peu ce que b la valeur pour $\frac{2}{m}$ environ d'abord $\frac{2}{m}$ de sorte que désignant par δ la valeur de la différence sera $\frac{2}{m}\delta$ ou $\frac{2}{m}\delta$ de sorte que le mouvement sera équivalent

$\frac{6}{m(m+1)}$ reste à voir comment l'effet résultant diminue lentement à mesure que m augmente.

---

peut on pourra se rendre compte de l'effet produit par une portion de l'effet initial placée à une très grande profondeur car si cette profondeur est prise m on désignera par ε_1 la moindre valeur de la fonction prise au delà de m et par ε_2 la plus grande. on aura deux limites entre lesquelles l'effet demi placé.
c'est donc encore mieux une approximation plus étendue à la recherche précédente.

on trouve désignant par v la température en un point de la surface lorsque l'effet initial est $\frac{K}{r^2}$

$$v\sqrt{\varpi} = \frac{e}{m\sqrt{r}}^{-\frac{1}{2}} + \frac{K^2}{H^2}\cdot\frac{2}{m} + \frac{K}{C\cdot D}\frac{e}{\sqrt{r}}\left(\frac{a_1}{r} + \frac{b_1}{r^2}\right) + \left(\frac{K}{H^2}\right)^2 \frac{2}{m}\left(\frac{K}{C\cdot D}\right)^2 \frac{e}{\sqrt{r}}^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{a_2}{r^2} + \frac{b_2}{r^3} + \frac{c_2}{r^4}\right) + \Omega$$

$$= \frac{e}{\sqrt{r}}^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{2}{m}\left(1 + \frac{K}{g^2}\left(\frac{a_1}{r} + \frac{b_1}{r^2}\right) + \left(\frac{K}{g^2}\right)^2\left(\frac{a_2}{r^2} + \frac{b_1}{r^3} + \frac{c_1}{r^4}\right) + \Omega\right)$$

$$= \frac{2}{m}\frac{e}{\sqrt{r}}^{-\frac{1}{2}}\left(1 + a_1\frac{K}{g^2}\frac{1}{r} + \left(b_1\left(\frac{K}{g^2}\right) + a_2\left(\frac{K}{g^2}\right)^2\right)\frac{1}{r^2} + \left(b_2\left(\frac{K}{g^2}\right)^2 + a_3\left(\frac{K}{g^2}\right)^3\right)\frac{1}{r^3}\right.$$
$$\left. + \left(c_2\left(\frac{K}{g^2}\right)^2 + b_3\left(\frac{K}{g^2}\right)^3 + a_4\left(\frac{K}{g^2}\right)^4\right)\frac{1}{r^4} + \text{&c.}\right)$$

il ne reste plus qu'à mettre pour x sa valeur $\frac{4Kt}{m^2}$ et pour r $\frac{2\sqrt{Kt}}{m\sqrt{C\cdot D}}$

$$\text{ou encore } v\sqrt{\varpi} = \frac{e}{\sqrt{t}}^{-\frac{m^2 C\cdot D}{4Kt}}\cdot\frac{\sqrt{C\cdot D}}{\sqrt{K}}\left(1 + a_1\frac{K:K^2}{C\cdot D\ H^2}\frac{m^2}{4Kt}C\cdot D + 2\right)$$

$$= e^{-\frac{m^2 C\cdot D}{4Kt}}\frac{\sqrt{C\cdot D}}{K}\left(1 + \text{&c.}\cdot\frac{K^2}{2H^2}\frac{m^2}{4t}\right)$$

---

nous représenterons ce calcul afin de le vérifier on a trouvé en premier lieu la formule $\frac{\varpi v}{2} = b\int_0^\infty \frac{dp\, e^{-p^2\frac{Kt}{C\cdot D}}}{p^2 + \frac{H^2}{K^2}}\cdot p\int_m^n d\lambda \sin p\lambda$. l'intégrale $\int d\lambda \sin p\lambda$ pour λ est $\frac{1}{p}\cos pm - \frac{1}{p}\cos p\lambda$ puisqu'en différentiant on trouve $d\lambda \sin p\lambda$ et qu'en faisant $\lambda = m$ l'intégrale est nulle il faut donc 1° écrire à la place de l'intégrale $\frac{1}{p}\cos pm$ 2° écrire $\frac{1}{p}\cos p\lambda$ et retrancher le second résultat du premier tout le résultat donne à la somme l'intégrale $\int dp\, e^{-p^2\frac{Kt}{C\cdot D}}\cos pm$. on

$$\frac{\varpi v}{2b} = \frac{\int dp\, e^{-p^2\frac{Kt}{C\cdot D}}\cos pm}{\frac{H^2}{K^2}\left(1 + p^2\frac{K^2}{H^2}\right)} \qquad \cos pm = \frac{K^2}{H^2}\frac{\int dp\, e^{-p^2\frac{Kt}{C\cdot D}}\cos pm}{1 + p^2\frac{K^2}{H^2}} = \frac{K^2}{H^2}\int dp\, e^{-p^2\frac{Kt}{C\cdot D}}\cos pm\left(1 - p^2\frac{K^2}{H^2} + p^4\left(\frac{K^2}{H^2}\right)^2 - \text{&c.}\right)$$

Soit Ft la valeur de $\int_0^\infty dp\, e^{-p^2\frac{Kt}{C\cdot D}}\cos pm$ on aura $F't = -\frac{K}{C\cdot D}\int dp\, p^2 e^{-p^2\frac{Kt}{C\cdot D}}\cos pm = -\frac{K}{C\cdot D}Ft$

$$\int dp\, e^{-p^2\frac{Kt}{C\cdot D}} p^2\cos pm = -\frac{C\cdot D}{K}F't$$

$$Ft = e^{-\frac{m^2 C\cdot D}{4Kt}}\frac{\sqrt{\varpi}}{2\sqrt{K}}$$

$$F''t = \left(\frac{K}{C\cdot D}\right)^2\int dp\, p^4 e^{-p^2\frac{Kt}{C\cdot D}}\cdot\cos pm$$

$$F'''t = -\left(\frac{K}{C\cdot D}\right)^3\int dp\, p^6 e^{-p^2\frac{Kt}{C\cdot D}}\cos pm$$

$\frac{6m^2}{60\cdot 24\cdot 365\cdot T}$

$6\cdot\text{0}\ \frac{m^2}{\text{0}\ 1200\ \lambda}$

$\frac{6\cdot 2}{3}$

3250

1083

30

$\frac{1000000\cdot 1083}{2000000\cdot T}\ e^{-\frac{1}{\delta}}$

$e^{-3}\ 30\ 1-\frac{1}{\delta}$

$\frac{1083000000}{7000}\ \frac{1}{2000}$

7000

Donc $v = \frac{2b}{\varpi}\cdot\frac{K^2}{H^2}\left(Ft + \frac{K^2}{H^2}\left(\frac{K}{C\cdot D}\right)^{-1}F't + \left(\frac{K^2}{H^2}\right)^2\left(\frac{K}{C\cdot D}\right)^{-2}F''t + \left(\frac{K^2}{H^2}\right)^3\left(\frac{K}{C\cdot D}\right)^{-3}F'''t + \cdots\right)$ (29)

pb revient à former Ft ou $\int_0^\infty dp\, e^{-p^2\frac{Kt}{C\cdot D}}\cos pm$ correspondant à l'équation générale

$\int_0^\infty dq\, e^{-q^2}\cos(2qr) = e^{-r^2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\varpi}$. Soit $p^2\frac{Kt}{C\cdot D} = q^2$, $p\sqrt{\frac{Kt}{C\cdot D}} = q$, $dp\cdot\sqrt{\frac{Kt}{C\cdot D}} = dq$

$\int dq\, e^{-q^2}\sin(2qr) = fr$ $\quad 2qr = pm = 2r\cdot p\cdot\sqrt{\frac{Kt}{C\cdot D}}$ d'où $m = 2r\cdot\sqrt{\frac{Kt}{C\cdot D}}$ et $r = \frac{m}{2}\sqrt{\frac{C\cdot D}{Kt}}$, $r^2 = \frac{m^2 C\cdot D}{4Kt}$

$\int dq\, e^{-q^2}\cos(2qr) = fr'$ $\quad \sqrt{\frac{Kt}{C\cdot D}}\int dp\, e^{-p^2\frac{Kt}{C\cdot D}}\cos pm = \sqrt{\frac{C\cdot D}{Kt}}\int dq\, e^{-q^2}\cos(2qr) = \sqrt{\frac{C\cdot D}{Kt}}\, e^{-\frac{m^2 C\cdot D}{4Kt}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\varpi}$

$= e^{-r^2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\varpi}$

Donc $Ft = \sqrt{\frac{C\cdot D}{Kt}}\, e^{-\frac{m^2 C\cdot D}{4Kt}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\varpi}$

$F't = \frac{m^2 C\cdot D}{4K}\frac{1}{t^2}Ft - \frac{1}{2t}Ft = Ft\left(\frac{m^2 C\cdot D}{4Kt^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t}\right)$

$fr = \frac{1}{2}\sqrt{\varpi}\int_0^r dr\, e^{-r^2}$

Donc $v = \frac{2b}{\varpi}\cdot\frac{K^2}{H^2}Ft\left(1 + \frac{K^2}{H^2}\left\{\frac{K}{C\cdot D}\right\}^{-1}\left(\frac{m^2 C\cdot D}{4Kt} - \frac{1}{2t}1\right)\right)$ + on les termes suivants contiennent les puissances de t sauf $\frac{1}{t^2}$ $\frac{1}{t^3}$ donc Donc $v = \frac{2b}{\varpi}\cdot\frac{K^2}{H^2}Ft\left(1 - \frac{1}{2t}\cdot\frac{K^3}{H^2 C\cdot D}\right)\sqrt{\varpi}$

ou $v = \frac{2b}{\varpi}\cdot\frac{K^2}{H^2}\frac{\sqrt{C\cdot D}}{\sqrt{K}\sqrt{t}}\, e^{-\frac{m^2 C\cdot D}{4Kt}}\frac{1}{2}\sqrt{\varpi}\left(1 - \frac{1}{2t}\frac{K^2}{H^2}\cdot\frac{K}{C\cdot D}\right)$

il faut écrire $\left(\frac{K}{C\cdot D}\right)^{-1}$ au lieu de $\frac{K}{C\cdot D}$

ou $v = 6\frac{K}{H}\cdot\frac{\sqrt{K\cdot C\cdot D}}{H\sqrt{\varpi}\sqrt{t}}\, e^{-\frac{m^2 C\cdot D}{4Kt}}\left(1 - \frac{1}{2t}\frac{K^2}{H^2}\cdot\frac{K}{C\cdot D}\right)$

---

nous recommencerons le calcul grâce à ce résultat différent du vrai résultat.

on a l'équation connue $\int_0^\infty dq\, e^{-q^2}\cos 2qr = \frac{1}{2}\sqrt{\varpi}\cdot e^{-r^2}$. Soit $q^2 = \frac{p^2 Kt}{C\cdot D}$. $q = p\sqrt{\frac{Kt}{C\cdot D}}$

et soit $pm = 2qr$

ou $pm = r\cdot 2p\cdot\sqrt{\frac{Kt}{C\cdot D}}$

ou $r = \frac{m}{2}\sqrt{\frac{C\cdot D}{Kt}}$

Donc $\sqrt{\frac{Kt}{C\cdot D}}\int dp\, e^{-p^2\frac{Kt}{C\cdot D}}\cos pm = \frac{1}{2}\sqrt{\varpi}\cdot e^{-\frac{m^2 C\cdot D}{4Kt}}$. Donc

$\int dp\, e^{-p^2\frac{Kt}{C\cdot D}}\cos pm = \frac{1}{2}\sqrt{\varpi}\cdot\frac{\sqrt{C\cdot D}}{\sqrt{Kt}}\, e^{-\frac{m^2 C\cdot D}{4Kt}}$.

ce qui prouve que l'expression $\frac{\varpi v}{2} = b\int_0^\infty \frac{dp\, e^{-p^2\frac{Kt}{C\cdot D}}}{p^2 + \frac{H^2}{K^2}}\cdot p\int_m^h dz\sin pz$

le quantité $p\int_m^h dz\sin pz$ est $\frac{1}{p}\cos pm - \frac{1}{p}\cos pz$ donc le système $p\int_m^h dz\sin pz$

est $\cos pm - \cos pn$ il reste à former une expression $\int_0^\infty \frac{dp\, e^{-p^2\frac{Kt}{C\cdot D}}\cos pm}{p^2 + \frac{H^2}{K^2}}$ ou

ou on omettra le système $\frac{H}{K}$ il faudra le rétablir

$\frac{K^2}{H^2}\int dp\, e^{-p^2\frac{Kt}{C\cdot D}}\cdot\cos pm$ ou

$\frac{K^2}{H^2}\int dp\, e^{-p^2\frac{Kt}{C\cdot D}}\cdot\cos pm\left(1 - p^2\frac{K^2}{H^2} + \cdots\right)$ on a trouvé $\int dp\, e^{-p^2\frac{Kt}{C\cdot D}}\cos pm = \frac{1}{2}\sqrt{\varpi}\sqrt{\frac{C\cdot D}{Kt}}\, e^{-\frac{m^2 C\cdot D}{4Kt}}$

donc $-\frac{K}{C\cdot D}\int dp\, p^2 e^{-p^2\frac{Kt}{C\cdot D}}\cdot\cos pm = F't = \frac{m^2 C\cdot D}{4K}\cdot\frac{1}{t^2}Ft - \frac{1}{2t}Ft$

donc $v = \frac{2b}{\varpi}\cdot\frac{K^2}{H^2}\left(Ft + \frac{K^2}{H^2}\cdot\frac{C\cdot D}{K}\left(\frac{m^2 C\cdot D}{4K}\frac{1}{t^2} - \frac{1}{2t}\right)Ft + \cdots\right)$

$\frac{6\sqrt{\kappa c\cdot\beta}}{\sqrt{\alpha}\,H} = p\cdot\frac{6}{\sqrt{\alpha}}$ $\qquad q = \frac{m^2c\cdot\beta}{4\kappa}$ $\qquad p = \frac{\kappa c\cdot\beta}{2H^2}$

$pt^{-\frac{1}{2}}e^{-qt^{-1}}(1-$

$t^{-\frac{1}{2}}e^{-qt^{-1}}\left(1-p\frac{1}{t}\right)$

$ft = t^{-\frac{1}{2}}e^{-qt^{-1}}(1-pt^{-1})$ $\qquad -\frac{1}{2t}ft + \frac{q}{t^2}$

$ft = e^{-\frac{q}{t}}$

$-\frac{1}{2t}ft\left(1-\frac{p}{t}\right) + \frac{q}{t^2}ft\left\{1-\frac{p}{t}\right\} + \frac{p}{t^2}ft$

$-\frac{1}{2t} + \frac{p}{2t^2} + \frac{q}{t^2} - \frac{pq}{t^3} + \frac{p}{t^2}$

$\frac{3\kappa c\cdot\beta}{2H^2} + \frac{m^2c\cdot\beta}{2\kappa}$ $\qquad -\frac{t^2}{2} + pt + qt - pq + pt$

$\left(\frac{3p}{2}+q\right)t - \frac{t^2}{2} - pq = 0$

$t^2 - t\,3p+2q = 2pq$

$t = \frac{3p+2q}{2} \pm \sqrt{2pq + 3p+2q\,\frac{1}{4}}^2$

$t = \frac{1}{2}\,3p+2q + \sqrt{2pq + \frac{1}{4}\,3p+2q}^2$

130.

Donc si l'on ne conserve que les deux premiers termes on aura

$$v = \frac{26}{\varpi}\cdot\frac{K^2}{H^2} f+\left(1-\frac{K^2}{H^2}\cdot\frac{K\cdot D}{4R}\frac{1}{2t}\right) = \frac{26}{\varpi}\cdot\frac{K^2}{H^2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\varpi}\cdot\frac{\sqrt{C\cdot D}}{\sqrt{Kt}}\, e^{-\frac{m^2 C\cdot D}{4Kt}}\left(1-\frac{K^2}{H^2}\cdot\frac{K\cdot D}{4R}\frac{1}{2t}\right)$$

ou $v = 6\cdot\frac{K}{H}\frac{\sqrt{K\cdot C\cdot D}}{H\sqrt{\varpi}\sqrt{t}}\, e^{-\frac{m^2\cdot C\cdot D}{4Kt}}\left(1-\frac{K^2}{H^2}\cdot\frac{K\cdot D}{4R}\cdot\frac{1}{2t}\right)$. il faut remarquer ici que dans l'expression de la valeur de 6 on a omis en facteur le facteur précédent $\frac{H}{K}$ figuré dans l'équation générale mais oublié $F\lambda$. relativement à ce facteur on a donné l'expression exacte de v celle ci

(1) $v = 6\cdot\frac{\sqrt{K\cdot C\cdot D}}{H\sqrt{\varpi}\sqrt{t}}\, e^{-\frac{m^2\cdot C\cdot D}{4Kt}}\left(1-\frac{KC\cdot D}{2H^2 t}+\right)$ ce résultat coincide avec celui qu'on trouve dans les mêmes précédentes où l'on supposait $F\lambda$ une quantité constante . il suffit de faire $m=0$.

ce résultat (1) est très remarquable en ce qu'il montre clairement suivant quelle loi l'effet produit à la surface diminue lorsque la valeur de m augmente c'est à dire à mesure que la matière échauffée est plus éloignée de la surface.

si $e^{-\frac{m^2 C\cdot D}{4Kt}}$ est la différence entre l'unité et la fraction d'échauffement qui subsiste effectivement $1-e^{-\frac{m^2 C\cdot D}{4Kt}}$

on n'a employé que le terme $\cos pm$ Si l'on introduisait le terme $\sin pm$ on aurait un résultat semblable qui s'ajouterait au précédent.

Lorsque la masse échauffée à la température 6 est comprise depuis $z=m$ jusqu'à $z=\frac{1}{0}$ il n'y a point de second terme à écrire parce que m étant infini l'exponentielle devient nulle

144
365
720
864
432
525.600
$\frac{1}{2}$ 1625.$\frac{3}{2}$.25
μ 525600

Le facteur exact pour toutes les valeurs quelconques de v contient deux valeurs. Lorsque le temps est infini la valeur de v devient nulle.

Si la quantité est extrêmement grand l'exponentielle se réduit à 1 le facteur en sus devient 1 et la valeur de v est $\frac{6\sqrt{K\cdot C\cdot D}}{H\sqrt{\varpi}\sqrt{t}}$ ainsi la température de la surface au début varie en raison inverse de la racine quarrée du temps écoulé.

pour que ce résultat soit bien réalisé il faut que $\frac{KC\cdot D}{2H^2 t}$ soit une petite fraction μ et que $\frac{m^2 C\cdot D}{4Kt}$ soit aussi une petite fraction ν.

soit donc $\frac{KC\cdot D}{2H^2 t} < \mu$ et $\frac{m^2\cdot C\cdot D}{4Kt} < \nu$ il faut que

$t > \frac{K\cdot C\cdot D}{2H^2}\frac{1}{\mu}$ et $t > \frac{m^2\cdot C\cdot D}{4K}\cdot\frac{1}{\nu}$. pour le fer $\frac{C\cdot D}{K}$ est à peu près 1083

$C\cdot D$ est 1625 et H est $\frac{1}{3}$. Si le temps est compté en secondes il faut encore

T ancien $= \frac{t}{60\cdot 24\cdot 365}$ ou $t = T\cdot 525600$ donc $T > \frac{1}{\mu}\frac{K\cdot C\cdot D}{2H^2}\frac{1}{525600}$

$T > \frac{1}{\nu}\cdot\frac{m^2\cdot C\cdot D}{4\cdot K}\cdot\frac{1}{525600}$

$\left(\frac{K}{C\cdot D}\right)^2 \int_0^p p^4 e^{-p^2\frac{Kt}{C\cdot D}} \cos pm = F''t$

$+ p^4 \frac{K^2}{H^2}$ | $\left(\frac{K^2}{H^2}\right)\left(\frac{CD}{K}\right)^2 F''t$

$F't = \left(\frac{m^2 C\cdot D}{4K} t^{-2} - \frac{1}{2t}\right) Ft$

$F''t = \left(\frac{m^2 C\cdot D}{4K} t^{-2} - \frac{1}{2} t^{-1}\right) F't + Ft\left(-2\frac{m^2 C\cdot D}{4K} t^{-3} + \frac{1}{2} t^{-2}\right)$

$F''t = \left\{\left(\frac{m^2 C\cdot D}{4K} t^{-2} - \frac{1}{2t}\right)^2 + \left(-2\cdot\frac{m^2 C\cdot D}{4K} t^{-3} + \frac{1}{2} t^{-2}\right)\right\} \cdot Ft$

$\frac{3}{4} t^{-2} - 3\frac{m^2 C\cdot D}{4K} t^{-3} + \left(\frac{m^2 C\cdot D}{4K}\right)^2 t^{-4}$

$\frac{3}{2}\cdot\frac{1625\cdot 24}{2\ \ T\cdot 625600}$ | $\frac{1625}{24}$ | $\frac{4256}{8}$

$\frac{3\cdot 1625\cdot 24}{4\cdot 6000\cdot 625600}$ | $\frac{4123}{3250}$ | $\frac{4048}{40625}$

4204800000

Kmeta

$\frac{K^2}{H^2}\cdot\frac{CD}{K}\ \ \frac{m^2 C\cdot D}{4K}\ \frac{1}{t^2}$ | $\frac{K^2}{H^2}\cdot\frac{C\cdot D}{K}\ \ \frac{m^2 C\cdot D}{4Kt}\cdot\frac{1}{t}$ | $\frac{KC\cdot D}{2H^2 t} < \mu$

$\cdot 2\mu\cdot\frac{m^2\cdot C\cdot D}{4Kt}$ | $2\mu\cdot V$

$\frac{m^2\cdot C\cdot D}{4}\ \frac{1}{K}\ \frac{1}{T}\ 625600$ | $\frac{m^2\cdot 1083\cdot}{4T\cdot 625600}$ | $\frac{m^2\cdot 1083}{4\cdot 6000\cdot 625600}$ | $m = 3000$ metres

$m = 4000$

$\frac{4^2\cdot 1083\cdot 1000^2}{4\cdot 3000\cdot 1051200}$

$\frac{4^2\cdot 1083\cdot 1000^2}{4\cdot 6000\cdot 625600}$

$\frac{3^2\cdot 1083\cdot 1000\cdot 1000}{10\cdot 1200\cdot 1051200}$

$\frac{1083}{15}$ $\frac{1051}{12}$ $\frac{1083}{9}$

6493 12612 9747

$\frac{1083}{17328}$

$\left(\frac{K}{H^2}\right)^2\left(\frac{C\cdot D}{12}\right)^2\left\{\frac{3}{4} t^{-2} - 2\right\}$ | $\frac{K^4 C^2 D^2}{H^4 K^2}$ | $\frac{K^2 C^2 D^2}{H^4 t^2}$ | $\frac{3}{4}\left(\frac{KC\cdot D}{H^2}\right)^2$

$3\left(\frac{KC\cdot D}{2H^2 t}\right)^2$ | $3\mu^2$

$2\mu V + 3\mu^2$

on voit que si $m = 3000$ mètres la quantité $\frac{m^2 C\cdot D}{4Kt}$ est une fraction qui devient encore et égale à soixante fois recevoir
valeur plus grande lorsque K devient plus petite soit V cette quantité $\frac{m^2 C\cdot D}{4Kt}$

la quantité $\frac{KC\cdot D}{2H^2 t}$ est une fraction extrêmement petite lorsque t est 6000 ans

et qui devient beaucoup plus petite lorsque K devient plus petit.

Remarquons que le coefficient de $\frac{1}{t^2}$ dans le terme qu'on néglige est plus petit que $2\mu V + 3\mu^2$

si μ n'est pas une petite fraction le terme $2\mu V$ est toujours très grand par rapport à l'entièrement petit de l'ordre μ^2 et le terme omis qui contient $\frac{1}{t}$ est de même ordre μ et il faudra négliger cette fraction μ est extrêmement petite comme inconvénient. Remarquons que les termes négligés peuvent être aussi faibles que l'on veut et que même ils pourraient être si le nombre m devait beaucoup plus grand.

si la masse échauffée à la température b est comprise depuis $x = m$ jusqu'à $x = n$ la température de la surface détermine par cet état initial est

(2) $$v = \frac{b}{\sqrt{\omega}} \frac{\sqrt{K \cdot C \cdot D}}{H \sqrt{t}} \left(1 - \frac{K \cdot \omega}{2H^2 t} + \cdots\right)\left(e^{-\frac{m^2 K \cdot D}{4Kt}} - e^{-\frac{n^2 \cdot C \cdot D}{4Kt}}\right)$$ cette équation a lieu

lorsque le temps est devenu assez grand pour que le second terme de la crochet en série soit devenu assez petit pour qu'on puisse le négliger par rapport à 1. on aura sensiblement exactement pourvu que le temps croisse dans des limites. Donc l'effet de la masse dont il s'agit finit toujours par être exprimé par l'équation (2) ce quelle que puisse être la fonction initiale qui représente l'état du solide initial. Cet état est entièrement défini il peut être représenté par des lignes ou des différences de cette fonction dont la valeur constante b_1 ou b_2 ou b_3 Si depuis $x = m$ jusqu'à $x = \frac{1}{0}$ donc le solide parvient dans toutes ses parties à une température égale à b et qu'alors on change partout la température et que l'on maintienne cette grande différence constante, la température du solide variera suivant la même loi que la fonction primitive.

parce que le terme contenant l'une des exponentielles se réduit à 1 et que sa décroissance infini l'autre exponentielle extrême.

l'équation (1) fait voir que quelque petite que soit la différence de la valeur de v finit toujours par être donc une même état final savoir $b \frac{\sqrt{K \cdot C \cdot D}}{H \sqrt{\omega} \sqrt{t}}$

il faut seulement que le temps t soit devenu assez grand et cette durée dépend de m mais l'état final n'en dépend point.

on demande combien il doit s'écouler de temps pour que la masse échauffée à la température b et comprise depuis $x = m$ à $x = \frac{1}{0}$ prenne sensiblement en chaque point la température finale à moins d'un centième près. Il faut comme nous l'avons dit que l'on ait $T > \frac{1}{\mu} \cdot \frac{K \cdot C \cdot D}{2H^2} \frac{1}{523600}$ et $T > \frac{1}{\mu} \frac{m^2 \cdot C \cdot D}{4K} \frac{1}{523600}$ et alors la température à la surface est $\frac{b}{\sqrt{\omega}} \sqrt{\frac{K \cdot C \cdot D}{H^2 t}}$ ou $\frac{b}{\sqrt{\omega}} \sqrt{\frac{KCD}{H^2 \cdot 523600 \cdot T}}$

Soit pour exemple $m = 1000$ mètres on aura $T > \frac{1}{\mu} \cdot \frac{1000000 \cdot 1083}{4 \cdot 523600}$ si l'on veut que $\frac{1}{\mu}$ soit seulement 10 on aura $T > 5115$ ans. alors le coefficient de $\frac{b}{\sqrt{\omega}}$ est plus petit $\sqrt{\frac{1}{40000}}$ ou plus petit que $\frac{1}{200}$.

Si le nombre K est supposé 9 fois moindre il faudra que le temps t soit neuf fois plus grand et alors la température reviendra même plus petite parce que $\frac{K}{t}$ sera 81 fois moindre ainsi dans un tel corps et après un tel temps la masse placée à la profondeur de 1000 mètres prendra la température $\frac{b}{\sqrt{\omega}} \frac{1}{1800}$ à la surface. l'erreur ne sera que de la deux centième partie de la valeur primitive. Pour la profondeur de quatre mille mètres le temps T' devra être encore quatre fois plus grand alors la température en deux fois moindre.

1083 00006
21024
111 | 21024 | 5115
1043000.000
164120
31800
21024
16776
1625 · 3/2 · 25 · 8
5115 · 523600 · 8
1625 · 3 · 100
4020 · 523600
4873
402 · 52360

182.

Si dans l'équation 1 on remplace la lettre t par la grande profondeur par laquelle la lettre $\frac{KCD}{2H^2t}$ fait une petite fraction commune $\frac{1}{1000}$ la valeur de v sera toujours sensiblement exprimée par cette formule $v = \frac{b}{\sqrt{\varpi}} \sqrt{\frac{KCD}{H\sqrt{t}}}\, e^{-\frac{m^2 \cdot CD}{4Kt}}$ il faut donc que l'on ait $\frac{KCD}{2H^2t} < \frac{1}{\mu}$ ou $T > \frac{1}{\mu} \cdot \frac{KCD}{2H^2 \cdot 3600}$ ou $T > \frac{1}{\mu}\left(\frac{K}{H}\right)^2 \frac{CD}{K} \cdot \frac{1}{3600}$

ou $T > \frac{1}{\mu}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 1083 \cdot \frac{1}{3600}$ si $\frac{1}{\mu}$ est égal à 6, ou aura $T > 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1083 \cdot 3600}{1000 \cdot 3600}$

ou $T > 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{1083}{1000}$ ce qui est au dessous $2 \cdot 8^2 \cdot \frac{1100}{1000}$ ou $\frac{128}{124}(1,1)$ ou au dessus

De 241 ans il faut de la grande profondeur un nombre d'années un peu plus grand (la correction pour un huit cinquième l'expression devient de la température

(3) elle est $v = \frac{b}{\sqrt{\varpi}} \sqrt{\frac{KCD}{H\sqrt{t}}}\, e^{-\frac{m^2 \cdot CD}{4Kt}} = \frac{b}{\sqrt{\varpi}} F't$

Si t augmente, le facteur qui contient $\frac{1}{\sqrt{t}}$ diminue mais l'exponentielle augmente de valeur. on demande maintenant quelle est la valeur maximum de v. on a $\frac{dv}{dt} = \frac{b}{\sqrt{\varpi}} \left\{ -\frac{1}{t} Ft + \frac{m^2 \cdot CD}{Kt^2} Ft \right\}$ puisque $\frac{dv}{dt}$ doit nulle il faut que l'on ait $\frac{m^2 CD}{Kt^2} = \frac{1}{t}$ ou $t = \frac{m^2 \cdot CD}{K}$ ou $T' = \frac{m^2 \cdot 1083}{3600}$

1000000 / 3600 / 2000 / 1000000 / 200000

ou encore $\frac{m^2 v \cdot D}{Kt} = 1$ donc la valeur de V est $\frac{b}{\sqrt{\varpi}} e^{-\frac{1}{4}} \frac{\sqrt{KCD}}{H} \frac{\sqrt{K}}{m\sqrt{CD}}$

ou $V = \frac{b}{\sqrt{\varpi}} e^{-\frac{1}{4}} \frac{K}{Hm}$ ainsi le maximum V de température est en raison inverse de la profondeur m ou a $\frac{K}{H} = \frac{1}{2}$ pour $V = \frac{b}{\sqrt{\varpi}} \cdot e^{-\frac{1}{4}} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{m}$

il faut remarquer que la valeur du temps T' qui répond au maximum doit être augmentée de la correction que le temps T' emploie à la conduction

$e^{-\frac{1}{4}} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\frac{1}{16} - \frac{1}{1\cdot 3}\frac{1}{64} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 6}\frac{1}{256}$

$6.64 - 6.16 + 3.4 - 1$

384 / 96 / 288 / 12 / 300 ; 299 / 384 ; 300 / 385 ; 60 / 77

que la valeur intermédiaire $\frac{m^2 CD}{K}$ soit telle que $\frac{KCD}{2H^2t} < \mu$ ou $\frac{K \cdot CD\, \mu}{H^2 \cdot m^2 CD} < \mu$

ou que $\frac{K^2}{H^2} \frac{1}{\mu} < m^2$ il faut donc augmenter de moitié environ la profondeur une valeur $\frac{K}{H}\sqrt{\frac{1}{\mu}}$ ou si $\mu = \left(\frac{1}{30}\right)^2$ il faut que $m > \frac{1}{2} \cdot 30$

ces profondeurs sont comme on voit fort médiocres. quant à la valeur de la maximum elle est $\frac{b}{\sqrt{\varpi}} \frac{60}{77} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{m}$ elle est proportionnelle à K et inversement beaucoup moindre pour les matières qui ont été prises comme étalon il faut de la que les matières placées à une très grande profondeur n'ont quelque fort léger mais aucune influence sensible sur la température de la surface ainsi dans le calcul de cette température il faut tenir compte de cette correction par la chaleur de la masse qui est à une profondeur extrêmement grande pour laquelle maximum de l'effet qu'elle produit est déjà insensible et n'est pas à considérer.

Il faudra donc considérer la boule comme chemisée jusqu'à une profondeur incomparablement moindre que le rayon et alors (si m = 100000 c'est à dire environ myriamètres) la profondeur dans l'effet maximum produit à la surface est insensiblement la boule et on peut la regarder comme entièrement nulle.



Soit ω la vitesse angulaire $g\lambda$ l'expression de la température dans la tige devient $\lambda = v$ parce que $\lambda = \omega t$ il s'agit de déduire v de la valeur de v. on aura $F\lambda = g\lambda$ $F'\lambda = g$

Il faut on applique que la solution générale est de la forme

$$v = \frac{2}{\pi} \int_0^{\omega} \frac{d\mu\, e^{-\mu^2 \frac{kt}{CD}}}{\mu^2 + \frac{H^2}{K^2}} \mu \int_0^{\lambda} d\lambda \sin\mu\lambda \left(\frac{H}{K} g\lambda - g \right)$$

on a $\int d\lambda \sin\mu\lambda \left(\frac{H}{K} g\lambda - g \right) = C - \frac{1}{\mu} \cos\mu\lambda \left(\frac{H}{K} g\lambda - g \right) + \frac{H}{K} g \frac{1}{\mu^2} \sin\mu\lambda$ car d'ailleurs

d'ailleurs $\sin\mu\lambda \left(\frac{H}{K} g\lambda - g \right) = \sin\mu\lambda \frac{H}{K} g\lambda - g + \frac{H}{K} g \frac{1}{\mu} \cos\mu\lambda \cdot \frac{H}{K} g$ faisant $\lambda = 0$

$$- \frac{1}{\mu} \cos\mu\lambda \cdot \frac{H}{K} g$$

on a $0 = C + \frac{g}{\mu}$ donc

$$\int_0^{\lambda} d\lambda \sin\mu\lambda = -\frac{g}{\mu} (1 - \cos\mu\lambda) - \frac{H}{K} g \frac{\lambda}{\mu} \cos\mu\lambda + \frac{H}{K} g$$

on a $\int d\lambda \sin(\mu\lambda) \frac{H}{K} g\lambda - g = C - \frac{1}{\mu} \cos\mu\lambda \left(\frac{H}{K} g\lambda - g \right) + \int d\lambda \frac{1}{\mu} \cos\mu\lambda \frac{H}{K} g$ car d'ailleurs

on trouve $\sin(\mu\lambda) \frac{H}{K} g\lambda - g = \sin\mu\lambda \frac{H}{K} g\lambda - g + \frac{H}{K} g \frac{1}{\mu} \cos\mu\lambda$

$$- \frac{H}{K} g \frac{1}{\mu} \cos\mu\lambda$$

donc $\int_0^{\lambda} d\lambda \sin\mu\lambda \cdot \frac{H}{K} g\lambda - g = (1 - \cos\mu\lambda) \frac{H}{K} g\lambda - g \cdot \frac{1}{\mu} + \int_0^{\lambda} d\lambda \cdot \frac{H}{K} g \frac{1}{\mu} \cos\mu\lambda$

$$= 1 - \cos\mu\lambda \frac{H}{K} g\lambda - g \cdot \frac{1}{\mu} + \frac{H}{K} g \cdot \frac{1}{\mu^2} \sin\mu\lambda$$ faisant $\lambda = mt$

multipliant par μ on trouve

$$v = \frac{2}{\pi} \int_0^{\omega} \frac{d\mu\, e^{-\mu^2 \frac{kt}{CD}}}{\mu^2 + \frac{H^2}{K^2}} \left(1 - \cos\mu m \frac{H}{K} g m - g + \frac{H}{K} g \cdot \frac{1}{\mu} \sin\mu m \right)$$ il reste donc

à former les quantités $\int \frac{d\mu\, e^{-\mu^2 \frac{kt}{CD}}}{\mu^2 + \frac{H^2}{K^2}} \cos\mu m$ et $\int \frac{d\mu\, e^{-\mu^2 \frac{kt}{CD}}}{\mu^2 + \frac{H^2}{K^2}} \frac{1}{\mu} \sin\mu m$

Soit une fonction de r telle que l'on ait $f(r) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} dr\, e^{-r^2}$ donc $f'r = e^{-r^2} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$

donc $f'r = \int_0^{\infty} dq\, e^{-q^2} \cos 2qr$ donc $fr = \int_0^{\infty} dq\, e^{-q^2} \frac{\sin(2qr)}{2q}$

Soit $\frac{\mu^2 kt}{CD} = q^2$ et $2qr = \mu m$ $\mu \frac{\sqrt{kt}}{\sqrt{CD}} = q$ $m = 2r \cdot \frac{q}{\mu} = \frac{2r \cdot \sqrt{kt}}{\sqrt{CD}}$

$r = \frac{m}{2} \frac{\sqrt{CD}}{\sqrt{kt}}$ $r^2 = \frac{m^2}{4} \cdot \frac{CD}{kt}$ on peut continuer le calcul tout comme on a

on peut aussi résoudre la question par l'un autre moyen.

en effet on a démontré que si la température initiale à la surface est exprimée par 6 la température commune d'une couche de solide comprise de $\lambda = m$ à $\lambda = \frac{1}{0}$ la température variable de la surface est $v = \frac{6}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{KC\cdot D}}{H\sqrt{t}} e^{-\frac{m^2 C\cdot D}{4Kt}}$ on



le 1er élément a pour température $g\,dm$ depuis $m=0$ jusqu'à $m=\frac{1}{0}$ le second a pour température $g\,dm$ et l'excès de m à m jusqu'à $\frac{1}{0}$ le 3e commence lorsque $m = 2\,dm$ et ainsi successivement jusqu'à un m quelconque dont la température initiale est $g\,dm$ depuis m jusqu'à $\frac{1}{0}$ on arrondit $= +$

considérera l'état initial comme formé d'une infinité d'éléments dont chacun a la température $g\,dm$ ou l'on fait varier m depuis $m=0$ jusqu'à $m = M$

on aura $v = \frac{g}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{KC\cdot D}}{H\sqrt{t}} \int_0^M dm\, e^{-\frac{m^2 C\cdot D}{Kt}}$ il faut ouvrir $\frac{m^2 C\cdot D}{Kt} = x^2$

$dx = dm \cdot \frac{\sqrt{C\cdot D}}{\sqrt{Kt}}$ ou encore $v = \frac{g}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{KC\cdot D}}{H\sqrt{Kt}} \frac{\sqrt{Kt}}{\sqrt{C\cdot D}} \int_0^X dx\, e^{-x^2}$ et la limite X

doit être telle que l'on ait $\frac{x\sqrt{Kt}}{\sqrt{C\cdot D}} = M$ donc $X = \frac{M\cdot\sqrt{C\cdot D}}{\sqrt{Kt}}$

donc $v = \frac{6g}{\sqrt{\pi}} \frac{K}{H} \int_0^{\frac{M\sqrt{C\cdot D}}{\sqrt{Kt}}} dx\, e^{-x^2}$ si l'on néglige $\frac{M\sqrt{C\cdot D}}{\sqrt{Kt}}$ étant très petite fraction

on pourra ne prendre que le 1er terme car $\int dx\, e^{-x^2} = \int dx\,(1 - x^2 + \frac{x^4}{1} - 2)$

$= x - \frac{1}{3}x^3 + 2$ il faudra pourtant prendre le second terme quand l'on aura $\frac{x^3}{3x}$ une fraction ou encore $\frac{x^2}{3} < \mu$ ou $\frac{M^2 C\cdot D}{3Kt} < \mu$ donc

$t > \frac{M^2\cdot C\cdot D}{3K}\frac{1}{\mu}$ ou $T' > \frac{M^2 C\cdot D}{K}\frac{1}{3}\frac{1}{\mu}\frac{1}{525600}$ ou $T > \frac{M^2 1083 \cdot \frac{1}{3}\frac{1}{\mu}}{525600}$

pour exemple si $M = 1000$ mètres on a $T' > \frac{1000000\cdot 1083\cdot 33}{3236}$ ans.

ou $T' > \frac{10000\cdot 1083\cdot 11}{1752}$ ou $T' > \frac{10000\cdot 11\cdot 361}{384}$ ou $T' > 68000$

si le temps T' avait cette valeur on reconnaîtrait par de la combien grande de la valeur de v en prenant $v = \frac{g}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{K}{H}\cdot\frac{m\sqrt{C\cdot D}}{\sqrt{K}\sqrt{t}}$ ou $v = \frac{g\,m\cdot\sqrt{KC\cdot D}}{H\sqrt{\pi}\sqrt{t}}$

comme $\frac{M^2 C\cdot D}{3Kt} < \mu$ on a $\frac{M^2 C\cdot D}{K}\frac{K^2}{H^2}\frac{1}{3t} < \frac{K^2}{H^2}\mu$ ou $\frac{M\sqrt{KC\cdot D}}{H\sqrt{t}} < \frac{K}{H}\sqrt{3\mu}$ donc $\frac{v\sqrt{\pi}}{g} < \frac{K}{H}\sqrt{3\mu}$

ou $\frac{M^2 C\cdot D K}{H^2 t} < 3\frac{K^2}{H^2}\mu$ donc $\frac{v}{6} < g\frac{K}{H}\sqrt{\frac{3\mu}{\pi}}$ ou $\frac{v}{6} < g\cdot\frac{33}{2}\sqrt{\frac{3\mu}{\pi}}$ et si μ était $\frac{1}{100}$ on aurait

$\frac{v}{6} < g\cdot\frac{15}{2}\frac{1}{10}$ et faisant $g = \frac{1}{30}$ on aurait $\frac{v}{6} < \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{10}$ ou $v < \frac{1}{40}$

on voit par là et sauf erreur de calcul que la valeur de v est restée inférieure à un dixième de degré après 68 000 ans environ.

et si $\frac{1}{\mu} = 100$

361
11
361
361
3971

3971,4444 | 384
6799 6

3504
4670
4088
3420
3236
3840
384
3840

Il faut regarder Fourier démontré que la température variable de la surface est exactement exprimée par l'équation $v = \frac{6}{\sqrt{\pi}}\frac{\sqrt{KC\cdot D}}{H\sqrt{t}} e^{-\frac{m^2 C\cdot D}{4Kt}}$ (3) trouvons qu'il faut plus de deux siècles depuis le commencement de refroidissement et si l'on suppose que l'état initial consistait en une hypothèse de température constante égale à 6 et affectant la masse depuis la profondeur m seulement jusqu'à l'infini toutes les anciennes températures initiales étant nulles.

l'exemple montre en employant cette formule et en négligeant la millième partie de la quantité calculée et cette erreur est en effet beaucoup trop minime pour modifier sensiblement nos conclusions.

195.

J'ai admis au cas d'une température initiale uniforme dans le sol des températures faciles à employer cette formule (1). Si on considère maintenant la profondeur m comme variable et l'on suppose que le système des températures initiales soit formé d'une infinité d'éléments, tout analogue à celui qui contient la température égale à f_m depuis la profondeur m jusqu'à une profondeur infinie l'effet produit à la surface par ce système de températures initiales sera pour représenté par

$$v = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{K.C.D}}{H\sqrt{t}} \int_0^M dm\, f_m\, e^{-\frac{m^2.C.D}{4Kt}}$$

cette intégrale doit être prise depuis $m = 0$ jusqu'à $m = M$ la plus grande profondeur qu'il soit nécessaire de considérer au sorte qu'aucune de M l'effet des températures initiales ne puisse plus devenir appréciable à la surface.

La nature de la fonction f_m est déterminée par celle qui exprime l'état initial du solide. Si F_m représente la température initiale du point placé à la profondeur m. on a $f_m = F'_m = \frac{d}{dm} F(m)$

Ainsi la formule propre à faire connaître les variations de température à la surface d'un solide infiniment profond qui a reçu des températures initiales quelconques est

$$v = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{K.C.D}}{H\sqrt{t}} \int_0^{M} dm\, F'(m)\, e^{-\frac{m^2.C.D}{4Kt}}$$

il s'agit de calculer les variations que v subit pendant une unité de temps en prenant la valeur de $\frac{dv}{dt}$ et l'on a $\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{2}\frac{1}{t} v + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{KC.D}}{H\sqrt{t}} \int_0^{M} dm\, f'_m \frac{m^2.C.D}{4K} \frac{1}{t^2} e^{-\frac{m^2.C.D}{4Kt}}$

En développant l'exponentielle cette dernière devient $\int_0^{M} dm\, f'_m \left(\frac{m^2.C.D}{4Kt^2} - \frac{m^4.C^2.D^2}{4^2.K^2.t^3} + \&c \right)$

On trouve pour le second terme de $\frac{dv}{dt}$ la quantité

$$-\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{K.C.D}}{H\sqrt{t}} \int dm\, f'_m \left(\frac{m^2.C.D}{4Kt^2} - \frac{1}{2} \left\{ \frac{m^2.C.D}{4Kt} \right\}^2 \frac{1}{t} + \&c \right)$$ on voit facilement que

que le second terme de la série est extrêmement petit lorsque le nombre est très grand puisqu'il contient la valeur de $\frac{dv}{dt}$ et qu'il est multiplié

par $\frac{1}{t^2}$. Sont f'_m a la plus grande valeur reçue F'_m depuis $m = 0$ jusqu'à $m = M$ l'intégrale $\int dm\, f'_m \frac{m^2.C.D}{4K}$ sera moindre que $\frac{f.C.D}{4K} \int dm\, m^2$ ou $\frac{f}{3.4} \cdot \frac{C.D}{K} M^3$ donc le second terme de la valeur de $\frac{dv}{dt}$ sera moindre que

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{K.C.D}}{H\sqrt{t}} \frac{M^3 C.D}{3.4Kt} \cdot \frac{f}{t} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{K.C.D}}{H\sqrt{t}} \frac{M^2.C.D}{4.Kt} \cdot \frac{f.M}{3t}$$ quantité qui est

du plus grande valeur. Si dans l'expression de v on met pour F'_m la plus grande valeur possible f et pour les m on met la plus grande valeur possible M on aura une valeur plus grande que v donc $v > \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{KC.D}}{H\sqrt{t}} . Mf$

/ Ce calcul ne fonctionne plus si la quantité que l'on a omise le terme de la série ne décroissent pas alternativement

136.

Donc le second terme de la valeur de $\frac{dv}{dt}$ est minimum que $v \cdot \frac{M^2 C \cdot \nu}{4Kt} \cdot \frac{1}{t}$ subsiste que ce terme devient insensible lorsque t a une très grande valeur et l'on conclut de là que l'expression exacte de la valeur de $\frac{dv}{dt}$ est alors

$\frac{dv}{dt} = -\frac{v}{2t}$ donc la diminution séculaire de v est égale à la valeur actuelle de v divisée par le double du nombre des siècles qui se sont écoulés depuis le commencement du refroidissement. Cette conclusion est très remarquable parce qu'elle ne dépend pas de l'état initial et que le temps de refroidissement est ici le temps écoulé depuis environ 60 siècles cependant très petit à — comparer. comme ce résultat est très important il faut l'examiner de nouveau et donner la démonstration toute l'exactitude désirable.

† cette conclusion n'est pas exacte il faut que $\frac{M^2 C \cdot \nu}{4Kt}$ atteigne une certaine valeur

111 : 1093
4.6000 · 25600

---

il faut d'abord démontrer qu'une différence de température qui existe dans une température constante b depuis une profondeur m jusqu'à l'infini ne peut produire à la surface aucun effet sensible lorsque m est une très grande quantité comme dix mille mètres et lorsque b est inférieure aux plus hautes températures connues.

il faut en outre former l'expression de la température variable de la surface déterminée par un état initial quelconque depuis zéro jusqu'à cette plus grande profondeur m au-dessous de laquelle l'état primitif de la surface doit être considéré comme nul.

enfin il faut déterminer la valeur de $\frac{dv}{dt}$ qui convient en cet état de solide

---

examinons d'abord ce qui arrive dans un solide dont la profondeur est uniforme à la surface intérieure à la température b et s'il produit à la surface la température v. on trouve cette équation $K\frac{(b-v)}{m} = Hv$ ou $b = v\left(1 + m\cdot\frac{H}{K}\right)$. ou $v = \frac{b}{1+m\cdot\frac{H}{K}}$ la valeur de $m\frac{H}{K}$ étant extrêmement grande on a $v = \frac{b}{m}\cdot\frac{K}{H}$ pour le fer $\frac{K}{H}$ est à peu près $\frac{1}{2}$ et pour les matières qui composent le globe terrestre cette valeur de $\frac{K}{H}$ est beaucoup plus petite comme $\frac{1}{6}$ ou $\frac{1}{7}$ s'il était plus petite si par exemple on supposait $\frac{K}{H}$ égale à 1 on aurait $v = \frac{b}{m}$. Si l'on suppose m égale à cent mille mètres la température v de la surface ne sera que la cent vingt millième partie de b et par conséquent extrêmement petite. cette simple remarque suffit pour prouver que la température de la masse intérieure du globe subsiste une très grande profondeur comme deux cent lieues ne peut aucun effet appréciable à la surface car cet effet serait moindre que la millionième partie de la température de la masse intérieure.

200 · 2000 lieues
3000 mètres
10000000

~~certe~~ la proposition que j'ai voulu établir donne un résultat très remarquable car il est évident que la température de la masse intérieure s'abaissera d'autant plus. il n'y a donc aucun doute que dans le calcul des températures terrestres on doive faire abstraction de l'effet des marées très profondément situés

$K \cdot \frac{1}{30} = H v$

$v = \frac{K}{H} \cdot \frac{1}{30} = \frac{1}{2} \frac{1}{30} = \frac{1}{4}$



Nous appliquerons maintenant la relation précédente au cas où la température de la surface est $\frac{1}{4}$ du degré centésimal et l'accroissement pris initialement égal à $\frac{1}{30}$ du degré. On suppose que cet accroissement continue de subsister depuis $m = 0$ jusqu'à une profondeur de vingt mille mètres. Au delà de cette profondeur on suppose une température constante ayant une valeur donnée b soit a la température lorsque $m = 0$ et soit $g = \frac{1}{30}$

on aura $v = \frac{1}{\sqrt{\omega}} \frac{\sqrt{KC \cdot D}}{H \sqrt{t}} \int_0^{\infty} \partial m \left(b e^{-\frac{\rho^2 C \cdot D}{4Kt}} + g \int_0^{\rho} \partial m\, e^{-\frac{m^2 C \cdot D}{4Kt}} + a \right)$

pour connaître la valeur de $\int \partial m\, e^{-\frac{m^2 C \cdot D}{4Kt}}$ on fera $\frac{m^2 C \cdot D}{4Kt} = q^2$

$\frac{m \sqrt{C \cdot D}}{2\sqrt{Kt}} = q \quad m = \frac{2\sqrt{Kt}}{\sqrt{C \cdot D}} q$ donc $g \int_0^{\rho} \partial m\, e^{-\frac{m^2 C \cdot D}{4Kt}} = g \frac{2\sqrt{Kt}}{\sqrt{C \cdot D}} \int_0^{Q} \partial q\, e^{-q^2}$

et la limite Q sera telle que $\frac{2\sqrt{Kt}}{\sqrt{C \cdot D}} Q = \rho$ donc $Q = \frac{\rho \sqrt{C \cdot D}}{2\sqrt{Kt}}$

Donc $v = \frac{1}{\sqrt{\omega}} \frac{\sqrt{KC \cdot D}}{H \sqrt{t}} \left\{ a + b e^{-\frac{\rho^2 C \cdot D}{4Kt}} + g \frac{2\sqrt{Kt}}{\sqrt{C \cdot D}} \int_0^{Q} \partial q\, e^{-q^2} \right\}$

$\frac{K}{H} = 2g$ $\frac{\rho \sqrt{C \cdot D}}{2\sqrt{Kt}}$ et $Q = \frac{\rho \sqrt{C \cdot D}}{2\sqrt{Kt}}$

$v = \ldots + V \int_0^{Q} \partial q\, e^{-q^2}$

Donc $v = \frac{1}{\sqrt{\omega}} \frac{\sqrt{KC \cdot D}}{H \sqrt{t}} \left(a + b e^{-\frac{\rho^2 C \cdot D}{4Kt}} \right) + \frac{g}{\sqrt{\omega}} \frac{2\sqrt{K}}{H} \int_0^{Q} \partial q\, e^{-q^2}$

$\frac{\rho \sqrt{C \cdot D}}{2\sqrt{Kt}}$

Nous supposons $\rho = 20000$ mètres et $t = 30$ mille ans on trouve $\frac{\rho \sqrt{C \cdot D}}{2\sqrt{Kt}} = 2,61$

et la valeur de l'intégrale pour q est 0,8 960 290 l'intégrale totale $\frac{1}{2}\sqrt{\omega}$ est 0,886226 9

ainsi le dernier terme de la valeur du diffère extrêmement peu de $g \cdot \frac{H}{K}$ ou de $\frac{1}{4}$ qui est la valeur initiale de v quant aux autres parties de la valeur de v elles sont positives et extrêmement petites on voit par là que l'état initial étant tel que nous l'avons défini la température de la surface ne change que d'une manière insensible dans le cours de trente mille années.

$t = 30000$ ans

Soit $\rho = 1000$ mètres et supposons K neuf fois moindre la valeur de la limite Q sera donc 20 fois moindre et de l'autre 3 fois plus grande elle sera donc les $\frac{3}{20}$ de 2,61 ou 0,39 on trouve alors que le dernier terme de l'intégrale est $g \cdot \frac{K}{H} (0,41)$ le premier terme est fort petit par rapport à a on trouve tant environ de calcul pour apprécier le terme entre le 900 ième partie de b de a. quant au second terme il diffère peu de la 900 ième partie de b ainsi la valeur de la température de la surface à cet endroit sera toujours $\frac{1}{4}$ plus grande que $g \cdot \frac{K}{H} (0,41)$ ou $a (0,41)$ sera égale à 600 millièmes environ la valeur de la limite Q sera $\frac{1}{10}$ de 0,39 ou 0,234 on trouvera alors pour la troisième partie de l'intégrale $g \cdot \frac{K}{H} (0,23)$ la température de la surface restant dans cet endroit réduite à $\frac{1}{4}$ de la valeur actuelle à peu près trente mille années.

$\frac{3}{2} \cdot 1625 \cdot 24 \quad 1$
$2 \cdot 30000 \cdot 3256 \quad \sqrt{\omega}$

$1625 \cdot 24 \cdot 7$
$2600000 \cdot 3256 \cdot 22$

$1625 \cdot 7$
$800000 \cdot 3256 \cdot 22$

$v = V \int_0^{Q} \partial q\, e^{-q^2}$

$Q = \frac{\rho \sqrt{C \cdot D}}{\sqrt{Kt}}$

b =
c =
K =
H =

K
H

KC
H

KC·b
H²

12300
113
3750
12300
12300
141250

quant aux deux autres parties de la valeur de v il est facile de voir que la première restera voisine de la 900ième partie de la valeur de a c'est à dire peu appréciable. La seconde tient à très peu près la fraction $\frac{1}{2}$ de la température b. si donc toute la masse au delà de 900 mètres avait une température commune de $\frac{112\frac{1}{2}}{900}$ de $\frac{1}{2}$ m'n le refroidissement la valeur de la seconde partie serait $\frac{1}{4}$ de de $\frac{1}{2}$ et si la masse placée au delà de 900 mètres était équivalente à une hypothèse de température toutes égales à $37\frac{1}{2}$ degrés on aurait à leur sommer pour la seconde partie de l'intégrale $\frac{37}{900}$ de degré ou $0,063$. et comme la troisième partie est $\frac{1}{4}(0,25)$ ou $0,062$ on trouverait pour la température de la surface $0,125$ c'est à dire la moitié de la température initiale de la surface.

il manque à l'exactitude de ce calcul numérique de conserver une valeur de K assez approchée de celle qui convient aux matières terrestres. car le changement que modifierait fort de cette valeur laisse de l'inexactitude sur les résultats numériques.

---

nous prenons les valeurs suivantes et comme bien indiquées par les observations courantes

$D = 2300$ | $\frac{C \cdot D}{K} = \frac{1}{3} \cdot 10000$

$C = \frac{1}{3}$

$K = \frac{1}{4}$

$\frac{K}{H} = \frac{5}{8}$

$H = \frac{2}{5}$

$KCD = \frac{1}{12} \cdot 2300$

$\frac{KC \cdot D}{H^2} = \frac{25}{48} \cdot 2300$

$\sqrt{\frac{KC \cdot D}{H^2 \omega}} = \sqrt{\frac{25}{48} \cdot \frac{113}{355} 2300} = \sqrt{414} = 20,$

$\frac{KC \cdot D}{H^2 \omega t} = \frac{414}{30000 \cdot 473600}$

l'équation fondamentale $K \frac{\partial u}{\partial z} = H v$ donne en faisant

$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{20}$ $\quad v = \frac{K}{H} \cdot \frac{1}{20} = \frac{5}{240} = \frac{1}{48}$

soit $\frac{\rho \sqrt{C \cdot D}}{2 \cdot \sqrt{K t}} = 0,45$

$\frac{\rho^2 C \cdot D}{4 \cdot K t} = \frac{81}{400}$

ou $\rho^2 = \frac{81}{100} \cdot \frac{3}{10000} \cdot t$

et $\rho^2 = \frac{9 \cdot 81}{1000000} \cdot T^{am} 473600$

si $T = 30000$ on a

$\rho^2 = \frac{81}{1000000} \cdot 473040000$

ou $\rho^2 = 81 \cdot 4730,4$

ou $\rho = 1953$

---

on suppose $D = 2300$

$C = \frac{2}{3}$

$K = \frac{1}{6}$

en admettant que les matières terrestres participant de la nature de l'eau ont une conductibilité faible et une chaleur spécifique

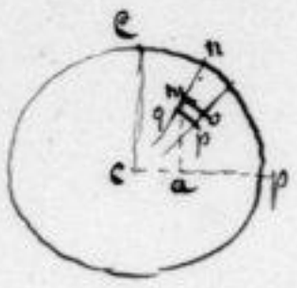
on suppose $H = \frac{1}{5}$



Mouvement de la chaleur dans une sphère
(températures terrestres)

1.

139.



Soit r le rayon de la sphère

x l'angle formé par un rayon quelconque et le rayon de l'équateur $\underline{ce}$

l'arc $\underline{en}$ sera rx

Soit $\underline{mn}$ y la ligne normale du point m au point n

le point m a pour coordonnée y et rx

en faisant varier ces coordonnées on forme un élément $mopq$ qui tournant autour de l'axe $\overline{cp}$ engendre un anneau. tout les points de cet anneau ont une température commune v, on imprime cette température différente de v.

il s'agit d'exprimer l'état d'équilibre de la chaleur dans cet élément.

l'arc $\underline{mo}$ est $(r-y)dx$ et le flux perpendiculaire à cet arc est $-K\frac{dv}{dy}$

le rayon $\underline{ma}$ est $\overline{r-y}\cos x$ et la circonférence décrite par le point m est $2\varpi\overline{r-y}\cos x$. l'arc décrit par $\underline{mo}$ est

$2\varpi(r-y)^2\cos x\,dx$ on a donc pour l'expression de la quantité de chaleur qui traversant $\underline{mo}$ s'éloigne vers le centre de la sphère

$$-K\frac{dv}{dy}\cdot 2\varpi(r-y)^2\cos x\,dx$$

cette quantité augmentée de la différentielle prise pour y est ce qui sort à travers qp

Donc la différentielle prise par rapport à y seulement et avec un signe contraire est ce qui reste dans l'élément

donc $2K\varpi\cos x\,dx\,d\left(\frac{dv}{dy}(r-y)^2\right)$ est la chaleur que reçoit dans cet élément l'élément du solide. La lettre d désigne la différentiation pour y seulement.

l'arc décrit par qm est $dy\cdot 2\varpi(r-y)\cos x$ le flux normal à $\underline{qm}$ est

$$\frac{-K\cdot\left(\frac{dv}{dx}\right)dx}{(r-y)dx} \quad \text{ou} \quad -K\frac{1}{(r-y)}\frac{dv}{dx}$$

la quantité de chaleur qui traverse $\underline{qm}$ est donc

$$-K\cdot 2\varpi\cdot\cos x\cdot dy\cdot\frac{dv}{dx} \quad \text{ou} \quad -2K\varpi\,dy\cdot\cos x\frac{dv}{dx}$$

en différentiant cette quantité de la différentielle pour x seulement on aura la chaleur qui traverse op. Donc la différentielle prise avec un signe contraire et pour x seulement est la quantité de chaleur qui reste dans l'élément on a pour cette quantité

$$2K\varpi\,dy\,\delta\left(\cos x\cdot\frac{dv}{dx}\right)$$

en indiquant par $\int$ la différentielle prise pour x seulement.

on doit donc avoir l'équation.

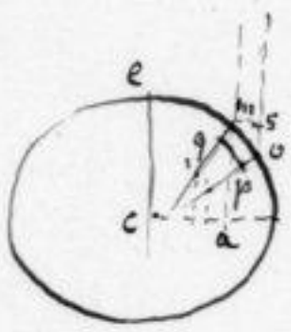
$$\cos x\, dx\, d\left(\frac{dv}{dy}(r-y)^2\right) + dy \int\left(\cos x \cdot \frac{dv}{dx}\right) = 0$$

ou

$$\cos x \cdot \frac{d^2v}{dy^2}(r-y)^2 - 2\cos x \cdot \frac{dv}{dy}(r-y) + \cos x \frac{d^2v}{dx^2} - \sin x \cdot \frac{dv}{dx} = 0$$

ou $$\frac{d^2v}{dy^2}(r-y)^2 - 2\frac{dv}{dy}(r-y) + \frac{d^2v}{dx^2} - \tan x \cdot \frac{dv}{dx} = 0 \qquad (a)$$

il faut maintenant exprimer l'équilibre de la chaleur dans l'élément placé à la surface



la quantité de chaleur qui traverse mo est en général comme on l'a trouvé plus haut $-k\frac{dv}{dy}\,2\varpi\,(r-y)^2\cos x\,dx$ il faut que cette quantité soit la même que celle que mo recevrait si elle communiquait la chaleur à l'espace dont la température est a.

Si par mS on élève un plan perpendiculaire au plan ace et que les deux perpendiculaires élevés en m et S aient pour hauteur l'ordonnée ma au dessus du plan ace le rectangle formé par mS interceptera toute la chaleur polaire qui pénétrerait directement dans l'anneau formé par m opq

l'aire du rectangle est $mS \cdot 2ma$

on a $mS = r\,d(\sin x)$ et $ma = r\cos x$

l'aire du rectangle est donc $2r^2\cos x^2\,dx$

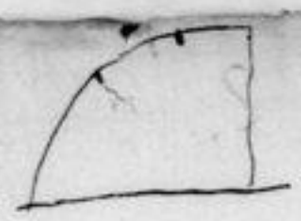
Soit g la quantité de chaleur qui pendant l'unité de temps est reçue par l'unité de surface exposée perpendiculairement aux rayons polaires

on aura $2gr^2\cos x^2\,dx$ pour l'expression de la chaleur reçue par l'anneau

~~$\frac{d^2v}{dy^2}$~~

~~$\frac{d^2v}{dy^2}$~~

~~$\frac{d^2v}{dy^2}$~~ ou ~~$\frac{dv}{dy}$~~



$a + m\omega^2 x = 3,1$

$a + m\omega^2(60^2)$

$a + \frac{1}{2}m = 8$

$a + \frac{m}{\sqrt{2}} = 9$

$6 = m\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\right)$

$a = -12$

d'un autre coté la surface de cette par mo est $2\varpi (r-y)^2 \cos x\, dx$
en désignant par h la conductibilité extérieure et par a la température
extérieure on aura $2\varpi h(v-a)(r-y)^2 \cos x\, dx$ pour l'expression
de la quantité de chaleur qui rayonne dans l'espace en dt donc avoir

$$-K\frac{dv}{dy} 2\varpi(r-y)^2 \cos x\, dx + 2\varpi h(v-a)(r-y)^2 \cos x\, dx$$

$$-K\frac{dv}{dy} 2\varpi(r-y)^2 \cos x\, dx = 2gr^2 \cos x^2 dx - 2\varpi h(v-a)(r-y)^2 \cos x\, dx$$

et cette condition devant avoir lieu lorsque y est nulle on a

$$g\cos x = -K\varpi \cdot \frac{dv}{dy} + h\varpi(v-V)$$

$$\text{ou } \frac{dv}{dy} = \frac{h}{K}(v-V) - \frac{g}{K\varpi}\cos x \qquad (6)$$

ainsi les deux équations qui servent à déterminer la fonction v sont
la précédente (6) et celle ci

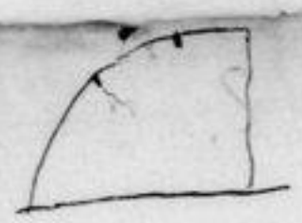
$$\frac{d^2v}{dx^2} - \tan x \cdot \frac{dv}{dx} + \frac{d^2v}{dy^2}(r-y)^2 - 2\cdot\frac{dv}{dy}(r-y) = 0$$

il s'agit maintenant d'examiner avec beaucoup d'attention la nature de ces équations.

— la valeur de $\frac{dv}{dy}$ étant pour le globe terrestre une quantité infiniment
petite. il paraît que l'on peut en général écrire pour la surface l'équation

$$\frac{h}{K}(v-a) - \frac{g}{K\varpi}\cos x \quad \text{ou} \quad v-a = \frac{g}{h\varpi}\cos x \quad \text{et} \quad v = a + \frac{g}{h\varpi}\cos x$$

ainsi la température polaire est la température même de l'espace
et l'excès de la température v d'un parallèle quelconque sur la température
polaire est proportionnelle au cosinus de la latitude.



$a + m\omega^2 x = 3,1$

$\cdot(\Omega^2)$

(Se rapporte aux températures terrestres)

minimis Habilitas
analyse probabilis haud illaudanda.



le solide infiniment profond terminé par un plan entretenu à dans toutes les parties la température θ. on abaisse tout à coup à la température constante 0. il s'agit de connaître la valeur v de la température d'un plan dont la profondeur est x à cette température étant une fonction de x et de t depuis l'application de la cause qui a agi sur la surface.

cette question est résolue par l'équation suivante

$$v = \frac{2\theta}{\pi} \int_0^\infty \frac{dp}{p} \cdot \sin(px)\, e^{-p^2 \frac{Kt}{c\cdot D}} \quad \text{ou} \quad v = \frac{2\theta}{\sqrt{\pi}} \int_0^R dr\, e^{-r^2}$$

la limite R est $\frac{x}{2\sqrt{\frac{Kt}{c\cdot D}}}$. on se propose d'appliquer cette solution au cas où l'on considérerait une valeur du temps t extrêmement grande et une valeur médiocre de x dans ce cas la limite R a une très petite valeur or l'intégrale $\int_0^R dr\, e^{-r^2}$ ou $r - \frac{1}{3}r^3 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}r^5 - \frac{1}{2\cdot 3}\frac{1}{7}r^7 + \ldots$ est sensiblement égale à r car le terme $\frac{1}{3}r^3$ devient infiniment petit lorsque r=R on aura donc $v = \frac{2\theta}{\sqrt{\pi}} R$ ou $v = \frac{2\theta}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{x\sqrt{c\cdot D}}{2\sqrt{Kt}}$ ainsi la température varie en proportion à la profondeur. Soit $c\cdot D = 1625$ $K = \frac{1}{2}$ coefficient qui ne varient pas avec la

Soit $x = 30$ mètres, $\theta = 100$ on demande quel doit être t pour que la valeur de v soit 1 ou environ $\frac{v}{\theta} = \frac{1}{100} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{x\sqrt{c\cdot D}}{2\sqrt{Kt}}$ ou $\frac{1}{10000} = \frac{c\cdot D}{\pi K t} \cdot x^2$ ou $t = \frac{10000 \cdot c\cdot D \cdot x^2}{K\pi}$

$$t = \frac{10000 \cdot 1625 \cdot \frac{2}{3} \cdot m^2}{60 \cdot 24 \cdot 365}$$

$$= \frac{1000}{6\,12}\,\frac{1}{73}\,\frac{325}{m^2}$$

$$\begin{array}{r} 72 \\ 73 \\ \hline 216 \\ 504 \\ \hline 5256 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 325000 & 5256 \\ 31536 & 61 \\ \hline 9640 & \end{array}$$

$$T = 61\, m^2$$

$$m\sqrt{\pi} = 30$$

$$m^2 = \frac{900}{\pi}$$

$$T = \frac{61 \cdot 900}{\pi} = \frac{61 \cdot 900 \cdot 113}{355}$$

$$= \frac{61}{71}\,\frac{180 \cdot 113}{20340\quad 2907}$$

$$\begin{array}{r|l} 180 & \\ 113 & \\ \hline 540 & \\ 180 & \\ 180 & \\ \hline 20340 & \\ 2907 & \end{array}$$

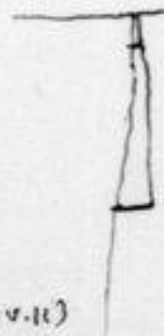
Si l'on compte ten seconds on trouve environ la valeur que doit être t pour que la température du sol à 30 mètres au dessous de la surface ait acquis 17 degrés and pour que la température du sol étant de cent degrés on observe 1 degré à 30 mètres au dessous de la surface.

---

le solide étant d'abord entièrement on trouve que v est 1 lorsque $x = 30$ mètres on demande combien il doit s'écouler de temps pour que cette valeur de v soit réduite à $\frac{1}{2}$ pour la profondeur de 30 mètres ; on aura $\frac{v}{\theta} = \frac{1}{200} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{x\sqrt{c\cdot D}}{2\sqrt{Kt}}$ donc $\frac{1}{40000} = \frac{x^2 \cdot c\cdot D}{\pi K t}$ le temps t doit donc être devenu 4 fois plus grand (pendant qu'il s'écoulait encore 3 · 17 days ou 5234 ans pour la refroidissement qui était 1 pour 30 mètres) soit réduit à $\frac{1}{2}$ pour 30 mètres

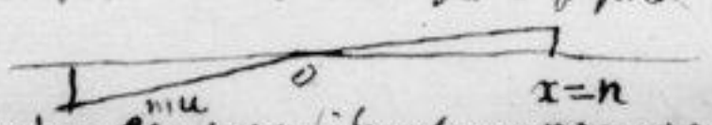
---

nous allons maintenant résoudre cette autre question :



dans un solide infiniment profond terminé par un plan infini la température initiale est exprimée par $\frac{1}{30}x$ et cette solidité suivant cette loi jusqu'à la profondeur de $x = 30$ mètres dans toute cette profondeur la température initiale est 1 on a la surface maintenue à la température 0 on demande la valeur de v en fonction de t.

la question se réduit à celle ci une barre solide infiniment longue et prolongée depuis et à partir du point 0 (ne pouvant rendre la valeur pour la surface) est d'abord échauffée comme l'indique la figure ci dessous du point 0



les températures sont nulle jusqu'à la valeur $\frac{n}{30}$ et au delà sont 1 les points à gauche du point 0 l'extrémité est brusquement refroidie

60 1440 323 600
24
240 303
120 720
864
432
32360

$\frac{n^2}{4Kt}$ $\frac{n^2}{2 \cdot Kt}$ $\frac{\pi^2 \cdot 1083 \cdot 3600}{2 \cdot 600000}$ $\frac{3600000}{4}$

120 metres $\frac{n}{2\sqrt{Kt}}$
240
20 000 ans.

$\frac{x^2}{\sqrt{Kt}}$ $\frac{x^2 \cdot C \cdot D}{Kt}$ x^2

$n = 60$ milimetres
25 milli
25000 Litre

$\frac{60000 \cdot 60000 \cdot 1083}{2 \cdot 100 \cdot 32360}$ $\frac{60 \cdot 60000 \cdot 1000}{2 \cdot 1 \cdot 60}$ 25000

$n = 60000$
$t = 25000$
$x =$

il s'agit parlementent de déduire de la solution relative à la sphère celle qui convient au solide terminé par un plan infini car l'analyse d'autre s'est servi pour cette dernière question est sans doute inexacte. la valeur de v est ainsi exprimée

$$v = \int_x^{\infty} \frac{2}{x} \sin(nx) \frac{\int_0^x dz.z.f'z.\sin nz}{X - \frac{1}{2n}\sin 2nX} \qquad (1)$$

il faut donner à n toutes les valeurs et prendre la somme des termes où $nX = \xi$ et l'on sait que $\xi = i\omega + q$ la quantité chiffre sont inconnues que la valeur de q n'augmente jusqu'à l'infini et que le nombre X atteint l'infini la valeur de l'arc q est bornée par une partie infiniment petite de l'arc $i\omega$. l'équation qui donne n est $\frac{nX}{\tang nX} = 1 - hX$ (2)

le facteur $\frac{2}{x}\sin(nx)$ ou $2n \cdot \frac{\sin(nx)}{nx}$ est le produit de $2n$ par $\sin\left(\xi \frac{x}{X}\right)$ le facteur $\frac{nn}{X}$ ou $\frac{2n}{X - X\frac{\sin 2nX}{2nX}}$

$\frac{\sin\left(\xi \frac{x}{X}\right)}{\xi \frac{x}{X}}$ ou $\frac{1}{1 - \frac{\sin\xi\cos\xi}{\xi}}$

ou $2n$ ou $\frac{1}{X} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\sin\xi\cos\xi}{\xi}}$

Il faut en premier lieu écrire $X - x = u$ à la place des inconnues la profondeur u le facteur $\sin nx$ devient $\sin nX\left(1 - \frac{u}{X}\right)$ ou $\sin\xi\left(1 - \frac{u}{X}\right)$. au lieu de $\frac{2}{x}\sin nx$ on écrira $\frac{2n}{nx}\sin nx$ et $2n \frac{\sin\left(\xi\sqrt{1 - \frac{u}{X}}\right)}{\xi\sqrt{1 - \frac{u}{X}}}$ le dénominateur est $X - \frac{1}{2n}\sin 2nX$

ou $\frac{1}{X - \frac{X}{2nX}\sin 2nX}$ ou $\frac{1}{X} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\sin 2\xi}{2\xi}}$ ou $\frac{1}{X} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\sin\xi\cos\xi}{\xi}}$

quantités quantités qui sont dans le type ✓ on l'exprimera comme il suit ou bien à 2 on écrit $X - \beta$ et au lieu de $f2$ on mettra $f\beta$ pour indiquer la température à la profondeur β au lieu de $\sin nx$ on aura $\sin nX\left(1 - \frac{\beta}{X}\right)$ ou $\sin\xi\sqrt{1 - \frac{\beta}{X}}$. il faut prendre l'expression $X\left(1 - \frac{\beta}{X}\right)\sin\left(\xi\sqrt{1 - \frac{\beta}{X}}\right)$. [illegible] on aura $v = \sum \frac{nn}{X} \frac{1}{1 - \frac{\sin\xi\cos\xi}{\xi}} \frac{\sin\left(\xi\sqrt{1 - \frac{u}{X}}\right)}{\xi\sqrt{1 - \frac{u}{X}}} \int_0^X d\beta\, f\beta . X\sqrt{1 - \frac{\beta}{X}}\sin\xi\sqrt{1 - \frac{\beta}{X}}$

nous examinerons maintenant le cas où les parties de solide situées à une profondeur extrêmement grande auront toutes leurs densités, toutes les autres conditions restant invariables et étant supposées nulles. nous déterminerons l'effet qui tient produit sur les points de la surface il nous supposerons que la fonction $f(\beta)$ qui exprime l'état initial a toutes les valeurs nulles depuis $\beta = 0$ jusqu'à $\beta = m$ et que de puis $\beta = m$ jusqu'à $\beta = m + 12$ la fonction restant égale à une constante b. nous attribuerons à m une valeur immensément grande et à n une valeur infinie. il faut donc dans l'équation (7') écrire la constante b au lieu de $f\beta$ et prendre pour limite de l'intégrale relative à β les longueurs m et n. effectuant l'intégration pour β le terme $r^2 \int_m^\beta d\beta \cos r\beta$ devient

$r^2 \cos rm \cdot \frac{1}{r} (\sin r\beta - \sin rm)$ et faisant $\beta = n$ on trouve

$\cos rm (\sin rn - \sin rm)$ si la valeur de n est infinie

on le supposera le terme $\sin(rn)$ est une fonction périodique de r qui devient alternativement positive et négative et change très rapidement à mesure que la variable r prend toute la ligne $\int dr$ en augmentant depuis 0 jusqu'à l'infini. si l'on considère un seul intervalle infiniment petit compris depuis $r = R$ jusqu'à $r = R + \frac{2\pi}{\beta}$ la fonction de r qui est placée sous le signe d'intégrale sera sensiblement la même valeur pendant tout cet intervalle $\frac{2\pi}{\beta}$ conservera dans cet intervalle $\frac{2\pi}{\beta}$ comme désignons par $\Phi_1 R$ la plus grande de ces valeurs dans l'intervalle $\frac{2\pi}{\beta}$ et par $\Phi_2(R)$ la moindre de ces valeurs

$\int_0^{H_\infty} dr$ antécédent de $(\sin rn - \sin rm)$ facteur $\frac{r}{b^2 + r^2}$

seulement peu différentes entre elles. mais la fonction dont il s'agit reste

Si nous reprenons l'équation (2) de Lagrange 18 en y faisant $t=0$ on trouve cette équation qui devient identique

$$f u = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{dr}{h^2+r^2} \int_a^A d\beta f\beta \left\{ \begin{array}{l} h^2 \sin ru \sin r\beta + hr \sin ru \cos r\beta \\ + hr \cos ru \sin r\beta + r^2 \cos ru \cos r\beta \end{array} \right\}$$

ou $f u = \frac{2}{\pi} \int_a^A d\beta f\beta \int_0^\infty \frac{dr}{h^2+r^2} \cdot \frac{h^2}{2} \cos(ru-r\beta) - \frac{h^2}{2} \cos(ru+r\beta)$

$+ hr \left(\sin ru + r\beta \right)$

$+ r^2 \left(\cos ru - r\beta \right) + \frac{r^2}{2} \cos(ru+r\beta)$

Si l'on fait $h=1$ (cas particulier) et —

ou $f u = \frac{2}{\pi} \int_a^A d\beta f\beta$ et si l'on prend les valeurs des intégrales

$\int_0^\infty \frac{dr}{1+r^2} \cos ru$, $\int_0^\infty \frac{dr \cdot r \cdot \sin ru}{1+r^2}$, $\int_0^\infty \frac{dr \cdot r^2}{1+r^2} \cos ru$ indiquées par la 434 de la théorie de la chaleur on voit que sous la forme $\int_0^\infty$ toutes les intégrales prennent cette forme, comme l'intégrale $\int_0^\infty \frac{dr\, r^2}{1+r^2} \cos ru$ est la même que l'intégrale $\int_0^\infty \frac{dr}{1+r^2} \cos ru$ la valeur de fu se réduit à la somme

$$f u = \frac{2}{\pi} \int_a^A d\beta f\beta \int_0^\infty \frac{dr}{1+r^2} \left\{ \cos(ru-r\beta) + r \sin(ru+r\beta) \right\}$$ (second membre fini

devant la valeur fu lorsque u est compris entre a et A et zéro devient nulle

lorsque u sera plus grand que A qui est toujours supposé

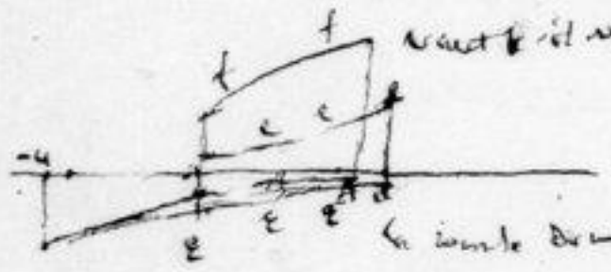
supposons d'abord que u surpasse A qui est toujours supposé plus grand que β la première

intégrale sera $\int_a^A d\beta f\beta e^{-(u-\beta)}$ et la seconde sera $\int_a^A d\beta f\beta e^{-(u+\beta)}$ on voit en réunissant

par la même même de l'intégrale que nous connaissons la valeur exacte de $e^{-(u-\beta)}$ ou e^{-x} il faut

considérer la loi de la variabilité qui entre $(u-\beta)$ si cette variable est nulle le facteur

vaut 1 il vaut e^{-x} si x est infini et e^x si x est négatif



supposons que la valeur de β varie depuis $\beta=a$ jusqu'à $\beta=A$ et prenons

la courbe dont l'équation représente $f\beta$ si l'on prend la longueur a à la droite de o

$a-\beta$ sera pris à gauche de a dans l'intervalle compris entre a et A à droite de a dans l'intervalle

$a-\beta$ sera pris à droite de a et $a+\beta$ à gauche de a dans l'intervalle compris entre a et A à droite de a

$a+\beta$ sera pris à droite de a et $a-\beta$ à gauche de a dans l'intervalle compris entre a et A à droite de a

la somme des β des données représente $f\beta$ si l'on prend la longueur a à la droite de o

$a-\beta$ sera pris à droite de a et $a+\beta$ à gauche de a dans l'intervalle compris entre a et A à droite de a

$a+\beta$ sera pris à droite de a et $a-\beta$ à gauche de a dans l'intervalle compris entre a et A à droite de a

la somme des β des données représente $f\beta$ si l'on prend la longueur a à la droite de o

$a-\beta$ sera pris

la température variable d'une sphère dont toutes les couches ont reçu la température initiale et dont la surface est retenue à cette température — Lorsque a est très petit

$$v = \frac{2b}{\omega}\frac{X}{x}\sum -e^{\frac{-i^2\omega^2}{x^2}\frac{Kt}{c\cdot D}}\sin\left(i\omega\frac{x}{X}\right)\cdot\frac{\cos i\omega}{i}$$

(1) en effet la valeur de $\frac{dv}{dt}$ est

$$\frac{2b}{\omega}\frac{X}{x}\sum \frac{i^2\omega^2}{X^2}\frac{K}{c\cdot D}\,e^{\frac{-i^2\omega^2}{x^2}\frac{Kt}{c\cdot D}}\sin\left\{i\omega\frac{x}{X}\right\}\frac{\cos i\omega}{i}$$

et la valeur de $\frac{d^2(vx)}{dx^2}$ est

$$\frac{2b}{\omega}X\sum \frac{i^2\omega^2}{X^2}e^{\frac{-i^2\omega^2}{x^2}\frac{Kt}{c\cdot D}}\sin\left(i\omega\frac{x}{X}\right)\frac{\cos i\omega}{i}$$

donc $\frac{dv}{dt} = \frac{1}{x}\cdot\frac{K}{c\cdot D}\frac{d^2(vx)}{dx^2}$ ce

$v + x\frac{dv}{dx}$

$2\frac{dv}{dx} + x\frac{d^2v}{dx^2}$

(2) $$\frac{dv}{dt} = \left\{\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{dv}{dx}\right\}\frac{K}{c\cdot D}$$ or cette équation différentielle est celle qui convient au mouvement de la chaleur dans la sphère. (voir chaleur pag. 340) De plus à l'instant $t=0$ la valeur de v est nulle enfin lorsque t est infini la quantité placée sous le signe Σ devient $\sin\left(i\omega\frac{x}{X}\right) - \frac{1}{2}\sin 2\omega\frac{x}{X} + \frac{1}{3}\sin 3\omega\frac{x}{X} - \frac{1}{4}(\sin 4\omega\frac{x}{X}) + \&$

or cette expression équivaut à $\frac{1}{2}\omega\frac{x}{X}$ pour toutes les valeurs de x comprises entre 0 et X donc $v = \frac{2b}{\omega}\frac{X}{x}\cdot\frac{\omega}{2}\frac{x}{X} = b$

Dans l'équation (1) nous avons mis $X-u$ au lieu de x et nous considérons u comme très petite quantité comparable à X. Nous regarderons # le facteur $\frac{X}{x}$ ou $\frac{X}{X(1-\frac{u}{X})}$ devient 1 facteur de $\sin\omega$.

X comme une longueur le facteur $e^{\frac{-i^2\omega^2}{x^2}\frac{Kt}{c\cdot D}}$ devient $\sin\left(i\omega\frac{x}{X}\right)$ ou $\sin\left(i\omega\frac{X}{X}(1-\frac{u}{X})\right)$ devient $\sin(i\omega - i\omega\frac{u}{X})$ ou $-\omega\sin\omega\frac{u}{X}$ étant toujours <1

incomparablement plus grande que la unité divisée à la quelle se rapportent les coefficients K c D et par conséquent une longueur du même ordre que cette unité

(3) $$v = \frac{2b}{\omega}\sum e^{\frac{-i^2\omega^2}{x^2}\frac{Kt}{c\cdot D}}\frac{\sin\left(i\omega\frac{u}{X}\right)}{i}$$

Soit une variable λ qui devient successivement $d\lambda$ $2d\lambda$ $3d\lambda$ $id\lambda = \lambda$ soit $X = m\omega l$. le nombre m est supposé très grand, et l est une longueur finie comme l (l'unité de mesure) on a donc $\frac{l}{m\omega l}\frac{i\omega}{x} = \frac{i}{m\omega l}\frac{\omega}{x} = \frac{i}{ml}$

$d\lambda = \frac{1}{ml}$, donc $\frac{i\omega}{x}$ ou $\frac{i\omega}{m\omega l} = \frac{i}{ml} = id\lambda = \lambda$ donc, $i = \frac{\lambda}{d\lambda}$

$$v = \frac{2b}{\omega}\sum \frac{d\lambda}{\lambda}e^{-\lambda^2\frac{Kt}{c\cdot D}}\sin(\lambda u) \quad \text{ou} \quad v = \frac{2b}{\omega}\int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda}e^{-\lambda^2\frac{Kt}{c\cdot D}}\sin(\lambda u)$$

il suit de là que la valeur de $\frac{dv}{du}$ peut être exprimée sous cette forme. $\frac{dv}{du} = \frac{2b}{\omega}\int_0^\infty d\lambda\, e^{-\lambda^2\frac{Kt}{c\cdot D}}\cos(\lambda u)$ or l'intégrale exprimée par le second membre peut être effectuée lorsque la valeur

0

il faut calculer $\sin\left(\xi \frac{i-\beta}{x}\right)$ ou $\sin\left(\overline{\omega+q}\ \frac{i-\beta}{x}\right)$
ou $\sin\left(i\omega + q - i\omega\frac{\beta}{x}\right)$ en négligeant $-q\frac{\beta}{x}$ attendu comme infiniment petit. Le résultat est donc $\cos i\omega \sin\left(q - i\omega\frac{\beta}{x}\right)$
ou par le même calcul $\sin\left(\xi \frac{i-u}{x}\right) = \cos i\omega \sin\left(q - i\omega\frac{u}{x}\right)$
ou $\xi \frac{i-u}{x} = \xi$ car le terme omis $\frac{u}{x}$ est infiniment petit par rapport à 1. après ces réductions on trouve

$$v = \int \frac{2\pi \cdot \frac{1}{1 - \sin\xi \cos\xi}}{q} \cdot \frac{\cos i\omega \sin\left(q - i\omega\frac{u}{x}\right)}{i\omega} \int_0^x d\beta\, f\beta \cos i\omega \sin\left(q - i\omega\frac{\beta}{x}\right)$$

intégrale résultat exact pour x infiniment et infiniment quelconque. on a aussi $\sin\xi = \sin(i\omega + q) = \cos i\omega \sin q$
$\cos\xi = -\cos i\omega \cos q$ et $\sin\xi \cos\xi = -\cos q \cdot \sin q$ on a donc

$$\frac{1}{1 + \frac{\cos q \sin q}{i\omega + q}} = \frac{1}{1 + \frac{\cos q \sin q}{i\omega}}$$

ou $\frac{1}{1 + \cos q \sin q}$

$$v = \int \frac{2\pi}{1 + \frac{\cos q \sin q}{i\omega}}$$

ou bien encore

ou $\frac{i\omega}{i\omega + \cos q \sin q}$

$$v = \int \frac{2\pi}{i\omega + \cos q \sin q}$$

et enfin en multipliant par numérateur et dénominateur par $\frac{1}{i\omega}$ donc il en est de même de $\cos q \sin q$ qui devient $\frac{1}{i\omega}$ devient

$$\frac{1}{1 - \frac{\sin\xi \cos\xi}{q}}$$

$$\text{donc } v = \int \frac{2\pi}{1 - \frac{\sin\xi \cos\xi}{q}} \cdot \frac{\cos i\omega \sin\left(q - i\omega\frac{u}{x}\right)}{i\omega} \int_0^x d\beta\, f\beta \sin\left(q - i\omega\frac{\beta}{x}\right)$$

$$\text{ou } \frac{2\pi x}{i\omega} = \frac{i\omega + 1}{i\omega} = 1$$

$$\text{donc } v = \frac{2}{x} \sin\left(q - i\omega\frac{u}{x}\right) \int_0^x d\beta\, f\beta \sin\left(q - i\omega\frac{\beta}{x}\right)$$

De l'équation $\tan q = \frac{i\omega + q}{1 - hx}$ on tire $\tan q = -\frac{i\omega}{hx}$

$$= \cos^2 q \text{ et } \frac{i^2\omega^2}{h^2x^2} = \tan^2 q \text{ soit maintenant}$$

$$\frac{1}{1 + \frac{i^2\omega^2}{h^2x^2}} \text{ et } \frac{\frac{h^2x^2}{h^2x^2}}{1 + \frac{i^2\omega^2}{h^2x^2}}$$

$x = m\omega$ k nombre m et ω infiniment. Soit $du = \frac{1}{m}$, $i\omega du = u = \frac{i}{m}$

$\frac{i\omega}{x} = \frac{i\omega}{m\omega} = \frac{i}{m} = u$ donc $\cos q = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{u^2}{h^2}}}$, $\sin q = \frac{u}{h} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{u^2}{h^2}}}$

ou $\cos q = \frac{h}{\sqrt{h^2 + u^2}}$ ou $\sin q = \frac{u}{\sqrt{h^2 + u^2}}$

Depuis $x = m\omega$ donc $\frac{1}{x} = \frac{1}{m\omega} = \frac{i}{u} du$ on a donc pour la valeur cherchée

$$v = \frac{2}{\omega} \int_0^\omega du \left(\sin q \cdot \omega(u\beta) - \cos q \cdot \sin(u\beta)\right) \int_0^\omega d\beta\, f\beta \left(\sin q \cdot \cos u\beta - \cos q \sin u\beta\right)$$

$$\text{ou } v = \frac{2}{\omega} \int_0^\omega \left(\frac{u\cos(u\beta) - h\sin(u\beta)}{\sqrt{h^2 + u^2}}\right) du \int_0^\omega d\beta\, f\beta \frac{u\cos u\beta - h\sin u\beta}{\sqrt{u^2 + h^2}}$$

$$v = \frac{2}{\omega} \int_0^\omega \left(\frac{u\cos(u\beta) - h\sin(u\beta)}{\sqrt{h^2 + u^2}}\right) du \int_0^\omega d\beta\, f\beta \left(\frac{u\cos u\beta - h\sin u\beta}{\sqrt{u^2 + h^2}}\right)$$

il reste à diviser par ω cette valeur de T: ce résultat est celui qui convient aux températures très basses mais non aux températures élevées. Supposons par exemple que la valeur K' qui convient à la matière soit seulement égale à $\frac{K}{\omega}$ ou à l'ignorant pour K celle qui convient aux fers on trouvera alors pour la valeur T' du temps cherché $T' = 18330$ années et de cette dernière l'on voit encore beaucoup plus grand parce que la valeur réelle de K' est beaucoup plus petite que celle qu'on suppose.

Ainsi il y a cependant que si la surface d'un corps solide maintenue primitivement à la température 0 et si la température initiale était 100 degrés il faudrait qu'il fut écoulé plus de vingt millions d'années pour que à une profondeur de 30 mètres la température fut réduite à 1 degré.

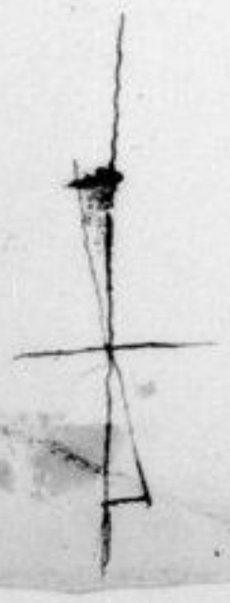
Si la surface n'était pas soumise à la température 0 mais si elle perdait la chaleur librement en vertu de la loi de Newton à la température 0 il est manifeste que la chaleur disparaîtrait encore plus lentement. et par conséquent il faudrait vingt millions d'années pour que à 30 mètres de profondeur la température fut réduite à 1 degré

Cherchons maintenant combien il faut d'années de temps pour que la température qui à 30 mètres de profondeur était 1 degré fut réduite à $\frac{1}{2}$ degré. Ainsi $\frac{v}{6}$ doit devenir $\frac{1}{200}$ il faudra évidemment la même valeur que le temps était quatre fois plus grand que 18330 ainsi il faudra qu'il s'écoule encore temps égal à 3 fois 18330 pour que la température qui était 1 degré à 30 mètres soit réduite à un demi degré.

L'équation $v = \frac{6x\sqrt{c\rho}}{\sqrt{\omega}\sqrt{Kt}}$ montre que la température réduite augmente très rapidement avec la profondeur et cette équation convient à la profondeur de 30 mètres pour laquelle le temps écoulé depuis 323.. ans. ce temps devrait être 4 fois plus grand pour une profondeur double. L'équation indique donc à une profondeur 4 fois plus grande c'est à dire à 120 mètres lorsqu'il s'est écoulé 16 fois 323 ans ou 5200 ans.

Les observations nous montrent que l'état de l'enveloppe terrestre est celui où le globe ayant été échauffé dans toute sa masse est ensuite refroidi dans un espace froid.

Supposons maintenant que l'accroissement de 1 degré pour 30 mètres (tel que les observations l'indiquent) subsiste depuis la surface dont la température est 0 jusqu'à une profondeur de n mètres (le nombre n est supposé très grand et au-delà de cette profondeur la températures sont nulles dans toute la masse. La surface du solide continue d'être assujettie à la température 0 il s'agit de déterminer l'état variable du solide.



on employera pour résoudre cette question l'équation générale $v = \frac{1}{\sqrt{\omega}} \int_{-\infty}^{+\infty} dq\, e^{-q^2} f(x + 2q\sqrt{Kt})$ la fonction f2 qui exprime l'état initial est nulle depuis $x = -n$ jusqu'à $x = n$ et elle est nulle pour toutes les autres valeurs de x. il faut donc que l'on ait écrit $\varpi(x + 2q\sqrt{Kt})$ au lieu de $f(x + 2q\sqrt{Kt})$ et prendre l'intégrale de $x + 2q\sqrt{Kt} = -n$ à $x + 2q\sqrt{Kt} = n$ ou de $q = \frac{-n-x}{2\sqrt{Kt}}$ à $q = \frac{n-x}{2\sqrt{Kt}}$



le sol Te infiniment profond termine par couches d'égale température initiale θ_0 on supposant la surface extérieure à la température zéro
il faut déterminer l'état variable du sol

on peut employer l'expression $v = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta\, e^{-\eta^2} f(x + 2\eta\sqrt{Kt})$ la fonction f étant
telle que f devienne à est positive la fonction négative la constante θ et de la
variable η est négative la fonction a même valeur avec contraire $-\theta_0$.
tant que $x = 0$ c'est à dire tant que $x + 2\eta\sqrt{Kt} = 0$ la fonction f a la plus grande
valeur 1 - mais η est égale à $\frac{-x}{2\sqrt{Kt}}$ prenant donc cette valeur $v = 0$ en x on a
la ligne ~~de~~ ligne droite limite devant l'ordonnée est θ tant que
η est plus grande que $\frac{-x}{2\sqrt{Kt}}$ est négative tant que η est moindre que $\frac{-x}{2\sqrt{Kt}}$
d'où l'on conclut que la valeur de v est celle exprimée $v = \frac{2\theta}{\sqrt{\pi}} \int_0^R d\eta\, e^{-\eta^2}$ la limite R
est $\frac{x}{2\sqrt{Kt}}$ c'est en effet ce que nous avons trouvé antérieurement par une méthode
différente la valeur de K devant être remplacée par celle $\frac{K}{c\delta}$ - on a donc

$$v = \frac{2\theta}{\sqrt{\pi}} \int_0^R 2r e^{-r^2} = \frac{2\theta}{\sqrt{\pi}} \int_0^R dr \left(2 - r^2 + \frac{r^4}{2} - \frac{1}{2\cdot 3} r^6 + \dots\right) = \frac{2\theta}{\sqrt{\pi}} \left(r - \frac{r^3}{3} + \frac{1}{2}\frac{r^5}{5} - \frac{1}{2\cdot 3}\frac{r^7}{7} + \dots\right)$$

la limite R étant $\frac{x}{2\sqrt{Kt}}$ nous avons trouvé dans le cas où la profondeur x était infinie
la valeur du terme général du développement était $\frac{1}{2^n} \frac{1}{n!} \frac{1}{2n+1} R^{2n+1}$ - mais ici
$R^2 < \mu$ ou $\frac{x^2 c\delta}{2^2 \cdot K t} < \mu$ ou $t > \frac{x^2 c\delta}{2^2 \cdot K \mu}$ si par exemple on est en quartzite
il faut que l'on ait $t > \frac{2^2 \cdot c \cdot \delta \cdot 1000}{2 \cdot 3 K}$ ou si l'on compte le temps en années

puisque l'on ait $T^{\text{ans}} > \frac{2^2 \cdot c \cdot \delta \cdot 1000}{2 \cdot 3 K \cdot 60 \cdot 24 \cdot 365}$ ou $T > \frac{22^2 \cdot 1625 \cdot 1000}{3 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 365}$

Supposons que $x = 30$ mètres et que l'on connaisse que le zéro a pour la température de point plus à la profondeur de 30 mètres - on pourra donc se servir de la méthode pour déterminer chronologiquement la température du sol pendant la première année de l'ère chrétienne - le temps T exprimé en années doit plus grand que $\frac{2 \cdot (30)^2 \cdot 1625 \cdot 1000}{24 \quad 18 \quad 365 \quad 60}$

ou $\frac{1}{12} \quad \frac{100}{2} \quad \frac{325}{73} \quad \frac{100}{6}$ ou $\frac{325\,000}{1052}$ il faut donc que la température

325 ans on prendra donc comme approximation pour la première année de
la température à 30 mètres de profondeur. la formule devient
à $v = \frac{2\theta}{\sqrt{\pi}} \cdot R$ ou $= \frac{6x\sqrt{c\delta}}{\sqrt{6}\sqrt{Kt}}$.

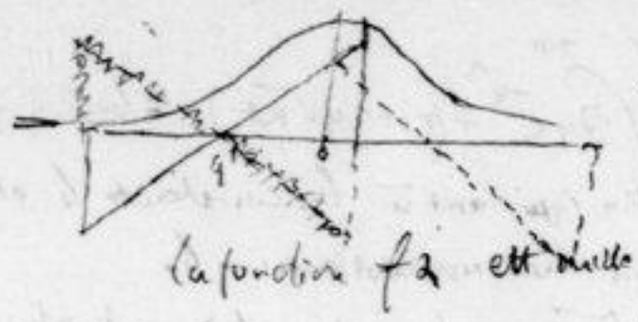
on demande combien doit on multiplier dans t pour que la température
à 30 mètres de profondeur soit la centième partie de θ. il faut écrire
$\frac{x\sqrt{c\delta}}{\sqrt{\pi}\sqrt{Kt}} = \frac{1}{100}$ ou $t = \frac{10000 \cdot x^2 \cdot c\delta}{K\pi}$ ou bien compté en années $\frac{t}{T} = \frac{10000 \cdot x^2 \cdot 1625}{3 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 365}$

ou $T = \frac{325}{73} \cdot \frac{1000}{6} \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{2^2}{3} = \frac{325000}{5256} \cdot 300 = \frac{325000}{1752} = 1855$

ou trace la ligne dont e^{-q^2} est l'ordonnée et la boule q.

la valeur de v est ainsi exprimée

$$v = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dq\, e^{-q^2} f(x + 2q\sqrt{Kt})$$



la fonction f_2 est nulle lorsque $z = v$ c'est à dire lorsque $x + 2q\sqrt{Kt} = v$

ou lorsque $q = -\frac{x}{2\sqrt{Kt}}$ portant de o en q' la valeur $\frac{-x}{2\sqrt{Kt}}$ on voit que la ligne dont l'ordonnée est f_2 croit de 0 en q' lorsque $q = 0$ la valeur de f_2 est mx' donc le coefficient de q est $2m\sqrt{Kt}$ afin que multiplié par l'abscisse q' on ait $\frac{x}{2\sqrt{Kt}}$ le produit soit mx'.

les valeurs de z habituellement depuis $x + 2q\sqrt{Kt} = -u$ jusqu'à $x + 2q\sqrt{Kt} = u$

ou de $q = \frac{-u-x}{2\sqrt{Kt}}$ jusqu'à $q = \frac{u-x}{2\sqrt{Kt}}$

on voit pour cette construction que la valeur de $v = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{u-x}{2\sqrt{Kt}}} dq\, e^{-q^2} (mx' + 2m\sqrt{Kt}\cdot q) + \int_0^{\frac{u+x}{2\sqrt{Kt}}} dq\, e^{-q^2} mx' - 2m\sqrt{Kt}$

ou $v\sqrt{\pi} = mx' \left(\int_0^{\frac{u-x}{2\sqrt{Kt}}} dq\, e^{-q^2} + \int_0^{\frac{u+x}{2\sqrt{Kt}}} dq\, e^{-q^2} \right) + m\sqrt{Kt} \left(\int_0^{\frac{u-x}{2\sqrt{Kt}}} dq\, e^{-q^2} 2q - \int_0^{\frac{u+x}{2\sqrt{Kt}}} dq\, e^{-q^2} \cdot 2q \right)$

or $\int_0^q dq\, e^{-q^2} \cdot 2q = 1 - e^{-q^2} = 1 - e^{-q^2}$ donc $\int_0^{\frac{u-x}{2\sqrt{Kt}}} dq\, 2q\, e^{-q^2} = 1 - e^{-\left(\frac{u-x}{2\sqrt{Kt}}\right)^2}$

$\int_0^{\frac{u+x}{2\sqrt{Kt}}} dq \cdot 2q\, e^{-q^2} = 1 - e^{-\left(\frac{u+x}{2\sqrt{Kt}}\right)^2}$

donc $v\sqrt{\pi} = mx' \int_0^{\frac{u-x}{2\sqrt{Kt}}} + \int_0^{\frac{u+x}{2\sqrt{Kt}}} dq\, e^{-q^2} - m\sqrt{Kt} \left(e^{-\left(\frac{u-x}{2\sqrt{Kt}}\right)^2} - e^{-\left(\frac{u+x}{2\sqrt{Kt}}\right)^2} \right)$

par exemple si la limite u était infinie on aurait $v\sqrt{\pi} = mx'\sqrt{\pi}$ ce qui doit arriver bien souvent parce que la loi de vitesse ne change pas d'état. x' représentant la valeur de v en tenir ainsi

$$v\sqrt{\pi} = mx' \left(\frac{u-x}{2\sqrt{Kt}} + \cdots + \frac{u+x}{2\sqrt{Kt}} \right) - m\sqrt{Kt} \left(1 - \left(\frac{u-x}{2\sqrt{Kt}}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{u-x}{2\sqrt{Kt}}\right)^4 \cdots - 1 + \left(\frac{u+x}{2\sqrt{Kt}}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{u+x}{2\sqrt{Kt}}\right)^4 \right)$$

ou $v\sqrt{\pi} = mx' \frac{u}{\sqrt{Kt}} - m\sqrt{Kt} \frac{4mx'}{4Kt}$

ou $v\sqrt{\pi} = mx \left\{ \begin{array}{l} (\mu - \nu) - \frac{1}{3}(\mu-\nu)^3 \\ +(\mu+\nu) - \frac{1}{3}(\mu+\nu)^3 \end{array} \right\} - m\sqrt{Kt} \left\{ \begin{array}{l} (\mu+\nu)^2 - \frac{1}{2}(\mu+\nu)^4 \\ -(\mu-\nu)^2 + \frac{1}{2}(\mu-\nu)^4 \end{array} \right\}$

$v\sqrt{\pi} = mx \left(2\mu - \frac{1}{3}(2\mu^3 + 6\mu\nu^2) \right) - m\sqrt{Kt} \left(4\mu\nu - \frac{1}{2} 8\mu^3\nu \right)$

$v\sqrt{\pi} = mx \left(2\mu - \frac{2}{3}\mu^3 \right) - m\sqrt{Kt} \left(4\mu\nu - 4\mu^3\nu \right)$

$= mx \left(2\mu - \frac{2}{3}\mu^3 \right) - mx \left(2\mu - \cdot 2\mu^3 \right) = mx \cdot \left(2\mu^3 - \frac{2}{3}\mu^3 \right) = mx \cdot \frac{4}{3}\mu^3$

Donc $v\sqrt{\pi} = \frac{4}{3} mx' \left(\frac{n}{2\sqrt{Kt}} \right)^3 = \frac{1}{2\cdot 3} mx' \left(\frac{n}{\sqrt{Kt}} \right)^3$ s'il arrive que la valeur de v soit la valeur de v est $v = \frac{1}{2\cdot 3\pi} mx \left(\frac{n}{\sqrt{Kt}} \right)^3$ ou $\frac{n}{\sqrt{Kt}} = \sqrt[3]{3\pi}$ et en divisant $\frac{c\cdot v}{K}$ on a

$\frac{1}{2} mx$ on aura $1 = \frac{1}{3\pi} \left(\frac{n}{\sqrt{Kt}} \right)^3$ ou $\frac{n\sqrt{c\cdot v}}{\sqrt{K}} = \sqrt{t} \cdot \sqrt[3]{3\pi}$ ou $\sqrt{t} = \frac{n\sqrt{c\cdot v}}{\sqrt{K}\sqrt[3]{3\pi}}$ ou $t = \frac{n^2 c\cdot v}{K\sqrt[3]{9\pi^2}}$

ou $T = \frac{n^2 c\cdot v}{K\sqrt[3]{3\pi^2} \cdot 60 \cdot 24 \cdot 365}$

$\mu^2 + 2\mu\nu + \nu^2$
$\mu^2 - 2\mu\nu + \nu^2$

$\mu^3 - 3\mu^2\nu + 3\mu\nu^2$
$\mu^3 + 3\mu^2\nu + 3\mu\nu^2$
$2\nu\sqrt{Kt} = x$

$-u^2 + ux - x^2$
$u^2 + ux + x^2$

$e^{-r^2} = 1 - r^2 + r^4$
$dr - dr r^2 + dr^4$
$r - \frac{1}{3} r^3$

$\mu^4 + 4\mu^3\nu - 6\mu^2\nu^2$
$\mu^4 - 4\mu^3\nu$
$\nu = \frac{x}{2\sqrt{Kt}}$ $\mu 2\sqrt{Kt} = r$



il s'agit de calculer v et t variables tout en conservant x constante

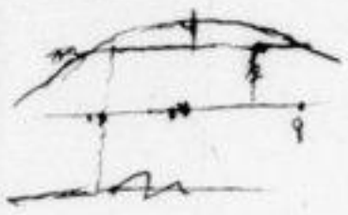
$$v = \frac{1}{\sqrt{\omega}} \int dq\, e^{-q^2} f\left(x + 2q\sqrt{\frac{kt}{c \cdot D}}\right)$$

pour cela nous nous servirons de la formule donnée page 438 (théorie de la chaleur) savoir $\frac{\omega v}{2} = \int_0^\infty dq\, e^{-q^2 \frac{kt}{c \cdot D}} \sin qx \int_0^\infty d\lambda f\lambda \sin q\lambda$

$\dot{x} + 2q\sqrt{kt} > 0$

$q > -\frac{x}{2\sqrt{kt}}$

il faut intégrer pour λ de sorte à considérer x comme fonction de q et en outre intégrer pour q de sorte à considérer la fonction $f\lambda$ comme fonction de λ



et nulle au delà de $\lambda = m$

$$v = \frac{2}{\omega} \int_0^\infty dq\, e^{-q^2 \frac{kt}{c \cdot D}} \sin qx \int_0^m d\lambda f\lambda \sin q\lambda$$

ou a $\frac{1}{q}$ ou $v = \frac{2}{\omega} \int_0^m d\lambda f\lambda \int_0^\infty dq\, e^{-q^2 \frac{kt}{c \cdot D}} \sin qx \sin q\lambda$

$$v = \frac{2}{\omega} \int_0^m d\lambda f\lambda \quad v = \frac{1}{\sqrt{\omega}} \int_0^n dq\, e^{-q^2} \sin qx + \frac{2m}{\sqrt{\omega}} \int_0^n dq \cdot q \sqrt{\frac{kt}{c \cdot p}}\, e^{-q^2}$$

$$= \frac{m}{\sqrt{\omega}} \int_0^n dq\, e^{-q^2} + m \frac{\sqrt{kt}}{c \cdot p} \int 2q\, dq\, e^{-q^2}$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{\omega}} \int dq\, e^{-q^2} f(x + 2q\sqrt{kt}) \quad \Big| \quad \frac{1}{\sqrt{\omega}} \int dq\, e^{-q^2} (mx + 2mq\sqrt{kt})$$

$x + 2q\sqrt{kt} = -n$ $\quad q = \frac{-n-x}{2\sqrt{kt}}$ $\quad \Big| \quad \frac{mx}{\sqrt{\omega}} \int_{\frac{-n-x}{2\sqrt{kt}}}^{\frac{n-x}{2\sqrt{kt}}} dq\, e^{-q^2} + \frac{m\sqrt{kt}}{\sqrt{\omega}} \int 2q\, dq\, e^{-q^2}$

$x + 2q\sqrt{kt} = +n$ $\quad q = \frac{n-x}{2\sqrt{kt}}$

$c - c^{-q^2}$

$c - e^{-n}$

e^{-n}

$n = 1000$ mètres

$t = \frac{4 \cdot n^2 \cdot c \cdot D}{4\omega}$

$4n^2 = 10000 \cdot 900$

$4n^2 = 9000000$

$4n^2 = 1000000$ cm

$2n = 1000$ mètres $\quad n = 500$ mètres

$K = \frac{1}{6}$ $\quad t = \frac{4 \cdot 1000000 \cdot 1625 \cdot 6 \cdot 113}{60 \cdot 24 \cdot 365 \cdot 365}$

$60 \cdot 113$

$\frac{1000000}{6 \cdot 73 \cdot 71}$

$6 \int dq\, e^{-q^2} f(x + 2q\sqrt{kt})$

$x + 2q\sqrt{kt} = p$

$2q\sqrt{kt} = p - x$

$q\sqrt{kt} = p - x$

$dq\sqrt{kt} = dp$

$\frac{6}{\sqrt{\pi}\sqrt{kt}} \int dp\, e^{-p^2}$ $\quad x + 2q\sqrt{kt} = n$

$q = \frac{-x}{2\sqrt{kt}}$

$x + 2q\sqrt{kt} = -\frac{1}{6}$ $\quad x - 2q\sqrt{k}$

$q = \frac{-x}{2\sqrt{kt}}$

$6 \int dq\, e^{-q^2} - \int dq\, e^{-q^2}$

$\frac{-x}{2\sqrt{kt}}$

$2 \int dq\, e^{-q^2}$

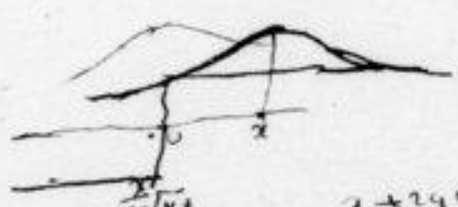
$x + 2q\sqrt{kt} = 0$

$q = \frac{1}{0}$

$q = \frac{-x}{2\sqrt{kt}}$ $\quad 6 = x + 2q\sqrt{kt}$

$x + 2q\sqrt{kt} = -\frac{1}{0}$

$x + 2q\sqrt{kt} = 0$



$2 \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{kt}}} dq\, e^{-q^2}$

$x + 2q\sqrt{kt} = 0$

$x + 2q\sqrt{kt} = \frac{1}{0}$

$6 = x + 2q\sqrt{kt}$

$x + 2q\sqrt{kt} = 0$

73
6
438
71
438
2065
31098

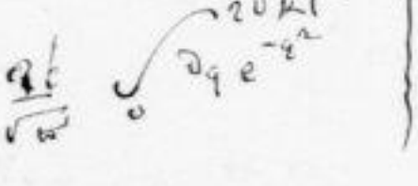
1125
65
365
6574
7345
6219
112540
9329
19246

$31098 \mid 23000$

ou trace la ligne dont e^{-q^2} est l'ordonnée
et l'abscisse q.

l'ordonnée de v est ainsi exprimée

$$v = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-q^2} dq \dots$$



$$\int dq\, e^{-q^2} f(x - 2q\sqrt{\kappa t})$$

$$\int_0^{\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}}} dq\, e^{-q^2} - \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}}} dq\, e^{-q^2} + \int_0^{\infty} dq\, e^{-q^2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int dq\, e^{-q^2} f(x + 2q\sqrt{\kappa t})$$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}}} dq\, e^{-q^2} - \int_{-\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}}}^{0} + \int_{\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}}}^{\infty}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\int_0^{x'} + \int_0^{n-x'} - \int_0^{n+x'} + \int_0^{x'} \right)$$

$$2 \int_0^{x'} - \int_{n-x'}^{n+x'}$$

ou a $\int dq\, e^{-q^2}\left(nx + 2mq\sqrt{Kt}\right) = nx\int dq\, e^{-q^2} + m\sqrt{Kt}\int dq\, e^{-q^2}\cdot 2q$

$= nx\int dq\, e^{-q^2} + m\sqrt{Kt}\left(\quad - e^{-2q}\right)$ (l'on doit écrire $e - e^{-2\left(\frac{-n-x}{2\sqrt{Kt}}\right)}$

$x + 2q\sqrt{Kt} = -u$

$x + 2q\sqrt{Kt} = u$

$q = \frac{-u-x}{2\sqrt{Kt}}$

$-2q = \frac{u+x}{\sqrt{Kt}}$

$q = \frac{u-x}{2\sqrt{Kt}}$

$-2q = \frac{-u+x}{\sqrt{Kt}}$

et l'on a donc $q = \frac{n-x}{2\sqrt{Kt}}$ d'où $v = \frac{mx}{\sqrt{\omega}}\int_{\frac{-n-x}{2\sqrt{Kt}}}^{\frac{n-x}{2\sqrt{Kt}}} dq\, e^{-q^2} + m\sqrt{Kt}\left(e^{\frac{n+x}{\sqrt{Kt}}} - e^{\frac{-n+x}{\sqrt{Kt}}}\right)$

c'est à dire $v = \frac{mx}{\sqrt{\omega}}\int_{q_1}^{q_2} dq\, e^{-q^2} + m\sqrt{Kt}\left(e^{-2q_1} - e^{-2q_2}\right)$ en désignant $q_1 = \frac{-n-x}{2\sqrt{Kt}}$ $q_2 = \frac{n-x}{2\sqrt{Kt}}$

Supposons présentement que la quantité t soit extrêmement grande on pourra alors n'employer que le premier terme du développement $\int dq\, e^{-q^2} = \int dq\,(1 - q^2 + \frac{q^4}{2} - \dots) = q - \frac{1}{3}q^3$

$e^{-q} = 1 - q + \frac{q^2}{2}$ il faut pour cela que le quotient $\frac{1}{3}\frac{q^3}{q}$ ou $\frac{q^2}{3}$ soit une très petite fraction μ

soit une très petite fraction μ ou $\frac{q}{2}$ soit une très petite fraction μ

soit donc $\frac{n+x}{2\sqrt{Kt}} < \mu$ ou $t > \frac{(n+x)^2}{16K\mu^2}$ et comme on ne considère ici que

la plus grande valeur de n on aura $t > \frac{4n^2}{16K\mu^2}$ et mettant pour K sa valeur $\frac{K}{C\cdot D}$

on a donc $t > \frac{1}{4}\frac{n^2 C\cdot D}{K\mu^2}$ ou si l'on compte en années $T > \frac{2n^2\cdot 16\mathfrak{h}}{3\cdot 60\cdot 24\cdot 365\mathfrak{h}}\cdot\frac{1}{\mu^2}$ ou

ou $T > \frac{32\mathfrak{h}}{73}\frac{1}{12}\frac{n^2}{3\cdot 60\,\mu^2}$ par exemple si $n = 1000$ mètres on a $T_\mu > \frac{32\mathfrak{h}}{73}\frac{100000}{6}\frac{1}{3}\frac{1}{\mu^2}$

$73\cdot 72 = 5256$
13768

$32\mathfrak{h}\,00000 \mid 13768$
$31435 \quad\quad 2061$
96400
94609
1791

$\frac{73}{24}$
292
146
1752
7008

si donc T_μ ne pallait 2100 ans il y a un cas douteux que l'on ne doit tout au moins tenter de se borner dans l'expression de e^{-q} aux deux premiers termes mais comme les exponentielles $e^{\frac{n+x}{2\sqrt{Kt}}}$ et $e^{\frac{-n+x}{\sqrt{Kt}}}$ peuvent être beaucoup calculé rigoureusement l'intégrale $\int dq\, e^{-q^2}$ à son premier terme il faut pour cela que le quotient $\frac{q^3}{3}$ soit une très petite fraction soit donc $\frac{q^2}{3} < \mu$ ou $\frac{1}{3}\left(\frac{n+x}{2\sqrt{Kt}}\right)^2 < \mu$ ou $\left(\frac{n+x}{\sqrt{Kt}}\right)^2 < 12\mu$ et si μ est $\frac{1}{300}$ on a $\frac{n+x}{\sqrt{Kt}} < \frac{1}{5}$ ou $t > \frac{25(n+x)^2}{K}$

et comme x est beaucoup plus petit que n on a $t > \frac{25\cdot 4n^2}{K}$ ou mettant K sa valeur $\frac{K}{C\cdot D}$

on a donc $t > \frac{25\cdot n^2\cdot C\cdot D\cdot 4}{K}$ ou $T > \frac{2\cdot 25\cdot n^2\cdot 16\mathfrak{h}\cdot 4}{3\cdot 60\cdot 24\cdot 365\mathfrak{h}}$

si au lieu x est à n quantité beaucoup plus grande si l'on a égard à n on aura $T > \cdot 25\,n^2\cdot\frac{32\mathfrak{h}}{73}\frac{1}{12}\frac{1}{3\cdot 60}$ soit $n = 300$ mètres

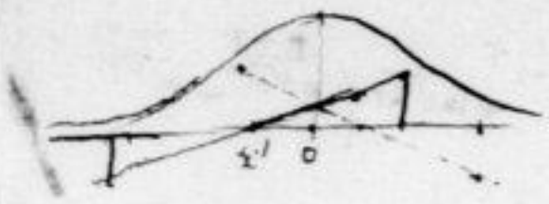
ou a $T > 25\cdot 90000\cdot\frac{32\mathfrak{h}}{73}\frac{1}{12}\frac{1}{3\cdot 60}$ ou $T > \cdot\frac{25}{12}\cdot\frac{32\mathfrak{h}}{73}\frac{10000}{25}$ ou $T >$

ou $T > \frac{32\mathfrak{h}00000}{7008}$ si donc T ne peut être $\frac{1}{7}$ 32h00 ou 4643 ans on pourra

calculer au moyen du seul premier terme si n est 300 mètres et si T est quatre fois plus grand on pourra supposer $n = 600$ mètres on supposera d'autant que x sera beaucoup moindre que n. si x est $\frac{1}{10}$ de n la valeur trouvée pour T sera plus grande d'un dixième de cette valeur ou en supposant $n = 600$ mètres et $x = 30$ mètres on aura cependant également calculé en n'employant que le seul premier terme de la série la valeur de v correspondante à 30 mètres de profondeur. La fraction pèsera $\frac{1}{300}$

$$\int_{q_1}^{q_2} dq\, e^{-q^2} f(x + 2q\sqrt{Kt})$$

$q_1 = z - x$



la courbe f_2 est telle qu'elle vaut m_2 depuis z égale $-n$ jusqu'à z égale $+n$

il faut donc décrire la courbe dont l'ordonnée est e^{-q^2} puis écrivant $x + 2q\sqrt{Kt} = 0$ ou $q = -\frac{x}{2\sqrt{Kt}}$ selon partie de cette valeur de q 0 en x' on placera en x' la ligne dont l'ordonnée est nulle depuis $z = -n$ jusqu'à $z = +n$. cela voudra il faut prendre l'intégrale $\int dq\, e^{-q^2} f_2$ entre les limites indiquées

ainsi pour la courbe f_1 il faut prendre 1° l'intégrale $\int dq\, e^{-q^2} \left(\frac{mx}{2\sqrt{Kt}} + mq\right)$ depuis $q = 0$ jusqu'à $q = n - \frac{x}{2\sqrt{Kt}}$ 2° l'intégrale $\int_0 dq\, e^{-q^2} \left(\frac{mx}{2\sqrt{Kt}} - mq\right)$ depuis $q = 0$ jusqu'à $q = n + \frac{x}{2\sqrt{Kt}}$

Donc $v = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{n - \frac{x}{2\sqrt{Kt}}} dq\, e^{-q^2} \left(\frac{mx}{2\sqrt{Kt}} + mq\right) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{n + \frac{x}{2\sqrt{Kt}}} dq\, e^{-q^2} \left(\frac{mx}{2\sqrt{Kt}} - mq\right)$

ou $v = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{mx}{2\sqrt{Kt}} \left(\int_0^{n - \frac{x}{2\sqrt{Kt}}} dq\, e^{-q^2} + \int_0^{n + \frac{x}{2\sqrt{Kt}}} dq\, e^{-q^2} \right) + \frac{m}{2\sqrt{\pi}} \left(\int_0^{n - \frac{x}{2\sqrt{Kt}}} dq\, e^{-q^2} 2q - \int_0^{n + \frac{x}{2\sqrt{Kt}}} dq\, e^{-q^2} 2q \right)$

l'intégrale $\int dq\, e^{-q^2} \cdot 2q$ est $C - e^{-q^2}$ et prise depuis $q = 0$ cette intégrale est $1 - e^{-q^2}$ ou donc pour la première limite $1 - e^{-\left(n + \frac{x}{2\sqrt{Kt}}\right)^2}$ et pour la seconde $1 - e^{-\left(n - \frac{x}{2\sqrt{Kt}}\right)^2}$ la différence est $e^{-\left(n - \frac{x}{2\sqrt{Kt}}\right)^2} - e^{-\left(n + \frac{x}{2\sqrt{Kt}}\right)^2}$

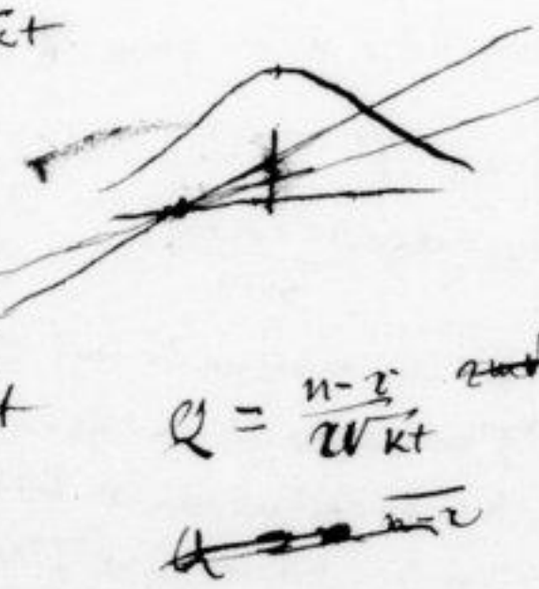
Donc $v = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{mx}{2\sqrt{Kt}} \left(\int_0^{n - \frac{x}{2\sqrt{Kt}}} dq\, e^{-q^2} + \int_0^{n + \frac{x}{2\sqrt{Kt}}} dq\, e^{-q^2} \right) - \frac{m\sqrt{Kt}}{\sqrt{\pi}} \left(e^{-\left(n - \frac{x}{2\sqrt{Kt}}\right)^2} - e^{-\left(n + \frac{x}{2\sqrt{Kt}}\right)^2} \right)$

c'est la valeur exacte de v par exemple si n est infinie on a $v = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}}$



$x + 2q\sqrt{Kt} = n$

$q = \frac{n - x}{2\sqrt{Kt}}$



$2mx\sqrt{Kt}$

$2m\sqrt{Kt}$

$\frac{x}{2\sqrt{Kt}}$

$q = 0$

$m\sqrt{Kt}$

$m \cdot 2\sqrt{Kt} \frac{x}{2\sqrt{Kt}}$

mx

$Q = \frac{n - x}{2\sqrt{Kt}}$

$q = \frac{n - x}{2\sqrt{Kt}}$



il s'agit de calculer l'état variable. Soit $f(x)$ la température initiale en général

$$v = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dq\, e^{-q^2} f\left(x + 2q\sqrt{\frac{kt}{c\cdot D}}\right) \quad \text{Soit} \sqrt{\frac{kt}{c\cdot D}} = h$$

on constate que la fonction $f(x)$ est nulle depuis $x=0$ jusqu'à $x=n$ et $-n$ depuis $x=-n$ jusqu'à $x=0$ il faut donc écrire autour de la ligne f un facteur contant n et intégrer depuis $x+2qh=-n$ jusqu'à $x+2qh=n$ ou de $q=\frac{-x-n}{2h}$ à $q=\frac{n-x}{2h}$ on aboutit pour l'expression de la valeur de v

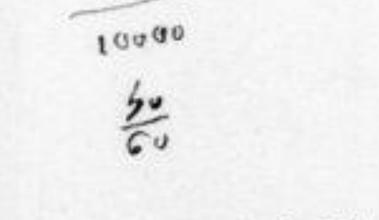
$$v\sqrt{\pi} = \int_{\frac{-x-n}{2h}}^{\frac{-x+n}{2h}} dq\, e^{-q^2} + \int_{\frac{-x-n}{2h}}^{\frac{n-x}{2h}} 2q\, dq\, e^{-q^2} \quad \text{ou} \quad \frac{v\sqrt{\pi}}{n} = 2\int_0^R dr\, e^{-r^2} - h\left(e^{-\left(\frac{n-x}{2h}\right)^2} - e^{-\left(\frac{n+x}{2h}\right)^2}\right)$$

et la limite R est $\frac{n-x}{2h}$. il faut plus que du calcul numérique.

$$e^{-q^2} - 2q\,dq\, e^{-q^2}$$

$$e^{-q^2} - e^{-\left(\frac{x+n}{2h}\right)^2}$$

$$e^{-\left(\frac{x+n}{2h}\right)^2} - e^{-\left(\frac{n-x}{2h}\right)^2}$$



nous considérons ici des valeurs très grandes du temps t et comme $h = \frac{\sqrt{kt}}{\sqrt{c\cdot D}}$ on voit que h est très grande et que par conséquent la limite R est très petite on peut remplacer e^{-r^2} par 1 on a R $e^{-\left(\frac{n-x}{2h}\right)^2}$ et $e^{-\left(\frac{n+x}{2h}\right)^2}$ écrire $1-\left(\frac{n-x}{2h}\right)^2$ et $1-\left(\frac{n+x}{2h}\right)^2$ ce qui donnera pour le facteur de $-h$ la différence $-\left(\frac{n-x}{2h}\right)^2 + \left(\frac{n+x}{2h}\right)^2$ ou $\frac{nx}{h}$ ou encore $\frac{2nx}{h}$ on aurait donc (pour des valeurs très petites)

$$\frac{v\sqrt{\pi}}{n} = 2\left(\frac{n-x}{2h}\right) - h\,\frac{2nx}{2h^2}$$

ou encore $\frac{2nx}{4h^2}$ ou aurait donc $\frac{v\sqrt{\pi}}{n} = 2x\cdot\frac{n-x}{2h} - \frac{2nx}{4h^2} = x\cdot\frac{n-x}{h} - \frac{nx}{2h} = \frac{nx}{2h} - \frac{x^2}{h}$

on trouve donc (sauf erreur de calcul) $v = \frac{n}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{nx}{2h} - \frac{x^2}{h}\right)$ ou

$$v = \frac{n}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{nx\sqrt{c\cdot n}}{2\sqrt{kt}} - \frac{x^2\sqrt{c\cdot n}}{\sqrt{kt}}\right) = \frac{n\sqrt{c\cdot D}}{\sqrt{\pi}\sqrt{kt}}\left(\frac{nx}{2} - x^2\right)$$

Soit $n = \frac{1}{30}$ $n = 500$

$x = \frac{1}{30}$. Donc $v = \frac{v\sqrt{\pi}}{n} = \frac{nx\sqrt{c\cdot n}}{\sqrt{kt}}$ $\quad v = \frac{nn}{n}\,x\,\frac{\sqrt{c\cdot D}}{\sqrt{kt}\sqrt{\pi}}$ $\quad v = n\cdot n\,\frac{2\sqrt{c\cdot D}}{\sqrt{kt}\sqrt{\pi}}$

$\frac{500}{30}$ $\quad v = n\cdot n\cdot x\,\frac{\sqrt{c\cdot D}}{\sqrt{\pi}\sqrt{kt}}$ $\quad v = n$ $\quad \frac{1}{2} = n^2\,\frac{\sqrt{c\cdot D}}{\sqrt{kt}}$

$\frac{500\cdot 30}{2}$ $\quad \frac{v\sqrt{\pi}}{n} = \frac{n}{h}$ $\quad = \frac{1}{2n}$ $\quad t = 2n\cdot\frac{\sqrt{c\cdot D}}{\sqrt{\pi}\sqrt{k}}$ $\quad \frac{\sqrt{c\cdot D}}{\sqrt{\pi}\sqrt{k}\sqrt{t}} = \frac{1}{100}$

$\frac{25000}{2}$ $\quad \frac{30}{60}$

12500
2600
10000

$\frac{30}{60}$

$\frac{\sqrt{c\cdot D}}{\sqrt{\pi}\sqrt{k}\,t}$

Supposons d'abord x très petit par rapport à n on aura $\frac{v\sqrt{\pi}}{n} = 2x\cdot R = 2x\cdot\frac{n}{2h} = x\,\frac{n}{h}$

ou $\sqrt{\pi k} = \frac{y}{n} = \frac{R}{\frac{n}{2h}}$ $\quad \frac{v}{n} = x\cdot\frac{n}{\sqrt{\pi}\,h}$ la valeur de n est $\frac{1}{30}$ ainsi la température à la surface vaudra 1 et soit $\frac{1}{30}$ pour quelle moitié devienne $\frac{1}{60}$ il faut $\frac{v}{n} = \frac{1}{2}$ lorsque x

ou encore $\frac{1}{2} = \frac{n}{h\sqrt{\pi}}$ $\quad \frac{1}{2} = \frac{n\sqrt{c\cdot n}}{\sqrt{kt}\sqrt{\pi}}$ $\quad t = 4\cdot\frac{n^2\,c\cdot n}{k\pi}$ $\quad n =$

$t = \frac{c\cdot D}{\pi\cdot 900}\,\frac{2}{3}\,100000$

$T = \frac{1625\cdot 2\cdot 10}{\pi\cdot 3\cdot 60\cdot 24\cdot 365}$

$= \frac{1}{12}\,\frac{1}{6}\,\frac{1}{3\pi}\cdot\frac{325}{73}$

$4n^2 = 900\cdot 10000 = 9000000$ $\quad n^2 = 225000$ $\quad 1000000$ $\quad 1118$ $\quad 124$ mètres 200 mètres

$1118 \mid n = 400$ $\quad t = \frac{4\cdot 160000\cdot 1625\cdot 2}{3\cdot 60\cdot 24\cdot 365} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{6}\,\frac{16000}{6}\,\frac{325}{73}$

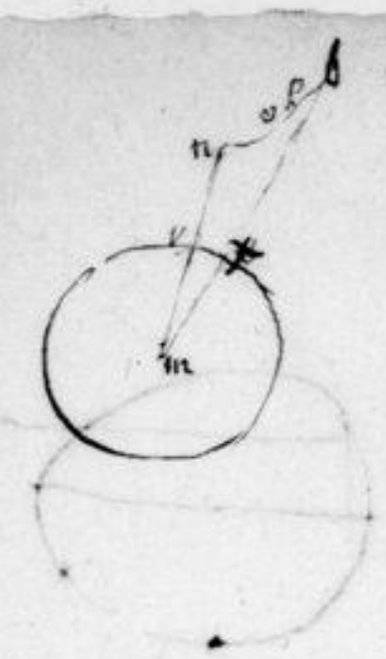
$225,0000 \mid 1118$ $\quad 221$ $\quad 2228$ $\quad n = \frac{3}{2}$ $\quad k = \frac{3}{2\pi}$ $\quad T = \frac{4\cdot 160000\cdot 1625}{60\cdot 24\cdot 365} = \frac{1}{6}\cdot\frac{16000}{6}\,\frac{325}{73}$ $\quad k\pi = \frac{1}{2}$ $\quad k\pi = \frac{325000\cdot 325}{6\cdot 6\cdot 73}$

$\frac{1}{25}$
$\frac{21}{400}$
221

17900
17824

$\frac{3}{2}$ $\quad \frac{3}{12}$ $\quad \frac{1}{4}$ $\quad k\times\frac{1}{4}$ $\quad \frac{3}{2}\,\frac{1}{3}$ $\quad k\pi = \frac{1}{2}$

$T = \frac{4\cdot 2\cdot 25000}{6\cdot 24\cdot 365}\,\frac{1625}{1825}$



une surface n o p q a tout les points également échauffés. un point m est exposé au rayonnement de cette surface.

si de ce point on mene les rayons d'une surface conique qui enveloppe la surface tout les rayons envoyés au point m formeront le cone solide

supposons que l'on trace une surface spherique vtv qui coupe le cone l'intersection de la surface spherique et du cone sera une portion vtv de la surface spherique, en désignant par b la température commune à tout les points n o p q on pourra transporter cette température à tout les points du segment vtv. ce segment pourra être le point m un effet exactement egal à celui de la surface spherique n o p q cette conséquence résulte de la théorie connue de la chaleur rayonnante.

si l'on prend pour le rayon de la sphere l'unité le segment vtv aura une certaine valeur exprimée en nombre le produit de ce nombre par la température b mesure l'action de la surface n o p q sur m

si le rayon de la sphere n'est pas 1 mais r le segment sera egal au segment vtv multiplié par r^2 et par conséquent il faut diviser la surface du segment par le quarré du rayon on a parce moyen la valeur du segment rapportée à la sphere dont le rayon est 1

on peut aussi prendre pour l'expression du segment le rapport de ce segment à la surface spherique dont il fait partie dans ce cas l'expression que l'on substitue à celle du segment vtv est $\frac{vtv}{4\pi}$ divisé par 4π

c'est cette dernière expression que nous employons ordinairement. ainsi en désignant par δ l'aire du segment spherique formé sur la surface spherique dont le rayon est r par un cone dont le sommet est en m et qui enveloppe la surface echauffée dont la température est b dans tout les points. on a $\frac{b.\delta}{4\pi r^2}$ pour l'expression de la chaleur de la surface echauffée sur le point m

~~on cherche ici le point où une sphere spherique. tout les rayons de cette sphere de l'attraction de la surface spherique que la terre dont le sommet est en m. [illegible]~~



la distance de la lune à la terre etant supposée de n demi diametres terrestres la surface spherique dont le centre est au centre de la lune et dont le rayon est nr a pour etendue $4\pi n^2 r^2$ en désignant par r le nombre de metres contenus dans le rayon terrestre

le segment occupé sur cette même surface spherique par le disque terrestre vu de la lune est πr^2 ainsi le segment occupé par le disque terrestre est à la surface spherique totale dans le rapport de 1 à $4n^2$.

chaque point de la superficie de la lune envoye donc à la terre $4n^2$ fois moins de chaleur qu'il n'en recevrait à tout l'espace fut il seul mais il faut considerer ici que les points de la surface de la lune que la terre ne voit point n'envoyent aucune chaleur à la terre et que chaque point de la lune n'étant visible que n'envoye de la chaleur que dans un hémisphere et non dans un hémisphere entier. enfin il faut ajouter que tout les rayons qui s'emploient cette hemisphere n'ont point la même intensité il reste delà que pour connoitre la grandeur de la chaleur que la lune envoye à la terre il faut substituer le calcul sur des élemens dont les effets soient de même genre que celui qu'on a en vue jusqu'ici.

$\frac{dv}{dt} = a - 2hv$

$v = c + u$

$\frac{du}{dt} = a - 2hc - 2hu$

$a - 2hc = v$

$c = \frac{a}{2h}$

$v = \frac{a}{2h} + u$

$\frac{du}{dt} = -2hu$

$u = me^{-2ht}$

$\frac{du}{dt} = -2hu$

$v = \frac{a}{2h} + me^{-2ht}$

$\frac{dv}{dt} = -2hme^{-2ht}$

$a - 2hv = -2hme^{-2ht}$

$\frac{\rho^2}{4\omega r^2}$

$\frac{1}{4}\left(\frac{\rho}{r}\right)^2$

~~$t + a\theta$~~

$v_\theta = \frac{a}{2h} + me^{-2h\theta}$

$v = \frac{a}{2h} + me^{-2ht}$

$\frac{v_t - \frac{a}{2h}}{v_\theta - \frac{a}{2h}} = e^{-2h(t-\theta)}$

$v_t - \frac{a}{2h} = \left(v_\theta - \frac{a}{2h}\right) e^{2h(t-\theta)}$

$v_{\theta+1} - \frac{a}{2h} = \left(v_\theta - \frac{a}{2h}\right) e^{-2h}$

$v_{\theta+1} = a + (v_\theta - a)\,b$

$v_{\theta+2} = bv_{\theta+1}$

$v_{\theta+2} = ba + b^2(v_\theta - a)$

$v_0 = \left(v - \frac{a}{2h}\right) e^{2ht} + \frac{a}{2h}$

$\left(v - \frac{a}{2h}\right) e^{2ht} + \frac{a}{2h} = e^{-2h}\left(\frac{a}{2h} + e^{-2h}\left(v - \frac{a}{2h}\right) e^{2ht}\right)$

$v e^{2ht} - vfe^{-4h+2ht}$

$\frac{dv}{dt} = -2\omega \frac{t}{\theta} a \sin 2\omega \frac{t}{\theta} + b\, 2\omega \frac{t}{\theta} \cos 2\omega \frac{t}{\theta}$

$\tan g\left(2\omega \frac{t}{\theta}\right) = \frac{b}{a}$

$2\omega \frac{t}{\theta} = \text{arc tang } \frac{b}{a}$

$\frac{b}{a} = -\frac{1+m}{m} = -\left(1 + \frac{1}{m}\right) = -\left(1 + \frac{H\sqrt{\theta}}{\sqrt{K}\sqrt{\omega}}\right)$

$a \sin x + b \cos x$

$m \sin(x + n)$

$m \sin x \cos n + m \sin n \cos x$

$m \cos n = a \quad m \sin n = b$

$\frac{\sin n}{\cos n} = \frac{b}{a} \qquad m^2 = a^2 + b^2$

$m \sin\left(x + \text{arc tan } \frac{b}{a}\right)$

$\sqrt{a^2+b^2} \sin\left(x + \text{arc tan } \frac{b}{a}\right)$

$\frac{2\omega t}{\theta} = \text{arc tang } \frac{b}{a}$

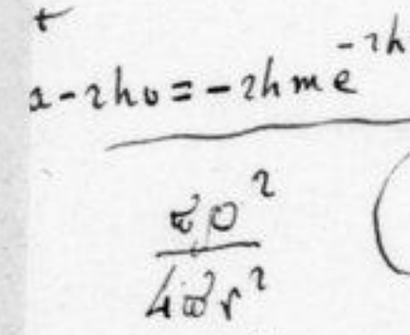
A

$\frac{720}{720}$

14400

$\frac{1}{2}\ \frac{1}{360}\ \frac{1}{1800}$

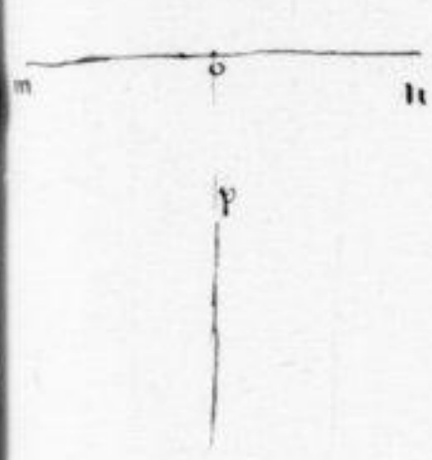
$\frac{1}{720}$



Sur les températures d'un solide exposé à l'action périodique d'un foyer extérieur.

1.er mém.

le plan mn termine un solide dont la conducibilité propre est connue
les dimensions du solide et du plan sont infiniel
Chaque point o eprouve l'action variable d'un foyer extérieur et tous les points de la
surface mn sont aussi soumis à la même action. la chaleur pénètre de plus en plus le
solide et comme l'action du foyer est supposée périodique l'état du solide est périodique
aussi. il s'agit de connaître ce dernier etat d'un solide infini.



l'espace intérieur est à la température c. la conducibilité extérieure de la surface
est h. l'intensité du foyer est déterminée par f c'est à dire que si l'unité de
surface étant exposée à l'action du foyer pendant l'unité de temps acquerait
de chaleur égale à f. cette intensité étant est variable et en général exprimée par
f.F(t) ainsi lorsque le tems t s'est écoulé l'intensité du foyer est telle que si
elle conservait sa valeur actuelle pendant l'unité de tems l'unité de surface
en recevrait une quantité de chaleur égale au produit de f par F(t) la fonction
F(t) est supposée connue et périodique. θ est la durée de cette période. ainsi
F(t+iθ) équivaut à F(t) quelque soit le nombre entier i.

Soit u la profondeur distance d'un point p de la verticale à la surface mn et v la
température variable de ce point p, v est une fonction de u et t. on a trouvé
précédemment l'équation $\frac{dv}{dt} = \frac{K}{C.D}\frac{d^2v}{du^2}$ C et D sont la capacité de chaleur et
la densité (on écrit K au lieu de $\frac{K}{C.D}$.) K est la conducibilité pour le solide

pour satisfaire à l'équation $\frac{dv}{dt} = K\frac{d^2v}{du^2}$ on prendra

$v = ae^{-gu}\cos(2g^2Kt - gu) + be^{-gu}\sin(2g^2Kt - gu)$ les quantités a, b et g sont
arbitraires et comme on peut ajouter pour former la valeur de v autant de termes
que l'on voudra on aura ainsi une valeur de v aussi générale de v que la question
l'exige.
il est d'abord facile de voir que l'état du solide devient périodique
l'on ne considera ici que cet état final. on en conclut que l'exposant g doit satisfaire à cette
condition $2g^2K\theta = 2i\pi$ i etant un nombre entier et π la demi circonférence
de cette manière on connait toutes les valeurs de g et l'on a généralement

$g_i = \sqrt{\frac{i\pi}{K\theta}}$. répondant aux valeurs de a_i et b_i.

Soit $\bar{v}$ la valeur variable de v à la surface lorsque l'abscisse u est nulle
ou aura

$\bar{v} = a_i\cos 2g_i^2Kt + b_i\sin 2g_i^2Kt$.

ou ainsi en désignant par $\frac{d\bar{v}}{du}$ la valeur de $\frac{dv}{du}$ prise lorsque $u = o$

$$\frac{d\bar{v}}{du} = \overline{a_i - b_i.g_i}\sin 2g_i^2Kt - \overline{a_i + b_i.g_i}\cos 2g_i^2Kt$$

or $-K\frac{d\bar{v}}{du}$ était la quantité de chaleur qui pénètre le solide et s'ajoute à celle qu'il avait
déjà. cette quantité était celle que le foyer communique dans le même instant
si le solide ne perdait point par la surface une partie de la chaleur. cette dernière partie
est $h(v-c)dt$ et celle que donne le foyer est $f.dt.F't$ il faut donc que l'on ait
l'équation de condition $-K\frac{d\bar{v}}{du} = f.F(t) - h(\bar{v}-c)$

(au lieu de K on écrira r pour éviter toute confusion)

2.ème 1f°

pour appliquer l'équation $f \cdot F(t) = h(\bar{v}-c) - r\frac{d\bar{v}}{du}$ on développera la fonction connue $F(t)$ en une série de sinus et de cosinus d'arc multiples selon le principal employé dans le mémoire

Soit donc

$$Ft = \alpha_0 \cos(0t) + \begin{matrix}\alpha_1 \cos 2\frac{\omega t}{\theta} & \alpha_2 \cos 2\frac{\omega t}{\theta} & \alpha_3 \cos 3\frac{2\omega t}{\theta} \\ \beta_1 \sin 2\frac{\omega t}{\theta} & \beta_2 \sin 2\frac{2\omega t}{\theta} & \beta_3 \cos 3\frac{2\omega t}{\theta}\end{matrix} + \&c$$

les coefficient α_0 et $\begin{matrix}\alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2\end{matrix}$ sont connus.

on a d'un autre coté

$$h(\bar{v}-c) - r\frac{d\bar{v}}{du} = -hc + \left\{h b_i - g_i(a_i - b_i)r\right\} \sin 2g_i^2 kt + \left\{h a_i + g_i(a_i + b_i)r\right\} \cos 2g_i^2 kt$$

la quantité $h(\bar{v}-c) - r\frac{d\bar{v}}{du}$ est donc aussi résolue en suite de sinus et de cosinus d'arc en multiple il suffira donc de comparer cette suite avec celle qui répond à $f \cdot F(t)$

on aura ainsi $f\alpha_0 = -hc + h\alpha_0$ car b_0 entre point dans la valeur de v et on peut supposer ce coefficient nul, et g_0 est nulle.

puis $f\alpha_i = h a_i + g_i r(a_i + b_i)$ et $f\beta_i = h b_i - g_i r(a_i - b_i)$

la première équation donne la valeur de a_0 et les suivantes font connaître les valeurs de $a_1, b_1 \quad a_2 b_2 \quad a_3 b_3$ &c ainsi il ne reste plus rien d'inconnu dans la valeur de v.

Si l'on examine auquel cas il faut cette valeur générale de v on reconnaîtra facilement que lorsque la profondeur est un peu considérable il ne reste plus que le premier terme de cette valeur qui est $a_0 \cos(0t)$ ou a_0. ce premier terme qui est la température fixe à laquelle le solide parvient en vertu de l'action périodique du foyer est très important à connaître et c'est seul que l'on se propose d'examiner dans la présente recherche circonstance et du mouvement de la chaleur dans les parties voisines de la surface ayant été déjà discutées ailleurs.

on a trouvé ~~$f\alpha_0 = a + \frac{1}{h}$~~ $a_0 = c + \frac{f}{h}\alpha_0$

on a en général φx étant une fonction quelconque

$$\omega \varphi x = \frac{1}{2}\int \varphi x\, dx + \begin{matrix}\cos x \int \varphi x \cdot \cos x\, dx \\ \sin x \int \varphi x \sin x\, dx\end{matrix} + \&c \text{ les intégrales étant prises depuis } x=0 \text{ jusqu'à } x = 2\omega$$

on aura donc $\omega \varphi\left(2\frac{\omega t}{\theta}\right) = \frac{1}{2}\int \varphi\left(2\frac{\omega t}{\theta}\right) \frac{2\omega\, dt}{\theta} + \&c$ les intégrales étant prises depuis $t=0$ jusqu'à $t=\theta$

Si maintenant la fonction donnée Ft est mise sous cette forme $\varphi\left(2\frac{\omega t}{\theta}\right)$ on aura

$\omega Ft = \frac{\omega}{\theta}\int F(t)\, dt +$ &c et par conséquent $\alpha_0 = \frac{1}{\theta}\int Ft \cdot dt$ l'intégrale étant prise depuis $t=0$ jusqu'à $t=\theta$

ou en conclud $a_0 = c + \frac{f}{h\theta} \int F t . dt$.

ainsi la température fondamentale désignée par a_0 ou a équivaut à la température extérieure c augmentée du terme $\frac{f}{h\theta} \int F t . dt$

c'est-à-dire de température est en raison directe de l'action totale du foyer pendant la durée de la période divisée par cette durée et en raison inverse de la conductibilité extérieure h. il ne reste plus qu'à appliquer ce principe à la question des températures terrestres.

---

par un cylindre tournant et recevant la chaleur d'un foyer extérieur.

159.

e est l'axe d'un cylindre droit dont la base circulaire a r pour rayon

la surface convexe est exposée à un foyer infiniment éloigné qui est dans le prolongement
du plan perpendiculaire à l'axe entre qu'il n'y a que la surface convexe qui puisse être
échauffée.

le cylindre tourne dans le foyer avec une vitesse infinie

la chaleur se dissipe par la surface extérieure dans le vide. dans
on suppose le vide terminé de toutes parts par une enceinte dont la
température est 0.

on suppose que le cylindre est un vase rempli d'un liquide.

$\frac{2re}{2\omega re}$ est la surface exposée à la chaleur

soit q la quantité de chaleur qui pendant l'unité de temps entre dans l'unité
de surface par l'action du foyer

$2\omega rqe$ est la chaleur reçue

$2\omega rhev + \omega r^2 ehv$ est la chaleur perdue

h étant la conductibilité extérieure de la surface et v la température acquise

Donc $2\omega rqe = 2\omega rhev + \omega r^2 ehv$

ou $2qe = 2hev + rhv$ ou $v = \frac{2qe}{2he + rh}$

× si $e = 2r$ on a $v = \frac{4}{5}\frac{q}{h}\frac{1}{\omega}$

Si l'on connait par l'expérience la valeur de v on pourra trouver q ou $\frac{2he+rh}{2e}v$
Si la longueur du cylindre est infinie on trouvera $v = \frac{2}{h}\frac{1}{\omega} +$

Supposons que le cylindre soit solide, que l'axe e soit infiniment long et que le froid
affecte le cylindre dans toute la longueur.
la chaleur ne sortira que par l'enveloppe ou pourra supposer que
est plus grande dans les parties plus voisines du centre
soit v la température de la couche cylindrique dont le rayon est x.

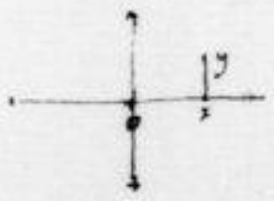
on aura l'équation suivante qui convient au corps cylindrique.

$\frac{dv}{dt} = \frac{K}{C \cdot D}\left(\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dv}{dx}\right)$ et par conséquent $o = \frac{d^2v}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dv}{dx}$

puisque l'état est devenu stationnaire

on trouve $\alpha = x\frac{dv}{dx}$ qui donne $o = x\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{dv}{dx} = \frac{d^2v}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dv}{dx}$

ou $v = l/x$
le flux de chaleur qui passent d'une couche à l'autre est proportionnel à $x\frac{dv}{dx}$ comme
il est facile de voir α à la valeur de $\frac{dv}{dx}$ ne peut être que nulle.
ainsi ce cas est le même que le précédent lorsque e est infini.



Supposons que le cylindre soit solide et d'une longueur déterminée e
les parties plus éloignées du foyer seront moins échauffées et la chaleur se dissipera plus
facilement
la température v sera une fonction de x et de y. x est la distance de la couche
qui enveloppe le noyau cylindrique à la branche parallèle qui passe par le cylindre et dont il s'écarte.
y est le rayon de la couche de la branche qui enveloppe le noyau cylindrique.
$2\omega y\,dx$ est la surface courbe de la couche cylindrique et $-2K\omega y\frac{dv}{dx}dx$ est la flux à travers
cette couche ainsi $2\omega y\,dy$ est la surface plane de la couche
et $-2K\omega y\,dy.\frac{dv}{dx}$ est le flux à travers cette surface

Températures d'un solide infiniment profond échauffé par un foyer extérieur 150.
questions analogues plus étendues.

un solide infiniment profond terminé par un plan infini est exposé à l'action d'un foyer extérieur.
la chaleur lumineuse du foyer ne pénètre le solide que jusqu'à une certaine profondeur. la matière est homogène. le pouvoir diathermane K propre de cette substance est connu. la surface supérieure reçu de la chaleur en communiquant à une couche dont la température est constante. la conductibilité extérieure entre la matière et l'air ambiant est donnée.
on considère le solide parvenu à un état final.
une expérience a la faculté d'être renouvelé par la chaleur lumineuse qui pénètre une profondeur que le rayon qui produit la surface supérieure est b et que tout rayon de chaleur qui a pour commandant la matière une distance x est réduit à be^{-mx}.

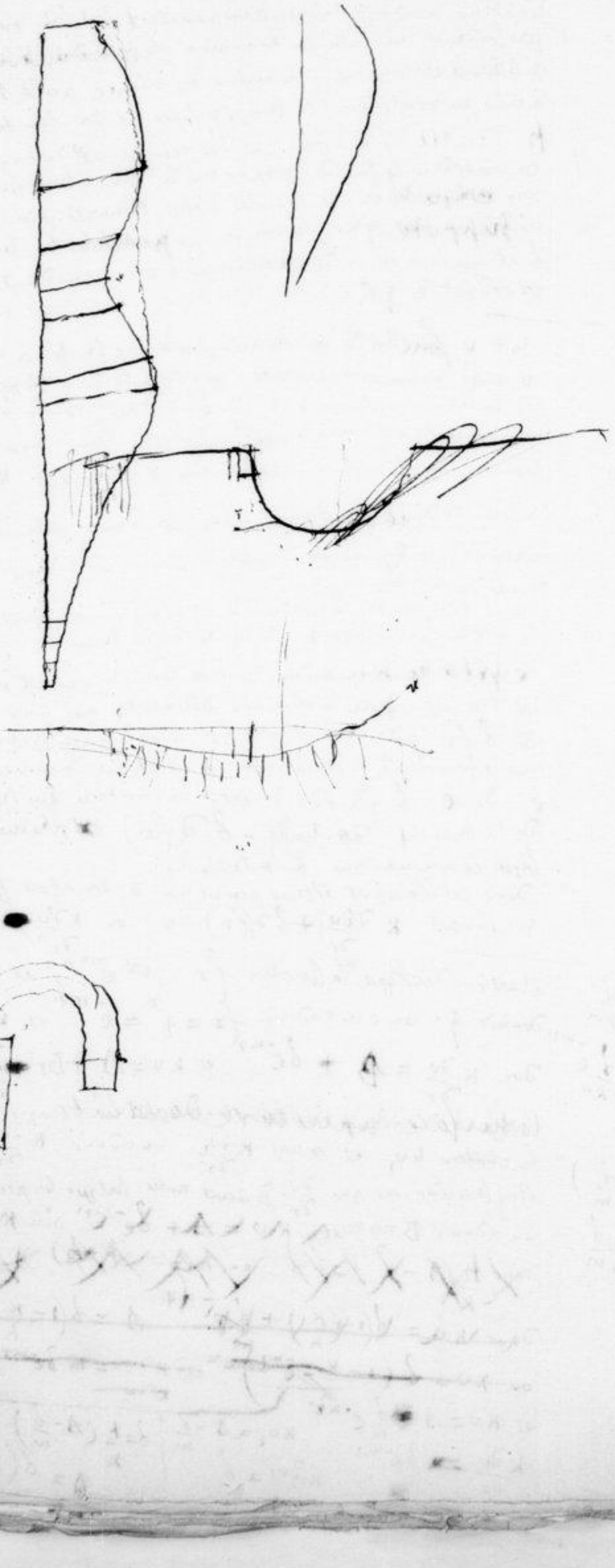
Soit v fonction de x la température finale à la profondeur x
v croît lorsque x augmente. une tranche dont l'épaisseur est dx reçoit de la branche inférieure $K\frac{dv}{dx}$ cent l'expression de la quantité de chaleur qui traverse le plan à la profondeur x. donc la quantité de chaleur qui traverse le plan à la profondeur $x+dx$ est $K\frac{dv}{dx}+Kd\left(\frac{dv}{dx}\right)$ donc la tranche contient pendant un instant $Kd\left(\frac{dv}{dx}\right)$. la masse de cette tranche est dx parce qu'on considère ici qu'une surface égale à l'unité de mesure.
donc $c.D\,dx$ est la quantité de chaleur qui élève de la température v à la température voisine 1 la masse de la tranche
la différence entre celle qui est placé à la profondeur x et traverse par la chaleur affluente qui n'est pas égale à b mais à $b-fx$ en désignant par fx la fraction qui doit en retrancher de b pour que le reste représente la chaleur lumineuse arrivée à la profondeur x donc $b-f(x+dx)$ est la chaleur qui traverse le plan de la branche inférieure de la tranche $-bd(fx)$ représente la chaleur que le foyer communique à la tranche.
donc actuellement étant parvenu à un état final invariable, il faut que l'on ait $Kd\left(\frac{dv}{dx}\right)+bd(fx)=0$ ou $K\frac{d^2v}{dx^2}-bf(x)=0$

---

il est évident que la fonction fx est e^{-mx} et que e^{-m} est la fraction donnée q. on a donc $fx=q^x=e^{-mx}$ et $K\frac{d^2v}{dx^2}+mbe^{-mx}=0$
donc $K\frac{dv}{dx}=B+be^{-mx}$ et $Kv=A+Bx-\frac{b}{m}e^{-mx}$
la température supérieure de la tranche dont la température est v reçoit la chaleur hv_1 et reçoit $K\frac{dv_1}{dx}$ on a donc $K\frac{dv_1}{dx}=hv_1$
il est facile de voir que $\frac{dv}{dx}$ devient nulle lorsque la profondeur est infinie on a donc $B=0$ et $Kv=A+be^{-mx}$ donc $K\frac{dv_1}{dx}=-b$, $Kv_1=A-b$

$Ke^{-mx}=K\frac{dv}{dx}$
$v=A-\frac{b}{Km}e^{-mx}$
$K\frac{dv_1}{dx}=hv_1$
$K\frac{dv}{dx}=be^{-mx}$
$Kv=b-hv_1=ka-\frac{k}{m}$
$a=\frac{b}{k}\left(1+\frac{k}{hm}\right)-\frac{b}{km}e^{-mx}$
$v=\frac{b}{k}\left(1+\frac{k}{hm}\right)-\frac{b}{km}e^{-mx}$
$K\frac{dv_1}{dx}=B-b$
$v_1=\frac{1}{k}\left(A+\frac{b}{m}\right)$
$B-b=\frac{h}{k}A+\frac{h}{k}\frac{b}{m}$
$v=$

$Kv=b\left(1+\frac{k}{h}\right)+be^{-mx}$ $A=b\left(1-\frac{k}{h}\right)$ $Kv=b\left(1-\frac{k}{h}\right)+be^{-mx}$
ou $Kv=b\left(1-\frac{k}{h}\right)e^{-mx}$ $A=m$ be^{-mx}, $K_1=b\left(1-\frac{k}{h}\right)$
et $Kv=A+\frac{b}{m}e^{-mx}$ $Kv_1=A-\frac{b}{m}$ $b=\frac{h}{k}\left(A-\frac{b}{m}\right)$
$K\frac{dv}{dx}=be^{-mx}$ $K\frac{dv_1}{dx}=b$ $A=b\left(\frac{k}{h}+\frac{1}{m}\right)$



on trouve ainsi $Kv = \delta\left(\frac{1}{m} + \frac{K}{h}\right) - \frac{\delta}{m} e^{-mx'}$ ou $v = \frac{\delta}{K}\left\{\frac{1-e^{-mx'}}{m} + \frac{K}{h}\right\}$

et cette valeur de v satisfait à toutes les conditions de la question

en effet on a $\frac{dv}{dx} = \frac{\delta}{K} e^{-mx'}$ $\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{m\delta}{K} e^{-mx'}$ ainsi

$K\frac{d^2v}{dx^2} = -m\delta e^{-mx'} = \delta\frac{d}{dx}\left(e^{-mx'}\right) = \delta\frac{d}{dx}(f_{x'})$ donc $K\frac{d}{dx}\left(\frac{dv}{dx}\right) = \delta\frac{d}{dx}(f_{x'})$

ce qui est la condition fondamentale

De plus $\frac{dv}{dx}$ devient nulle lorsque x est infinie ce qui est une seconde condition de la question

enfin on a pour la surface $v_0 = \frac{\delta}{h}$, $\frac{dv_0}{dx} = \frac{\delta}{K}$ donc $K\frac{dv_0}{dx} = hv_0$

ce qui est la condition relative à la surface.

La question est donc réduite par l'équation $v = \frac{\delta}{K}\left\{\frac{1-e^{-mx'}}{m} + \frac{K}{h}\right\}$

Si l'on fait x infini on a $v_\omega = \frac{\delta}{K}\left(\frac{1}{m} + \frac{K}{h}\right) = \frac{\delta}{h} + \frac{1}{m}\cdot\frac{\delta}{K}$

ou $v_\omega = \frac{\delta}{h}\left(1 + \frac{1}{m}\cdot\frac{h}{K}\right)$

on a $v_\omega - v = \frac{\delta}{K}\frac{e^{-mx'}}{m}$ donc $v = v_\omega - \frac{\delta}{K}\frac{e^{-mx'}}{m} = v_\omega - v_0\frac{he^{-mx'}}{Km}$

$e^{-m} = q$
$v_\omega - v_0 = \frac{\delta}{K}$
$v_\omega = \delta\left(\frac{1}{h} + \frac{1}{K}\right)$

ou $\frac{v_\omega - v}{v_0} = \frac{he^{-mx'}}{Km} = \frac{hq^x}{Km}$ ce résultat très simple fait connaître

comment de la surface en profondeur x la différence $v_\omega - v$

Si le solide n'était pas pendu dans la chaleur du foyer se serait pour l'état final l'équation $hv = \delta$ ou $v = \frac{\delta}{h}$ cette chaleur serait commune à toutes les parties du solide. Mais que le corps est transparent on a pour température commune à toute la profondeur du solide

$v_\omega = \frac{\delta}{h}\left(1 + \frac{h}{K}\frac{1}{m}\right)$ l'accroissement est $\frac{\delta}{Km}$ en vertu indirecte

de la chaleur du foyer qui pénètre dans le solide et en vertu inverse composée de K et de m

on a $e^{-m} = q$ et la chaleur interceptée δ est réduite à $q\delta$ après l'épaisseur égale à l'unité de mesure 1. Supposons q différent très peu de 1 donc la valeur de m sera très petite et l'on aura $e^{-m} = 1 - m + \ldots$ ainsi la valeur de m exprime donc ce qui est l'excès pour l'unité de distance.

la température qui vient $\frac{\delta}{h}$ si le solide n'était pas transparent devient

$\frac{\delta}{h} + \frac{\delta}{Km}$ ou $\frac{\delta}{h}\left(1 + \frac{h}{Km}\right)$ la valeur obtenue de l'accroissement

qui est $\frac{\delta}{Km}$ est d'autant plus grande que la mesure de l'absorption est une

plus petite quantité et que K ou la stabilité propre est une plus petite valeur.

et en effet si la chaleur intérieure se renouvelle également et profondément et si la

chaleur acquise de surface s'écoulement est température acquise doit être plus grande



Lemaître donne la profondeur est inférieure au point du foyer représentant la chaleur rayonnante dont la quantité est 3. cette chaleur ne reste ici ne s'y éteint que progressivement. Lorsque le rayon r a traversé dans la matière une distance 1 il est réduit à qr la lettre q est la marque de la transparence pour la distance r la fraction est fr chaque point de la matière est échauffé envoyé la chaleur rayonnante on conçoit ici le mouvement de cette chaleur rayonnante dans le sens vertical seulement et il en est de même du rayon émané du foyer pour marcher (le rayon incident) d'un point de la matière on considère que le point envoye au dessus et au dessous une quantité de chaleur proportionnelle à la température. un rayon ρ parti d'un point m est réduit à ρ q a traversé la distance 1. arrivé p est la mesure de la transparence pour la distance r la fraction correspondante à p est qr
dans un milieu échauffé de la chaleur obscure et q celle de la chaleur lumineuse.
Cela posé considérons un plan situé à la profondeur x et cherchons la chaleur ou lumière obscure qui traverse ce plan en différentiant celle qui descend au dessous de ce plan qui monte au dessus
la chaleur lumineuse qui descend au dessous du plan est bfx
le point m placé à la profondeur x envoye au dessous φ(x-x') en désignant par v sa température, et par g une constante caractéristique constant.
le point m' envoye au dessous la quantité g v' φ(x - x').
la quantité totale de chaleur qui passe au dessous du plan est
$bfx + g\int_{x=x_1}^{x=\infty} dx'\, v'\,\varphi(x-x')$ et la chaleur totale qui monte au dessus est
$g\int_{x=x}^{x=0} dx \cdot v\,\varphi(x-x)$

Si on veut connaître l'état d'une tranche comprise entre deux plans l'un situé à la profondeur x l'autre situé à la profondeur x+dx
de la chaleur qui descend au dessous du premier plan ou retranche celle qui monte au dessus le reste est la chaleur qui entre dans la tranche.
Si dans l'expression précédente on met x+dx au lieu de x on trouve la chaleur qui sort de la tranche en retranchant celle qui sort de celle qui entre on aura ce qui reste dans la tranche et tend à changer la température de la tranche
$dx\,\psi x = bfx + g\int dx'\,\varphi(x-x')\,bfx' + g\int dx\,v'\,\varphi(x'+x) - g\int dx\,v$
désignons par ψx la température du point placé à la profondeur x
on a $bfx + g\int_{x=0}^{x=x} dx\,\psi x\,\varphi(x-x) - g\int_{x=x}^{x=\infty} dx\,\psi x\,\varphi(x-x)$ pour la chaleur
de la quantité de chaleur qui entre dans la tranche

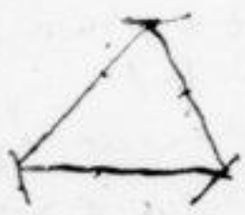
---

on peut écrire $\varphi x = e^{-nx}$ c'est à dire que le rayon ρ envoyé par un point est réduit à $\rho\, e^{-nx}$ après avoir traversé la distance 1. on aura
$\varphi(x-x) = e^{-n(x-x)}$ et $\varphi(x-x) = e^{-n(x-x)}$. la quantité
$\int_0^\infty dx\,\psi x\, e^{-nx} e^{nx}$ est $e^{-nx}\int_0^\infty d\lambda\,\varphi\lambda\, e^{n\lambda}$
au lieu de continuer ce calcul et pour l'achever plus facilement arrêtons nous dans la question dont il s'agit la température limite qui est celle que le principe de Fourier va en croissant de plus x=0 jusqu'à $x=\frac{1}{0}$

Loi de raisonnement déductif ou loi d'inférence

vérité de la conclusion dans un raisonnement déductif et validité de l'argument.







$r_2 \quad r_1 - \lambda$

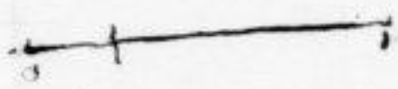
$r_2' \; \overline{1-\lambda}$

$r_1 \overline{1-\lambda} \; \overline{1-\lambda'}$

$\frac{r_2 \mid r_1 \overline{1-\lambda} - r_2' \; \overline{1-\lambda}}{r_1 \overline{1-\lambda} \; \overline{1-\lambda'}}$

$r_1 \overline{1-\lambda} \cdot \overline{1-\lambda} \; \overline{1-\lambda''}$

$\beta_1 \; \beta_2 \; \beta_3 \; \beta_4 \; \beta_{2n}$



un point donné disposés que le rayonnement de la molle se fait seulement de bas en haut ainsi un point placé à la distance x plus grande que x interceptera un plan et la fait sentir au delà de ce plan une quantité de chaleur proportionnelle à $g(\psi x - \psi x)\varphi(x-x)$ et la quantité de la chaleur qui monte au delà du plan est $g\int_{x=x}^{x=\frac{1}{0}} dx\,(\psi x - \psi x)\varphi(x-x)$

Donc la quantité de chaleur de toute qui entre dans la couche entre ce plan placé à la distance x et le plan placé à la distance $x+dx$ est $\delta fx - g\int_{x=x}^{x=\frac{1}{0}} dx(\psi x - \psi x)\varphi(x-x)$ mettant enfin $fx = e^{-mx}$, $\psi x = e^{-nx}$

Donc l'expression de la quantité de chaleur qui entre dans la tranche dont il l'agit est $\delta e^{-mx} - g\int_{x}^{\frac{1}{0}} d\lambda(\psi\lambda - \psi x)e^{-n(\lambda-x)}$

Par exemple supposons que la fonction $\psi\lambda$ soit donnée et qu'elle soit $h - he^{-r\lambda}$ on aura pour l'expression de la quantité de chaleur qui traverse le plan placé à la distance x

$$\delta e^{-mx} - g\int_{x}^{\infty} d\lambda\,(h - he^{-r\lambda} - h + he^{-rx})e^{-n\lambda} = \delta e^{-mx} - g\int_{x}^{\infty} d\lambda\,(he^{-rx} - he^{-r\lambda})e^{-n\lambda}$$

ou ainsi de x à l'infini $(m \neq r)$ et $h \neq 0$

$$\delta e^{-mx} - ghe^{rx}\int_{x}^{\infty} d\lambda\,\{(1-e^{-r\lambda}) - (1-e^{-rx})\}e^{-n\lambda} \quad \text{ou}$$

$$\delta e^{-mx} - ghe^{rx}\int_{x}^{\infty} d\lambda\,(e^{-rx} - e^{-r\lambda})e^{-n\lambda} \quad \text{ou} \quad \int d\lambda\, e^{-n\lambda} = c - \frac{1}{n}e^{-n\lambda} = \frac{1}{n}e^{-nx} - \frac{1}{n}e^{-n\lambda}$$

et lorsque $\lambda = \frac{1}{0}$ cela $\frac{1}{n}e^{-nx}$ la quantité cherchée est donc

$$\delta e^{-mx} - ghe^{rx}e^{-rx}\frac{1}{n}e^{-nx} + ghe^{rx}\frac{1}{r+n}e^{-rx-nx} = \delta e^{-mx} - \frac{gh}{n}e^{-nx} + \frac{gh}{r+n}e^{-nx}$$

$$= \delta e^{-mx} - ghe^{-nx}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{r+n}\right) \quad \text{on voit par là que si } r = m \text{ et si}$$

la quantité de chaleur qui traverse le plan placé à la distance x est égale à la quantité de chaleur qui traverse le plan placé à la distance x et $\frac{m\delta}{g\cdot n}\left(1-e^{-mx}\right)^{\frac{1}{m+n}}$ lorsque x est infini ou

a pour la plus grande température relative $\frac{m\delta}{g\cdot n}\frac{1}{m+n}$ elle est encore la même

---

$\frac{m}{(m+n)n}$ $\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{n}{m}}\right)$

$\int d\lambda\, e^{-\lambda}$ $\int d\lambda\, e^{-n\lambda}$ $\int d\lambda\, e^{-r\lambda}$ $\int d\lambda\, e^{-m\lambda}$

$(1-e^{-\lambda})e^{-n\lambda}e^{-r\lambda}$

$e^{-n\lambda}/e^{-n\lambda} - e^{-n\lambda-r\lambda}/$

$e^{-n\lambda} \mid -\frac{1}{n}e^{-n\lambda} + c$

$-\frac{1}{n}e^{-nx} + c$

$\frac{1}{n}\left(e^{-nx} - e^{-n\lambda}\right)$

$\frac{1}{n}e^{-nx} - \frac{1}{n+r}e^{-nx-rx}$

$\int \delta e^{-mx}$

$(1-e^{-r\lambda})e^{-n\lambda}$

$e^{-n\lambda} \mid c - \frac{1}{n}e^{-n\lambda}$

$\frac{1}{n}e^{-nx} - \frac{1}{n+r}e^{-nx-rx}$

$\frac{1}{n}e^{-nx} - \frac{1}{n+r}e^{-nx-rx}$

$\#h = \frac{\delta}{g}\frac{m}{n}\cdot\frac{1}{m+n}$

$m = \gamma n$. $\frac{\gamma n}{n(n+\gamma n)}$ $\frac{1}{n}\frac{\gamma}{1+\gamma}$

$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{\gamma}\right)$

---

ou voit par là que si $r = m$ et si la quantité de chaleur qui traverse le plan placé à la distance x est égale à la quantité de chaleur qui traverse le plan placé à la distance x et $\frac{m\delta}{g\cdot n}\left(1-e^{-mx}\right)^{\frac{1}{m+n}}$ lorsque x est infini ou a pour la plus grande température relative $\frac{m\delta}{g\cdot n}\frac{1}{m+n}$ elle est encore la même

obtiendra qui montre au delà du plan en sorte que l'état de la couche est invariable. il faut donc pour déterminer $\psi\lambda$ écrire $\psi\lambda = h(1-e^{-m\lambda})$ et $h = \frac{\#}{2}$ de sorte que la température relative au point de la couche placée à la distance x est $\frac{m\delta}{g\cdot n}\left(1-e^{-mx}\right)^{\frac{1}{m+n}}$ lorsque x est infini ou a pour la plus grande température relative $\frac{m\delta}{g\cdot n}\frac{1}{m+n}$ elle est encore la même de la chaleur donnée par le foyer et traverse chacune de g

5 Calculons la quantité de chaleur transmise à travers l'unité de surface pendant l'unité de temps. Cette quantité est exprimée par $v = \frac{m}{n}\frac{\delta}{g}\cdot\frac{1}{m+n}\left(1-e^{-mx}\right)$ c'est l'augmentation de la température v à la distance x. La fonction e^{-mx} mesure la décroissement de la chaleur transmise. Quand on a la fonction e^{-nx} mesure le décroissement de la chaleur rayonnante lorsque $x=0$ on a $v_0 = 0$ lorsque $x=\frac{1}{0}$ on a $v_\omega = \frac{m}{n}\cdot\frac{\delta}{g}\frac{1}{m+n}$

Donc $v_\omega - v = v_\omega e^{-mx}$ ainsi le rapport $\frac{v_\omega - v}{v_\omega}$ décroit de la même loi que la chaleur transmise.

Supposons que $\psi\lambda$ soit $a+\left(h(1-e)^{-m\lambda}\right)$ on aura

$$\delta e^{-mx} - g\int_x^{\infty} d\lambda\; h\left\{(1-e^{-m\lambda}) - (1-e^{-mx})\right\} e^{-n\overline{\lambda-x}}$$

exprimera que si la température ψ n'était que a en tout

ou à la surface lorsque $x=0$ la chaleur qui traverse la première tranche est δ la chaleur qui sort c'est à dire celle qui est rayonnante par l'intérieur est $gh\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m+n}\right)$ et est donc quantité devient nulle à cette température

la température de la surface devient nulle lorsque $z=\infty$ il faudrait donc admettre pour cette solution précédente que la température est infinie ce qui est impossible et dont il importe de rechercher la raison véritable.

Représentant l'expression de la page 4 second paragraphe par $\delta e^{-mx} - gh e^{-nx}\left\{\frac{1}{m}-\frac{1}{n+m}\right\}$ on supposera en cet $x=m$ on aura $\delta = g^{h\cdot m}_{n(m+n)}$ la quantité de chaleur absorbée par l'on aura $\delta = g^{h\cdot m}_{n(m+n)}$ la quantité de chaleur absorbée par

tout à la surface est aussi $\frac{g^{h\cdot m}}{n(m+n)}$ on dans le même système précédent

le corps était primitivement traversé par la chaleur rayonnante obscure jusqu'à une distance sensible de telle sorte que la quantité de chaleur qui traverse la surface est représentée par $H v_0$ et le coefficient H étant arbitraire.

on a actuellement $v = a + h\left(1-e^{-mx}\right)$ et $v_0 = a$

H est le rapport de la chaleur qui traverse la surface à la température v_0 de la surface absorbée.

Il faudrait alors regarder comme donné dans le système précédent le rapport de $\frac{gh\,m}{n(m+n)}$ à la température de la surface a

comme auparavant de sorte que $\frac{gh\,m}{n(m+n)} = H\,a$ on peut regarder H comme une quantité donnée par cette équation

$a = \frac{\delta}{H}$ donne la solution de laquelle est donnée par cette équation

$v = \frac{\delta}{H} + \frac{m}{n}\frac{\delta}{g}\cdot\frac{1}{m+n}\left(1-e^{-mx}\right)$. Si $x=0$ on $v_0 = \frac{\delta}{H}$

si $x=\frac{1}{0}$ on a $v_\omega = \frac{\delta}{H} + \frac{m}{n}\frac{\delta}{g}\frac{1}{m+n}$

on a donc $v_\omega - v = \frac{m}{n}\frac{\delta}{g}\frac{1}{m+n} e^{-mx'}$ et $v_\omega - v_0 = \frac{m}{n}\frac{\delta}{g}\frac{1}{m+n}$

et $\frac{v_\omega - v}{v_\omega - v_0} = e^{-mx'}$ on a aussi $\frac{v_\omega - v_0}{v_0} = \frac{m}{n}\frac{\delta}{g}\frac{1}{m+n}\frac{H}{\delta}$ [illegible] $m+n = \gamma m$

$= \frac{m}{n}\frac{\delta}{g}\frac{1}{m+n}\frac{H}{\delta}$ [illegible] $\frac{H\cdot m}{gn\cdot m+n}$

on aura $\frac{v_\omega - v_0}{v_0} = \frac{H\cdot}{gn\cdot\gamma}$

H est la quantité de chaleur absorbée par la surface en fusion de la surface
dans la direction [illegible] lorsque la température de la surface est 1°.

La solution générale de la question est aussi facile à trouver
mais elle est plus simple $v = a + \frac{m}{n}\frac{b}{g}\frac{1}{m+n}\left(1 - e^{-mx'}\right)$ et l'on

a toujours $\frac{v_\omega - v_x}{v_\omega - v_0} = e^{-mx}$ et $\frac{v_\omega - v_{x'}}{v_\omega - v_0} = e^{-mx'}$ d'où $\frac{v_\omega - v_x}{v_\omega - v_{x'}} = e^{-m(x-x')}$

ou $\frac{v_\omega - v_{x'}}{v_\omega - v_x} = e^{-m(x'-x)}$, ainsi la différence de la température v_x
à la température de la masse profonde de croûte en progression générale
est à la différence de la température $v_{x'}$ à la température de la masse profonde de croûte en progression générale
lorsque la profondeur croît en progression arithmétique.

Considérons maintenant comme dans la première question un solide que la chaleur
[illegible] peut traverser librement que la chaleur rayonnante obscure ne pénètre
point au delà d'une distance insensible et nous représentons cette masse solide
par un hémisphère mais on pourrait aussi bien la supposer plane.
Soit fx la densité à la profondeur x elle sera $f(x+dx)$ à la profondeur $x+dx$
l'augmentation $dx f'x$ de la densité doit être proportionnelle à fx
de plus qui est $dx \cdot fx$ on aura donc $fx = bf'x$ ainsi la densité est
ainsi exprimée [illegible] jusqu'à la profondeur x la densité est la
même tout le globe profondeur est [illegible] ae^{bx} enfin
on a [illegible] $fx = ae^{bx}$, $f'x = bae^{bx}$,
il faut donc percer jusqu'à une masse solide dont la densité à la profondeur
x soit ae^{bx} et on conçoit que cette masse est exposée à l'action d'un foyer
de chaleur dont la chaleur pénètre de même la masse.
Imaginons donc la chaleur pénétrant de même la masse solide jusqu'à une profondeur x'
la quantité de matière comprise de plus à [illegible] une profondeur x'
jusque à une profondeur plus grande x est $\int_{x'}^{x} dx\, fx$ ou $a\int_{x'}^{x} dx\, e^{bx}$
ou $\frac{a}{b}\left(e^{bx} - e^{bx'}\right)$ si l'on fait $x' = 0$ on a $\frac{a}{b}\left(e^{bx} - 1\right)$ pour exprimer le poids
total jusqu'à la profondeur x.
Or c'est cette quantité de matière autour qui arrête la transmission de la
chaleur du foyer de sorte tout que toute cette masse interposée est [illegible] le foyer réduit
du foyer est réduit à q et tout que la masse est [illegible] le foyer est réduit à q?

$\frac{1}{b}e^{bx} + C$

$\frac{1}{b}e^{bx} - \frac{1}{b}e^{bx}$

---

il faut maintenant [illegible] cas où une [illegible]
supérieure se comporte par rapport et parle de la profondeur décroissante en rayons
la chaleur qui est accumulée.
[illegible] [illegible] de la profondeur x et $fx = ae^{bx}$ [illegible] remarquez que
[illegible] [illegible] [illegible] de la [illegible]

Le foyer supérieur verte étant le solide infiniment mince dont la quantité de chaleur δ qui [illegible] reflète sur la surface Σ de ce même solide acquiert dans l'état final du solide la température v et il lui est [illegible] une quantité de chaleur hv qui est absorbée par l'enveloppe à la température 0 on a donc $\delta = hv$ la température finale du solide est $\frac{\delta}{h}$

actuellement on met au lieu du solide un plan [illegible] qui réfléchit la chaleur incidente δ à $g\delta$ en sorte que le solide ne reçoit plus que $g\delta$. en même tant la chaleur qui sort de la surface Σ emporte $h v'$ le plan intercepte une partie de cette chaleur du solide et réfléchit $hv' \cdot g$ [illegible] hv' désignant pour g un coefficient analogue à g mais différent de g on a donc $g\delta = K h v'$ ou $v' = \frac{\delta}{h}\cdot\frac{g}{K}$

donc g surpasse K la nouvelle température v' sera plus grande que v et un plan de verre intercepte une plus grande partie de la chaleur rayonnante observons que de la chaleur lumineuse en sorte que v' ne passe [illegible] que v.

le plan de verre intercepte une partie de la chaleur incidente δ et réfléchit un [illegible] le reste $\overline{1-g}\,\delta$ est réfléchi en absorbé

il arrive de même que la chaleur ρ qui sort de la seconde boîte en tombant sur le plan de verre est réduite à une [illegible] $\gamma\rho$ le reste $\overline{1-\gamma}\,\rho$ est absorbé et [illegible] réfléchi à l'intérieur qui est réfléchie vers la seconde boîte on nous désignons $K h v'$ la quantité de chaleur qui sort de la boîte dont la température est v'

la première boîte reçoit δ et le plan de verre dont l'épaisseur est ξ réfléchit $q\xi\delta$ et le reste $\overline{1-q\xi}\,\delta$ est ce que reçoit la boîte

* la première boîte [illegible] absorbé $q\xi\delta$. ainsi il entre dans l'élément de calcul du plan $q\xi\delta$ plus $\frac{K}{\xi}(v_2 - v_3)$ et il sort hv_3 on a

Donc $q\xi\delta + \frac{K}{\xi}(v_2 - v_3) = hv_3$

ou encore $\frac{K}{\xi}(v_2 - v_3) = g(v_1 - v_2)$

et $\overline{1-q\xi}\,\delta = g(v_1 - v_2)$

$$\frac{\overline{1-q\xi}\,\delta + q\xi\delta - hv_2}{1+\frac{h\xi}{K}} = 0$$

$$\delta + \frac{h\xi}{K}\overline{1-q\xi}\,\delta - hv_2 = 0$$

$$v_2 = \frac{\delta}{h}\left(1 + \frac{h\xi}{K} - \frac{hq\xi^2}{K}\right)$$

$$v_2 - v_3 = \frac{q\xi}{K}v_1 - \frac{q\xi}{K}v_2 \quad | \quad v_3 = \left(\frac{q\xi}{K} + 1\right)v_2 - \frac{q\xi}{K}v_1$$

$$q\xi\delta + \frac{K}{\xi}\frac{q\xi}{K}v_1 - \frac{K}{\xi}\frac{q\xi}{K}v_2 = \frac{hq\xi}{K}v_2 + hv_2 - \frac{q\xi}{K}hv_1$$

$$q\xi\delta + qv_1 - qv_2 + \frac{hq\xi}{K}v_1 - \frac{hq\xi}{K}v_2 - hv_2 = 0$$

$$q\xi\delta + g\left(1 + \frac{h\xi}{K}\right)v_1 - g\left(1 + \frac{h\xi}{K}\right)v_2 - hv_2 = 0$$

$$\frac{q\xi\delta - hv_2}{1+\frac{h\xi}{K}} + g(v_1 - v_2) = 0$$

$$v_1 = v_2 + \overline{1-q\xi}\,\frac{\delta}{g} = \frac{\delta}{g}(1-q\xi) + \frac{\delta}{h}\left(1 + \frac{h\xi}{K} - \frac{hq\xi^2}{K}\right)$$



7

ainsi $\delta^{\frac{a}{b}(e^{bx}-1)}$ exprime la chaleur δ arrivée par l'autre
et parvenue à la profondeur x faisant $q = e^{-m}$ on a
$\delta e^{-m\frac{a}{b}(e^{bx}-1)}$ pour exprimer l'état de chaleur δ parvenu à la profondeur x
c'est ce qui traverse le plan situé à la profondeur x et porté au dessous

---

Soit $\frac{k\,dv}{dx}$ la quantité de chaleur qui monte au dessus du plan situé à la profondeur x on désigne par v la température de ce point à la profondeur x par k la conductibilité propre au métal et cette valeur de k variable dans l'étendue avec la densité de telle sorte que la représentera par $k\varphi x$ la quantité de chaleur qui entre dans une branche comprise entre le plan qui répond à x et celui qui répond à $x + dx$ on aura
$\delta e^{-m\frac{a}{b}e^{bx}} - k\varphi x \cdot \frac{dv}{dx}$ donc la différentielle de cette quantité
sera nulle et l'on a $\delta d\left(e^{-m\frac{a}{b}(e^{bx}-1)}\right) = k\,d\left(\varphi x \cdot \frac{dv}{dx}\right)$
et intégrant $\delta e^{-m\frac{a}{b}e^{(bx-1)}} = k\varphi x \cdot \frac{dv}{dx} + A$
où il règne de la manière dont le solide est échauffé que à une profondeur infiniment grande toute la chaleur soit nulle donc la température
donnée cette profondeur au commencement de chaleur donc la constante
A est nulle et l'on a l'équation $\delta e^{-m\frac{a}{b}e^{bx}} = k\varphi x \cdot \frac{dv}{dx}$.

---

pour se former une idée de résultat que cette équation exprime supposons
$m\frac{a}{b} = 1$, $b = 1$ $k = 1$, $\delta = 1$ on a donc $\frac{dv}{dx}\varphi x = e^{-(e^x-1)} = e^{+1}e^{-e^x}$
la fonction φx étant 1 dans le cas d'un corps homogène, imaginons d'abord que φx
soit 1 on voit que $\frac{dv}{dx}$ est égale à $e^{-e^x}\cdot e^x$
ainsi la densité du solide est exprimée par e^x désignée par la courbe 111..
la quantité de matière ou poids est exprimée par $-1 + e^x$ désig. la courbe 222
le flux est $e \cdot e^{-e^x}$ désigné par la courbe 3333
ainsi la température v_x fonction de x qui exprime la température de la
molécule à la profondeur x est désignée par l'ordonnée de la courbe 444
il est facile de voir que cette température croît de zéro $x = 0$ jusqu'à $x = \frac{1}{0}$
et qu'elle s'approche d'une certaine limite qu'elle n'atteint jamais.



---

si la fonction φx n'est pas 1 si par exemple un hypothèse que la conductibilité de chaleur transmise augmente lorsque la matière augmente il faudra
diviser les ordonnées de la courbe 3333 par des quantités d'autant plus grandes
que x est plus grande. donc cette courbe 3333 l'économie plus rapidement
de l'axe mais l'ordonnée de la courbe 4444 - - conservera une loi analogue à la
précédente. Seulement elle aura toujours précisément pour asymptote la droite.

---

il faut maintenant considérer le cas où une masse exposée à l'action d'un foyer lumineux
supérieur se comporte par rapport à elle de la manière d'envoyer en rayonnant
la chaleur qui [illegible] à sa surface.
[illegible] la densité de [illegible] x [illegible] $e^{-e^{bx}}$ [illegible]
[illegible] [illegible] [illegible]

8

Désignant la densité par fx, l'accroissement du poids sera $Dx\,fx$ l'accroissement de la densité sera $Dx\,f'x$ il faut donc que l'on ait $b\,Dx\,fx = f'x.\,Dx$

ou $fx = a\,e^{bx}$

autrement le poid est $\int_o^x Dx\,fx$ il faut que la densité devienne double triple quadruple lorsque le poid devient double triple quadruple etc.

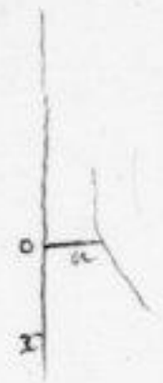
$$b\int_o^x Dx\,fx = fx \quad \text{ou} \quad f'x = b\,fx \quad \text{ou} \quad fx = a\,e^{bx}$$

on prend $x = o$ lorsque la densité est a. la densité à la distance x au dessus de o sera $a\,e^{bx}$ et au dessous de o à la distance x' la densité sera $a\,e^{-bx'}$ ou la densité est nulle à une hauteur infiniment grande.

le poid depuis la hauteur infinie jusqu'à la hauteur nulle est l'integrale $\int_o^\infty Dx\,a\,e^{-bx}$ ou $c - \frac{a}{b}e^{-bx}$ ou $\frac{a}{b}(1 - e^{-bx})$ ou $\frac{a}{b}$ c'est la valeur de la voute depuis la hauteur infinie jusqu'à la hauteur nulle.

supposons que la chaleur lumineuse affluente b soit réduite à qb lorsqu'elle a traversé cette voute $\frac{a}{b}$ la chaleur b sera réduite $q^2 b$ lorsqu'elle aura traversé une voute double de sorte qu'à une profondeur x l'impulsion de la chaleur lumineuse qui parvient à cette profondeur est

$b\,q^{\frac{b}{a}\int_{-x}^{\infty} Dx\,a\,e^{-bx}}$ ou $b\,q^{\frac{b}{a}\frac{a}{b}e^{bx}}$ ou $b\,q^{e^{bx}}$ ou désignant par e^{-m} la fraction q et l'on aura $b\,e^{-m e^{bx}}$ pour l'expression de la chaleur affluente qui traverse le plan placé à la profondeur x



$c - \frac{a}{b}e^{-bx}$

$\frac{a}{b}e^{bx} - \frac{a}{b}e^{-bx}$

$\frac{a}{b}e^{bx}$

---

prenons une profondeur X plus grande que x et cherchons quelle est la quantité de chaleur que la voute comprise de x à X fait passer au dessus du plan situé à la profondeur x

chaque élément compris entre x et X envoye une quantité de chaleur proportionnelle à la voute et à la dite force de température et cette quantité est réduite à raison de la voute la voute comprise entre les profondeurs x' et dx

la voute de l'élement qui répond à x' est $dx'\,a\,e^{bx'}$ soit $v_{x'}$ la température au point $v_{x'}$ est une fonction inconnue de x' ou $\psi x'$. cette chaleur rayonnante envoyée par un point x' au plan x est réduite à une partie d'elle même lorsqu'elle a traversé la voute comprise entre x' et x. la voute comprise de suit une hauteur négative par rapport à la profondeur x est $\frac{a}{b}e^{bx}$ et pour x' la voute est $\frac{a}{b}e^{bx'}$

ainsi la voute comprise de x' à x est $\frac{a}{b}(e^{bx'} - e^{bx})$

or la chaleur lumineuse traversant la voute $\frac{a}{b}$ est réduite à q ou e^{-m}

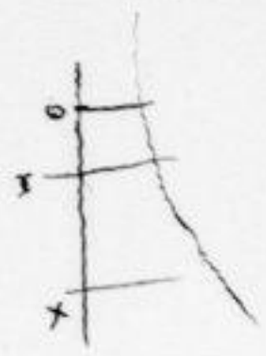
voute comprise de x' à X fait passer de chaleur rayonnante au dessus du plan x.

la voute comprise de x' à X fait passer au dessus du plan x une quantité de chaleur rayonnante qui est réduite à p ou e^{-n} (p étant moindre que q car n plus grand que m)

on aura donc $g.M(\psi x' - \psi x)\,e^{-n\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}(e^{bx'} - e^{bx})}\,Dx'.a.e^{bx'}$.

on désigne par g un coefficient relatif à la nature de la voute dans laquelle s'exerce le rayonnement de la chaleur obscure. il faut maintenant intégrer la dite quantité de $x' = x$ jusqu'à $x' = X$ et la somme sera la quantité de

la masse comprise entre x et X envoye au delà du plan x une quantité
totale de chaleur rayonnante obscure exprimée ainsi
$$g\alpha \int_{x'=x}^{x'=X} \beta x' e^{bx'} (\psi x' - \psi x)\, e^{-n(e^{bx'} - e^{bx})}$$
et la chaleur lumineuse envoyée



impressionne qui passe au dessous de même plan x est
$$\delta e^{-m} e^{bx}$$
si l'on connaissait la fonction ψx, on calculerait la valeur de la première expression et l'on connaîtrait si elle est comparable à la seconde expression

la seule condition à laquelle on n'ait point eu égard jusqu'ici est l'influence de la chaleur sur la densité. dans le fluide aériforme la pression est aussi la température quoique la densité demeure la même. ainsi la densité de l'air étant invariable la pression augmente des $\frac{1}{8}$ de la valeur lorsque la température qui était o devient 1 celle de l'eau bouillante. soit la température d'une masse d'air la pression égale à la pression moyenne $\beta = 0{,}76$ et la densité 1. la pression sera $\beta \frac{11}{8}$ lorsque la température sera 1 et



emploiera 1 la température devenant ψ la pression sera $\beta(1+\frac{1}{8}\psi)$
si l'on augmente la température à 1 ou à ψ et si l'on suppose le volume jusqu'à la densité soit double
et si l'on entend que la chaleur dégagée par la compression la fait dissiper en sorte que la température interne 1 ou ψ la pression sera doublée. en général désignant par δ la densité et par p la pression on a $p = \beta.\delta\,(1+\frac{1}{8}\psi)$

à la profondeur x au dessous de υ soit p_x la pression et v_x la température
soit δ_x la densité. partant de x à $x+dx$ la pression sera augmentée de
poids de l'élément dont l'épaisseur est dx ce poid est $h\delta_x dx$
il faut donc que $\partial(p_x) = h\delta_x dx$ on a donc désignant δ_x par f_x
et v par ψx l'équation $\beta f'x + \beta f x \cdot \frac{1}{8}\psi' x = h f x$
$\frac{f'x}{fx} + \frac{1}{8}\psi' x = \frac{h}{\beta}$ ou $\frac{f'x}{fx} = \frac{h}{\beta} - \frac{1}{8}\psi' x$ ou $\beta f'_x = (h - \frac{1}{8}\beta\psi' x)\, fx$ ou
$\frac{f'x}{fx} = \frac{h}{\beta} - \frac{1}{8}\psi' x$ ou $\log fx = \frac{hx}{\beta} - \frac{1}{8}\psi x + \text{Const}$
ou $fx = Ae^{\frac{h}{\beta}x} e^{-\frac{1}{8}\psi x} = A e^{\frac{h}{\beta}x} e^{-\frac{1}{8}\psi x}$. on voit par là que l'effet
de la température de la densité de l'atmosphère de manière à diminuer la densité et augmente avec elle
diminuée pour toutes les températures positives.

f_x désigne la densité à la profondeur x. La masse d'air au plan x (c'est à dire au plan situé à la profondeur x) est $\int_{-\omega}^{x} dx\, f_x$



la chaleur b qui recueille la masse est réduite à e^{-m} lorsqu'elle a traversé la masse 1 par conséquent celle qui part au dessous du plan x est $b e^{-m \int_{-\omega}^{x} dx\, f_x}$ (1)

la masse comprise entre le plan x et le plan x' est $\int_{x}^{x'} dx\, f_x$

l'élément placé en x' et dont la hauteur est dx' fait partie au dessus
d'une quantité de chaleur proportionnelle à la masse $dx' f_{x'}$ à la
différence $\psi x' - \psi x$ des températures et réduite à une
fraction de la valeur désignée par $e^{-n \int_{x}^{x'} dx\, f_x}$
toute la masse comprise entre x et X fait partie au dessus de
x une quantité totale de chaleur exprimée ainsi

$$g \int_{0}^{X} dx' f_{x'} (\psi x' - \psi x) e^{-n \int_{x}^{x'} dx\, f_x} \qquad (2)$$

l'intégration pour x donne une fonction de x et x'. L'intégration pour x'
donne une fonction de x et X faisant $X = \frac{1}{0}$ on a une fonction de x:
si la masse est infinie la fonction de x donnée par l'expression (2)
doit être la même que la fonction donnée par l'expression (1).
l'équilibre de la chaleur obtient ainsi car il existe dans chaque élément
de la masse autant de chaleur qu'il en faut.
Si la masse n'est pas infiniment profonde mais repose sur un lit de infini-
ment mauvais fond. ce lit de séparation dans toutes températures une température
constante la chaleur rayonnante en vient une certaine quantité de
chaleur rayonnante et la partie de cette chaleur qui traverse au
dessus du plan x est désignée par n fois température du lit de

$$n\, e^{-n \int_{x}^{X} dx\, f_x} \int_{0}^{X} dx' f_{x'} (\psi x' - \psi x) e^{-n \int_{x}^{x'} dx\, f_x} \qquad (3)$$

cette quantité de chaleur ajoutée à celle qui est donnée par l'expression (2)
et la somme c'est ce qui a été trouvé par l'expression (1)

(1)

ce vient enfin considérer que dans le fluide aériforme exposé à l'action de la chaleur lumineuse, une couche échauffée tend à s'élever en effet, et elle est remplacée par la couche supérieure ~~moins~~ plus froide. cet effet alors se renouvelant entre deux tranches contiguës quelconques. la densité n'est pas changée l'état de hygrométricité est devenu invariable. on peut enfin remarquer ici combien ce n'est point le mouvement de bas en haut mais l'abaissement de la chaleur : car la couche inférieure remplace la couche supérieure et est remplacée par elle tant que l'état du fluide demeure le même. mais cette abaissement de la chaleur c'est cet effet qui a lieu dans le liquide pour tenir compte de l'effet que l'on vient de décrire il faut attribuer à la masse fluide un mouvement du rayonnement dont nous venons de parler une conductibilité analogue à celle des solides mais plus grande et qui s'exerce seulement pour transmettre la chaleur de bas en haut. l'intensité de cet effet est comme dans les solides proportionnel à la différence des températures des deux couches voisines car le transport dont nous parlons est nul si la différence est nulle et cette différence étant toujours très petite l'effet de cette sorte de conductibilité des fluides peut alors encore être regardé comme

$+ K \frac{dv}{dx}$ (4) il faut donc dans le calcul de la quantité de chaleur qui traverse au delà du plan x ajouter à travers de cette base une quantité $K \psi' x$ (4) cette cause ajoutée à l'expression (3) et l'expression (2) donne la quantité de chaleur qui doit traverser celle qui est donnée par l'expression (1) ainsi l'équation de chaleur aura cette forme exprimée en fonction de x

$$\partial e^{-m \int_{\omega}^{x} \partial z f z} = \partial \int_{0}^{x} \partial \beta f \beta (\psi \beta - \psi x) e^{-n \int_{x}^{\beta} \partial z f z}$$

$$+ h (u - \psi x) e^{-n \int_{x}^{x} \partial z f z}$$

$$+ K \psi' x \qquad (e)$$

la quantité ψx elle est exprimée par $A e^{\frac{h}{\delta} x} e^{-\frac{3}{\delta} \psi x}$

la difficulté de cette équation (e) est dans une équation d'analyse compliquée en ce qu'elle contient tous les éléments de la question physique et l'on peut du moins entrevoir que cette solution est possible et quel en est le caractère ce que les solutions font pressentir ici indiquent. il importerait beaucoup de recueillir des observations exactes qui dirigeraient dans cet examen et il ne me paraît point douteux que si nous possédions une série d'observations bien choisies et bien multipliées nous parviendrions à une règle applicable à tous les climats possibles et à déduire de cette règle la solution complète du problème physique que l'on peut regarder comme très difficile et d'un grand intérêt

Température d'un petit corps échauffé par un foyer dont la distance varie.

Soit le foyer f est placé à la distance 2 du vase infiniment petit m. la température commune de l'espace est a. le vase sphérique est échauffé d'une conductibilité infinie dans toute sa substance qu'il contient reçoit à chaque instant sa température commune si le point f était à la distance c le vase prendrait la température finale a + 2.
la conductibilité intérieure du vase est h et sa surface est S.
on suppose que le point f passe successivement suivant une loi connue du point f au point f' et revient au point f en continuant ainsi à l'infini. On il s'agit de connaître la température variable z du vase m.

Soit f la quantité de chaleur que le foyer envoye pendant le temps t à la surface sphérique dont il est le centre et ρ le rayon très petit du vase sphérique. m. $4\omega g^2$ est la surface sphérique dont le foyer est le centre et $\omega\rho^2$ est la partie de cette surface que le vase couvre par conséquent ce vase reçoit pendant l'instant dt la quantité de chaleur

$\frac{H.\omega\rho^2}{4\omega g^2} f\,dt$ et si la distance était x au lieu de g le vase recevoit la quantité de chaleur $\frac{H\omega\rho^2}{4\omega x^2} f\,dt$ le coefficient H dépend de la nature de la surface de ce vase il mesure la facilité avec la quelle cette surface reçoit la chaleur envoyée par f. ce coefficient H peut être 1 s'il n'y a aucune chaleur réfléchie par la surface du vase ou il est une fraction.
lorsque le vase est parvenu à la température a + z il perd la quantité de chaleur $S.h.z\,dt$ ou $4\omega\rho^2 h z\,dt$ on a donc $\frac{H.f}{4\omega c^2} = 4\omega h z$ ainsi h, z et c étant supposés connus on trouvera facilement le coefficient fH on le représentera dans ce qui suit par f il mesure l'action du foyer, à la distance prise pour unité

Soit z la température du vase après le temps t et x la distance du foyer après ce temps t. x est supposé une fonction de t périodique et connue. z sera une fonction de t qu'il faut déterminer
le vase reçoit du foyer pendant l'instant dt la quantité $\frac{f\omega\rho^2 dt}{4\omega x^2}$ il perd pendant le même instant la quantité $4\omega\rho^2 h z\,dt$ ainsi la chaleur qui contribue à augmenter la température z est $\left(\frac{f\omega\rho^2}{4\omega x^2} - 4\omega\rho^2 h z\right)dt$
le volume occupé par le vase $\frac{4\omega\rho^3}{3}$ et $\frac{4\omega\rho^3}{3} D$ est le poids D étant la densité ou le poids d'une unité cube or c étant la capacité de chaleur l'unité de poids qui recevroit c augmenteroit la température de 1 donc le poids $\frac{4\omega\rho^3}{3} D$ s'il recevoit c augmenteroit la température de $\frac{1}{\frac{4\omega\rho^3}{3} D}$ donc si le même poids $\frac{4\omega\rho^3}{3} D$ reçoit $\left(\frac{f\omega\rho^2}{4\omega x^2} - 4\omega\rho^2 h z\right)dt$ il augmentera la température de $\frac{\left(\frac{f\omega\rho^2}{4\omega x^2} - 4\omega\rho^2 h z\right)dt}{\frac{4}{3}\omega\rho^3 c.D}$ ou a donc $\frac{dz}{dt} = \frac{3f}{16\omega\rho c.Dx^2} - \frac{3hz}{\rho c.D}$

$= e^{-kt} \cdot k dg^2$

$= e^{-kt} \cdot k d$ ∫

$= e^{-kt} \cdot 2 \int e$

$= 2(1 - e^{-k}$

Si la distance x était constante et égale à g la vase s'échaufferait d'autant
en plus et cet échauffement durerait par hypothèse un temps fini. et après un
temps infini la valeur de dz serait nulle entorte que l'on aurait l'équation
$\frac{f}{16\omega g^2} = hz$ ce qui donnerait pour z la valeur trouvée précédemment pour z.
dt

on voit par là que chaque terme de la valeur de $\frac{dz}{dt}$ a une valeur finie
la quantité $\frac{3f}{16\omega\rho \cdot c \cdot D \cdot g^2}$ est finie par hypothèse ainsi que le coefficient
$\frac{3h}{\rho \cdot c \cdot D}$. il était nécessaire de faire cette remarque afin qu'on ne put point
considérer la valeur de $\frac{dz}{dt}$ comme infiniment petite cela n'aurait lieu
que dans le cas ou la vase pourrait prendre subitement une vitesse égale à celle
lorsque le foyer demeure à la distance g il faut maintenant considérer
l'équation qui donne la valeur de $\frac{dz}{dt}$

si l'on met h à la place de $\frac{f}{16\omega g^2}$ on aura $\frac{dz}{dt} = \frac{3h}{\rho \cdot c \cdot D}\left\{\frac{dg^2}{x^2} - z\right\}$

comme $\frac{1}{x^2}$ est une fonction connue de t il s'en suit que l'équation est linéaire et
du premier ordre. soit $K = \frac{3h}{\rho \cdot c \cdot D}$ on aura $\frac{dz}{dt} = \frac{K \cdot dg^2}{x^2} - Kz$

et intégrant $z = e^{-Kt}\left(A + Kdg^2 \int \frac{e^{Kt} \cdot dt}{x^2}\right)$

lorsque t est 0 la valeur de z est 0

on a donc $a = 0$ et l'intégrale prise dans le second membre doit
commencer lorsque $t = 0$ ainsi la solution cherchée est donnée par
l'équation

$z = e^{-Kt}\left(a + Kdg^2 \int \frac{e^{Kt} \cdot dt}{x^2}\right)$ $\frac{1}{x^2}$ est par hypothèse une

fonction périodique de t et l'intégrale commence avec t. si
soit par exemple x constante et égale à g on aura

$z = e^{-Kt}\left\{a + Kdg^2 \int e^{Kt} dt\right\} = e^{-Kt}\left\{a + dg^2\left(e^{Kt} - 1\right)\right\}$

$= a e^{-Kt} + dg^2 - dg^2 e^{-Kt}$

et si t est infini on aura $z = dg^2$.

---

soit $\frac{1}{x^2} = \varphi t$ la fonction désignée par φ est supposée connue

on aura donc $z = e^{-Kt} \cdot dg^2 \cdot K \int e^{Kt} dt \cdot \varphi t$ on intégrant par parties

$$z = 2g^2 e^{-kt} k \left\{ \omega + \frac{1}{k} e^{kt} \varphi t - \frac{1}{k^2} e^{kt} \varphi' t + \frac{1}{k^3} e^{kt} \varphi'' t - \frac{1}{k^4} e^{kt} \varphi''' t + \cdots \right\}$$

$$\text{ou } z = 2g^2 \left\{ k e^{-kt} \cdot C\omega + \varphi t - \frac{1}{k} \varphi' t + \frac{1}{k^2} \varphi'' t - \frac{1}{k^3} \varphi''' t + \cdots \right\}$$

$$\text{et } o = 2g^2 \left\{ k \cdot C e^{-kt} + \varphi o e^{-kt} - \frac{1}{k} \varphi' o e^{-kt} + \frac{1}{k^2} \varphi'' o e^{-kt} - \frac{1}{k^3} \varphi''' o e^{-kt} \cdots \right\}$$

$$\text{et } z = 2g^2 \left\{ (\varphi t - e^{-kt} \varphi o) - \frac{1}{k} (\varphi' t - e^{-kt} \varphi' o) + \frac{1}{k^2} (\varphi'' t - e^{-kt} \varphi'' o) - \alpha \right\}$$

$$\text{ou } z = 2g^2 \left\{ \varphi t - \frac{1}{k} \varphi' t + \frac{1}{k^2} \varphi'' t - \frac{1}{k^3} \varphi''' t + \cdots \right\}$$

$$- 2g^2 \left\{ \varphi o - \frac{1}{k} \varphi' o + \frac{1}{k^2} \varphi'' o - \frac{1}{k^3} \varphi''' o + \cdots \right\} e^{-kt}$$

ou a supposé que la fonction φt est périodique et que par conséquent elle ne change point de valeur lorsqu'on met t ou met $t + i\theta$, θ étant la durée de la période et i un nombre entier quelconque.

on voit par là que la fonction z tend de plus en plus à devenir périodique et qu'après un temps extrêmement grand on a pour la valeur périodique de z

$$z = 2g^2 \left\{ \varphi t - \frac{1}{k} \varphi' t + \frac{1}{k^2} \varphi'' t - \frac{1}{k^3} \varphi''' t + \alpha \right\}$$

si φt est une constante. La valeur de cette constante est $\frac{1}{g^2}$ et les fonctions $\varphi' t \cdots \varphi'' t \cdots$ On tient nullal ou a donc encore $z = \alpha$.

rapprochons par ψt la suite $\varphi t - \frac{1}{k} \varphi' t + \frac{1}{k^2} \varphi'' t - \cdots$

on aura en général $z = 2g^2 \left(\psi t - e^{-kt} \psi o \right)$

Si le vase avait la température α et qu'il se refroidit dans l'espace à la température a. Soit $4\omega\rho^2$ étant la surface du vase on aurait en nommant z la température variable excédente $4\omega\rho^2 h z dt$ pour la quantité de chaleur qui sort dans l'instant dt. la quantité de chaleur C élèverait le poid 1 à la température 1 elle élèverait donc le poid $\frac{4\omega\rho^3}{3} D$ à la température $\frac{3}{4\omega\rho^3 D}$ donc la quantité de chaleur $4\omega\rho^2 h z dt$ et ainsi de suite descendant $\frac{3}{4\omega\rho^3 D}$ est le poid diminue la température de $\frac{4\omega\rho^2 h z dt \cdot 3}{4\omega\rho^3 C \cdot D}$ ou a donc $\frac{4\omega\rho^3 D}{3}$

l'équation $\frac{dz}{dt} = -\frac{3h}{\rho C \cdot D} \cdot z$ ou $z = A e^{-\frac{3ht}{\rho \cdot C D}}$ si l'on fait $t = 0$ on aura par hypothèse $z = \alpha$ ou donc $z = \alpha e^{-\frac{3h}{\rho \cdot C \cdot D} t}$

on voit par là que la quantité $\frac{3h}{\rho \cdot C \cdot D}$ ou K mesure la vitesse du refroidissement du vase.

Si la fonction φt venait à varier il en résulterait pour la valeur de z une variation correspondante. Supposons que l'accroissement à la fonction φt une variable exprimée par ft ait pour accroissement à la fonction ψt une nouvelle partie correspondante à ft et qui aurait pour valeur

$ft - \frac{1}{k} f't + \frac{1}{k^2} \varphi''t - \ldots$ soit Ft cette valeur on aurait

$$z = 2g^2 \left\{ \overline{\psi t + Ft} - e^{-kt} \overline{\psi 0 + F0} \right\}$$

ainsi tant que les quantités qui tendent à rendre la valeur de ψt produisent une inégalité correspondante dans la valeur de z

Extrait d'un mémoire sur l'analyse des temperatures interieures du globe

la question des temperatures terrestres est [illegible] est composée - mais ne [illegible] dans cette recherche et les résultats remarquables que l'on en [illegible] Dé Dentb sur l'intérieur de la terre est [illegible] Mr Patte a entièrement dilatation.

† la marche de cette question l'analyse qui est

l'action des rayons du Soleil pénètre le globe et cause des variations diurnes et annuelles dans les temperatures [illegible] ces changements périodiques cessent d'être sensibles à quelque distance de la surface, au delà d'une certaine profondeur la temperature [illegible] est constante pour un même climat. cette quantité invariable de chaleur propre à chaque climat dépend de la température moyenne de l'air, de l'inégale distribution de la chaleur et de l'humidité qui [illegible] la surface du globe. si la température [illegible] était uniforme et la même que celle de l'espace. si l'on fait abstraction de ce mouvement annuel de la chaleur pour ne considérer que la température [illegible] du globe, on trouve que cette température [illegible] dans un lieu donné est [illegible] à l'équateur. [illegible] cette différence. [illegible] il résulte de ces différences que la température [illegible] est plus grande à une profondeur qui [illegible] depuis un grand nombre de siècles dans l'intérieur du globe et [illegible] à un mouvement extrêmement lent devenu [illegible] sensiblement uniforme. [illegible] enveloppe de ce second mouvement que la chaleur du Soleil pénètre [illegible] à quelques [illegible] de l'avance dans l'intérieur du globe et en même temps la détourne pour la diriger à [illegible] il faut aussi porter son attention sur le mouvement de la chaleur propre du globe. si [illegible] plus grande à une [illegible] il est impossible d'obtenir [illegible] de la chaleur du Soleil qui [illegible] depuis un très long-temps. [illegible] il est impossible d'apprécier quelque [illegible] dans la température [illegible] d'après [illegible] observations [illegible] la même [illegible] il [illegible] en ce que [illegible] plus grande à de plus grandes [illegible] enveloppe [illegible] alimente [illegible] qui [illegible] pour [illegible] de quelques [illegible]

Due à la seule influence du Soleil est devenue fixe

* Cette chaleur primitive est [illegible] de la chaleur du Soleil [illegible] de la température [illegible] ne peut être l'effet de la chaleur [illegible] il [illegible] entièrement à une chaleur primitive que la terre possédait à son origine [illegible] dans les [illegible] le dit pour à la surface

il faut donc compter sur l'avenir environ dix neuvièmes de la chaleur
dans la matinée du globe
le premier est périodique et affecte que l'enveloppe il porte
de globe
la chaleur dans et dessus et au dessus de la superficie de la terre et de ses
les alternatives des saisons
le second immédiatement rapporté sorti à la chaleur interne il est universelle
et d'une certaine étendue il combine dans un flux continuel et imprime
semblable à lui même qui ravive la moelle entière du globe de l'eau et
d'habitude sur le plan de l'organisme progressive portée.
le troisième mouvement de la chaleur
des globes est variable et irrégulier dans le rapport d'éloignement progressif
du globe au centre. cette chaleur qui s'dissipe aussi dans les espaces
planétaires est propre à la terre et depuis primitive elle est
due aux causes qui subsistent encore à l'origine de cette planète. elle abandonne
lentement les premières couches qui conservent
pendant un temps immense une température très élevée. cette
chaleur intérieure et semble est la cause de la hypothèse d'une
chaleur intérieure et semble vrai reconnue dans l'ouvrage de la
philosophie
cause d'étendue et rapport que par l'analyse mathématique
bonde, tudes observations exactes.

ff
cette température d'une
même comme la chaleur
naturelle dépendant
plusieurs
car elle est indiquée
par plusieurs grands phé
nomènes, les volcans, les
tremblements de terre les
eruptions gazeuses les sources
thermales. avec laquelle
l'on ne peut être révélée que
par l'eau +

ff de l'état variable
à la surface
plus dans la chaleur
intérieure le dissipe dans le
vide. +

ff dont l'état variable
peut donner par une
fonction arbitraire et +

cette température variable de la chaleur primitive du globe qui est l'objet
principal du mémoire dont nous rendons compte.
dont
la
globe
tout
ff
I emploi de la question à produire de l'observation ff
II conditions relatives à la surface
III la température variable. la température variable dans l'intérieur
arbitraire.
IV application à la question dont tous les points ont reçu la même
température
V température variable dans un globe d'une profondeur
dont la surface
ff
VI chaleur intérieure de la chaleur dont est le globe
VII. température variable dans un globe d'une profondeur
infinie dans l'état primitif supposé par une fonction arbitraire
la chaleur se dissipe dans le globe à travers la surface dans un espace
déterminé par une enveloppe d'une température constante
VIII. température de la surface
IX applications numériques
X de la chaleur relative à la sphère et comparaison avec
la température variable dans le globe d'un refroidissement profond.
XI conséquences générales.

Extrait d'un mémoire sur le refroidissement séculaire du globe terrestre

La question des températures terrestres est une des plus importantes de la théorie analytique de la chaleur. nous en avons traité dans nos mémoires précédents les différentes parties de cette question. Les recherches dont nous présentons aujourd'hui quelques résultats ont pour objet d'exposer par l'analyse les lois du refroidissement séculaire des globes

je me suis forcé d'omettre tous les détails analytiques de ce mémoire, et de me borner à donner le texte du dernier article qui contient l'énoncé de plusieurs conséquences générales.

j'ai écrit sur le tableau l'intégrale qui contient la solution analytique. elle est d'abord très compliquée parce que cette équation dans le point elle embrasse l'équation dans le mouvement imaginaire. elle est ensuite différentiée par rapport à chacune des variables qui peut être dans cette équation

D'une manière explicite de toutes les circonstances de la nature : il n'y en a aucune que l'on ne puisse soumettre au calcul

la seconde équation exprime l'état de la surface. elle se convertit en une autre indéfinie dont l'intégrale est la solution cherchée

la 2ème table que je vais donner dans mon mémoire

pour citer un exemple de cegenre de questions nous avons résolu celle qui est indiquée dans le VII article.

On suppose un solide homogène de dimensions infinies terminé par un plan horizontal. tout l'espace au dessus de ce plan, est supposé rempli par la masse du solide l'espace supérieur est vide et terminé de tout côté par une enceinte solide d'une forme quelconque et d'une température donnée quelconque différente de celle du plan pris pour zero.

La profondeur verticale d'un point du solide ou sa distance à la surface la température initiale de la tranche solide dont la profondeur est la donnée et on demande cette température pour un instant quelconque. Le problème est entièrement arbitraire et peut être énoncé comme il suit. la température initiale d'un point du solide étant donnée on demande la température de ce point après un temps donné. Cette question a été résolue 1° lorsque la chaleur se propage dans un solide indéfini en tous sens 2° lorsque la chaleur se propage dans un solide indéfini compris entre deux plans parallèles infinis 3° lorsque la chaleur se propage dans un solide indéfini compris entre deux plans perpendiculaires infinis 4° lorsque la chaleur se propage dans un solide indéfini compris entre deux plans perpendiculaires infinis et un troisième plan perpendiculaire aux deux premiers. Les conditions qui caractérisent ces différents problèmes consistent dans l'action de la chaleur ou en a donné les équations différentielles propres à chacun d'eux mais on n'a fait connaître les intégrales de ces équations que dans le premier cas. Le problème que nous allons résoudre est celui qui se rapporte au 2e cas.

Il s'agit de déterminer la température d'un point quelconque du solide au bout d'un temps donné connaissant la température initiale de chaque point du solide. Nous supposerons que la température initiale d'un point quelconque ne dépende que de la distance de ce point à la surface du solide. Nous supposerons encore que le solide ait été primitivement chauffé à un degré uniforme et qu'on ait ensuite entretenu la surface à une température constante différente de celle du solide. Nous supposerons enfin que la température initiale d'un point quelconque du solide ne dépende que de la distance de ce point à la surface du solide. Nous supposerons encore que le solide ait été primitivement chauffé à un degré uniforme et qu'on ait ensuite entretenu la surface à une température constante différente de celle du solide. Nous supposerons enfin que la température initiale d'un point quelconque du solide ne dépende que de la distance de ce point à la surface du solide.

si la température A de la source A varie suivant la loi exprimée dans le
point où la température variable B aura

$$v = \frac{26 \cdot H}{K\omega} \int_0^\infty \frac{dp\, e^{-p^2 \frac{Kt}{c \cdot D}}}{p^2 + \frac{H^2}{K^2}} \left\{ \frac{H}{K} \frac{\sin(pw)}{p} + \omega \cos(pw) \right\} \tag{3}$$

pour connaître l'état variable de la surface depuis le commencement
du refroidissement il faut supposer $w = 0$ et l'on a

$$v = \frac{26 \cdot H}{K\omega} \int_0^\infty \frac{dp\, e^{-\frac{p^2 Kt}{c \cdot D}}}{p^2 + \frac{H^2}{K^2}} . \tag{4}$$

cette dernière expression équivaut à l'intégrale indéfinie

$$v = \frac{26}{\sqrt{\omega}} e^{R^2} \int_R^\infty dr\, e^{-r^2}$$ l'intégrale dont cette valeur prise depuis $r = R$

jusqu'à $r = \frac{1}{0}$ exprime une fonction de R. la valeur de cette limite
R est $\frac{H\sqrt{t}}{\sqrt{K \cdot C \cdot D}}$. pour cette raison la valeur de v sera toute calculée
dans la seconde table que M. Kramp a donnée dans son
ouvrage sur les réfractions atmosphériques ~~en cette table donnant le produit~~

~~$e^{R^2} \int_R^\infty dr\, e^{-r^2}$~~

lorsque la valeur de t est devenue assez grande par exemple si cette espèce
mille années et si la température variable de la surface est exprimée dans cette même
par la formule très simple $v = \frac{6\sqrt{K \cdot C \cdot D}}{H\sqrt{\omega}\sqrt{t}}$ (5) ainsi la température
~~de la surface~~ en un instant donné depuis le
commencement du refroidissement.

si l'on compare le mouvement de la chaleur dans un globe d'une pro
fondeur infinie à celui qui a lieu dans une sphère solide d'un rayon
~~très~~ grand comme celui de la terre on reconnaît que les deux
effets doivent être les mêmes pourvu que le temps soit immense et pour toutes
les parties qui ne sont pas extrêmement éloignées de la surface
~~à toutes celles dépendant beaucoup de différentielles~~. il suit de là que les
~~intégrales précédentes~~ doivent aussi être données par les formules qui expri-
~~mettent~~ le mouvement variable de la chaleur dans une sphère d'un rayon
quelconque.

Dans cette dernière question on désigne par X le rayon total, par x le rayon
d'une couche sphérique intérieure. la température initiale du solide est comme
~~dans~~ elle est représentée par Fx, et la fonction Fx est entièrement
arbitraire ~~et exprime~~ désigne le temps écoulé depuis le commencement
de t. et on a la valeur
de la température d'une couche sphérique
dont le rayon est x. on suppose la quantité ~~contenue~~ contenue dans
chaque ~~élément~~ élément de la surface. Dans une
sphère solide. on suppose la quantité de chaleur contenue dans
chaque élément de la température initiale
~~sphère~~ sphère creuse ~~et~~ dont les rayons sont x et $x + dx$ et
~~dont~~ dont l'épaisseur est dx. on désigne par $\int$ la somme
de tous les produits $x^2 dx Fx$ pris depuis $x = 0$ jusqu'à $x = X$.
~~on désigne~~ on désigne par $\int'$ la somme de tous les produits
~~pris~~ pareils pris depuis $x = X$ jusqu'à $x = \infty$. on désigne
~~par~~ par $\int''$ la somme de tous les produits pareils pris depuis
$x = 0$ jusqu'à $x = \infty$. on désigne par K la capacité
~~de~~ spécifique de chaleur et par C la densité. on aura
~~les~~ les valeurs suivantes

la loi qui lie les équations différentielles qui expriment le mouvement de la chaleur dans cette solide met

$$\frac{dv}{dt} = \frac{K}{C \cdot D}\left\{\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{2}{x}\cdot\frac{dv}{dx}\right\} + K\left(\frac{dv}{dx}\right) + H(v) = 0 \qquad (7)$$

(6) dt

Quand on connaît les équations différentielles il est nécessaire de bien entendre les conditions particulières qui déterminent un résultat unique dans l'analyse des températures du globe. Cette seconde équation se rapporte à l'état de la surface elle montre que l'élévation v de température de la surface au dessus de la température zéro de l'espace vide a une relation nécessaire avec la valeur qui appartient même instant à $\left(\frac{dv}{dx}\right)$ ou à la variation de cette température. Elle montre aussi que cette variation $\left(\frac{dv}{dx}\right)$ est nulle lorsque la température (v) de la surface et la température $(v+\Delta v)$ d'un point placé à la profondeur Δx. le rapport $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ de l'accroissement de température à raison de la profondeur est la mesure de l'accroissement de température à raison de la profondeur. or cet accroissement change avec la valeur de (v) c'est à dire que le rapport de l'accroissement $\frac{dv}{dx}$ à la température v de la surface est une quantité constante $\frac{H}{K}$.

En supposant le flux de chaleur à la surface tel qu'il est déterminé par l'action combinée des rayons solaires et de la chaleur qui se dissipe de la surface en vertu du refroidissement et de l'action du milieu environnant, cette relation que nous avons trouvée entre les températures de la surface et les températures des couches intérieures est indépendante de la figure du corps et de la loi de continuité dans la masse intérieure elle même. le rapport constant dont il s'agit ne dépend que des quantités spécifiques de la chaleur qui sont désignées par K et H.

Voici la formule qui contient la solution générale de la question proposée. Les équations précédentes ont donné cette solution par la voie

$$v = \sum_{i=1}^{i=\infty} \left\{ \frac{2}{x}\sin(p_i x) \cdot e^{-\frac{K}{C\cdot D}p_i^2 t} \cdot \frac{\int_0^x da \cdot a \sin(p_i a)\cdot Fa}{x - \frac{1}{2p_{(i)}}\sin(2p_i x)} \right\} \qquad (8)$$

La quantité désignée par p_i est une racine de l'équation transcendante $px = \left(1 - \frac{H}{K}\cdot x\right)\tan(px)$ (9)

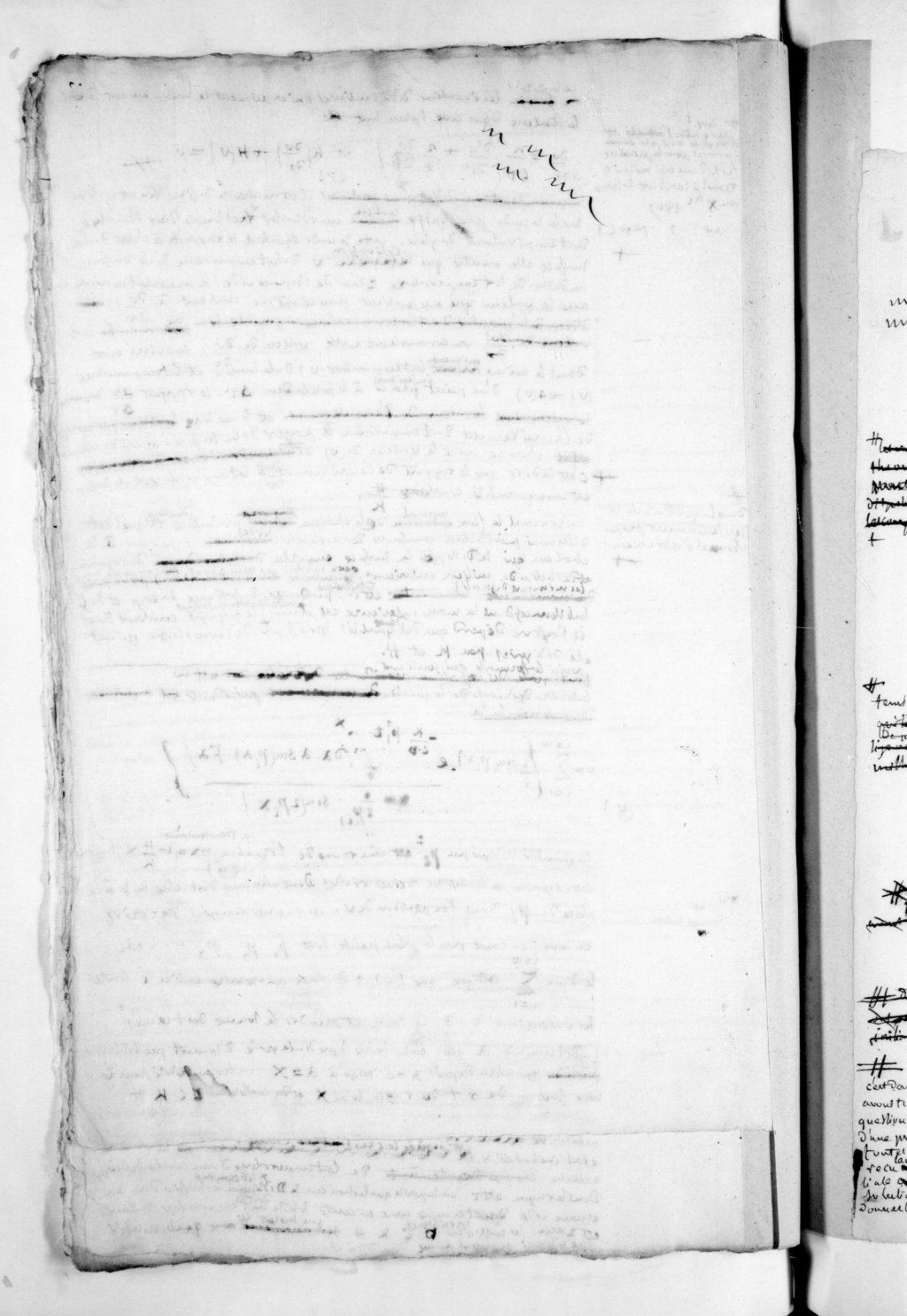
cette équation a toutes les racines réelles dont chacune doit être mise à la place de p_i dans l'expression de v. ces racines rangées par ordre en commençant par la plus petite sont $p_1\ p_2\ p_3$ --- &c.

le signe $\sum_{i=1}^{i=\infty}$ indique que l'on doit donner au nombre entier i toutes les valeurs $1\ 2\ 3\ 4$ -- et prendre la somme des termes indéterminés où entre toute la ligne d'intégrale différentiée par l'intégration définie qui a lieu depuis $a = 0$ jusqu'à $a = X$ on trouve enfin pour v une fonction de x, t du rayon total X et des coefficients $D\ C\ K\ H$

Dans cette équation et dans celle qui précède on a donné pour la première fois dans un mémoire lu à l'Institut de France en 1807

art ( ) page ( )

Dans la question ci dessus il est entièrement proportionnel à cette ordonnée



c'est sous cette forme que doit être mise l'intégrale des équations ( ) et ( ) pour répondre directement au phénomène physique qui est l'objet de la question. on peut conjecturer en vertu de cette formule toutes les circonstances du refroidissement d'un globe de dimensions quelconque.

Une des conséquences de cette solution est que le mouvement de la chaleur dans l'intérieur du globe devient de plus en plus lent à mesure que le tems augmente. Si la loi que le refroidissement a duré pendant un tems infini était déterminée la valeur de l'état variable du globe était exprimée sans le secours de la première par le moyen de la formule de v. Il est à remarquer que dans le cas où le refroidissement du globe s'est opéré uniformément dès le commencement, la température initiale de chaque point du globe a été supposée la même, et que cette supposition a été nécessaire pour que la température initiale fût exprimée par une fonction arbitraire. Mais cette supposition n'est pas nécessaire pour que la solution soit générale, et elle ne s'établit dans les usages d'une manière indépendante de la première. alors toutes les températures initiales deviennent en même tems variables et dépendantes, en sorte que les rapports de ces températures initiales entre elles sont exprimés par des nombres constants. la première est connue en effet dans notre expérience que cette question générale et rigoureuse de la température initiale dans le globe, dépendante de trois dimensions, est très difficile à résoudre même avec une sphère homogène. les rapports des températures initiales entre elles sont indépendants de la nature de la substance. Si la sphère est composée de substances différentes, mais symétriquement disposées autour du centre, les températures initiales sont encore indépendantes de la nature des substances. Si la sphère est composée de substances différentes, mais symétriquement disposées autour du centre, les températures initiales sont encore indépendantes de la nature des substances. Si la sphère est composée de substances différentes, mais symétriquement disposées autour du centre, les températures initiales sont encore indépendantes de la nature des substances.

c'est dans cette vue que nous avons traité séparément la question relative au solide d'une profondeur infinie dont toutes les parties ont reçu la même température initiale. or la solution de cette question doit donner le même résultat que

(voyez le verso) A

A

Que celle qui exprime l'état variable d'une sphère d'un rayon infini et dont tous les points seraient en la température initiale 6. il faut donc dans l'équation ( ) remplacer la fonction arbitraire Fx par une variable 6 et attribuer une grandeur infinie au rayon total X afin de déterminer la valeur X infinie dans l'équation $pX = \left(1 - \frac{H}{K}X\right) \operatorname{tang} pX$ afin de déterminer de v dans l'équation ( ) devient une quantité différentielle ensuite que v est exprimée par une intégrale définie, et l'on trouve exactement pour cette intégrale le résultat donné par l'équation ( ) à laquelle on était parvenue en suivant une analyse entièrement différente.

La suite à la page 9

on ne connait point la densité des couches intérieures du globe ni les valeurs des coefficients C K H. ces deux derniers coefficients ont été déterminés jusqu'ici que pour une seule substance le fer forgé dont la surface fut polie. les expériences que nous avons tentées pour mesurer ces coefficients n'étaient que qualitatives et la quelle recherche ne se rapportaient point à la question actuelle. elles avaient pour objet de comparer les résultats théoriques, avec ceux de l'observation et de déterminer quelques valeurs numériques pour une substance les éléments qu'exigent les applications numériques pour nous pouvons donc aujourd'hui appliquer les formules précédentes de la théorie et acquérir ainsi une idée exacte et complette des phénomènes en question. il est facile ensuite de voir comment en supposant que les coefficients D C K varient avec l'espèce de la matière avec la profondeur et la température, les changements qui en peuvent résulter affecteraient sensiblement les températures à de très grandes profondeurs et comment ils influent sur l'objet de nos recherches et que nous allons exposer. toutefois il est nécessaire de remarquer que ces conséquences ne sont entièrement exactes que si on les rapporte à une sphère de fer solide et homogène d'un diamètre égal à celui de la terre et dont la surface tient uniformément polie. notre objet est maintenant de discuter les applications spéciales de la théorie à la question du globe terrestre dont les constitutions intérieures nous est inconnue et que des variations de la température nous indiquent.

Si la terre était primitivement une masse liquide portée à une température supérieure à celle de l'espace environnant et qu'elle ait perdu graduellement cette chaleur d'origine, on observerait à une profondeur de l'enveloppe solide qui l'entoure des variations périodiques annuelles de température et la température moyenne de chaque couche irait en croissant à mesure que l'on s'enfoncerait. cette température croissante serait bien plus grande pour des distances égales aux précédentes que celles dues aux variations périodiques. la valeur moyenne de toutes les températures observées à chaque station de chaque série devrait donner cette température croissante de l'intérieur du globe.

si la chaleur du rayonnement solaire n'avait pas été constante et qu'elle ait été primitivement plus intense, une température primitive supérieure à celle de l'espace environnant ou qu'elle ait perdu graduellement cette chaleur d'origine, on observerait à une certaine profondeur de l'enveloppe solide qui l'entoure des variations périodiques annuelles de température et la température moyenne de chaque couche irait en croissant à mesure que l'on s'enfoncerait. cette température croissante serait bien plus grande pour des distances égales aux précédentes que celles dues aux variations périodiques. la valeur moyenne de toutes les températures observées à chaque station de chaque série devrait donner cette température croissante de l'intérieur du globe terrestre dans le cas où la température moyenne de la surface serait restée constante pendant un grand nombre de siècles.

si la chaleur du rayonnement solaire n'avait pas été constante et qu'elle ait été primitivement plus intense, une température primitive supérieure à celle de l'espace environnant ou qu'elle ait perdu graduellement cette chaleur d'origine, on observerait à une certaine profondeur de l'enveloppe solide qui l'entoure des variations périodiques annuelles de température et la température moyenne de chaque couche irait en croissant à mesure que l'on s'enfoncerait. cette température croissante serait bien plus grande pour des distances égales aux précédentes que celles dues aux variations périodiques. la valeur moyenne de toutes les températures observées à chaque station de chaque série devrait donner cette température croissante de l'intérieur du globe terrestre dans le cas où la température moyenne de la surface serait restée constante pendant un grand nombre de siècles.

si comme toutes les observations l'indiquent, les températures vont très rapidement en croissant à de plus grandes profondeurs et que la cause de cet accroissement soit une chaleur d'origine propre au globe terrestre qui s'épuise lorsque cette planète s'est formée et qui se dissipe continuellement à la surface, à toutes les époques, la température de chaque point de la masse solide doit diminuer et le refroidissement doit se propager de plus en plus profondément. la température à la surface du globe devient alors de plus en plus constante et finit par le devenir entièrement lorsque la chaleur intérieure est tout à fait épuisée et que la température de chaque point de la masse est devenue égale à celle qui convient à la température moyenne de la surface. alors la température de chaque couche intérieure reste invariable et la température moyenne de toutes les températures observées à chaque station de chaque série donne la température de cette couche.

si la chaleur du rayonnement solaire n'avait pas été constante et qu'elle ait été primitivement plus intense, une température primitive supérieure à celle de l'espace environnant ou qu'elle ait perdu graduellement cette chaleur d'origine, on observerait à une certaine profondeur de l'enveloppe solide qui l'entoure des variations périodiques annuelles de température et la température moyenne de chaque couche irait en croissant à mesure que l'on s'enfoncerait. cette température croissante serait bien plus grande pour des distances égales aux précédentes que celles dues aux variations périodiques. la valeur moyenne de toutes les températures observées à chaque station de chaque série devrait donner cette température croissante de l'intérieur du globe terrestre dans le cas où la température moyenne de la surface serait restée constante pendant un grand nombre de siècles.

si comme toutes les observations l'indiquent, les températures vont très rapidement en croissant à de plus grandes profondeurs et que la cause de cet accroissement soit une chaleur d'origine propre au globe terrestre qui s'épuise lorsque cette planète s'est formée et qui se dissipe continuellement à la surface, à toutes les époques, la température de chaque point de la masse solide doit diminuer et le refroidissement doit se propager de plus en plus profondément. la température à la surface du globe devient alors de plus en plus constante et finit par le devenir entièrement lorsque la chaleur intérieure est tout à fait épuisée et que la température de chaque point de la masse est devenue égale à celle qui convient à la température moyenne de la surface. alors la température de chaque couche intérieure reste invariable et la température moyenne de toutes les températures observées à chaque station de chaque série donne la température de cette couche.

si comme toutes les observations l'indiquent, les températures vont très rapidement en croissant à de plus grandes profondeurs et que la cause de cet accroissement soit une chaleur d'origine propre au globe terrestre qui s'épuise lorsque cette planète s'est formée et qui se dissipe continuellement à la surface, à toutes les époques, la température de chaque point de la masse solide doit diminuer et le refroidissement doit se propager de plus en plus profondément. la température à la surface du globe devient alors de plus en plus constante et finit par le devenir entièrement lorsque la chaleur intérieure est tout à fait épuisée et que la température de chaque point de la masse est devenue égale à celle qui convient à la température moyenne de la surface. alors la température de chaque couche intérieure reste invariable et la température moyenne de toutes les températures observées à chaque station de chaque série donne la température de cette couche.

si comme toutes les observations l'indiquent, les températures vont très rapidement en croissant à de plus grandes profondeurs et que la cause de cet accroissement soit une chaleur d'origine propre au globe terrestre qui s'épuise lorsque cette planète s'est formée et qui se dissipe continuellement à la surface, à toutes les époques, la température de chaque point de la masse solide doit diminuer et le refroidissement doit se propager de plus en plus profondément. la température à la surface du globe devient alors de plus en plus constante et finit par le devenir entièrement lorsque la chaleur intérieure est tout à fait épuisée et que la température de chaque point de la masse est devenue égale à celle qui convient à la température moyenne de la surface. alors la température de chaque couche intérieure reste invariable et la température moyenne de toutes les températures observées à chaque station de chaque série donne la température de cette couche.

si comme toutes les observations l'indiquent, les températures vont très rapidement en croissant à de plus grandes profondeurs et que la cause de cet accroissement soit une chaleur d'origine propre au globe terrestre qui s'épuise lorsque cette planète s'est formée et qui se dissipe continuellement à la surface, à toutes les époques, la température de chaque point de la masse solide doit diminuer et le refroidissement doit se propager de plus en plus profondément. la température à la surface du globe devient alors de plus en plus constante et finit par le devenir entièrement lorsque la chaleur intérieure est tout à fait épuisée et que la température de chaque point de la masse est devenue égale à celle qui convient à la température moyenne de la surface. alors la température de chaque couche intérieure reste invariable et la température moyenne de toutes les températures observées à chaque station de chaque série donne la température de cette couche.

~~Le problème qui nous occupe~~ ~~Détermination~~ ~~de la température~~ ~~à l'aide~~ ~~Loi de la température~~ ~~de la température du globe~~ ~~la théorie~~ les principes de la théorie de la chaleur appliqués à notre sujet nous mène à cette conclusion générale que la température du globe terrestre va en croissant de la surface au centre. Cette loi de l'accroissement de la température de l'écorce solide du globe terrestre a été vérifiée par les observations faites dans les mines et les sondages exécutés dans différentes parties de l'Europe. Elle est d'accord avec la théorie mathématique de la chaleur, qui nous apprend que la température des couches intérieures d'un globe solide doit croître à mesure que l'on s'enfonce au-dessous de la surface, et que la loi de cet accroissement dépend de la conductibilité spécifique de la matière de l'enveloppe. Cette loi est beaucoup moins rapide que celle de la température elle-même. Elle est exprimée par une progression arithmétique dont la différence est constante pour chaque espèce de roche. Ainsi, dans le cas où la température augmente d'un degré centigrade pour trente mètres de profondeur, on trouve que la température de la surface du globe, ou la température primitive, est de 10°, et que la température à 1000 mètres de profondeur est de 40°, à 2000 mètres de 70°, à 3000 mètres de 100°, etc. Dans le cas où la température augmente d'un degré pour 36 mètres, on trouve que la température primitive est de 10°, et que la température à 1000 mètres de profondeur est de 38°, à 2000 mètres de 66°, à 3000 mètres de 94°, etc. Dans le cas où la température augmente d'un degré pour 30 mètres, on trouve que la température primitive est de 10°, et que la température à 1000 mètres de profondeur est de 43°, à 2000 mètres de 76°, à 3000 mètres de 109°, etc. Dans le cas où la température augmente d'un degré pour 33 mètres, on trouve que la température primitive est de 10°, et que la température à 1000 mètres de profondeur est de 40°, à 2000 mètres de 70°, à 3000 mètres de 100°, etc.

Il est impossible de déterminer avec certitude la température primitive de la surface du globe terrestre, c'est-à-dire la température qu'il avait avant que la chaleur solaire ait pénétré dans l'intérieur de la masse. Cependant, on peut admettre que la température primitive de la surface du globe terrestre était de 10°, et que la température à 1000 mètres de profondeur était de 40°, à 2000 mètres de 70°, à 3000 mètres de 100°, etc. Dans le cas où la température augmente d'un degré pour 30 mètres, on trouve que la température primitive est de 10°, et que la température à 1000 mètres de profondeur est de 43°, à 2000 mètres de 76°, à 3000 mètres de 109°, etc. Dans le cas où la température augmente d'un degré pour 33 mètres, on trouve que la température primitive est de 10°, et que la température à 1000 mètres de profondeur est de 40°, à 2000 mètres de 70°, à 3000 mètres de 100°, etc.

Il est impossible de déterminer avec certitude la température primitive de la surface du globe terrestre, c'est-à-dire la température qu'il avait avant que la chaleur solaire ait pénétré dans l'intérieur de la masse. Cependant, on peut admettre que la température primitive de la surface du globe terrestre était de 10°, et que la température à 1000 mètres de profondeur était de 40°, à 2000 mètres de 70°, à 3000 mètres de 100°, etc. Dans le cas où la température augmente d'un degré pour 30 mètres, on trouve que la température primitive est de 10°, et que la température à 1000 mètres de profondeur est de 43°, à 2000 mètres de 76°, à 3000 mètres de 109°, etc. Dans le cas où la température augmente d'un degré pour 33 mètres, on trouve que la température primitive est de 10°, et que la température à 1000 mètres de profondeur est de 40°, à 2000 mètres de 70°, à 3000 mètres de 100°, etc.

Stabilité
changement de climat ou d'autre cause. autres hérésies explic.
variation périodique sur l'ensemble. période des petites longues
grandes déclinaisons horizontales qui ont lieu entre les mêmes points
grandes déclinaisons terrestres qui ont lieu entre les mêmes points.

mouvements terrestres.

vrai

$K \left| \frac{dv}{dx} = -\frac{1}{20} \right.$

$\frac{3}{2 \cdot 30}$

un mètre | $\frac{1}{20}$ de l'ligne. degré.

$3\cancel{65}\,60$

$365 \,|\, 24 \cdot 60$ minutes

20

à des profondeurs de deux cent deux cent huit cent un mètres
l'accroissement augmenterait huit seulement qu'il serait de 1 degré pour
cent un quarante mètres enfoncés ou le thermomètre serait beaucoup si l'on supposait que
cet accroissement proportionnel a la même valeur pour de plus grandes
différences il diminue ensuite à mesure qu'on s'éloigne de la surface
si l'on possédait une suite d'observations assez prolongées et exactes sur
pour déterminer par la marche analytique que nous avons exposée
de la température que des points situés à une profondeur
convenable et pour lesquels on connaît la température primitive
pour chacun de ces points on aurait une équation exprimant
cette température en fonction du temps et de la profondeur
et une seconde équation semblable pour chaque autre point
on aurait ainsi autant d'équations que l'on voudrait déterminer de
constantes et l'on pourrait éliminer le temps entre ces équations
pour obtenir une équation finale entre la température et la profondeur
on connaîtrait ainsi la température primitive de chaque
point et l'on pourrait par conséquent déterminer la température
moyenne de chaque parallèle et enfin la température moyenne
de tout le globe on pourrait aussi déterminer la température
primitive de chaque point de la surface et l'on pourrait
par conséquent déterminer la température moyenne de chaque
parallèle et enfin la température moyenne de tout le globe
on pourrait aussi déterminer la température primitive de chaque
point de la surface et l'on pourrait par conséquent déterminer
la température moyenne de chaque parallèle et enfin la température
moyenne de tout le globe on pourrait aussi déterminer la température
primitive de chaque point de la surface et l'on pourrait par conséquent
déterminer la température moyenne de chaque parallèle et enfin
la température moyenne de tout le globe on pourrait aussi déterminer
la température primitive de chaque point de la surface et l'on pourrait
par conséquent déterminer la température moyenne de chaque parallèle
et enfin la température moyenne de tout le globe on pourrait aussi
déterminer la température primitive de chaque point de la surface
et l'on pourrait par conséquent déterminer la température moyenne
de chaque parallèle et enfin la température moyenne de tout le globe
on pourrait aussi déterminer la température primitive de chaque
point de la surface et l'on pourrait par conséquent déterminer
la température moyenne de chaque parallèle et enfin la température
moyenne de tout le globe on pourrait aussi déterminer la température
primitive de chaque point de la surface et l'on pourrait par conséquent
déterminer la température moyenne de chaque parallèle et enfin

nonobstant le défaut d'observations qui peut avoir lieu à cet égard, on peut déduire de plusieurs observations faites avec soin la hauteur de la colonne de mercure et la quantité de chaleur qui le dilate chaque année.

La température d'un lieu donné de la surface diminue par l'effet du refroidissement de l'atmosphère du globe mais cette diminution est [illegible] environnement petite dans le cours d'un siècle et la même dans le cours de plusieurs siècles. La quantité dont la température de la surface pendant une année et égale à l'excès actuel de la température divisé par le nombre d'années du siècle, l'exigence du thermomètre centigrade pour un degré et à $\frac{1}{10}$ pour le pluvier tentative. quant au second nombre il est [illegible] mais au contraire il est très important à déterminer parce qu'il importe beaucoup de savoir si la chaleur va en augmentant ou en diminuant. [illegible] de la température pendant le siècle est de un degré centigrade [illegible] depuis le [illegible] jusqu'à nos jours. Cette différence est [illegible] considérable et [illegible] Dans le cas d'une diminution de la chaleur [illegible] environnement petite dans le cas d'une augmentation. La quantité dont la température pendant une année est égale à l'excès actuel de la température divisé par le nombre d'années du siècle, l'exigence du thermomètre centigrade pour un degré et à $\frac{1}{10}$ pour le pluvier tentative. quant au second nombre il est [illegible] mais au contraire il est très important à déterminer parce qu'il importe beaucoup de savoir si la chaleur va en augmentant ou en diminuant. [illegible] de la température pendant le siècle est de un degré centigrade [illegible] depuis le [illegible] jusqu'à nos jours. Cette différence est [illegible] considérable et [illegible] Dans le cas d'une diminution de la chaleur [illegible] environnement petite dans le cas d'une augmentation. La quantité dont la température pendant une année est égale à l'excès actuel de la température divisé par le nombre d'années du siècle, l'exigence du thermomètre centigrade pour un degré et à $\frac{1}{10}$ pour le pluvier tentative. quant au second nombre il est [illegible] mais au contraire il est très important à déterminer parce qu'il importe beaucoup de savoir si la chaleur va en augmentant ou en diminuant. [illegible] de la température pendant le siècle est de un degré centigrade [illegible] depuis le [illegible] jusqu'à nos jours. Cette différence est [illegible] considérable et [illegible] Dans le cas d'une diminution de la chaleur [illegible] environnement petite dans le cas d'une augmentation. La quantité dont la température pendant une année est égale à l'excès actuel de la température divisé par le nombre d'années du siècle, l'exigence du thermomètre centigrade pour un degré et à $\frac{1}{10}$ pour le pluvier tentative. quant au second nombre il est [illegible] mais au contraire il est très important à déterminer parce qu'il importe beaucoup de savoir si la chaleur va en augmentant ou en diminuant. [illegible] de la température pendant le siècle est de un degré centigrade [illegible] depuis le [illegible] jusqu'à nos jours. Cette différence est [illegible] considérable et [illegible] Dans le cas d'une diminution de la chaleur [illegible] environnement petite dans le cas d'une augmentation. La quantité dont la température pendant une année est égale à l'excès actuel de la température divisé par le nombre d'années du siècle, l'exigence du thermomètre centigrade pour un degré et à $\frac{1}{10}$ pour le pluvier tentative.

Il est indifférent qu'on suppose l'atmosphère

[illegible] l'atmosphère

quant au second nombre il est [illegible] mais au contraire il est très important à déterminer parce qu'il importe beaucoup de savoir si la chaleur va en augmentant ou en diminuant. [illegible] de la température pendant le siècle est de un degré centigrade [illegible] depuis le [illegible] jusqu'à nos jours. Cette différence est [illegible] considérable et [illegible] Dans le cas d'une diminution de la chaleur [illegible] environnement petite dans le cas d'une augmentation. La quantité dont la température pendant une année est égale à l'excès actuel de la température divisé par le nombre d'années du siècle, l'exigence du thermomètre centigrade pour un degré et à $\frac{1}{10}$ pour le pluvier tentative. quant au second nombre il est [illegible] mais au contraire il est très important à déterminer parce qu'il importe beaucoup de savoir si la chaleur va en augmentant ou en diminuant. [illegible] de la température pendant le siècle est de un degré centigrade [illegible] depuis le [illegible] jusqu'à nos jours. Cette différence est [illegible] considérable et [illegible] Dans le cas d'une diminution de la chaleur [illegible] environnement petite dans le cas d'une augmentation. La quantité dont la température pendant une année est égale à l'excès actuel de la température divisé par le nombre d'années du siècle, l'exigence du thermomètre centigrade pour un degré et à $\frac{1}{10}$ pour le pluvier tentative. quant au second nombre il est [illegible] mais au contraire il est très important à déterminer parce qu'il importe beaucoup de savoir si la chaleur va en augmentant ou en diminuant. [illegible] de la température pendant le siècle est de un degré centigrade [illegible] depuis le [illegible] jusqu'à nos jours. Cette différence est [illegible] considérable et [illegible] Dans le cas d'une diminution de la chaleur [illegible] environnement petite dans le cas d'une augmentation. La quantité dont la température pendant une année est égale à l'excès actuel de la température divisé par le nombre d'années du siècle, l'exigence du thermomètre centigrade pour un degré et à $\frac{1}{10}$ pour le pluvier tentative.

Il est indifférent qu'on suppose l'atmosphère

[illegible] l'atmosphère

quant au second nombre il est [illegible] mais au contraire il est très important à déterminer parce qu'il importe beaucoup de savoir si la chaleur va en augmentant ou en diminuant. [illegible] de la température pendant le siècle est de un degré centigrade [illegible] depuis le [illegible] jusqu'à nos jours. Cette différence est [illegible] considérable et [illegible] Dans le cas d'une diminution de la chaleur [illegible] environnement petite dans le cas d'une augmentation. La quantité dont la température pendant une année est égale à l'excès actuel de la température divisé par le nombre d'années du siècle, l'exigence du thermomètre centigrade pour un degré et à $\frac{1}{10}$ pour le pluvier tentative. quant au second nombre il est [illegible] mais au contraire il est très important à déterminer parce qu'il importe beaucoup de savoir si la chaleur va en augmentant ou en diminuant. [illegible] de la température pendant le siècle est de un degré centigrade [illegible] depuis le [illegible] jusqu'à nos jours. Cette différence est [illegible] considérable et [illegible] Dans le cas d'une diminution de la chaleur [illegible] environnement petite dans le cas d'une augmentation. La quantité dont la température pendant une année est égale à l'excès actuel de la température divisé par le nombre d'années du siècle, l'exigence du thermomètre centigrade pour un degré et à $\frac{1}{10}$ pour le pluvier tentative. quant au second nombre il est [illegible] mais au contraire il est très important à déterminer parce qu'il importe beaucoup de savoir si la chaleur va en augmentant ou en diminuant. [illegible] de la température pendant le siècle est de un degré centigrade [illegible] depuis le [illegible] jusqu'à nos jours. Cette différence est [illegible] considérable et [illegible] Dans le cas d'une diminution de la chaleur [illegible] environnement petite dans le cas d'une augmentation. La quantité dont la température pendant une année est égale à l'excès actuel de la température divisé par le nombre d'années du siècle, l'exigence du thermomètre centigrade pour un degré et à $\frac{1}{10}$ pour le pluvier tentative.

curious thing
~~temperature pinthead~~

plaisir a tout [illegible] tres il [illegible] l'endroit que ce
mouvement de la [illegible] et devenu tout aut

Suite du mémoire intitulé

Remarques générales sur la température du globe terrestre et des espaces planétaires.

Dans les deux articles du Recueil d'Observations de Chaleur j'ai rapporté les conséquences théoriques relatives au mouvement uniforme ou périodique de la chaleur dans le globe et à la température primitive ou actuelle de l'espace. Il me reste à traiter une troisième partie de la question celle qui est relative à la température du globe terrestre.

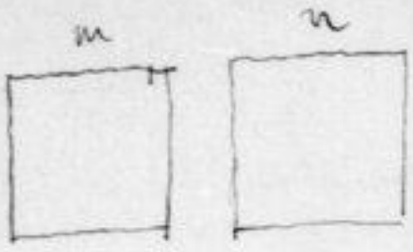
Je crois remplir entièrement l'objet de cet écrit en donnant le résultat de mes recherches particulières relatives à l'Académie et rendant publiques de plus volumineuses annexes.

La première question dont je me suis occupé est celle du mouvement uniforme de la chaleur dans l'intérieur du globe terrestre. Elle est traitée dans un mémoire lu à l'Académie dès le mois de Janvier 1807. J'avais alors pour but de donner un exemple remarquable de l'application des principes établis dans ce mémoire. Il contient aussi la solution d'une question qui était alors entièrement nouvelle et qui a un rapport direct avec l'analyse des températures dans le globe celle de la diminution de la chaleur qu'une hypothèse donnée doit acquérir par un refroidissement uniforme.

La théorie du mouvement périodique de la chaleur dans l'enveloppe extérieure a été l'objet d'un second mémoire remis au Roy et reconnu en 1811 dans un concours plus étendu.

[illegible] j'ai traité [illegible] quelques [illegible] dont [illegible] la chaleur [illegible] quelques questions [illegible] Mais [illegible] il [illegible] aucune théorie mathématique des mouvements de la chaleur et l'on pouvait même douter qu'une telle théorie fut possible. Le mémoire et ouvrage où cet objet important est traité dans toutes les parties dont il était susceptible ont été mis [illegible] publiquement [illegible] il [illegible] dans des extraits étendus dont plusieurs recueils scientifiques

Considé



les deux airs m et n sont échauffés

ouverte au commencement de chaque minute dans l'espace m une quantité de chaleur ~~égale à chaque instant~~ désignée par 1 ou désignée par 2.
le choix est fait au hasard comme s'il s'agissait d'amener un billet blanc ou noir que l'on tirait d'une urne.
l'urne contient autant de billets blancs que de noirs.
après un nombre infini de minutes le rapport du nombre des quantités 1 à celui des quantités 2 qui ont été versées pendant tout le temps sera de l'unité.
c'est à dire que plus le nombre des minutes écoulées est grand plus le rapport approche de l'unité.
on peut concevoir un nombre m si grand que le rapport des deux nombres sera $1+w$. la probabilité que la différence w est comprise entre un millionième et moins un millionième augmente continuellement avec le nombre m on peut supposer ce nombre si grand que cette probabilité diffère de l'unité aussi peu qu'on voudra.
si l'on cherche pour un nombre m donné quelle probabilité p il y a que le rapport des deux nombres est compris entre $1-w$ et $1+w$ on trouvera w étant une fraction très petite et finie que la probabilité p croît avec le nombre m et qu'elle est $1-\lambda$, λ étant une fraction positive qui dépend du nombre m. λ diminue d'autant plus que m augmente et si m est infini λ est nulle.
λ est une fonction de m et w. si w est donnée, et quelle que soit w la quantité λ devient nulle dès que m est infini.
on peut donc toujours supposer pour w une quantité aussi petite qu'on voudra on trouvera toujours que m peut être si grand que la quantité λ diffère de zéro aussi peu qu'on voudra.
ainsi le nombre m croissant dans l'infini il est enfin que le rapport du nombre des quantités valant 1 au nombre des quantités valant 2 est un plus en plus approchant la probabilité que le rapport des deux nombres ne diffère de l'unité que d'une quantité infiniment petite approche infiniment de l'unité.
donc après un temps infini les deux airs m et n sont également échauffés leur température est celle qui aurait lieu si les quantités de chaleur valant $\frac{4}{3}$ étaient égales à $\frac{3}{2}$.

---

si le nombre des boulets blancs contenus dans l'urne n'est pas égal au nombre des boulets noirs mais que les deux nombres soient comme p et q ce même rapport se reproduira après un temps infini dans l'air m.
donc après un temps infini la température moyenne de m est égale à la température moyenne de n

---

si l'urne contient huit mille boulets en tout que les quantités de chaleur valant soient de huit mille. on trouvera pareillement qu'après un temps infini les airs m et n seront également échauffés - ce qui est indépendant du nombre des billets de chaque sorte que le tirage est dans l'urne
en effet après un temps infini les quantités valant seront réparties dans m comme les boulets le sont dans l'urne les rapports seront les mêmes. il le seront aussi pour l'air n. donc la température des deux airs sera la même.

---

les mêmes résultats auront lieu quelque soit le nombre des boulets contenus dans l'urne et quelques soient les rapports des nombres de ces boulets.
il faut seulement qu'il y ait infiniment plus de boulets que de sortes de boulets
c'est de cette condition que dépend l'égalité de température des airs m et n.

---

ou le nombre n des corps qui répondent à la portion a du ciel dépasse toutes les bornes imaginables
il y a infiniment plus de corps qu'il n'en faut qui la y a de toute température.
On pourrait par exemple concevoir qu'il y a des corps aussi froids que le Soleil est chaud
c'est à dire que ces corps placés à la même distance que le Soleil, et avec les mêmes dimensions produisent un effet opposé et égal à celui du Soleil.
quelle que soit l'étendue de l'échelle thermométrique le nombre des différences dont elle
que l'on y pourrait observer avec notre instrument est déterminé et quelque soit grand
il est toujours enfermé entre de certaines limites qu'il est impossible de franchir.
mais le nombre n des corps qui répondent à la portion a du ciel est incomparablement plus grand que le nombre n des sortes de température.
ainsi dans la même portion a du ciel, il y a un très grand nombre de corps qui ont une même température.

---

la cause naturelle qui produit la diversité des températures agit dans tout l'univers, quelle qu'elle soit elle l'applique à une infinité de systèmes planétaires différents
concevons donc deux portions a et b du ciel égale chacune et soit commune à cette qui répond au Soleil. l'une couvre un nombre infini n de corps différents et l'autre couvre un nombre infini n' de corps différents.
le nombre des sortes de températures possibles est n.
la cause qui produit la diversité des températures est commune à tout l'univers elle fait que les différentes sortes de températures sont plus ou moins fréquentes
elle connaît quand à une urne qui contient un nombre n de boules de couleurs
et dans laquelle on fait deux nombres infinis m et m' de tirages.
donc les boules se sont différemment mêlées les unes avec les autres suivant la composition de l'urne.
ces rapports peuvent être même pour m et m' c'est à dire pour les portions a et pour la portion b. donc l'effet calorifique de ces deux portions a et b est le même.
c'est ainsi que l'on peut se rendre raison de l'uniformité de la chaleur rayonnante envoyée à la terre par les astres autres que le Soleil.

---

la distribution des températures est un résultat que l'on peut considérer comme
constant pour un système planétaire. l'atmosphère peut être enflammée à divers degrés
les climats et les marais des autres corps sont des résultats contingents. mais
il n'y a aucun résultat général que l'on ait dans l'ensemble de la nature.
la distribution de la chaleur rayonnante envoyée par les astres est uniforme
parce qu'il y en concourt tous ou en nombre immense
on ne peut douter toutes choses égales d'ailleurs des différences entre les quantités
de chaleur envoyées par deux portions égales du ciel a et b mais ces différences
ne sont point sensibles à nos instruments.

Soit 2Δ le diamètre apparent d'un astre. la circonférence est $2\varpi\Delta$ et l'aire occupée est $\varpi\Delta^2$. la circonférence est 2ϖ la surface est ϖ la surface sphérique est 4ϖ le nombre de ## si le nombre t exprime ainsi le diamètre apparent et aussi 2Δ le rapport de l'aire occupée à la surface sphérique est $\frac{\Delta^2}{4}$ le demi diamètre apparent est une portion de 2ϖ soit 2Δ égale à $\frac{2\varpi}{n}$ du diamètre apparent ou
où a donc pour le rapport de l'aire à la surface entière c'est à dire pour la mesure de l'angle conique l'expression $\left(\frac{\varpi}{n}\right)^2$. si par exemple le diamètre apparent d'un astre est 30 minutes le rapport sera $n = \frac{360^\circ}{30'} = 720$ l'angle conique est donc $\left(\frac{\varpi}{720}\right)^2$ ce qui est environ un cinquante deux millième. soit t le nombre de secondes
le rapport du diamètre apparent la mesure de l'angle conique sera $\frac{4\varpi^2 t^2}{(360.60.60)^2}$ ##
c'est le rapport de l'aire occupée par l'astre à la surface sphérique entière.

diametre apparent du Soleil
6039"
diametre apparent de la lune 6209
pour l'un et l'autre 6000" centesimales

Soit t le diametre apparent de la lune c'est à dire le nombre de secondes centesimales

De ce diametre
R le rayon du Soleil
r celui de la terre
r' celui de la lune
d le diametre apparent du Soleil. et d l'angle conique qui comprend la chaleur envoyée

par cet astre

à un point de la terre en sorte que l'on a $d = \left(\frac{5.6}{4} \frac{1}{1000\,000}\right)^2$

B l'angle conique de la terre vue du Soleil

B' l'angle conique de la lune vue du Soleil

la distance de la lune au Soleil etant censée comme égale à celle de la terre au Soleil. et appellant c la quantité de chaleur que le Soleil envoye à la terre. on aura pour l'expression de la quantité envoyée par le Soleil à la lune

$c.\frac{B'}{B}$ ou $c.\frac{r'^2}{r^2}$

la quantité de lumiere que la terre reçoit etant c la quantité que la lune reçoit sera aussi $c\frac{r'^2}{r^2}$. Supposons que cette quantité soit renvoyée par la lune dans tout un hemisphere.

t etant le diametre apparent de la lune, le diametre de la terre vue de la lune sera $\frac{2\pi r^2}{r'^2} \cdot \frac{t\,r}{r'}$ l'angle conique de la terre vue de la lune sera

$\left(\frac{\varpi^2 t r^2}{4^2 r'^2 1000000}\right)^2$ la moitié de cet angle conique sera $\frac{1}{8}\left(\frac{\varpi^2 t r^2}{r'^2 1000000}\right)^2$

Donc la quantité de lumiere que la lune transmettant à la terre si elle renvoyait toute celle que le Soleil lui envoye sera $\frac{c.r'^2}{r^2} \frac{\varpi^2 t^2}{8} \frac{r^2}{r'^2} \left(\frac{1}{10^6}\right)^2$

ou $\frac{c.}{8}\left(\frac{\varpi t}{10^6}\right)^2$

Soit d l'angle conique de la terre au Soleil c'est à dire l'angle qui ayant pour sommet au centre de la terre embrasse le Soleil. b une surface placée sur la terre, d' l'angle conique du Soleil à la terre S l'arc occupé dans le ciel par le Soleil. T l'arc occupé par la terre vue du Soleil on a

$dT = d'S$ le premier produit est ce que la terre envoye au Soleil et le second ce que le Soleil envoye à la terre en supposant la lumiere également répandue de part et d'autre.

soit B l'angle de la lune vue de la terre T et B' l'angle de la terre vue de la lune L. les quantités T et L sont les arcs respectivement occupés dans le ciel on a

$BT = B'L$.

la quantité de lumiere reçue par b du Soleil est 2δ. la quantité de lumiere reçue par la lune du Soleil est $2L$ la quantité de lumiere reçue par b de la lune en désignant par γ l'angle sous lequel b est vu de la lune aura même quantité est δB. ou

$\delta B = \gamma L$.

mais la quantité reçue par le Sol par la lune est $2b$ et elle le diffuse à tout un hemisphere ainsi $2L.2\gamma$ est la quantité reçue par b cette quantité est donc $2.2L.\delta B$ ou $2.2\delta B$

ainsi la petite surface b reçoit directement $\delta 2$ et indirectement elle ne reçoit que $\delta.2.2B$.

---

en prenant 6000 secondes centésimales pour le diametre apparent d'une lune on peut convenir à la lune ou au Soleil ou terne pour la mesure de l'angle conique la fraction $\frac{1}{45000}$ à prendre.

ainsi l'angle conique appelé 2 en usage qui est celui de la terre au Soleil est à prendre en quarante cinq millieme il en est de même de B.

ouvrit par là et par la calcul on trouve qu'une surface b exposée aux rayons solaires reçoit 22500 fois plus de lumiere qu'en l'exposant aux rayons de la lune et cela en supposant que la lune renvoye dans un hemisphere toute la lumiere qu'elle reçoit du Soleil ce qui n'arrivement n'a pas lieu.

Selon les experiences de Bouguer la lumiere de la lune est huit cent mille fois moindre que la lumiere du Soleil le résultat est bien incertain mais ce qui en est certain c'est que cette lumiere de la lune est beaucoup plus de 22 500 fois moindre que celle du Soleil.

---

quoique la lumiere de la lune soit 30 mille ou cent mille fois moindre que celle du Soleil elle produit sur nous un effet considérable ce qui montre que l'on apprécie les effets de la lumiere bien supérieurement qu'on ne pourrait apprécier les effets de la chaleur dont nous sommes avertis par la différence des corps celeste qui font apprendre et les divers phases de la lune et par la différence des corps celestes qui font connaître quant à la quantité de l'effet de la chaleur elle est trop petite pour être appréciée

---

nombre t exprime le second de diametre apparent ou quelque multiple de l'angle

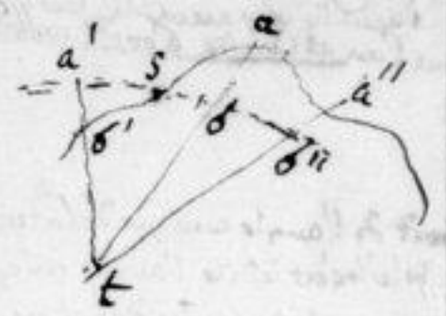
$\left(\frac{t.1}{4\ 1000000}\right)^2$

sont donc dans la surface

l'autre à la surface

ultérieurs.

m



▶ Du point quelconque dans l'espace le centre de la terre et dun rayon égale à la distance de ce centre à celui du soleil on décrit une surface sphérique. on projette sur cette surface tous les corps de l'univers en marquant sur la surface la température du premier point matériel que l'on trouve à partir de la terre suivant la ligne qui joint le centre de cette planète et point matériel dont il l'agit.
le centre de la terre et ent le soleil est en S. du rayon t S on décrit une surface sphérique. on joint le centre de la terre et un point a d'un corps celeste par la ligne t a qui coupe la surface sphérique en b. on considère a comme une surface infiniment petite qui est le bout d'un cone. la petite surface b est une section faite dans ce même cone. on donne à la surface b la température de ce que la surface a envoye en t.
en rapportant ainsi à la surface sphérique la température de toutes les autres celle qui echauffe le point t; on n'a plus qu'à considérer l'effet qui resultera de cette surface sphérique

---

Diviser la surface sphérique en autant de parties dont chacune soit equivalente à l'aire qui correspond au diamettre du soleil.
Si l'on donnait à l'une de ces parties une température égale à celle du soleil sa presence produirait un effet égal à celui du soleil.
mais tous les points de la portion que l'on considere ont des températures très inegales.
Tous ces points qui répondent à ce corps ne flamment peuvent être considérés comme ayant la température du soleil. il y a dans cette même portion une infinité d'autres points qui ne sont pas enflammés; s'ils l'etaient tous la chaleur et l'éclat lumineux de cette partie du ciel serait comparable à la chaleur et à la lumiere du soleil ce qui n'a point lieu. il suit de cela de cela seulement que la portion du ciel dont il s'agit est formée de points inégalement echauffés et lumineux.

Chacune de ces portions a correspond à un nombre de corps immense. tout que cette portion coincide avec celui que le soleil occupe, elle couvre seulement un corps qui est le soleil; mais excepté ce cas elle couvre une infinité de corps différents. en effet il faut augmenter l'aire qui répond au soleil dans le rapport du quarré de la distance des corps celestes au quarré de la distance du soleil. cette aire ainsi augmentée a une immensité prodigieuse et embrasse par conséquent un nombre immense de systèmes planétaires semblables au notre
nous ne considérons que la portion de la surface sphérique qui est occupée par les planetes et les satellites seuls n'avons en vue en premier lieu que les attributs des autres systèmes planétaires
Une portion du ciel equivalente à celle que le soleil occupe embrasse dans sa profondeur 13 millions de systèmes planétaires semblables aux notres, et si l'on a égard à la profondeur du ciel on voit que cette même portion couvre une infinité de corps celestes.

Donc une toute portion du ciel tout divisée en une infinité de parties dont chacune correspond à un corps différent. soit m le nombre de ces corps tout en général ces corps tout tout inegaux elles peuvent varier depuis la température des corps enflammés jusqu'à celle des corps les plus froids de l'univers quelque soit cet intervalle des températures divisons le en un certain nombre n de parties. et considérons d'abord comme égaux les températures comprises dans une même division. il y aura donc un nombre m tout grand de toute de température
Supposons par exemple que l'echelle thermométrique depuis la température la plus froide jusqu'à la plus elevée soit divisée en quatre cent mille parties. ou compte quatre cent mille tout de corps chauds.

Températures d'un solide dont les extrémités sont assujetties à des températures variables avec le temps.

Le solide est assujetti par ses extrémités à la température variable f_t et f'_t

Ses extrémités à la température constante 0.

la température variable v d'un point quelconque placé à la distance x de l'extrémité 0 est ainsi exprimée

$$v = \left(\frac{\varpi - x}{\varpi}\right) f_t - \frac{2}{\varpi}\left\{ e^{-t}\sin x \left(f_0 + \int_0^t \partial r\, f'r\, e^{r}\right) + \frac{e^{-2^2 t}}{2}\sin 2x \left(f_0 + \int_0^t \partial r\, f'r\, e^{2^2 r}\right) + \frac{e^{-3^2 t}}{3}\sin 3x \left(f_0 + \int_0^t \partial r\, f'r\, e^{3^2 r}\right) + \partial \right\}$$

les températures initiales du 2e solide pour lequel peuvent exister celles ci sont nulles.

Soit $f_t = \sin t$ on trouvera en opérant $\int_0^t \partial r\, f'r\, e^{-i^2 r} = \frac{(\sin t - i^2 \sin \nu.t)\, e^{it}}{1+i^4}$

donc $v = \frac{\varpi - x}{\varpi}\sin t - \frac{2}{\varpi}\left\{ e^{-t}\sin x \left(\frac{\sin t - \sin \nu.t}{1+\nu^4}\right) + \frac{e^{-2^2 t}}{2}\sin 2x \left(\frac{\sin t - 2^2 \sin \nu.t}{1+2^4}\right) e^{it} + \right.$

$$\left. v = \left(\frac{\varpi - x}{\varpi}\right)\left\{\sin t - \frac{2}{\varpi}\left[\frac{\sin t - \sin \nu.t}{1+\nu^4}\right]\sin x + \left[\frac{\sin t - 4\sin \nu.t}{1+\nu^4}\right]\frac{\sin 2x}{2} + + \partial \right\}\right.$$

et si t est une quantité ou très grande l'état final correspondant

d'un point quelconque est périodique. $v = \left(\frac{\varpi - x}{\varpi}\right)\sin t$ — la température finale du solide est ainsi exprimée

Si le solide est assujetti aux deux extrémités à la température zéro la valeur de v est nulle parce que les températures initiales sont nulles.

mais si les températures initiales sont données et représentées par ψx

on a $v = a_1 e^{-t}\sin x + a_2 e^{-2^2 t}\sin 2x + a_3 e^{-3^2 t}\sin 3x + \partial$

et $a_i = \frac{2}{\varpi}\int_0^{\varpi} \partial\mu\, \sin i\mu\, \psi(\mu)$

donc $v = \frac{2}{\varpi}\sum e^{-i^2 t}\sin ix \int_0^{\varpi} \partial\mu\, \psi\mu \sin i\mu$

si le solide a les températures initiales de l'unité par ψx et si

l'extrémité 0 constamment à la température f_t

et l'extrémité ϖ à la température F_t la température

variable d'un point quelconque de la solide sera exprimée ainsi

$$v = \frac{2}{\varpi}\sum e^{-i^2 t}\sin ix \int_0^{\varpi} \partial\mu\, \psi\mu \cdot \sin i\mu$$

$$+ \left(\frac{\varpi - x}{\varpi}\right) f_t - \frac{2}{\varpi}\sum \frac{e^{-j^2 t}\sin jx}{j}\left(f_0 + \int_0^t \partial r\, f'r\, e^{j^2 r}\right)$$

$$+ \frac{x}{\varpi} F_t + \frac{2}{\varpi}\sum \frac{e^{-j^2 t}\sin jx \cos j\varpi}{j}\left\{ f_0 + \int_0^t \partial q\, F'q\, e^{j^2 q}\right\}$$

$$\int_0^r \partial r\, e^{ar}\cos ir = \frac{e^{ar}}{a}\cos ir + \frac{i}{a^2}\sin ir - \frac{i^2}{a^2}\int_0^r \partial r\, e^{ar}\cos ir$$

$$\int_0^r \partial r\, e^{ar}\cos ir = \frac{e^{ar}}{1+a^2}\left(\cos ir + \frac{i}{a}\sin ir\right) + \text{Const}$$

$$\int_0^r \partial r\, e^{ar}\sin ir = \frac{e^{ar}}{1+a^2}\left(\sin ir - \frac{i}{a}\cos ir\right) + \text{Const}$$

$$\int_0^r \partial r\, e^{ar}\cos ir = \frac{(a\cos ir + i\sin ir)\, e^{ar}}{1+a^2} - \frac{a}{1+a^2}$$

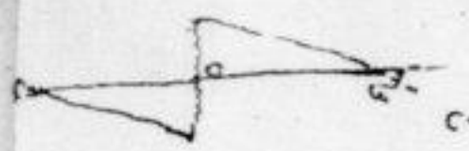
$$\int_0^r \partial r\, e^{ar}\sin ir = \frac{(a\sin ir - i\cos ir)\, e^{ar}}{1+a^2} + \frac{i}{1+a^2}$$

189.

Ce calcul se déduit comme il suit

on a l'équation $\frac{1}{2}(\pi - x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x + \dots = \sum \frac{1}{i}\sin ix$

on peut voir le calcul (voir note A)



cela posé l'équation $v = \frac{(\pi - x)}{\pi} ft - \frac{2}{\pi}\sum \frac{e^{-i^2 t}}{i}\sin ix \left(f_0 + \int_0^t \partial r\, f'r\, e^{i^2 r}\right)$ (1)

exprime l'état du fil de fer dont l'extrémité est à la température ft et l'extrémité π à la température zéro. en effet

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{2}{\pi}\sum i e^{-i^2 t}\sin ix \left(f_0 + \int_0^t \partial r\, f'r\, e^{i^2 r}\right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\pi - x}{\pi} f't + \frac{2}{\pi}\sum i e^{-i^2 t}\sin ix \left(f_0 + \int_0^t \partial r\, f'r\, e^{i^2 r}\right) +$$

$$- \frac{2}{\pi}\cdot\sum \frac{e^{-i^2 t}\sin ix}{i} f'(t)\, e^{i^2 t} \quad \text{or} \left(\frac{\pi - x}{\pi}\right) f't = \frac{2}{\pi} f't \sum \frac{\sin ix}{i}$$

donc $\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ ainsi l'équation générale est satisfaite.

De plus si l'on fait $x = 0$ dans l'équation 1 la valeur de v est ft

si l'on fait $x = \pi$ la valeur de v est nulle

si l'on fait $t = 0$ on a $v = \left(\frac{\pi - x}{\pi}\right) f_0 - \frac{2}{\pi} f_0 \sum \frac{\sin ix}{i} = 0$ pour toutes les

valeurs de x comprises entre 0 et π dans l'équation 1 on prévoit en effet

le commencement de la chaleur dans le solide dont l'extrémité e est portée

à la température variable ft et l'extrémité π à la température constante 0

quant aux températures initiales elles peuvent être quelconques et elles sont

supposées nulles

Si les températures initiales ne sont pas nulles on aura

$$v = \frac{2}{\pi}\sum e^{-i^2 t}\sin ix \int_0^{\pi} \partial p\, \varphi p \sin ip$$

$$(2) \quad + \frac{\pi - x}{\pi} ft - \frac{2}{\pi}\sum \frac{e^{-i^2 t}\sin ix}{i}\left(f_0 + \int_0^t \partial r\, f'r\, e^{+i^2 r}\right)$$

car dans ce cas les conditions de la question sont satisfaites.

---

on a l'équation connue $\frac{1}{2}x = \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \dots = -\sum \frac{\sin ix}{i}\cdot\cos i\pi$

$$(3) \quad v = \frac{x}{\pi} Ft + \frac{2}{\pi}\sum e^{-i^2 t}\cdot\sin ix\cdot\frac{\cos i\pi}{i}\left(F_0 + \int_0^t \partial r\, F'r\, e^{i^2 r}\right)$$

$$\text{car } \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{2}{\pi}\sum e^{-i^2 t}\sin ix\cdot\frac{\cos i\pi}{i}\left(F_0 + \int_0^t \partial r\, F'r\, e^{i^2 r}\right)$$

$$\text{et } \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{x}{\pi} F't - \frac{2}{\pi}\sum e^{-i^2 t}\sin ix\cdot\frac{\cos i\pi}{i}\left(F_0 + \int_0^t \partial r\, F'r\, e^{i^2 r}\right)$$

$$+ \frac{2}{\pi}\sum \sin ix\cdot\frac{\cos i\pi}{i}\cdot F't \quad \text{le premier et le dernier terme}$$

se détruisent et l'on a $\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$

Deplus si dans l'équation (3) on fait $x=0$ la valeur de v est nulle
si l'on fait $x=\omega$ on a $v=Ft$
si l'on fait $t=0$ on a $v=\frac{x}{\omega}f_0+\frac{2}{\omega}F_0\sum \varphi\cdot \sin ix\cdot\frac{\cos i\omega}{i}$ $\Big\}=0$

---

on déduit de là l'inverse de l'équation qui exprime le mouvement de la chaleur dans le cylindre
Dans la chaleur dont l'état initial est donné et dont les températures aux extrémités sont nulles on a f et F

$$v=\frac{2}{\omega}\sum e^{-i^2t}\sin ix\int_0^{\omega}dx\,\varphi x\cdot\sin ix$$

$$(4)\quad +\left(\frac{\omega-x}{\omega}\right)ft-\frac{2}{\omega}\sum e^{-i^2t}\frac{\sin ix}{i}\left(f_0+\int_0^t dx\,f'x\,e^{i^2x}\right)$$

$$+\frac{x}{\omega}Ft+\frac{2}{\omega}\sum e^{-i^2t}\sin ix\cdot\frac{\cos i\omega}{i}\left(F_0+\int_0^t dx\,F'x\,e^{i^2x}\right)$$

cette équation contient deux fonctions arbitraires ft Ft et φx
les valeurs de ft et Ft sont entièrement arbitraires depuis $t=0$ jusqu'à $t=\frac{1}{0}$
il en est de même de Ft
la valeur de φx sont arbitraires depuis $x=0$ jusqu'à $x=\omega$.

Supposons que $ft=Ft$ la valeur de v devient plus simple.
Appliquons encore un exemple $ft=1$ et $Ft=1$ et supposons aussi que φx soit 1 il est évident que la valeur de v devient 1.

$\int \sin ix$ — $\frac{1-\cos i\omega}{i}$ — $\frac{1-\cos i\omega}{i}\cdot\frac{1}{i}$

on a donc alors $v=\frac{2}{\omega}\sum e^{-i^2t}\sin ix\left(\frac{1-\cos i\omega}{i}\right)=\frac{\omega}{\omega}=1$

$$+\frac{\omega-x}{\omega}-\frac{2}{\omega}\sum e^{-i^2t}\frac{\sin ix}{i}$$

$$+\frac{x}{\omega}+\frac{2}{\omega}\sum e^{-i^2t}\sin ix\cdot\frac{\cos i\omega}{i}$$

Soit $ft=t$ et $Ft=\omega$ on a $\int dx\,e^{i^2x}=\frac{e^{i^2x}}{i^2}+c$ $\Big|\ \int_0 x\,e^{i^2x}=\frac{e^{i^2x}-1}{i^2}$

$$f_0+\int_0^t dx\,f'x\,e^{i^2x}=\frac{e^{i^2t}-1}{i^2}$$ logarithmes dans la ligne $\sum$ est $\frac{1-e^{-i^2t}}{i^2}$

Si la température initiale φx est nulle on aura

$$v=\left(\frac{\omega-x}{\omega}\right)t-\frac{2}{\omega}\left\{\left(\frac{1-e^{-t}}{1}\right)\sin ix+\left(\frac{1-e^{-2^2t}}{2^3}\right)\sin 2x+\left(\frac{1-e^{-3^2t}}{3^3}\right)\sin 3x+\dots\right\}$$

Soit $\varphi x=0$, $f't=0$ $ft=-e^{-t}+1$ donc $f'x=e^{-x}$ $\Big|\ f_0=0$

$$\int dx\,e^{-x}e^{i^2x}=\int dx\,e^{(i^2-1)x}=\frac{1}{i^2-1}e^{(i^2-1)x}+\text{cons}\ \Big|\ \int_0 dx\,e^{(i^2-1)x}=\frac{e^{(i^2-1)x}-1}{i^2-1}$$

si $i=1$ $\int_0^t e^{-x}\,dx=t$

on aura dans la ligne $\sum$ logarithmes $e^{-i^2t}\cdot\sin ix\,\frac{e^{(i^2-1)t}-1}{i^2-1}=\frac{\sin ix}{i(i^2-1)}\left(e^{-t}-e^{-i^2t}\right)$

donc $v=\left(\frac{\omega-x}{\omega}\right)(1-e^{-t})-\frac{2}{\omega}\sum\frac{\sin ix}{i(i^2-1)}$ on obtient $v=\left(\frac{\omega-x}{\omega}\right)(1-e^{-t})-\frac{2}{\omega}\Big\{$ $+\dots$

191.

Soit $\psi z = v$, $ft = v$ tant $F't$ telle que F_0 soit nulle

$$v = \frac{x}{\omega} ft + \frac{2}{\omega}\left\{ -e^{-t}\sin x \int_0^t dr\, F'r\, e^{r} + \frac{e^{-2t}}{2}\sin 2x \int_0^t dr\, F'r\, e^{2r} - \frac{e^{-3t}}{3}\sin 3t \int_0^t dr\, F'r\, e^{3r} - \right.$$

c'est l'expression de l'état variable d'un prisme dont les températures initiales sont nulles la première extrémité maintenue à la température zéro et l'extrémité à la distance $\frac{\omega}{2}$ est à la température variable Ft dont la première valeur F_0 est nulle

on a $\left(\frac{x}{\omega} ft - v\right)\frac{\omega}{2} = \frac{x}{2} ft + \frac{\omega}{2} v = \int_0^t dr\, F'r \left\{ e^{-t}\sin x - \frac{1}{2} e^{-2t}\sin 2x + \frac{1}{3} e^{-3t}\sin 3x - \frac{1}{4} e^{-4t}\sin 4x + \dots \right\}$

(b) $\frac{x}{2} ft - \frac{1}{2}\omega v = \int_0^t dr\, F'r \left\{ e^{-t+r}\sin x - \frac{1}{2} e^{-2t+2r}\sin 2x + \frac{1}{3} e^{-3t+3r}\sin 3x - \dots \right\}$

Soit $Ft = 1 - e^{-t}$ on a $F't = e^{-t}$, $F'r = e^{-r}$ donc

$$\frac{x}{2}(1 - e^{-t}) - \frac{1}{2}\omega v = e^{-t}\int_0^t dr\, e^{(2-1)r} - \frac{1}{2} e^{-2t}\sin 2x \int_0^t dr\, e^{(2^2-1)r} - \frac{1}{3} e^{-3t}\sin 3x \int_0^t dr\, e^{(3^2-1)r} + \dots$$

si le temps est très grand on a $\frac{x}{2}(1 - e^{-t}) - \frac{1}{2}\omega v = e^{-t} t \sin x$ ou $\frac{1}{2}\omega v = \frac{x}{2} - t e^{-t}\sin x$

l'état final est $\frac{1}{2}\omega v = \frac{x}{2}$ ou $v = \frac{x}{\omega}$ ce qui est évident de lui même car l'état initial extrémité était $1 - e^{-t}$, et la première extrémité étant restée nulle à la température zéro, il est manifeste que l'état final est celui qui convient bien à l'extrémité ω abscisse x à la température 1.

on a aussi $\frac{x}{\omega} - v = \frac{2}{\omega} t e^{-t}\sin x + \dots$ ainsi la différence à l'état final est $\frac{2}{\omega} t e^{-t}\sin x$ lorsque le temps est très grand.

Supposons plus généralement que les températures initiales soient nulles sauf celle de l'extrémité x qui maintenue à la température v et que l'extrémité ω reçoive la température variable Ft dont la première valeur F_0 est supposée nulle. On verra que cette fonction Ft supposée seulement assujettie à ne croître que lorsque le temps t augmente d'une quantité que nous désignerons par 1 à la valeur finale de Ft.

il est manifeste que l'état final de la barre sera le même que si l'extrémité ω était maintenue à la température 1., et dans ce cas cet état final serait ainsi représenté $v = \frac{x}{\omega}$

on effectue la même démonstration (b) donne pour l'état final

$\frac{x Ft - \omega v}{2} = 0$ ou $x Ft = \omega v$ ou $v = \frac{x Ft}{\omega}$ et mettant pour Ft sa valeur finale on a $v = \frac{x}{\omega}$

la différence à l'état final est $v - \frac{x}{\omega} Ft$ donc cette différence est

$$w = -\frac{2}{\omega}\int_0^t dr\, F'r \left\{ e^{(r-t)}\sin x - \frac{e^{2(r-t)}}{2}\sin 2x + \frac{e^{3(r-t)}}{3}\sin 3x - \dots \right\}$$

Soit $Ft = 1 - e^{-et}$ donc $F'r = 2e^{-2r}$ donc $-\frac{1}{2}\omega w = 2\int_0^t dr\, e^{-2r} e^{r-t}\sin x$

on a encore la même conclusion que le terme de la valeur de t est très grande on a $-\frac{1}{2}\omega w_0 = 2e^{-t}\sin x \int_0^t dr\, e^{-r} = 2e^{-t}\sin x (1 - e^{-t}) = 2e^{-t}\sin x$ lorsque t est très grand.

Soit $F_t = 1 - e^{-2t}$ d'où $F'_t = 2e^{-2t}$ $\quad w = -\frac{2}{\omega}\int_0^t dr\, e^{2-2r} e^{r-t} \sin r$

$w = -\frac{2}{\omega}\cdot 2 \sin r \cdot e^{-t}\int_0^t dr\, e^{-3r}$ $\quad$ or $\int_0^r dr\, e^{-3r} = \frac{1-e^{-3r}}{3}$ donc

$w = -\frac{2}{\omega} 2 \sin x\, e^{-t}\,\frac{1-e^{-3t}}{3} = -\frac{8}{3\omega}\sin x\, e^{-t}$ c'est l'expression cherchée

Le signe $-$ indique variable pour compléter l'état final.

Soit $f_t = \sin t$ ona $f_0 = 0$ on suppose la fonction $f_t = r$ d'une certaine manière inévitable tout entier nulle l'état variable sera ainsi exprimé

$$v = \frac{x}{\omega}\sin t - \frac{2}{\omega}\int_0^t dr \cos r \left\{ e^{-t}\sin r - \frac{e^{-2t}}{2}\sin 2r + 2 \right\}$$

ou $q = \frac{x}{\omega}\sin t - \frac{2}{\omega} e^{-t}\sin r$

$$w = \frac{x}{\omega}\sin t - \frac{2}{\omega}\left\{ e^{-t}\sin r \int_0^t dr \cos r e^{r} - \frac{1}{2} e^{-2t}\sin 2r \int_0^t dr \cos r e^{2r} + 2 \right\}$$

ona encore $\int_0^r dr\, e^{mr}\cos r = \frac{e^{mr}(\sin r - m\sin\sqrt{a}\, r)}{1+m^2}$

Donc

$$v = \frac{x}{\omega}\sin t - \frac{2}{\omega}\left\{ \frac{1}{2}\sin r \sin t - \sin\sqrt{a}\, t - \frac{1}{2^2+1}\sin 2r (\sin t - \sin\sqrt{a}\, t) + 2 \right\}$$

$$v = \frac{x}{\omega}\sin t - \frac{2}{\omega}(\sin t - \sin\sqrt{a}\, t)\left\{ \frac{1}{2}\sin r - \frac{1}{2^2+1}\sin 2r + \frac{1}{3^2+1}\sin 3r - \frac{1}{b^2+1}\sin br \right\}$$

on voit que l'état d'un point quelconque est périodique

la fonction de x est exprimée par une série convergente.

on trouve théorie chal pag. 231 $\quad \frac{e^x - e^{-x}}{e^{\pi} - e^{-\pi}} = \frac{2}{\pi}\left\{ \frac{\sin x}{1^2+1} - \frac{2\sin 2x}{2^2+1} + \frac{3\sin 3x}{3^2+1} \right\}$

Soit $f_x =$ le facteur qui suit $\frac{2}{\omega}$ donc $\int_0^x f_x = \frac{2}{\pi}\left\{ -\frac{\cos x}{1+1} + \frac{\cos 2x}{2^2+1} - \frac{\cos 3x}{3^2+1} + \cdots \right\}$

Supposons que toutes les températures initiales diffèrent moins que l'extrémité ω soit extrême à la température 0 et que l'extrémité 0 soit entretenue à la température f_t dont la première valeur f_0 est nulle

ona pour exprimer l'état variable du solide après le temps t l'équation

$$v = \left(\frac{\omega - x}{\omega}\right) f_t - \frac{2}{\omega}\sum \frac{e^{-i^2 t}\sin ix}{i}\int_0^t dr\, f'_r\, e^{i^2 r}$$ $\quad$ Soit $f_t = \sin t$

il faut intégrer $\int dr \cos r\, e^{i^2 r}$ or on a $\int_0^r dr\, e^{mr}\cos r = \frac{e^{mr}}{1+m^2}(\sin r - m\sin\sqrt{a}\, r)$

l'indice facteur double signe $\sum$ est donc $\frac{e^{i^2 t}}{1+i^4}(\sin t - i^2 \sin\sqrt{a}\, t)$

donc le terme double signe $\sum$ est $\frac{\sin ix}{i}\left(\frac{\sin t - i^2 \sin\sqrt{a}\, t}{i^4+1}\right)$

on a donc $v = \left(\frac{\omega'-\gamma}{\omega}\right) \sin t - \frac{2}{\omega}\Big\{ \sin x \frac{\sin t - \sin \omega' t}{2} + \sin 2x \cdot \frac{\sin t - 2^2 \sin \omega' t}{2\cdot(2^4+1)}$

$+ \sin 3x \frac{\sin t - 3^2 \cdot \sin \omega' t}{3(3^4+1)} \Big\}$

$+ \text{h} \Big\}$

lorsque la valeur de x est donnée la valeur variable de v est périodique elle se reproduit toutes les fois que t est augmenté de 2ϖ.

$$v_{\max} = \sin t \left(\frac{\omega'-\gamma}{\omega} - \frac{2}{\omega}\left\{ \frac{1}{2}\sin x + \frac{\sin 2x}{2\cdot(2^4+1)} + \frac{\sin 3x}{3(3^4+1)} + \alpha \right\} \right)$$

$$+ \sin \omega' t \left\{ \frac{2}{\omega'} \left(\frac{\sin x}{2} + \frac{2^3 \sin 2x}{1\cdot 2^4+1} + \frac{3^3 \sin 3x}{3\cdot 3^4+1} \right) \right\}$$

On a donc $v = \beta \sin t \left(\lambda + \frac{\omega'-\gamma}{\omega} \right) + \beta \sin \omega' t$, λ et β représentent des fonctions

pour exprimer que v est un maximum par rapport au temps il faut écrire

$$\cos t \left(\lambda + \frac{\omega'-\gamma}{\omega} \right) + \beta \sin t = 0 \quad \text{ou} \quad \tang t = \frac{-2}{\beta} - \frac{(\varpi - \gamma)\frac{1}{\omega}}{\beta}$$

la valeur V du maximum est $V = \sin t \left\{ \lambda + \frac{\omega'-\gamma}{\omega} \right\} + \beta - \beta \cos t$

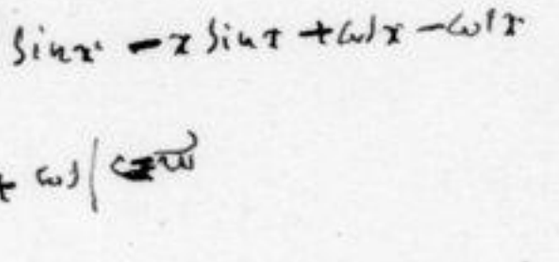
$$= \sin t \left\{ \lambda + \frac{\varpi - \gamma}{\omega} \right\} + \frac{\beta^2 \sin t}{\lambda + \frac{\omega'-\gamma}{\omega}} = \sin t \left\{ \frac{\left[\lambda + \frac{\omega'-\gamma}{\omega}\right]^2 + \beta^2}{\lambda + \frac{\varpi - \gamma}{\omega}} \right\}$$

$1 + \tang^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}$

donc donc $\frac{\left(\lambda + \frac{\omega'-\gamma}{\omega}\right)^2 + \beta^2}{\lambda + \frac{\omega'-\gamma}{\omega}} \sqrt{1 + \frac{2}{\beta} + (\varpi - \gamma)\frac{1}{\omega}\frac{1}{\beta}} = V$

$\frac{1}{2}x = \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x + \cdots$ (A) 194

$\pi - x = 2\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{2}{3}\sin 3x + \cdots$



$\int_0^{\pi} dx\,(\pi - x)\sin x$

$\int dx\, x\sin x = ax\cos x + b\sin x$

$x\sin x = -ax\sin x + (a\cos x + b\cos x)$ $\quad a+b=0,\ a=-1$

$\int dx\, x\sin x = -x\cos x + \sin x$

$x\sin x = x\sin x + \cos x$
$\quad - \cos x$

$\int_0^{\pi} dx\,\overline{\pi - x}\sin x = -\pi\cos x + x\cos x - \sin x$

$\overline{\pi - x}\sin x = \pi\sin x - x\sin x + \cos x - \cos x$

$0 = -\pi + \pi$

$\int_0^{\pi} dx\,(\pi - x)\sin x = \pi(1-\cos\pi) + \pi\cos\pi - \sin\pi$

$\int_0^{\pi} dx\,\overline{\pi - x}\sin x = 2\pi - \pi = \pi$

$\int dx\, x\sin ix = ax\cos ix + b\sin ix$

$x\sin ix = -aix\sin ix + a\cos ix + bi\cos ix$ $\quad a+bi=0,\ -ai=1,\ a=-\frac{1}{i},\ b=\frac{1}{i^2}$

$\int dx\, x\sin ix = -\frac{x\cos ix}{i} + \frac{1}{i^2}\sin ix$

$\int dx\sin ix = -\frac{\cos ix}{i}$

$\int dx\,\overline{\pi - x}\sin ix = -\frac{\pi\cos ix}{i} + \frac{x\cos ix}{i} - \frac{1}{i^2}\sin ix + C$

$\pi\sin ix - x\sin ix = \pi\sin ix - x\sin ix + \frac{\cos ix}{i} - \frac{\cos ix}{i}$

$0 = -\pi + b = \pi$

$\int_0^{\pi} dx\,\overline{\pi - x}\sin ix = \pi\left(\frac{1-\cos i\pi}{i}\right) + \frac{\pi\cos i\pi}{i} - \frac{1}{i^2}\sin i\pi$

$\int_0^{2\pi} dx\,\overline{\pi - x}\sin ix = \left(\frac{1-\cos i\pi}{i}\right)\pi + \frac{\pi\cos i\pi}{i} = \frac{\pi}{i}$

$\lambda_i = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{i} = \frac{2}{i}$

$\frac{1}{2}(\pi - x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x + \lambda = \sum \frac{\sin ix}{i}$

$\psi_{\mu=1}$

$\int_0^\mu \sin i\mu\alpha \quad \frac{1-\cos i\alpha}{\mu}$

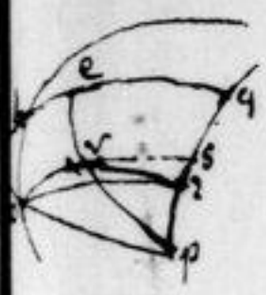
$-\frac{1}{\mu}\cos(i\mu) \qquad v = \frac{2}{\alpha'}\sum e^{-i\gamma}\sin i\alpha\cdot\left(\frac{1-\cos i\alpha}{i}\right)$

$\frac{1-\cos i\mu}{i\mu} \qquad +\frac{\alpha'-\alpha}{\alpha'} - \frac{1}{\alpha'}\sum \frac{e^{-i\gamma}\sin i\alpha}{i}$

$+\frac{\alpha}{\alpha'} + \frac{2}{\alpha'}\sum \frac{e^{-i\gamma}\sin i\alpha\cos i\alpha}{i}$

$= \frac{\alpha'-\alpha}{\alpha'} + \frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\alpha'}{\alpha'} = 1$

quantité de chaleur communiquée par le soleil à la terre.



on demande quelle est pour un lieu donné la quantité de chaleur totale que le soleil communique à la terre dans un jour donné.
on fait abstraction de l'atmosphère et des autres causes accessoires qui concourent à modifier l'effet de la chaleur solaire ou à modifier uniformément dans l'intérieur du globe

pe est l'équateur et p le pole boreal

ho est l'horizon et z le zenith. rs est le parallele à l'équateur que decrit le soleil au jour donné qs la declinaison est connue et la latitude qz est donnée.

l'astre se levant au point o est parvenu au point r sa distance au zenith qui etoit zo ou 90° est devenue zr le complément de cette distance zr est la hauteur de l'astre sur l'horizon soit h cette hauteur la quantité de chaleur envoyée au centre de l'horizontal toutes choses d'ailleurs egales sera proportionnelle à sin h ou cos zr l'angle kpe ou ce qui est la même chose l'arc ke est proportionnel au temps écoulé depuis le lever de l'astre soit u la longueur de cet arc ke. La différentielle du sin h exprime combien le cosinus de l'horizon recoit de chaleur pendant un instant et $\int$ du sin h exprime la quantité de chaleur cherchée en prenant l'integrale depuis u=0 jusqu'à u = l'arc kq ou depuis ~~u=90° jusqu'à u=0~~ zo=90° jusqu'à zo = zs l'arc zs est connu et équivaut à la latitude moins la declinaison.



Dans le triangle spherique rpz on connait pr qui est le complement de la declinaison on connait pz qui est le complement de la latitude de lieu on a donc une relation entre l'angle horaire rpz et zr qui est le complement de la hauteur soit l la latitude zq - e la declinaison qs et r l'angle horaire rpz il faut prendre l'integrale $2\int dr \cos h'$ depuis u = zs = l-e jusqu'à $u = \frac{1}{2}\varpi$

Dans le triangle rpz on a $\cos^2 \frac{1}{2} rpz = \frac{\sin \frac{1}{2}(zp+pr+zr)\,\sin \frac{1}{2}(zp+pr-zr)}{\sin zp \cdot \sin rp}$

$zp+pr+zr = \frac{1}{2}\varpi - l + \frac{1}{2}\varpi + e + u$ ou ajoutant en appellant h' le complement de la hauteur sur l'horizon

$\cos^2 \frac{1}{2} r = \frac{\cos \frac{1}{2}(h'-l-e)\,\cos \frac{1}{2}(h'+l+e)}{\cos l \cdot \cos e}$

soit $\frac{1}{2}h' = y$, $l+e = 2a$ et $b = \cos l \cdot \cos e$ $\frac{1}{2}r = x$ on aura

$b \cos^2 x = \cos(y-a)\cos(y+a)$

(voir page 3)

Soit la longitude γ une quantité très petite faisons $\sin\varepsilon = m$ on aura

$\varepsilon = m\gamma$

$\cos\frac{\varepsilon}{2} = -e\tan g\, l$

$q = 2\sin r \cos l \cos\varepsilon + 2re\sin l$



on aura $r = \frac{1}{2}\varpi + e\tan g\, l$, $\cos\varepsilon = 1 - \frac{1}{2}m^2\gamma^2$

$\sin r = 1 - \frac{1}{2}e^2\tan g^2 l$, $r = \frac{1}{2}\varpi + m\gamma\tan g\, l$, $\sin r = 1 - \frac{1}{2}m^2\gamma^2\tan g^2 l$

$2rx\gamma = x(1 - \frac{1}{2}e^2\tan g^2 l$

donc $q = (2 - m^2\gamma^2\tan g^2 l)\cos l\left(1 - \frac{1}{2}m^2\gamma^2\right) + (\varpi + 2m\gamma\tan g\, l)\sin l \cdot m\gamma$

$q = 2\cos l + \varpi m\gamma\sin l + \left(-m^2\gamma^2\cos l - m^2\gamma^2\tan g^2 l\cdot\cos l + 2m^2\gamma^2\tan g\, l\sin l\right)$

$q = 2\cos l + \varpi m\sin l\cdot\gamma + \left(2m^2\frac{\sin^2 l}{\cos l} - m^2\frac{\sin^2 l}{\cos l} - m^2\cos l\right)\gamma^2$

$= 2\cos l + \varpi\sin l\cdot m\gamma - \frac{\cos 2l}{\cos l}m^2\gamma^2 + \Omega x^3$

la durée de la nuit est $2\omega' - 2r$ ou $\varpi - m\gamma\tan g\, l$

2.

ou $b\cos^2 x = (\cos y\cos a + \sin y \sin a)(\cos y \cos a - \sin y \sin a)$ 1/96

$= \cos^2 y \cos^2 a - \sin^2 y \sin^2 a$

$= \cos^2 a (1 - \sin^2 y) - \sin^2 y \sin^2 a$
$= \cos^2 a \cos^2 y - \sin^2 a (1 - \cos^2 y)$

ou $b\cos^2 x = \cos^2 a - \sin^2 y$

ou $b\cos^2 x = -\sin^2 a + \cos^2 y$

ou $2b\cos^2 x = \cos^2 a - \sin^2 a + \cos^2 y - \sin^2 y$

ou $2b\cos^2 x = \cos 2a + \cos 2y$

ou $2\cos^2\left(\frac{1}{2}r\right) = \dfrac{\cos(h'+\cos(l+e)}{\cos l \cdot \cos e} = 1 + \cos r$

ou

$\cos h' + \cos l \cos e - \sin l \sin e = \cos l \cos e + \cos l \cos e \cos r$

ou $\cos r = \dfrac{\cos h' - \sin l \sin e}{\cos l \cos e}$

ou encore $2b - 2b\sin^2 x = \cos(l+e) + \cos h'$

ou $\cos l \cos e + \sin l \sin e = 2b\sin^2 x + \cos h'$

ou $2b\sin^2 x = \cos(l-e) - \cos h'$

ou $2\sin^2 x = \dfrac{\cos(l-e) - \cos h'}{\cos l \cos e}$

ou $\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \tan g^2 x = \dfrac{\cos(l-e) - \cos h'}{\cos(l+e) + \cos h'}$

Supposons que $2r$ ou h' soit de 90° c'est à dire que l'astre soit à l'horizon la valeur de r donnera l'angle horaire qui mesure la durée du jour on aura ainsi en désignant cet angle total par R.

$2b\sin^2\frac{1}{2}R \quad \cos R = -\tan g\, l \cdot \tan g\, e$ ou $\tan g^2\left(\frac{1}{2}R\right) = \dfrac{\cos(l-e)}{\cos(l+e)}$

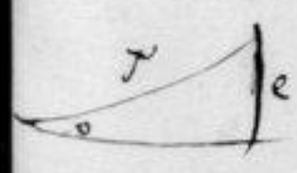
il faut maintenant prendre l'intégrale $2\int dr \cos h'$ depuis $r=0$ jusqu'à $r=R$

ou a $2\int dr \cos h' = 2\int dr\,(\cos r \cos l \cos e + \sin l \sin e)$

$= \text{const} + 2\cos l \cos e \sin r + 2r \sin l \sin e$

ainsi l'intégrale cherchée a pour valeur $2\sin R \cos l \cos e + 2R \sin l \sin e$

cette quantité exprime combien le centre de l'horizon reçoit de chaleur pendant la durée d'un jour lorsque la latitude est l et la déclinaison du soleil est e la valeur de R est donnée par l'équation $\cos R = -\tan g\, l \tan g\, e$



Soit T la longitude de l'astre et o l'obliquité de l'écliptique

on aura $\sin e = \sin o \sin T$

$\sin e = \overset{a}{\sin o} \sin \gamma \qquad = a \sin \gamma$

$\cos R = -\tan g \overset{b}{l} \cdot \tan g e = -b \tan g e$

$q = 2 \sin R \cos l \cos e + 2R \sin l \sin e$

$\sin e = \sin o \sin \gamma$

$\cos e = \sqrt{1 - \sin^2 o \cdot \sin^2 \gamma}$

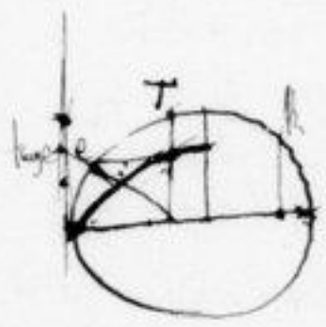
$\cos R = -\tan g l \cdot \dfrac{\sin o \sin \gamma}{\sqrt{1 - \sin^2 o \sin^2 \gamma}}$

$\sin R = \sqrt{1 - \tan g^2 l \cdot \dfrac{\sin^2 o \sin^2 \gamma}{1 - \sin^2 o \sin^2 \gamma}}$

$R = \arccos \dfrac{\tan g l \cdot \sin o \sin \gamma}{\sqrt{1 - \sin^2 o \cdot \sin^2 \gamma}}$

$$Q = \int_0^{2\pi} d\gamma \left(\cos l \sqrt{1 - \sin^2 o \cdot \sin^2 \gamma} \sqrt{1 - \frac{\tan g^2 l \cdot \sin^2 o \sin^2 \gamma}{1 - \sin^2 o \sin^2 \gamma}} + 2 \sin l \sin o \sin \gamma \arccos \frac{\tan g l \cdot \sin o \sin \gamma}{\sqrt{1 - \sin^2 o \cdot \sin^2 \gamma}} \right)$$

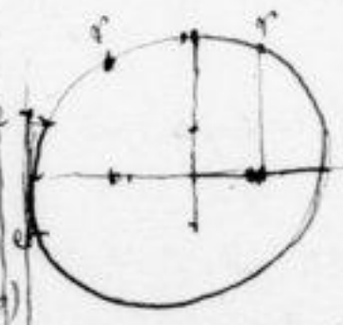
$$\int d\gamma \left(\sqrt{1 - \sin^2 o \sin^2 \gamma} \right) \quad \begin{matrix} l = 0 \\ l = \frac{1}{2}\omega \end{matrix}$$



$\sin e = K \sin \gamma$

$\cos e = \sqrt{1 - K^2 \sin^2 \gamma}$

$\int d\gamma \; 2 \sin o \sin \gamma$



$\cos r =$



$$\tan g^2 \left(\frac{1}{2} R\right) = \frac{\cos(l-e)}{\cos(l+e)}$$

$$\partial T = -\frac{\sin(l-o)\,\partial l}{\cos(l+e)} + \frac{\partial l \cdot \sin(l+o)}{\cos^2(l+e)}$$

$$\frac{\cos^2(l+e)}{\cos l + e} = \frac{\sin(l+e)}{\sin(l-e)}$$

$$\frac{\sin(l+e)}{\sin(l-e)} = \cos(l+e)$$

$\tan g(l+e) = \sin(l-e)$

$q = 2 \sin R \cos l + \frac{1}{2} R \sin l \sin o \sin \gamma$

$\sin \theta = m \,, \quad \tan g l = n$

$\cos e = 1 - m^2 \gamma^2$

$e = m\gamma$

$\cos r = -n e$

$r = \frac{1}{2}\omega + ne$

$r = \frac{1}{2}\omega + n \cdot m\gamma$

$\sin r = 1 - \frac{1}{2} n^2 m^2 \gamma^2$

$q =$

$q = 2\left(1 - \frac{1}{2} n^2 m^2 \gamma^2\right) \cos l$

Si l'on suppose que l'obliquité ρ est nulle on trouvera $\sin\varepsilon = 0$
$\cos R = 0 \quad \sin R = 1$ et $R = \frac{1}{2}\varpi$

la valeur de l'intégrale est donc $2\cos l$

en effet si la latitude du lieu est ε et que le soleil décrive l'horizon un angle γ cet arc décrit depuis le point pour trouver la hauteur h de l'astre
on aura $\frac{1}{\sin r} = \frac{\cos l}{\sin h}$ ou $\sin h = \sin r \cos l$ multipliant par dr et
intégrant depuis $r = 0$ on aura $\cos l\,(1 - \cos r)$ faisant $r = \varpi$
on aura $2\cos l$

on voit par là que si l'obliquité de l'écliptique était nulle la chaleur d'une climat donné en plus exactement la quantité de chaleur que le soleil envoye à cette latitude donnée est proportionnelle au cosinus de la latitude.

Si l'obliquité ρ n'est pas nulle la quantité de chaleur q envoyée par le soleil au lieu dont la latitude est l le jour ou la longitude du soleil dont l'écliptique est γ le traversera ainsi on aura $\sin\varepsilon = \sin\rho \sin\gamma$ ε étant la déclinaison

$\cos R = -\tan g l \tan g \varepsilon$

$q = 2\sin R \cos l \cos\varepsilon + 2R \sin l \sin\varepsilon$

$2\varpi - R$ durée de la nuit est proportionnelle à la chaleur perdue.

si maintenant on veut connaître combien pendant toute cette de l'année le même lieu reçoit de chaleur du soleil il faudra considérer que q est une fonction de γ qui varie continuellement avec lui lorsque γ augmente. si γ restait la même pendant 1 jour la quantité de chaleur envoyée au centre de l'horizon pendant la durée de 24 heures serait q. il est facile de voir que l'on aura $\int q\,d\gamma$ pour exprimer la quantité totale de chaleur envoyée au lieu donné. en prenant cette intégrale depuis $\gamma = 0$ jusqu'à $\gamma = 2\varpi$ et on aura la quantité Q qui exprime combien pendant toute cette de l'année le soleil envoye de chaleur au centre de l'horizon.

si l'obliquité ρ était nulle on aurait $q = 2\cos l$ et $Q = \int 2\,d\gamma \cos l = 2\gamma\cos l$
ou $Q = 4\varpi\cos l$

soit actuellement $\sin\rho$ une quantité fort petite.
on aura $\sin\varepsilon = \sin\rho\sin\gamma$, $\tan g\varepsilon = \sin\rho\sin\gamma$, $\cos R = -\tan g l \sin\rho\sin\gamma$, $\cos\varepsilon = 1$
$\sin R = (1 - \cos^2 R)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}\cos^2 R = 1 - \frac{1}{2}\tan g^2 l \sin^2\rho \sin^2\gamma$ ou 1 en négligeant la quantité
$R = \frac{1}{2}\varpi - \cos R = \frac{1}{2}\varpi + \tan g l \sin\rho\sin\gamma$
donc $q = 2\cos l + 2\sin l \left(\frac{1}{2}\varpi \sin\rho\sin\gamma\right)$ et $Q = \int (2\,d\gamma\cos l + \varpi \sin l \sin\rho \sin\gamma\,d\gamma)$
ou $Q = 2\gamma\cos l + \varpi \sin l \sin\rho(1 - \cos\gamma)$ ou $Q = 4\varpi\cos l$ faisant $\gamma = 2\varpi$
ainsi la 1ère puissance de $\sin\rho$ ne fait point varier la valeur de q.
on fera maintenant le même calcul en ayant égard à la 2ème puissance de $\sin\rho$.
on trouvera ainsi
$\sin\varepsilon = \sin\rho\sin\gamma$ $\cos\varepsilon = (1 - \sin^2\rho\sin^2\gamma)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}\sin^2\rho\sin^2\gamma$

$$Q_0 = 4\omega - \omega \sin^2\theta$$

$$Q_{\frac{1}{4}\omega} = 4\omega\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

$$T_0 = a + 4\omega - \omega \sin^2\theta$$

$$T'_{\frac{1}{2}\omega} = a + 4\omega\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

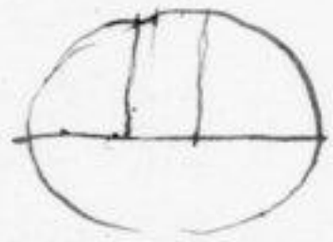
$$T'_{l_1} = 4\omega\,\omega l_1 - \frac{\omega l 2 l_1}{\omega l_1}\omega \sin^2\theta + a$$

$$T'_{l_2} = 4\omega\,\omega l_1 - \frac{\omega l 2 l_2}{\omega l_2} \sin^2\theta + a$$

$$T'_{l_1} - T'_{l_2} = 4\omega\,(\omega l_1 - \omega l_2)$$

$$-\sin^2\theta \cdot \omega^2 \left(\frac{\omega l 2 l_1}{\omega l_1} - \frac{\omega l 2 l_2}{\omega l_2} \right)$$

$$\frac{T'_{l_1} - T'_{l_2}}{4\omega\,(\omega l_1 - \omega l_2)}$$



$$T'_1 - \omega l_1 \cdot \frac{T'_1 - T'_2}{\omega l_1 - \omega l_2}$$

$$T \text{ و } T_{60} \quad T_0 - \frac{T'_0 - T'_{60}}{1 - \frac{1}{2}} \quad , \quad T'_0 - 2\left(T'_0 + T'_{60}\right)$$

$$2T'_{60} - T'_0$$

$$T_0 = a + 4\omega$$

$$T_{60} = a + 2\omega + \omega \sin^2\theta$$

$$T_0 = K(a + 4\omega)$$

$$T_{60} = K(a + 2\omega + \omega \sin^2\theta)$$

$$T_0 - T_{60} = \left(2\omega - \omega \sin^2\theta\right) K$$

$$a + 4\omega = T_0 \frac{2\omega}{4}$$

$$\frac{T_0 - T_{60}}{}$$

$$T'_{60} = 2\omega + \omega \sin^2\alpha + T_0 - 4\omega$$

$$\text{و } T_{60}$$

$$K = \frac{(T'_0 - T'_{60})\,4}{7\omega}$$

$$\frac{a}{\omega} = T_0 \frac{7}{4} - 4$$

$$T_0 - T_{60}$$

$$\frac{30.7}{4} - 4$$

$$30 - 7$$

$$\frac{210}{} - 4$$

$$120 - 28$$

$$\frac{28}{}$$

$$\frac{210}{9^2} - 4$$

$$\frac{105}{46} - 4$$

$$184$$

$$\frac{105}{}$$

$$\frac{79}{46} - 4$$

$$33.$$

$$\frac{60}{46} \quad \frac{16}{9} - 4$$

$$\frac{20}{9}$$

4 et tang $\varepsilon = \sin\theta \sin\gamma$ (le terme suivant contient $\sin^3\theta$ 198.

on a donc $\cos R = -\tang l \sin\theta \sin\gamma$, $\sin R = \left(1 - \tang^2 l \sin^2\theta \sin^2\gamma\right)^{\frac{1}{2}}$

$= 1 - \frac{1}{2}\tang^2 l \sin^2\theta \sin^2\gamma$. faisant $R = \frac{1}{2}\omega + u$ on aura $\cos R = -\sin u$

ou $\sin u = \tang l \sin\theta \sin\gamma$ donc $u = \tang l \sin\theta \sin\gamma$ (le terme suivant contient $\sin^3\theta$ donc $R = \frac{1}{2}\omega + \tang l \sin\theta \sin\gamma$

donc $q = 2\cos l \left(1 - \frac{1}{2}\tang^2 l \sin^2\theta \sin^2\gamma\right)\left(1 - \frac{1}{2}\sin^2\theta \sin^2\gamma\right)$

$+ 2\sin l \left(\frac{1}{2}\omega + \tang l \sin\theta \sin\gamma\right) \sin\theta \sin\gamma$

ou $q = 2\cos l + \omega \sin l \sin\theta \sin\gamma + 2\sin l \tang l \sin^2\gamma \sin^2\theta$

$- \cos l \sin^2\theta \sin^2\gamma$

$- \cos l \tang^2 l \sin^2\theta \sin^2\gamma$

ou $q = 2\cos l + \omega \sin l \sin\gamma \sin\theta + \left(2\frac{\sin^2 l}{\cos l} - \frac{\sin^2 l}{\cos l} - \cos l\right)\sin^2\gamma \sin^2\theta$

ou $q = 2\cos l + \omega \sin l \sin\gamma \sin\theta + \left(\frac{\sin^2 l - \cos^2 l}{\cos l}\right)\sin^2\gamma \sin^2\theta$

on aura ensuite $Q = \int q\, d\gamma$

$= 2\gamma \cos l + \omega \sin l \sin\theta \left(1 - \cos\gamma\right) + \frac{(\sin^2 l - \cos^2 l)}{\cos l}\sin^2\theta \left(-\frac{1}{2}\cos\gamma \sin\gamma + \frac{1}{2}\gamma\right)$

on faisant $\gamma = 2\omega$

$Q = 4\omega \cos l + \frac{(\sin^2 l - \cos^2 l)}{\cos l}\omega \sin^2\theta = 4\omega \cos l - \frac{\cos 2l}{\cos l}\omega \sin^2\theta + \&c$

il entre donc dans la valeur générale de Q un terme qui dépend de $\sin^2\theta$.

soit dans les équations générales $l = 0$ on aura $\sin\varepsilon = \sin\theta \sin\gamma$, $\cos R = 0$, $\sin R = 1$

$R = \frac{1}{2}\omega$ et $q = 2\cos l \cos\varepsilon + \omega \sin l \sin\varepsilon$ ~~$\cos\varepsilon = 0$~~ $\cos\varepsilon = \left(1 - \sin^2\theta \sin^2\gamma\right)^{\frac{1}{2}}$

donc $q = 2\cos l \left(1 - \sin^2\theta \sin^2\gamma\right)^{\frac{1}{2}} + \omega \sin l \sin\theta \sin\gamma$ ou $q = 2\left(1 - \sin^2\theta \sin^2\gamma\right)^{\frac{1}{2}}$

$= 2 - \sin^2\theta \sin^2\gamma + \&$ on aura $Q = \int q\, d\gamma = 2\gamma - \sin^2\theta \left(\frac{1}{2}\gamma - \frac{1}{2}\cos\gamma \sin\gamma\right)$

ou $Q = 4\omega - \omega \sin^2\theta + \&c$

f 1 /

(1)

sur les températures terrestres dues à la chaleur solaire

199.

1 La quantité de chaleur qui détermine la température d'un lieu donné à la surface de la terre peut être déterminée par plusieurs causes. la position du lieu par rapport à l'équateur. la hauteur la configuration du sol la direction des vents sa variation ou périodiques le voisinage des mers, l'élévation du plateau, l'état superficiel. la présence des eaux ou leur quelle ou courantes.
la cause principale est l'action des rayons solaires qui pendant de la totalité reçoit cette action est modifiée par une infinité d'autres causes internes dont en grande partie encore inconnues. Les principales sont la verticale du lieu dépendant de toutes les causes qui agissent directement de cette verticale à la superficie de la terre. ou se communiquent d'une manière très imparfaite le mouvement de la chaleur dans cette verticale si l'on n'avait égard qu'à l'influence des rayons solaires déterminée par la position géographique du lieu. d'un autre côté les causes étant trop diverses pour qu'on puisse les soumettre au calcul.
observant cette difficulté en considérant que les températures variables dépendant de la verticale ont dû être moindres que les températures variables directement de la verticale. on regardera donc les dernières températures comme données par les observations faites dans le lieu même à la superficie du globe.

2 Le lieu voisin de celui que l'on considère est par sa situation dans les mêmes circonstances que lui. on peut donc en noter de la même manière à l'égard des causes dont nous venons de parler. les températures variables des points d'une verticale pendant un an. Différentes dans chacun de ces verticales et l'on voit que deux points également distants de la surface mais placés dans deux verticales différentes peuvent avoir dans un même instant des températures différentes. Il peut y avoir un transport de la chaleur dans le sens horizontal indépendamment de celui qui s'opère dans le sens vertical. mais il faut bien remarquer que si le mouvement de la chaleur qui s'opère dans le sens horizontal est toujours comparable en petit moindre que celui qui s'opère dans le sens vertical. si l'on compare entre elles plusieurs verticales qui aboutissent à divers points d'une même surface d'une certaine étendue. l'influence des causes extérieures ne varie point d'une manière brusque d'une verticale à une autre voisine. mais que le mouvement horizontal de la chaleur puisse être apprécié et comparé avec le mouvement le plus rapide qui s'opère dans le sens vertical et qui est celui des variations de la température du jour et de la verticale à la superficie. la table de Fourier donne une idée assez exacte de la rapidité de cette convergence et la rendra entièrement évidente

3 ainsi il est important que dans un point donné de la superficie de la terre on place un thermomètre qui doit être observé à chaque instant. la verticale de ce lieu pénètre dans une substance solide dont la nature la même jusqu'à une grande profondeur et dont la densité ainsi que la capacité pour la chaleur sont données et l'on sait que les températures variables dans un même instant sont différentes à différentes profondeurs. on connaît donc la température initiale de chaque point de la verticale. il reste à déterminer par un calcul exact les températures de chaque point de cette verticale qui passe par ce même lieu.
or c'est un résultat général des observations que la série de ces températures variables à la superficie du globe est périodique. en supposant une seconde année à une autre on peut bien observer des différences

(2)

(2)

Coubi de rabattement a été déterminée le coefficient et les observations montrent qu'il s'établit pendant un laps de temps assez court à une valeur limite des valeurs voisines. Quelle est cette limite que nous cherchons ici et qui est en effet périodique.

La fonction périodique qui représente dans un lieu donné les variations annuelles et diurnes de température peut être en général fort difficile à une autre en tout point ramener la question d'une marche progressive, il faut considérer une fonction périodique arbitraire donnée en chaque lieu par les observations, et faire voir comment pour celui la température de la surface à un instant donné de la période annuelle.

On entend par température de la surface, non point celle que l'on observe dans l'air à un degré de distance de la superficie qui est celle que marquerait un thermomètre placé dans la même terre à une très petite profondeur.

Quant à la fonction donnée par les observations on peut concevoir que l'on a tracé sur un plan rectangle deux courbes dont l'une donne la température indiquée par le thermomètre et que chaque ordonnée de cette courbe représente la température moyenne de tout le jour correspondant à l'abscisse ou partie commune ordonnée. Les abscisses étant proportionnelles aux temps écoulés depuis le commencement de l'année, on voit que l'ordonnée de cette courbe est une fonction périodique du temps dont la période est d'une année. Cette courbe est donnée par les observations.

L'autre courbe donne la température du sol à une profondeur déterminée, elle est aussi périodique et d'une année. Il est facile de voir que les ordonnées de cette courbe sont moyennes entre celles de la première courbe.

Dont nous avons parlé.

4 Comme il l'est de déterminer par le calcul l'état thermométrique d'un point quelconque de la surface du sol dont on connaît l'état initial dans lequel le sol de la terre est supposé pendant un assez long temps à la manière de la température chez nous. Il est vrai que l'on ne connaît jamais le sol de la terre quelque soit il est écarté notablement d'une température uniforme mais cet état variable qui précède l'état final et dépend uniquement par le calcul par quelles progrès nécessités le système par la température variable de son état initial qui est entièrement arbitraire et relatif à cet état final qui ne dépend plus que de la température donnée à la surface. Il faut donc pour compléter dans tout l'étendue de la question attribuer aux différents points de la surface du sol des températures initiales entièrement arbitraires et introduire cette fonction arbitraire dans le calcul.

5 En fin lorsque le solide que pénètre la ligne verticale peut n'être pas la même dans toutes les parties il y a bien d'examiner comment la loi de nature du solide pourra influer sur les résultats du calcul. Par ce changement de nature on entend le changement d'une ou de plusieurs des deux propriétés spécifiques et intérieures du solide par rapport à la chaleur (ou propriété) soit la capacité et la conductibilité.

Si l'on examine attentivement l'analyse que nous venons de faire pour résoudre la question, on reconnaîtra que nous plaçant ici la question dans sa réalité, en n'admettant toute conductibilité hypothétique et en admettant toute la généralité que l'on peut concevoir. Il faut affecter le calcul de l'incertitude de cette température initiale entièrement arbitraire

Supposons que l'état de la surface c'est à dire la température varie comme l'ordonnée d'une courbe arbitraire le temps étant supposé croître périodiquement de la durée d'une période, on peut reconnaître a priori qu'après un certain laps de temps l'état de la surface et la température intérieure dépendant des températures initiales sont à très peu près de la même période que la température de la surface. Après un certain laps de temps l'influence de la température initiale sera telle que le temps écoulé depuis l'origine le rendra insensible. on pourra donc négliger dès lors l'influence de la température initiale sur l'état du solide on dira que le système a acquis un état périodique par rapport à la surface la température de x et de t qui sont déterminées. or l'état du système est donné lorsque la fonction v a acquis une certaine valeur fixe que nous désignons par u. on voit que cet état correspondant à la fonction u sera le système de températures est formé de deux parties savoir de u qui dépend seul de la température initiale et de v-u qui dépend de la température initiale et de la température de la surface. Après un certain temps écoulé depuis l'origine le premier terme disparaîtra et le second appartenant à une solide dont la température variable sera représentée par v-u. la fonction u qui en dépend est une fonction périodique du temps t qui ne change pas de valeur lorsque on a mis au lieu de t la quantité t+θ θ étant la grandeur de la période. à l'égard de v-u la valeur en x et t devient nulle lorsque $t = \frac{1}{0}$.

De plus la fonction u devient f(t), lorsque l'on fait x=0, et f(t) est une fonction arbitraire périodique donnée par l'observation et qui exprime l'état de la surface. si l'on fait t=0 dans u on doit avoir $fx - u_0$ en désignant par u_0 ce que devient u lorsque l'on fait t=0 dans le système et par u_0 ce que devient u lorsque l'on fait x=0 dans v-u, on doit avoir 0 afin que la somme de v-u et de u soit ft.

Pour le moyen on divise la question en deux autres. La 1ère a pour objet de trouver cette valeur de u qui exprime l'état périodique final du système. cette fonction doit satisfaire à l'équation différentielle $\frac{du}{dt} = \frac{k}{c \cdot D} \frac{d^2 u}{dx^2}$ 2° elle doit être périodique, c'est à dire que quelque soit x la fonction u ne change pas lorsque on met t+θ au lieu de t 3° u devient égale à la fonction périodique donnée ft lorsque l'on fait x=0 au moyen de ces conditions on trouve la fonction u comme nous le verrons bientôt après avoir résolu la première question.

$$v = u + w$$

$$v = e^{-gx}\left(a\cos(2\eta^2 t - gx) + b\sin(2\eta^2 t - gx)\right)$$

$$u = e^{-gx}\left(a\cos(2\eta^2 t - gx) + b\sin(2\eta^2 t - gx)\right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -ge^{-gx}\left(a\cos\theta + b\sin\theta\right) + e^{-gx}\left(ga\sin\theta - gb\cos\theta\right)$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0 = -ag\cos 2\eta^2 t - bg\sin 2\eta^2 t + ag\sin 2\eta^2 t - bg\cos 2\eta^2 t$$

$$2\eta^2\theta = i\omega$$

$$\eta^2 t = i\omega$$

$$\eta = \sqrt{\frac{i\omega}{\theta}}$$

$$\eta^2 = \frac{i\omega}{4}$$

$$= \frac{}{ag-bg}\sin 2\eta^2 t - \frac{}{ag+bg}\cos 2\eta^2 t$$

$$v_0 = a\cos 2\eta^2 t + b\sin 2\eta^2 t$$

$$\left(bh - g\frac{}{a-b}\right)\sin 2\eta^2 t + \left(ah + g\frac{}{a+b}\right)\cos 2\eta^2 t$$

$$\sum h\frac{}{ga-b}$$

$$\sum \left\{\left(hb_i - g\frac{}{a_i - b_i}\right)\sin\left(i\omega\frac{t}{\theta}\right) + \left(ha_i + g\frac{}{a_i+b_i}\right)\cos\left(i\omega\frac{t}{\theta}\right)\right\} = Ft$$

$$\frac{2\omega t}{\theta} = y$$

$$\sum_{i=0}^{i=\frac{1}{0}} \left(A_i\sin(iy) + B_i\cos(iy)\right) = fy$$

$$F\left(\frac{\theta\cdot y}{2\omega}\right) = fy$$

(4) 7 — La seconde question a pour objet de trouver une autre fonction W telle 1° qu'en y faisant $t=0$ elle devienne $fx-u_0$ ou u_0 désigne par u_0 ce que devient la fonction précédente u lorsqu'on y fait $t=0$ 2° qu'elle soit toujours nulle lorsqu'on fait $x=0$ quelque soit la variable t. La première question étant supposée résolue on connaît u on trouvera u_0 en faisant dans u $t=0$ on aura donc une fonction de x qui sera u_0 en en cherchera $fx-u_0$ qui est une autre de x supposée connue et désignée par φx c'est la valeur initiale de W ce sera celle qu'on trouve en faisant $t=0$ c'est à dire que l'on cherche une solide dont l'état initial est φx. on applique à la superficie une cause qui retient cette superficie à la température constante 0. l'état initial commence à l'heure et les états successifs du solide [illegible] la fonction connue W c'est à dire qu'après un temps t la température du point de l'intérieur du solide qui est à la profondeur x sera W. cette seconde question n'est autre que celle du refroidissement continuel d'un solide dont l'état initial est représenté par φx et dont la superficie est entretenue à une température constante 0. [illegible] cherche la différence entre l'état initial du solide et l'état final qu'il doit prendre au quel il doit parvenir et qui arrivée comme on supposera d'abord entièrement à un second solide dont chaque point a la même température initiale et dont la superficie est entretenue à une température constante 0. cette différence diminue progressivement de la même manière que se perd la chaleur initiale contenue dans le solide dont on maintient la surface à la température 0. Il est donc évident que à mesure qu'un temps s'écoule la température du second solide est une fonction de x et de t qui sera désignée par W. cette seconde question n'est autre que celle du refroidissement continuel d'un solide dont l'état initial est représenté par φx et dont la superficie est entretenue à une température constante 0. [illegible] cherche la différence entre l'état initial du solide et l'état final qu'il doit prendre au quel il doit parvenir et qui arrivée comme on supposera d'abord entièrement à un second solide dont chaque point a la même température initiale et dont la superficie est entretenue à une température constante 0. cette différence diminue progressivement de la même manière que se perd la chaleur initiale contenue dans le solide dont on maintient la surface à la température 0. Il est donc évident que à mesure qu'un temps s'écoule cette différence s'évanouit entièrement et cette manière que le solide atteint progressivement le dernier final [illegible] ayant évidemment la question proposée en deux autres, il faut se hâter de chacune d'elles.

8 ——

pour la première il faudra déterminer u par ces conditions que $\frac{du}{dt} = \frac{K}{c \cdot D} \frac{d^2u}{dx^2}$ que faisant $x=0$ on ait $u_0 = ft$ qu'elle soit une fonction périodique et que u soit elle même, quelque x, une fonction périodique. Soit $\frac{Kt}{c \cdot D} = t'$ afin de trouver $\frac{du}{dt'} = \frac{d^2u}{dx^2}$. la fonction Ft pourra se déduire sera $F\left(\frac{t' \cdot c \cdot D}{K}\right)$ ou $f(t')$ en désignant f une autre fonction connue. les équations à remplir sont $\frac{du}{dt'} = \frac{d^2u}{dx^2}$ $u_0 = ft'$ et nous supprimerons l'accent.

or on peut écrire $u = e^{-x} \omega(2t-x)$ car on a

$\frac{du}{dx} = e^{-x} \sin(2t-x) - e^{-x} \omega(2t-x)$ et $\frac{d^2u}{dx^2} =$

$\frac{d^2u}{dx^2} = -e^{-x}\cos(2t-x) - e^{-x}\sin(2t-x) + e^{-x}\cos(2t-x) - e^{-x}\sin(2t-x)$

$= -2e^{-x}\sin(2t-x)$ on a aussi $\frac{du}{dt} = -2e^{-x}\sin(2t-x)$

en sorte que la satisfait à l'équation différentielle.

en général on peut remarquer que l'on satisfera à cette équation en prenant

$u = ae^{-gx}\cos(2g^2t-gx) + be^{-gx}\sin(2g^2t-gx)$ ou encore

$\frac{du}{dx} = -ge^{-gx}$ ou $u = e^{-gx}\{a\cos(2g^2t-gx) + b\sin(2g^2t-gx)\}$

car on en déduit

$\frac{du}{dx} = -ge^{-gx}(a\cos q + b\sin q) + e^{-gx}(ag\sin q - bg\cos q)$

$= e^{-gx}(\overline{ag-bg}\sin q - \overline{ag+bg}\cos q)$

ouvrant que nous désignerons par q la grandeur $2g^2t-gx$ et $\cos$ ou $\sin$.

on aura aussi

$\frac{d^2u}{dx^2} = -ge^{-gx}(\overline{ag-bg}\sin q - \overline{ag+bg}\cos q) + a$

$+ e^{-gx}(-g\overline{ag-bg}\cos q - g\overline{ag+bg}\sin q)$

$= e^{-gx}\{(ag^2+bg^2-ag^2+bg^2)\cos q - (ag^2+bg^2-ag^2-bg^2)\sin q\}$

$= e^{-gx}\{2bg^2\cos q - 2ag^2\sin q\}$ et l'on aura aussi

$\frac{du}{dt} = e^{-gx}(-2ag^2\sin q + 2bg^2\cos q)$ en sorte que l'équation

différentielle est évidemment satisfaite quelles que soient

a, b, g.

2 on pourra ajouter ainsi autant de valeurs particulières que l'on voudra et l'on trouvera $v = \sum e^{-gx}\{a\cos(2g^2t-gx) + b\sin(2g^2t-gx)\}$. il faudra remarquer que cette valeur générale de v est périodique parce que le temps t entre seulement dans les lignes $\cos$ et $\sin$. et comme en faisant $t = t+\theta$ la fonction v ne doit pas changer il faut que $2g^2\theta = 2i\pi$ cette condition ayant lieu le cosinus et le sinus ne changeront point. ainsi le nombre g doit être tel que

Mais $f'\theta = 2\pi i$ donne

$$v = \sum e^{-x\sqrt{\frac{\pi}{\theta}i}} \left(a\cos\left(\frac{2\pi i t}{\theta} - x\sqrt{\frac{\pi}{\theta}i}\right) + b\sin\left(\frac{2\pi i t}{\theta} - x\sqrt{\frac{\pi}{\theta}i}\right)\right)$$

Nous avons deux conditions savoir à l'équation différentielle et à la condition de ne point changer lorsque t devient $t+\theta$ le nombre i étant un nombre entier quelconque $0, 1, 2, 3, 4 \ldots$

10

Maintenant si l'on fait $x=0$ il faut que la valeur de v devienne égale à la fonction périodique ft. ou autrement pour déterminer a et b la condition

$$ft = \sum \left\{ a\cos\left(\frac{2\pi i t}{\theta}\right) + b\sin\left(\frac{2\pi i t}{\theta}\right)\right\}$$, or nous avons un théorème qui résout cette question, quelque peut être la fonction ft. Soit $\frac{2\pi t}{\theta} = y$ et $ft = f\left(\frac{\theta \cdot y}{2\pi}\right) = \psi y$ on aura

$$\psi y = a_0 + a_1\cos y + a_2\cos 2y + a_3\cos 3y + \ldots$$
$$+ b_1\sin y + b_2\sin 2y + b_3\sin 3y$$

et suivant le théorème dont il s'agit, on détermine aussi les valeurs des coefficients : $a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} dy\, \psi y$

$$a_j = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} dy\, \psi y \cos(jy) \quad \text{et} \quad b_j = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} dy\, \psi y \sin(jy)$$

en mettant pour y sa valeur on aura :

$$a_0 = \frac{1}{\theta}\int_0^{\theta} dt\, ft \quad , \quad a_j = \frac{2}{\theta}\int_0^{\theta} dt\, ft \cos\left(j\cdot\frac{2\pi t}{\theta}\right)$$

$$b_j = \frac{2}{\theta}\int_0^{\theta} dt\, ft \sin\left(j\cdot\frac{2\pi t}{\theta}\right)$$

11

Nous connaissons maintenant la valeur complète de u. elle est donc exprimée

$$u = \frac{1}{\theta}\int_0^{\theta} dt\, ft + \sum \frac{2}{\theta} e^{-x\sqrt{\frac{\pi i}{\theta}}} \left\{ \begin{array}{l} \cos\left(\frac{2\pi i t}{\theta} - x\sqrt{\frac{\pi i}{\theta}}\right)\int_0^{\theta} d\tau\, ft \cos\left(\frac{2\pi i t}{\theta}\right) \\ + \sin\left(\frac{2\pi i t}{\theta} - x\sqrt{\frac{\pi i}{\theta}}\right)\int_0^{\theta} dt\, ft \sin\left(\frac{2\pi i t}{\theta}\right) \end{array}\right\}$$

(a) il faut donner à i toutes les valeurs $1, 2, 3, 4 \ldots$ La somme de tous les termes ou bien aussi la valeur de u cette fonction de x et t 1° satisfait à l'équation différentielle
2° acquiert pour valeur lorsque t devient $t+\theta$
3° devient égale à ft lorsque l'on fait $x=0$
ainsi elle résout enfin la première question

θu_0

12

pour résoudre la 2e question il faut d'abord faire $t=0$ dans la fonction u et l'on aura

$$\theta u_0 = a_0 + \sum e^{-r\sqrt{\frac{\omega}{\theta}}i}\left\{a_i \cos\left(r\sqrt{\frac{\omega}{\theta}}i\right) - b_i \sin\left(r\sqrt{\frac{\omega}{\theta}}i\right)\right\} + \ldots = \frac{1}{2}a_0 + \Phi$$

on connaîtra maintenant la fonction $fx - u_0$ qui est $fx - \frac{a_0}{\theta} - \frac{1}{\theta}\Phi$ il faut, désignant cette quantité par φx, considérer φx comme l'état initial d'un solide dont la surface est entretenue à la température constante 0 et déterminer l'état subséquent de ce solide pour une valeur du temps t. on aura ainsi résolu la question proposée. Pour résoudre cette 2e question il faut:

1° φx et la température initiale du solide soit w la valeur de la température après le temps t au point situé à la profondeur x. il faut que la fonction w de x et t satisfasse à l'équation différentielle $\frac{dw}{dt} = \frac{K}{C\cdot D}\frac{d^2w}{dx^2}$ en faisant $\frac{Kt}{C\cdot D} = t'$

$\frac{dw}{dt'} = \frac{d^2w}{dx^2}$ 2° en faisant $t=0$ on doit avoir la valeur de w exprimée en x seulement et égale à φx. nous prenons pour intégrale de l'équation $\frac{dw}{dt} = \frac{d^2w}{dx^2}$ l'expression $w = A\int_0^\infty dq\, e^{-q^2}\psi(x+2q\sqrt{t})$ qui la satisfait comme nous le savons à l'équation différentielle. pour déterminer la constante A nous considérons que faisant $t=0$ on a $w_0 = \psi x \cdot A\int_0^\infty dq\, e^{-q^2}$ $= \psi x \cdot \frac{A}{2}\sqrt{\pi}$ donc si l'on désigne par ψx la valeur initiale de w il faut que $A = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$ on a donc $w = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty dq\, e^{-q^2}\psi(x+2q\sqrt{t})$ comme nous désignons ici l'état initial du solide par φx nous avons pour exprimer la valeur de φx. l'équation $w = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty dq\, e^{-q^2}\varphi(x+2q\sqrt{t})$ effectuant l'intégration définie par rapport à q on obtient une fonction de x et t qui est la fonction cherchée w qu'il faut déterminer

13

Soit $x + 2q\sqrt{t} = \lambda$ et $q = \frac{\lambda - x}{2\sqrt{t}}$ on regardera ici λ comme une variable qui devient ∞ quand q devient ∞ et $\frac{x}{2\sqrt{t}}$ quand q devient 0 on aura $2dq\sqrt{t} = d\lambda$ et l'on a donc $w = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x}{2\sqrt{t}}}^{\infty}\frac{d\lambda}{2\sqrt{t}}\, e^{-\left(\frac{\lambda-x}{2\sqrt{t}}\right)^2}\varphi\lambda$

ce qui indique que l'intégrale pour d doit être prise depuis $d = \frac{x}{\sqrt{t}}$ jusqu'à $d = \frac{1}{0}\cdot\infty$ ainsi la solution de la seconde question est ainsi exprimée $w = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x}{2\sqrt{t}}}^{\infty}\frac{d\lambda}{2\sqrt{t}}\, e^{-\frac{(\lambda-x)^2}{4t}}\left(f\lambda - \frac{a_0}{\theta} - \frac{\Phi\lambda}{\theta}\right)$

(8) la fonction φ_x est donnée en fonction de x par la série $\sum_{i=1}^{i=\infty} e^{-x\sqrt{\frac{\omega i}{\theta}}} \left(a_i \cos x\sqrt{\frac{\omega i}{\theta}} - b_i \sin x\sqrt{\frac{\omega i}{\theta}} \right)$ et φ_λ est donnée par

14. φ_x lorsque $x = \lambda$.

on a vu en donnant la solution complète de la question proposée l'état initial du solide dont la température du point placé à la profondeur x était $f x$.

on a appliqué à la surface extérieure une cause dont l'action indéfinie a maintenu pendant un temps infini cette surface à une température dont le changement périodique dans le cours de la période θ était exprimé par l'équation $v_0 = Ft$ la fonction Ft est arbitraire et telle que $F(t+\theta)$ ne diffère point de Ft.

1° l'état final du solide devient périodique et désignant par u une fonction de x et t qui après un temps infini représente la température du point placé à la profondeur x pour le temps $i\theta + T'$ c'est à dire pour le temps T' à partir du commencement d'une période quelconque on a

$$u = \frac{a_0}{\theta} + \frac{2}{\theta} \sum_{i=1}^{i=\infty} e^{-x\sqrt{\frac{i\omega}{\theta}}} \left\{ a_i \cos\left(\frac{2\omega i}{\theta} T - x\sqrt{\frac{\omega i}{\theta}} \right) + b_i \sin\left(\frac{2\omega i}{\theta} T - x\sqrt{\frac{\omega i}{\theta}} \right) \right\}$$

la valeur de a_0 est $\int_0^\theta \partial T\, FT$

la valeur de a_i est $\int_0^\theta \partial T\, FT \cdot \cos \frac{2\omega i}{\theta} T$

enfin celle de b_i est $\int_0^\theta \partial T\, FT \sin \frac{2\omega i}{\theta} T$

2° étant que cet état final périodique ne fut établi, la valeur v de la température du point placé à la profondeur x au temps t est $v = u + w$ et w est une fonction de x et t qu'on peut mettre sous la forme

$$w = \frac{2}{\sqrt{\omega}} \int_{\frac{x}{2\sqrt{t}}}^{\infty} \frac{\partial \lambda}{\sqrt{\pi}} e^{-(\lambda - x)^2} \left\{ f\lambda - \frac{1}{\theta} a_0 - \frac{1}{\theta} \varphi_\lambda \right)$$

arbitraire $f\lambda$ représente l'état initial du solide et l'on a

$$\varphi_\lambda = 2 \sum_{i=1}^{i=\infty} e^{-\lambda\sqrt{\frac{\omega i}{\theta}}} \left(a_i \cos \lambda\sqrt{\frac{\omega i}{\theta}} - b_i \sin \lambda\sqrt{\frac{\omega i}{\theta}} \right)$$

le signe $\sum$ indique qu'il faut donner à i toutes les valeurs entières depuis 1, 2, 3, ... ∞

et prendre la somme.

ainsi la valeur générale de v qui résout la question est $v = u + w$ et qui contient deux fonctions arbitraires Ft qui exprime l'état périodique de la surface, et fx qui représente l'état initial.

enfin il faut remarquer que le temps T qui entre dans la valeur de u et θ dans la valeur de w est un nombre entier j de périodes θ et que le temps t qui entre dans la valeur de w est $j\theta + T$ ainsi on peut mettre dans la valeur de u et dans celle de w pour le temps t la valeur $j\theta + T$. enfin il faut remarquer que nous avons écrit $\frac{Kt}{C.D} = t'$ et que nous avons ainsi fait entrer dans le calcul K et $C.D$ mais il faut écrire l'inverse de t et calculer $\frac{Kt}{C.D}$ au lieu de t'

(9) 15.

On tire des conséquences très remarquables de cette solution générale sans
aucunement particulariser toutes les conséquences qui sont en grand nombre
mais en indiquerons quelques unes qui ont un rapport plus direct avec l'objet
que nous traitons dans ce Mémoire.

1° On voit d'abord, en examinant la valeur de u que si la profondeur x
est grande, cette valeur se réduit à $\frac{a_0}{\theta}$ ou $\frac{1}{\theta}\int_0^\theta d\tau\, f'\tau$ c'est
la valeur moyenne de la température prise à la surface. ainsi
l'effet produit pendant un temps infini et qui résulte de l'action produite
exercée à la surface est de communiquer à tout le solide depuis
une profondeur x assez grande et au delà la température
moyenne de la surface observée à toutes les instants pendant la période

2° Supposons dans la valeur de u que la profondeur x soit grande sans
devenir infinie on voit que u se réduit pour cette profondeur à $\frac{a_0}{\theta}$
quant à la valeur w la fonction φ_2 $\frac{x}{2\sqrt{t}}$ se réduit ne contenant
aucune variable indépendante. Alors

$$w = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2\sqrt{t}}}^{\infty} \frac{d\lambda}{2\sqrt{t}}\, e^{-\frac{x^2}{4t}} \left(f_2 - \frac{1}{\theta} a_0 \right)$$

ainsi l'état du solide à cette grande profondeur est celui qui auroit
lieu si l'on retenoit la surface à la température 0 pendant le
temps t et si l'état initial étoit en principe $f x - \frac{1}{\theta} a_0$
par exemple on peut marquer le zero du thermomètre en sorte que
la température moyenne de la surface pendant tout l'intervalle
d'une période de la période, la température intérieure de cette profondeur
que l'action infiniment prolongée de la seule période à la surface
produit à une grande profondeur x le même effet que si la
température invariable étoit de cette période $f x - \frac{1}{\theta} a_0$ ou appliquant
à la surface la température constante 0. on voit par là bien
distinctement quelle est pour de grandes profondeurs l'influence
de la seule qui agit à la surface.

Dans cette grande profondeur ou la fonction φx n'a plus de valeur sensible c'est
à dire où l'on n'observe plus de changement de température
pendant le cours de la période, la température du point placé
à cette profondeur variera encore si l'état initial n'étoit pas
assez grand pour cette variation n'étoit point périodique elle
seroit si elle étoit et la température se dirigera insensiblement
après un dernier état qui est $\frac{a_0}{\theta}$.

(10)

16 ainsi pour les points dont la profondeur x n'est pas grande nous avons une analyse complète qui fait connaître toutes les circonstances du commencement de la chaleur. uniquement après la cause qui agit à la surface a cessé son action pendant un temps entier très long avant on ne peut pas tenir compte du temps écoulé depuis l'application de cette cause. mais nous pouvons examiner ce qui a lieu dans les points très voisins de la surface lorsque l'on considère les changements de température qui peuvent survenir à de grandes profondeurs où les variations périodiques ne sont plus sensibles. dans le cas dont il s'agit ici il faut d'abord supposer que la température moyenne de la surface dans l'étendue de la période est une même constante 0, que l'état initial du solide est exprimé par fx et chercher quel sera cet état lorsque pendant le temps t on aura maintenu la superficie à la température constante 0.

Si donc on observe à une très grande profondeur où les variations périodiques ne sont plus sensibles une température superieure à la température moyenne de la surface il est certain que cet excès de température est dû à l'état initial ; il est impossible qu'il provienne de la cause qui agit à la surface car cette cause tend à ramener la surface à la température zéro égale à la moyenne.

Si au contraire on trouvait à de grandes profondeurs une température inférieure à celle que l'état moyen de la surface, il faudrait en conclure que l'action de la cause extérieure n'a pas été assez prolongée, et que l'échauffement n'est pas achevé.

17 Nous supposerons donc que l'état moyen de toute la masse solide est 0 et que l'on applique à la superficie la température constante 0 ; il s'agit de connaître quel sera après un temps t, la valeur de la température à une profondeur égale à x.

Nous parvenons par une des notes écrites avant celle-ci et sur des sujets analogues article x que la question est aussi résolue

$$v = \frac{2b}{\sqrt{\omega}} \int_0^{R} dr\, e^{-r^2}$$

la limite R est $\frac{x}{2\sqrt{t}}$ ou plutôt $\frac{x}{2\sqrt{\frac{Kt}{C.D}}}$ en

supposant dans la valeur de R, t l'unité et en mettant $\frac{Kt}{C.D}$ au lieu de t. Nous avons déjà donné la solution relative à cette question dans le cas où la valeur de la température initiale fx est constante et nous avons fait voir que la température à une profondeur x après un temps t est exprimée par une intégrale définie dont la valeur est connue. Nous cherchons maintenant ce que devient cette formule lorsque l'écoulement du temps est infini. Il faut d'abord remarquer que la valeur initiale b de la température est multipliée par la moitié de la même intégrale définie dont il s'agit. il faut donc connaître la valeur de $\frac{dv}{dt}$ lorsque t varie la profondeur x étant supposée constante la limite R varie on cherchera donc d'abord $\frac{dv}{dR}$ ce que l'on fait par la règle des différentiations des intégrales définies

$$\frac{dv}{dR} = \frac{2b}{\sqrt{\omega}} e^{-R^2} \quad \text{et comme } R = \frac{x}{2\sqrt{t}} \text{ on a } dR = -\frac{x}{2}\frac{1}{2} t^{-\frac{3}{2}} dt = \frac{-x\,dt}{4t\sqrt{t}}$$

donc $\frac{dv}{dt} = -\frac{x}{4t\sqrt{t}} \cdot \frac{2b}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$. le nombre t qui entre dans ce dernier

est compté en minutes sexagésimales. ainsi le second membre de l'équation précédente exprime la variation de la température v pendant une minute la variation annuelle sera $-\frac{x \cdot b \cdot 365 \cdot 24 \cdot 60}{2t\sqrt{t}\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$ il faut maintenant que cette quantité divisée par b fasse une certaine fraction w comme un millième on a donc $\frac{365 \cdot 24 \cdot 30}{t\sqrt{t}\sqrt{\pi}} x e^{-\frac{x^2}{4t}} = w$

par ce moyen on connaîtra pour des valeurs correspondantes données de x et de t la fraction w ou le rapport de la variation annuelle de la température à la valeur initiale b.

nous désignerons par T le nombre d'années à compter en sorte que l'on ait $w = \frac{365 \cdot 24 \cdot 60}{2 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot T\sqrt{365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot T}\sqrt{\pi}} x e^{-\frac{x^2}{4 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot T}}$

il faut maintenant la rapporter que t devra être remplacé par t' et t' par $\frac{kt}{c \cdot D}$. de sorte que l'on a

$$w = \frac{x e^{-\frac{x^2 \cdot c \cdot D}{4 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot k T}}}{\frac{2kT}{c \cdot D}\sqrt{\pi} \cdot 365 \cdot 24 \cdot 60 \frac{kT}{c \cdot D}}$$

. cette formule nous donnera

la quantité dont la température s'abaisse pendant un an dans le lieu dont la profondeur est x et après qu'il s'est écoulé de nuit la supposition de la cause entretenue un nombre d'années exprimé par T. w est le rapport de cette variation annuelle à la température initiale b. mais il ne faut pas perdre de vue que le calcul n'applique à des profondeurs x assez grandes pour que les variations qui y diminuent bientôt totalement soient insensibles.

désignant par h le coefficient $4 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 60$ on aura

$$w = \frac{x e^{-\frac{x^2}{h \cdot \frac{kT}{c \cdot D}}}}{\frac{kT}{c \cdot D}\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{kT}{c \cdot D}}\sqrt{h}}$$

15

pour appliquer ces résultats à une substance dont les propriétés thermologiques sont connues savoir le fer et nous supposerons à ces profondeurs voisin 200 mètres et on sera persuadé à ces profondeurs nous savons que les variations périodiques seront insensibles. on prendra la valeur de $\frac{k}{c \cdot D}$ pour cette substance à 1083. Il s'ensuit alors

donc $e^{-\frac{x^2}{1460 \cdot 1440 T}}$ Si l'on fait $x = 200$ mètres environ

et si T est environ égal à un million d'années l'exposant est environ égal à $\frac{1}{1000}$ et que dans ce limites on peut remplacer cette quantité par l'unité.

lorsque l'exposant de $\frac{K}{C \cdot D}$ est moindre que l'unité pour les substances dont la densité de la terre est prise on peut prendre 200 moindre que 200 en effet pour que les variations périodiques diminuent à de moindres profondeurs de sorte que pour ces substances et pour les profondeurs accessibles qui suivent celles où les variations périodiques ne sont plus sensibles l'exposant $-\frac{x}{h\omega T}$ est fort petit le nombre T d'années écoulées est devenu considérable. dans ce cas la grandeur absolue de cette dimension annuelle en quelque sorte l'estimer comme il suit en faisant $\frac{K}{C \cdot D} = \frac{1}{1083}$ valeur qui convient en effet on aura donc

$$w = \frac{x}{T^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{(1083)^3}{\omega \cdot 4 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 60}}}$$ plus généralement on a

$$w = \frac{x}{T^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{C \cdot D}{K}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{h\omega}}$$ et $\frac{1}{h\omega} = \frac{1}{4 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot \omega}$ ou

$$w = \frac{x}{(T)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{C \cdot D}{K}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2370}$$. Soit donc le nombre d'années écoulées égal à 1083 ans la profondeur en question le long de laquelle la température $\frac{C \cdot D}{K} = 1083$ et la profondeur x égale à 237 mètres en sorte que les variations périodiques sont insensibles on trouvera $w = \frac{1}{10}$ c'est à dire que pour cette profondeur c'est à dire 237 mètres et à partir de laquelle j'admet écoulé 1083 ans depuis le commencement de l'application de la cause extérieure la température θ cette profondeur diminuera dans le cas même de la cause dans la dixième partie de la valeur b qu'elle avait avant que cette cause ne fut appliquée. cette détermination est fort facile en prenant les valeurs dans des limites assez voisines parce que la diminution annuelle varie comme la première puissance de la profondeur comme la puissance $-\frac{3}{2}$ du temps écoulé et comme la puissance $-\frac{3}{2}$ du rapport spécifique $\frac{K}{C \cdot D}$.

$\log 1460 = 3,1643929$
$\log 1440 = 3,1583625$
$\log \omega = 0,4971439$
$-6,8198633$
$-3,4099316$
$0,5900674$

$0,0003891$
2370

Sur le mouvement de la chaleur solaire dans l'intérieur de la terre — Calculs numériques —

Le mouvement annuel de la chaleur solaire dans l'intérieur de [illegible] terrestre est [illegible] d'une manière approchée pour cette profondeur par l'équation

$V = M + Ae^{-gz} \sin(nt - gz - \theta)$ lorsque la profondeur z est assez grande

M est la température moyenne de cette couche. L'année cette valeur moyenne est indépendante de z. elle est la même à toutes les profondeurs.

cette valeur générale de V est déduite de l'équation (E) renfermée page 160 du tome de l'Académie pour les années 1821 et 1822

la différence V − M entre la température variable et la température moyenne change avec le temps elle a la plus grande valeur lorsque le cosinus placé sous le signe sinus est $\frac{1}{2}\pi$ et la moindre valeur a lieu lorsque l'arc placé sous le signe sinus est $\frac{3}{2}\pi$. ainsi le maximum de la différence est Ae^{-gz} et le minimum est $-Ae^{-gz}$ par conséquent la différence totale de maximum au minimum est $2Ae^{-gz}$

Supposons qu'on ait observé le maximum de la différence pour une profondeur Δ et pour les suivantes 2Δ 3Δ 4Δ 5Δ

ou aura les valeurs de $2Ae^{-g\Delta}$ $2Ae^{-g2\Delta}$ $2Ae^{-g3\Delta}$ $2Ae^{-g4\Delta}$ $2Ae^{-g5\Delta}$

soit m_2 la valeur précédente $2Ae^{-g2\Delta}$ et m_4 la valeur précédente $2Ae^{-g4\Delta}$. m_2 et m_4 sont supposés connus par observation alors on aura $m_2 = 2Ae^{-g2\Delta}$ $m_4 = 2Ae^{-g4\Delta}$ donc

$\frac{m_2}{m_4} = e^{g2\Delta}$ la distance 2Δ est une grandeur connue b on a

$\frac{m_2}{m_4} = e^{bg}$, $bg \log e = \log m_2 - \log m_4$, $g = \frac{\log m_2 - \log m_4}{b \log e}$.

Or il résulte de l'équation E rapportée page 160 que l'expression de g est $\sqrt{\frac{\pi}{K\theta}}$ et K est $\frac{K}{C \cdot D}$ on aura donc $\frac{\theta \cdot C \cdot D}{K} = \left(\frac{\log m_2 - \log m_4}{b \log e}\right)^2$

θ K nombre de la perméabilité C, D nombres relatifs à la capacité de chaleur et la densité.

on a donc $\frac{C \cdot D}{K} = \frac{\theta}{\pi}\left(\frac{\log m_2 - \log m_4}{b \log e}\right)^2$ la valeur de θ est 1h 40m 36s

l'unité de temps est 1 minute l'unité de longueur est le mètre.

$\frac{781}{263} = e^{\log(3^{m}\frac{1}{4})}$

$x = e^{\log(6^{m}\cdot 6)}$

$\log(3\frac{1}{4})\log e = \log 781 - \log 263$

$\log(6,6)\log e = \log x$

$\frac{9,60}{3,25} = \frac{\log x}{\log 781 - \log 263}$

$\log x = \frac{960}{325}\{\log 781 - \log 263\}$

$\log x = \frac{960}{325}$ 0,30 7 0 d 4 7 6

960 | 325
650 | 2953
3100
2925
1750
1625
1250

2,55 0 2 2 8 3 5
e 2 2 7 4 8 6 7 0
3 7 7 4 1 1 3 0 3

113 2,0 5 3 0 7 8 4 4
3 6 3 3 5 6 1 2 9 2 8 6
1 4 4 0 3, 1 8 4 3 6 2 5
15 1 2 0 4 1 1 9 7 8
8 7 7 8 5 3 7 8
4, 7 7 4 1 1 3 0
4, 9 7 7 8 3 3 7 4
0, 7 7 4 1 1 3 0 4
4 1 9 9 7 5 4 7 3
.....
1 3, 8 4 0
1 3 8 4 0

$\frac{325}{2953}$

$\frac{3\frac{1}{4}}{3\frac{3}{4}}$ $\frac{56,5}{13}$

0, 5 0 7 0 4 4
2, 9 5 3
1014 68
4 3 3 6 3 6
2 3 3 5 0
1 5 2 1
1 4 9 6 5 5 3

on trouve que la seconde perd de 9 m. 6
la variation au même instant pendant
un rapport d'environ 31 et plus à 1 d'après la
même loi pour une seconde de 3 mètres
et la variation dans le rapport de 7, 81 à 2, 43

la valeur de $\frac{K}{C\cdot D}$ qui reste à déterminer
de sorte
est donc de que la valeur de $\frac{K}{C\cdot D}$ qui reste
de l'observation de Jamestown dont on a fait

usage
une nouvelle observation à faire.
Cette fraction $\frac{K}{C\cdot D} = \frac{1}{13140}$ si la valeur de $C\cdot D$ est
exacte 1000 on aurait donc $K = \frac{1}{13}$ ainsi reste
une incertitude extrêmement petite.

par l'observation de Jamestown
était plus haut on trouve
ainsi $\frac{K}{C\cdot D} = \frac{1}{10432}$

il existe des mètres prototypes à l'observatoire de France qui servent la vérification

le pied Londonien 1630 − 8,69 ou 7,81 = m_2

pouce parisien 12 pieds Allemands 1333 − 1050 = 283 = m_4 1630 1333 / 869 1050 / 7,81 283

$\log m_2 = 0,892651\overline{03}$

$\log m_4 = 0,3856527$

$0,5070447\overline{6} = \log m_2 - \log m_4$

$\log m_1 =$

$\log$

Le valeur de θ est 1420 , b est la longueur 10 pieds mesurée en mètre

ou $b = 3,24839$ mètre ou $a \log e = 0,\overline{43429448}$ et $\frac{a}{b} = \frac{113}{355}$

Donc $\frac{K}{c \cdot D} = \frac{b}{a}\left|\frac{b \log e}{\log m_2 - \log m_4}\right|^2 = \frac{355}{113}\left|\frac{3,24839 \times 0,43429448}{0,5070447\overline{6}}\right|^2$

ou $\frac{K}{c \cdot D} = \frac{355}{113} \cdot \frac{1}{365 \cdot 1440}\left\{\frac{(3,24839)(0,4343)}{0,5070447\overline{6}}\right\}^2$ donne la valeur de $\frac{K}{c \cdot D}$ est $\frac{355}{113} \cdot \frac{1}{365\,1440}\left\{\frac{(3\frac{1}{4}\ 0,4343)}{\frac{1}{2}}\right\}^2$ ou $\frac{169}{16}$ environ $\frac{1}{13840}$

0,4343 / 3 / 1,3029 / 0,5357 / 1,6286 / 2 / $3,2357^2$ / $3,2357^2$ $3\frac{1}{4}$

$\frac{13}{4}$ $\frac{169}{16}$

Pour $\frac{K}{c \cdot D}\cdot\frac{B}{E} = \frac{169}{16}$ et $g = \frac{0,4070442\overline{6}}{(3,24839)\,0,4343}$

ou exprimé avec $g = 3\frac{1}{4}$

les variables qui servent à la vérification

deviennent $pe^{-\frac{13}{4}}$ à une profondeur $\varepsilon + 3^{\text{mètre}}\frac{1}{4}$

ou mieux (cela revient au même) les variables deviennent à très peu près

$pe^{-9,6}$ à une profondeur de $3^{\text{mètre}}\frac{1}{4}$ p étant la variable

p étant la variable y 81 à 283 un accroissement de profondeur

de $9^{\text{mètre}},6$ réduit la variable dans le rapport de x à 1 pour cette

x il faut écrire $\frac{pe^{-x(+9,5)}}{pe^{-9}}$ ou $e^{-x(9,5)}$

$K = \frac{1}{14600}$

$K = \frac{800}{14600}$

$c = \frac{1}{3}$

$D = 3000$

$c = 1$

$D = 3000$

Note

$$\int da\, f^2 \sin(px) = -\frac{f^2}{p}\cos px + \frac{1}{p^2} f'^2 \sin px + \frac{1}{p^3} f''^2 \cos px - \frac{1}{p^4} f'''^2 \sin px$$

$f^2 \sin px$	$+\frac{1}{p} f'^2 \cos px$	$-\frac{1}{p^2} f''^2 \sin px$	$-\frac{1}{p^3} f'''^2 \cos px$
$-\frac{f'^2}{p}\cos px$	$+\frac{1}{p^2} f''^2 \sin px$	$+\frac{1}{p^3} f'''^2 \cos px$	$-\frac{1}{p^4} f^{IV} \sin px$

$$\int da\, f^2 \sin(pa) = C - \frac{1}{p} f^2 \cos(pa) + \frac{1}{p^2} f'^2 \sin px + \frac{1}{p^3} f''^2 \cos px - \frac{1}{p^4} f'''^2 \sin px + \frac{1}{p^5} f^{IV} \cos px + u$$

$$C = \frac{1}{p} f x_1 \cos p x_1 - \frac{1}{p^2} f' x_1 \sin p x_1 - \frac{1}{p^3} f'' x_1 \cos p x_1 + a$$

$$\int_{x_1}^{x} da\, f^2 \sin pa = \frac{1}{p}\left(f x_1 \cos p x_1 - f x_2 \cos p x_2\right) - \frac{1}{p^2}\left(f'^2 x_1 \sin p x_1 - f'^2 x_2 \sin p x_2\right) - \frac{1}{p^3}\left(f''^2 x_1 \cos p x_1 - f''^2 x_2 \cos p x_2\right) + u$$



(1) 5

$$\frac{1}{p} f(x_1) - \frac{1}{p^3} f''(x_1) + \frac{1}{p^5} f^{IV}(x_1) - \frac{1}{p^7} f^{VI}(x_1) + u$$

$\varepsilon = i\omega' - q \mid \tan g\, q = \frac{r}{h} \quad \cot g\, q = \frac{h}{r} \mid 1 + \frac{h^2}{r^2} = \cos ec^2 \varepsilon$

$\frac{\varepsilon x}{x} = i\omega \quad \frac{\varepsilon}{x} = \frac{i\omega'}{x} - \frac{q}{x} \mid x = x - u \mid \frac{x'}{x} = 1 - \frac{u}{x} \mid \frac{\varepsilon x'}{x} = \varepsilon - \frac{u\varepsilon}{x}$

$\frac{\varepsilon x'}{x} = \varepsilon - u\frac{\varepsilon}{x} \quad \sin\frac{\varepsilon x}{x} = Si \mid \frac{\varepsilon x}{x} = i\omega - q - \frac{u}{x}(i\omega - q) = i\omega - u\frac{i\omega}{x} - q\left(1 + \frac{u}{x}\right)$

$\frac{\varepsilon x'}{x} = \varepsilon - u\frac{\varepsilon}{x} \quad \frac{\varepsilon x}{x} = i\omega - q - u\frac{i\omega}{x} = i\omega - q - u\frac{i\omega}{mx'} = i\omega - q - \frac{ui}{l_k}$

$\frac{\varepsilon x'}{x} = i\omega - q - ur$

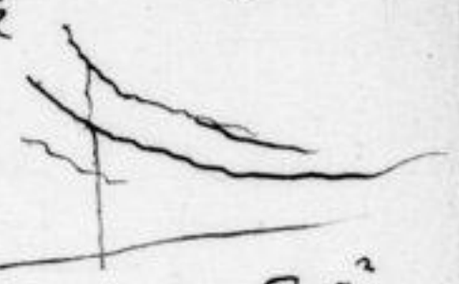
$\sin\varepsilon x = -\cos i\omega \sin(q + ur)$

$\varepsilon\frac{x}{x} = \frac{i\omega}{i\omega'} = 1 \mid e^{-\frac{kT}{\omega\omega'}}$

$x = 0$
$x = x - a$

il résulte des mêmes pesées à l'hydrostatique de France que pour la pierre
... en hauteur ... 1630 − 869 ou 7,81 = m_2

K ... −1
C ... −1
D ... 0
H ... −2



$$V_{(u=0)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\frac{KCD}{H^2 t}}}{H\sqrt{t}} \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{KCD}{H^2 t} + \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{2}\left(\frac{KCD}{H^2 t}\right)^2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\left(\frac{KCD}{H^2 t}\right)^3 + \alpha \right\}$$

$$\frac{KCD}{H^2 t} = \mu^2 \quad \Big| \quad \mu = \frac{1}{H}\sqrt{KCD}$$

$$V\sqrt{\pi} = \mu t^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\mu^3 t^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\mu^5 t^{-\frac{5}{2}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\mu^7 t^{-\frac{7}{2}} + \alpha$$

$$V\sqrt{\pi} = W = \mu t^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\mu^3 t^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\mu^5 t^{-\frac{5}{2}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\mu^7 t^{-\frac{7}{2}}$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\mu t^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{\mu^2}W$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = -\mu t^{-\frac{5}{2}} + \frac{1}{\mu^4}W + \frac{2}{\mu^2}W$$

$$\frac{\partial^3 W}{\partial t^3} = \mu t^{-\frac{7}{2}} + \frac{1}{\mu^6}W + \frac{2}{\mu^4}W + \frac{3}{\mu^2}W$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \frac{3}{2}\mu t^{-\frac{5}{2}} + \frac{1}{\mu^2}\left(-\mu t^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{\mu^2}W\right)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{1}{\mu^2}\left(W - \mu t^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu^4}\left(W - \mu t^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\mu^3 t^{-\frac{3}{2}}\right)$$

$$\frac{\partial^3 W}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu^6}\left(W - \mu t^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\mu^3 t^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\mu^5 t^{-\frac{5}{2}}\right)$$

$$\frac{\partial^3 W}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu^6}\left(W - \mu t^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\mu^3 t^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\mu^5 t^{-\frac{5}{2}}\right)$$

$$u = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\partial q}{1+\frac{K^2}{H^2}q^2}\left(\frac{K}{H}\omega q u + \frac{1}{q}\sin q u\right) e^{-\frac{q^2 K t}{C\cdot D}} \quad \Big| \quad q = \alpha\sqrt{\frac{CD}{K}}$$

$$u = \frac{2}{\pi}\frac{H}{K}\int \frac{\partial q}{\frac{H^2}{K^2}+q^2}\left(\omega q u + \frac{H}{K}\frac{1}{q}\sin q u\right) e^{-q^2\frac{Kt}{C\cdot D}}$$

$$u = \frac{2}{\pi}\cdot g\int \frac{\partial q}{g^2+q^2}\left(\omega q u + \frac{g}{q}\sin q u\right) e^{-q^2 m t}$$

a ... 0
K/H ... 1
q ... −1
u ... 1
g ... −1
m ... 2

K/C·D = m ... K
H/K = g ... h
q ... K

$$u\sqrt{\pi} = \sqrt{1+gu}\,W + \frac{u^2}{2m}\sqrt{1+\frac{gu}{3}}\,\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{u^4}{2\cdot3\cdot4\cdot m^2}\sqrt{1+\frac{gu}{5}}\,\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \frac{u^6}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot m^3}\sqrt{1+\frac{gu}{7}}\,\frac{\partial^3 W}{\partial t^3} + \alpha$$

$$u\sqrt{\pi} = \sqrt{1+gu}\,W + \frac{u^2}{2m}\frac{1}{\mu^2}\sqrt{1+\frac{gu}{3}}\,W + \frac{u^4}{2\cdot3\cdot4\cdot m^2\cdot\mu^4}\sqrt{1+\frac{gu}{5}}\,W + \frac{u^6}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot m^3\cdot\mu^6}\sqrt{1+\frac{gu}{7}}\,W + \alpha$$

W
$-\mu t^{-\frac{1}{2}}$
$+\frac{1}{2}\mu^3 t^{-\frac{3}{2}}$
$-\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\mu^5 t^{-\frac{5}{2}}$

$$u\sqrt{\pi} = \sqrt{1+gu}\,W + \frac{u^2}{2m}\frac{1}{\mu^2}\sqrt{1+\frac{gu}{3}}\,W - \mu t^{-\frac{1}{2}}$$

$$u\sqrt{\pi} = \left(\sqrt{1+gu} + \frac{u^2}{2m}\frac{1}{\mu^2}\sqrt{1+\frac{gu}{3}}\right)W - \mu t^{-\frac{1}{2}}$$

$$+\left(-\frac{1}{2}\pi\mu^3\right)$$

$$v = \left\{\pi\mu - \mu\left(\pi - \sqrt{1+gu}\right)\right\} t^{-\frac{1}{2}}$$

$$+\left\{-\frac{1}{2}\pi\mu^3 + \frac{1}{2}\mu^3\left\{\pi - \sqrt{1+gu} + \frac{u^2}{2m}\sqrt{1+\frac{gu}{3}}\right\}\right\} t^{-\frac{3}{2}}$$

$$+\left\{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\mu^5\pi - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\mu^5\left\{\pi - \sqrt{1+gu} + \frac{u^2}{2m}\sqrt{1+\frac{gu}{3}} + \frac{u^4}{2\cdot3\cdot4\cdot m^2}\sqrt{1+\frac{gu}{5}}\right\}\right\} t^{-\frac{5}{2}}$$

$$v = \pi\cdot v - \frac{1}{2}\pi t^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{9}{2}\cdot\frac{11}{2}\cdot\frac{13}{2}\cdot\frac{15}{2}\cdot\frac{17}{2}\cdot\frac{19}{2}\cdot\frac{21}{2}\cdot\frac{23}{2}\cdot\frac{25}{2}\cdot\frac{27}{2}\cdot\frac{29}{2}\cdot\frac{31}{2}\cdot\frac{33}{2}\cdot\frac{35}{2}\cdot\frac{37}{2}\cdot\frac{39}{2}\cdot\frac{41}{2}\cdot\frac{43}{2}\cdot\frac{45}{2}\cdot\frac{47}{2}\cdot\frac{49}{2}\cdot\frac{51}{2}\cdot\frac{53}{2}\cdot\frac{55}{2}\cdot\frac{57}{2}\cdot\frac{59}{2}\cdot\frac{61}{2}\cdot\frac{63}{2}\cdot\frac{65}{2}\cdot\frac{67}{2}\cdot\frac{69}{2}\cdot\frac{71}{2}\cdot\frac{73}{2}\cdot\frac{75}{2}\cdot\frac{77}{2}\cdot\frac{79}{2}\cdot\frac{81}{2}\cdot\frac{83}{2}\cdot\frac{85}{2}\cdot\frac{87}{2}\cdot\frac{89}{2}\cdot\frac{91}{2}\cdot\frac{93}{2}\cdot\frac{95}{2}\cdot\frac{97}{2}\cdot\frac{99}{2}\cdot\frac{101}{2}\cdot\frac{103}{2}\cdot\frac{105}{2}\cdot\frac{107}{2}\cdot\frac{109}{2}\cdot\frac{111}{2}\cdot\frac{113}{2}\cdot\frac{115}{2}\cdot\frac{117}{2}\cdot\frac{119}{2}\cdot\frac{121}{2}\cdot\frac{123}{2}\cdot\frac{125}{2}\cdot\frac{127}{2}\cdot\frac{129}{2}\cdot\frac{131}{2}\cdot\frac{133}{2}\cdot\frac{135}{2}\cdot\frac{137}{2}\cdot\frac{139}{2}\cdot\frac{141}{2}\cdot\frac{143}{2}\cdot\frac{145}{2}\cdot\frac{147}{2}\cdot\frac{149}{2}\cdot\frac{151}{2}\cdot\frac{153}{2}\cdot\frac{155}{2}\cdot\frac{157}{2}\cdot\frac{159}{2}\cdot\frac{161}{2}\cdot\frac{163}{2}\cdot\frac{165}{2}\cdot\frac{167}{2}\cdot\frac{169}{2}\cdot\frac{171}{2}\cdot\frac{173}{2}\cdot\frac{175}{2}\cdot\frac{177}{2}\cdot\frac{179}{2}\cdot\frac{181}{2}\cdot\frac{183}{2}\cdot\frac{185}{2}\cdot\frac{187}{2}\cdot\frac{189}{2}\cdot\frac{191}{2}\cdot\frac{193}{2}\cdot\frac{195}{2}\cdot\frac{197}{2}\cdot\frac{199}{2}\cdot\frac{201}{2}\cdot\frac{203}{2}\cdot\frac{205}{2}\cdot\frac{207}{2}\cdot\frac{209}{2}\cdot\frac{211}{2}\cdot\frac{213}{2}\cdot\frac{215}{2}\cdot\frac{217}{2}\cdot\frac{219}{2}\cdot\frac{221}{2}\cdot\frac{223}{2}\cdot\frac{225}{2}\cdot\frac{227}{2}\cdot\frac{229}{2}\cdot\frac{231}{2}\cdot\frac{233}{2}\cdot\frac{235}{2}\cdot\frac{237}{2}\cdot\frac{239}{2}\cdot\frac{241}{2}\cdot\frac{243}{2}\cdot\frac{245}{2}\cdot\frac{247}{2}\cdot\frac{249}{2}\cdot\frac{251}{2}\cdot\frac{253}{2}\cdot\frac{255}{2}\cdot\frac{257}{2}\cdot\frac{259}{2}\cdot\frac{261}{2}\cdot\frac{263}{2}\cdot\frac{265}{2}\cdot\frac{267}{2}\cdot\frac{269}{2}\cdot\frac{271}{2}\cdot\frac{273}{2}\cdot\frac{275}{2}\cdot\frac{277}{2}\cdot\frac{279}{2}\cdot\frac{281}{2}\cdot\frac{283}{2}\cdot\frac{285}{2}\cdot\frac{287}{2}\cdot\frac{289}{2}\cdot\frac{291}{2}\cdot\frac{293}{2}\cdot\frac{295}{2}\cdot\frac{297}{2}\cdot\frac{299}{2}\cdot\frac{301}{2}\cdot\frac{303}{2}\cdot\frac{305}{2}\cdot\frac{307}{2}\cdot\frac{309}{2}\cdot\frac{311}{2}\cdot\frac{313}{2}\cdot\frac{315}{2}\cdot\frac{317}{2}\cdot\frac{319}{2}\cdot\frac{321}{2}\cdot\frac{323}{2}\cdot\frac{325}{2}\cdot\frac{327}{2}\cdot\frac{329}{2}\cdot\frac{331}{2}\cdot\frac{333}{2}\cdot\frac{335}{2}\cdot\frac{337}{2}\cdot\frac{339}{2}\cdot\frac{341}{2}\cdot\frac{343}{2}\cdot\frac{345}{2}\cdot\frac{347}{2}\cdot\frac{349}{2}\cdot\frac{351}{2}\cdot\frac{353}{2}\cdot\frac{355}{2}\cdot\frac{357}{2}\cdot\frac{359}{2}\cdot\frac{361}{2}\cdot\frac{363}{2}\cdot\frac{365}{2}\cdot\frac{367}{2}\cdot\frac{369}{2}\cdot\frac{371}{2}\cdot\frac{373}{2}\cdot\frac{375}{2}\cdot\frac{377}{2}\cdot\frac{379}{2}\cdot\frac{381}{2}\cdot\frac{383}{2}\cdot\frac{385}{2}\cdot\frac{387}{2}\cdot\frac{389}{2}\cdot\frac{391}{2}\cdot\frac{393}{2}\cdot\frac{395}{2}\cdot\frac{397}{2}\cdot\frac{399}{2}\cdot\frac{401}{2}\cdot\frac{403}{2}\cdot\frac{405}{2}\cdot\frac{407}{2}\cdot\frac{409}{2}\cdot\frac{411}{2}\cdot\frac{413}{2}\cdot\frac{415}{2}\cdot\frac{417}{2}\cdot\frac{419}{2}\cdot\frac{421}{2}\cdot\frac{423}{2}\cdot\frac{425}{2}\cdot\frac{427}{2}\cdot\frac{429}{2}\cdot\frac{431}{2}\cdot\frac{433}{2}\cdot\frac{435}{2}\cdot\frac{437}{2}\cdot\frac{439}{2}\cdot\frac{441}{2}\cdot\frac{443}{2}\cdot\frac{445}{2}\cdot\frac{447}{2}\cdot\frac{449}{2}\cdot\frac{451}{2}\cdot\frac{453}{2}\cdot\frac{455}{2}\cdot\frac{457}{2}\cdot\frac{459}{2}\cdot\frac{461}{2}\cdot\frac{463}{2}\cdot\frac{465}{2}\cdot\frac{467}{2}\cdot\frac{469}{2}\cdot\frac{471}{2}\cdot\frac{473}{2}\cdot\frac{475}{2}\cdot\frac{477}{2}\cdot\frac{479}{2}\cdot\frac{481}{2}\cdot\frac{483}{2}\cdot\frac{485}{2}\cdot\frac{487}{2}\cdot\frac{489}{2}\cdot\frac{491}{2}\cdot\frac{493}{2}\cdot\frac{495}{2}\cdot\frac{497}{2}\cdot\frac{499}{2}\cdot\frac{501}{2}\cdot\frac{503}{2}\cdot\frac{505}{2}\cdot\frac{507}{2}\cdot\frac{509}{2}\cdot\frac{511}{2}\cdot\frac{513}{2}\cdot\frac{515}{2}\cdot\frac{517}{2}\cdot\frac{519}{2}\cdot\frac{521}{2}\cdot\frac{523}{2}\cdot\frac{525}{2}\cdot\frac{527}{2}\cdot\frac{529}{2}\cdot\frac{531}{2}\cdot\frac{533}{2}\cdot\frac{535}{2}\cdot\frac{537}{2}\cdot\frac{539}{2}\cdot\frac{541}{2}\cdot\frac{543}{2}\cdot\frac{545}{2}\cdot\frac{547}{2}\cdot\frac{549}{2}\cdot\frac{551}{2}\cdot\frac{553}{2}\cdot\frac{555}{2}\cdot\frac{557}{2}\cdot\frac{559}{2}\cdot\frac{561}{2}\cdot\frac{563}{2}\cdot\frac{565}{2}\cdot\frac{567}{2}\cdot\frac{569}{2}\cdot\frac{571}{2}\cdot\frac{573}{2}\cdot\frac{575}{2}\cdot\frac{577}{2}\cdot\frac{579}{2}\cdot\frac{581}{2}\cdot\frac{583}{2}\cdot\frac{585}{2}\cdot\frac{587}{2}\cdot\frac{589}{2}\cdot\frac{591}{2}\cdot\frac{593}{2}\cdot\frac{595}{2}\cdot\frac{597}{2}\cdot\frac{599}{2}\cdot\frac{601}{2}\cdot\frac{603}{2}\cdot\frac{605}{2}\cdot\frac{607}{2}\cdot\frac{609}{2}\cdot\frac{611}{2}\cdot\frac{613}{2}\cdot\frac{615}{2}\cdot\frac{617}{2}\cdot\frac{619}{2}\cdot\frac{621}{2}\cdot\frac{623}{2}\cdot\frac{625}{2}\cdot\frac{627}{2}\cdot\frac{629}{2}\cdot\frac{631}{2}\cdot\frac{633}{2}\cdot\frac{635}{2}\cdot\frac{637}{2}\cdot\frac{639}{2}\cdot\frac{641}{2}\cdot\frac{643}{2}\cdot\frac{645}{2}\cdot\frac{647}{2}\cdot\frac{649}{2}\cdot\frac{651}{2}\cdot\frac{653}{2}\cdot\frac{655}{2}\cdot\frac{657}{2}\cdot\frac{659}{2}\cdot\frac{661}{2}\cdot\frac{663}{2}\cdot\frac{665}{2}\cdot\frac{667}{2}\cdot\frac{669}{2}\cdot\frac{671}{2}\cdot\frac{673}{2}\cdot\frac{675}{2}\cdot\frac{677}{2}\cdot\frac{679}{2}\cdot\frac{681}{2}\cdot\frac{683}{2}\cdot\frac{685}{2}\cdot\frac{687}{2}\cdot\frac{689}{2}\cdot\frac{691}{2}\cdot\frac{693}{2}\cdot\frac{695}{2}\cdot\frac{697}{2}\cdot\frac{699}{2}\cdot\frac{701}{2}\cdot\frac{703}{2}\cdot\frac{705}{2}\cdot\frac{707}{2}\cdot\frac{709}{2}\cdot\frac{711}{2}\cdot\frac{713}{2}\cdot\frac{715}{2}\cdot\frac{717}{2}\cdot\frac{719}{2}\cdot\frac{721}{2}\cdot\frac{723}{2}\cdot\frac{725}{2}\cdot\frac{727}{2}\cdot\frac{729}{2}\cdot\frac{731}{2}\cdot\frac{733}{2}\cdot\frac{735}{2}\cdot\frac{737}{2}\cdot\frac{739}{2}\cdot\frac{741}{2}\cdot\frac{743}{2}\cdot\frac{745}{2}\cdot\frac{747}{2}\cdot\frac{749}{2}\cdot\frac{751}{2}\cdot\frac{753}{2}\cdot\frac{755}{2}\cdot\frac{757}{2}\cdot\frac{759}{2}\cdot\frac{761}{2}\cdot\frac{763}{2}\cdot\frac{765}{2}\cdot\frac{767}{2}\cdot\frac{769}{2}\cdot\frac{771}{2}\cdot\frac{773}{2}\cdot\frac{775}{2}\cdot\frac{777}{2}\cdot\frac{779}{2}\cdot\frac{781}{2}\cdot\frac{783}{2}\cdot\frac{785}{2}\cdot\frac{787}{2}\cdot\frac{789}{2}\cdot\frac{791}{2}\cdot\frac{793}{2}\cdot\frac{795}{2}\cdot\frac{797}{2}\cdot\frac{799}{2}\cdot\frac{801}{2}\cdot\frac{803}{2}\cdot\frac{805}{2}\cdot\frac{807}{2}\cdot\frac{809}{2}\cdot\frac{811}{2}\cdot\frac{813}{2}\cdot\frac{815}{2}\cdot\frac{817}{2}\cdot\frac{819}{2}\cdot\frac{821}{2}\cdot\frac{823}{2}\cdot\frac{825}{2}\cdot\frac{827}{2}\cdot\frac{829}{2}\cdot\frac{831}{2}\cdot\frac{833}{2}\cdot\frac{835}{2}\cdot\frac{837}{2}\cdot\frac{839}{2}\cdot\frac{841}{2}\cdot\frac{843}{2}\cdot\frac{845}{2}\cdot\frac{847}{2}\cdot\frac{849}{2}\cdot\frac{851}{2}\cdot\frac{853}{2}\cdot\frac{855}{2}\cdot\frac{857}{2}\cdot\frac{859}{2}\cdot\frac{861}{2}\cdot\frac{863}{2}\cdot\frac{865}{2}\cdot\frac{867}{2}\cdot\frac{869}{2}\cdot\frac{871}{2}\cdot\frac{873}{2}\cdot\frac{875}{2}\cdot\frac{877}{2}\cdot\frac{879}{2}\cdot\frac{881}{2}\cdot\frac{883}{2}\cdot\frac{885}{2}\cdot\frac{887}{2}\cdot\frac{889}{2}\cdot\frac{891}{2}\cdot\frac{893}{2}\cdot\frac{895}{2}\cdot\frac{897}{2}\cdot\frac{899}{2}\cdot\frac{901}{2}\cdot\frac{903}{2}\cdot\frac{905}{2}\cdot\frac{907}{2}\cdot\frac{909}{2}\cdot\frac{911}{2}\cdot\frac{913}{2}\cdot\frac{915}{2}\cdot\frac{917}{2}\cdot\frac{919}{2}\cdot\frac{921}{2}\cdot\frac{923}{2}\cdot\frac{925}{2}\cdot\frac{927}{2}\cdot\frac{929}{2}\cdot\frac{931}{2}\cdot\frac{933}{2}\cdot\frac{935}{2}\cdot\frac{937}{2}\cdot\frac{939}{2}\cdot\frac{941}{2}\cdot\frac{943}{2}\cdot\frac{945}{2}\cdot\frac{947}{2}\cdot\frac{949}{2}\cdot\frac{951}{2}\cdot\frac{953}{2}\cdot\frac{955}{2}\cdot\frac{957}{2}\cdot\frac{959}{2}\cdot\frac{961}{2}\cdot\frac{963}{2}\cdot\frac{965}{2}\cdot\frac{967}{2}\cdot\frac{969}{2}\cdot\frac{971}{2}\cdot\frac{973}{2}\cdot\frac{975}{2}\cdot\frac{977}{2}\cdot\frac{979}{2}\cdot\frac{981}{2}\cdot\frac{983}{2}\cdot\frac{985}{2}\cdot\frac{987}{2}\cdot\frac{989}{2}\cdot\frac{991}{2}\cdot\frac{993}{2}\cdot\frac{995}{2}\cdot\frac{997}{2}\cdot\frac{999}{2}\cdot\frac{1001}{2}\cdot\frac{1003}{2}\cdot\frac{1005}{2}\cdot\frac{1007}{2}\cdot\frac{1009}{2}\cdot\frac{1011}{2}\cdot\frac{1013}{2}\cdot\frac{1015}{2}\cdot\frac{1017}{2}\cdot\frac{1019}{2}\cdot\frac{1021}{2}\cdot\frac{1023}{2}\cdot\frac{1025}{2}\cdot\frac{1027}{2}\cdot\frac{1029}{2}\cdot\frac{1031}{2}\cdot\frac{1033}{2}\cdot\frac{1035}{2}\cdot\frac{1037}{2}\cdot\frac{1039}{2}\cdot\frac{1041}{2}\cdot\frac{1043}{2}\cdot\frac{1045}{2}\cdot\frac{1047}{2}\cdot\frac{1049}{2}\cdot\frac{1051}{2}\cdot\frac{1053}{2}\cdot\frac{1055}{2}\cdot\frac{1057}{2}\cdot\frac{1059}{2}\cdot\frac{1061}{2}\cdot\frac{1063}{2}\cdot\frac{1065}{2}\cdot\frac{1067}{2}\cdot\frac{1069}{2}\cdot\frac{1071}{2}\cdot\frac{1073}{2}\cdot\frac{1075}{2}\cdot\frac{1077}{2}\cdot\frac{1079}{2}\cdot\frac{1081}{2}\cdot\frac{1083}{2}\cdot\frac{1085}{2}\cdot\frac{1087}{2}\cdot\frac{1089}{2}\cdot\frac{1091}{2}\cdot\frac{1093}{2}\cdot\frac{1095}{2}\cdot\frac{1097}{2}\cdot\frac{1099}{2}\cdot\frac{1101}{2}\cdot\frac{1103}{2}\cdot\frac{1105}{2}\cdot\frac{1107}{2}\cdot\frac{1109}{2}\cdot\frac{1111}{2}\cdot\frac{1113}{2}\cdot\frac{1115}{2}\cdot\frac{1117}{2}\cdot\frac{1119}{2}\cdot\frac{1121}{2}\cdot\frac{1123}{2}\cdot\frac{1125}{2}\cdot\frac{1127}{2}\cdot\frac{1129}{2}\cdot\frac{1131}{2}\cdot\frac{1133}{2}\cdot\frac{1135}{2}\cdot\frac{1137}{2}\cdot\frac{1139}{2}\cdot\frac{1141}{2}\cdot\frac{1143}{2}\cdot\frac{1145}{2}\cdot\frac{1147}{2}\cdot\frac{1149}{2}\cdot\frac{1151}{2}\cdot\frac{1153}{2}\cdot\frac{1155}{2}\cdot\frac{1157}{2}\cdot\frac{1159}{2}\cdot\frac{1161}{2}\cdot\frac{1163}{2}\cdot\frac{1165}{2}\cdot\frac{1167}{2}\cdot\frac{1169}{2}\cdot\frac{1171}{2}\cdot\frac{1173}{2}\cdot\frac{1175}{2}\cdot\frac{1177}{2}\cdot\frac{1179}{2}\cdot\frac{1181}{2}\cdot\frac{1183}{2}\cdot\frac{1185}{2}\cdot\frac{1187}{2}\cdot\frac{1189}{2}\cdot\frac{1191}{2}\cdot\frac{1193}{2}\cdot\frac{1195}{2}\cdot\frac{1197}{2}\cdot\frac{1199}{2}\cdot\frac{1201}{2}\cdot\frac{1203}{2}\cdot\frac{1205}{2}\cdot\frac{1207}{2}\cdot\frac{1209}{2}\cdot\frac{1211}{2}\cdot\frac{1213}{2}\cdot\frac{1215}{2}\cdot\frac{1217}{2}\cdot\frac{1219}{2}\cdot\frac{1221}{2}\cdot\frac{1223}{2}\cdot\frac{1225}{2}\cdot\frac{1227}{2}\cdot\frac{1229}{2}\cdot\frac{1231}{2}\cdot\frac{1233}{2}\cdot\frac{1235}{2}\cdot\frac{1237}{2}\cdot\frac{1239}{2}\cdot\frac{1241}{2}\cdot\frac{1243}{2}\cdot\frac{1245}{2}\cdot\frac{1247}{2}\cdot\frac{1249}{2}\cdot\frac{1251}{2}\cdot\frac{1253}{2}\cdot\frac{1255}{2}\cdot\frac{1257}{2}\cdot\frac{1259}{2}\cdot\frac{1261}{2}\cdot\frac{1263}{2}\cdot\frac{1265}{2}\cdot\frac{1267}{2}\cdot\frac{1269}{2}\cdot\frac{1271}{2}\cdot\frac{1273}{2}\cdot\frac{1275}{2}\cdot\frac{1277}{2}\cdot\frac{1279}{2}\cdot\frac{1281}{2}\cdot\frac{1283}{2}\cdot\frac{1285}{2}\cdot\frac{1287}{2}\cdot\frac{1289}{2}\cdot\frac{1291}{2}\cdot\frac{1293}{2}\cdot\frac{1295}{2}\cdot\frac{1297}{2}\cdot\frac{1299}{2}\cdot\frac{1301}{2}\cdot\frac{1303}{2}\cdot\frac{1305}{2}\cdot\frac{1307}{2}\cdot\frac{1309}{2}\cdot\frac{1311}{2}\cdot\frac{1313}{2}\cdot\frac{1315}{2}\cdot\frac{1317}{2}\cdot\frac{1319}{2}\cdot\frac{1321}{2}\cdot\frac{1323}{2}\cdot\frac{1325}{2}\cdot\frac{1327}{2}\cdot\frac{1329}{2}\cdot\frac{1331}{2}\cdot\frac{1333}{2}\cdot\frac{1335}{2}\cdot\frac{1337}{2}\cdot\frac{1339}{2}\cdot\frac{1341}{2}\cdot\frac{1343}{2}\cdot\frac{1345}{2}\cdot\frac{1347}{2}\cdot\frac{1349}{2}\cdot\frac{1351}{2}\cdot\frac{1353}{2}\cdot\frac{1355}{2}\cdot\frac{1357}{2}\cdot\frac{1359}{2}\cdot\frac{1361}{2}\cdot\frac{1363}{2}\cdot\frac{1365}{2}\cdot\frac{1367}{2}\cdot\frac{1369}{2}\cdot\frac{1371}{2}\cdot\frac{1373}{2}\cdot\frac{1375}{2}\cdot\frac{1377}{2}\cdot\frac{1379}{2}\cdot\frac{1381}{2}\cdot\frac{1383}{2}\cdot\frac{1385}{2}\cdot\frac{1387}{2}\cdot\frac{1389}{2}\cdot\frac{1391}{2}\cdot\frac{1393}{2}\cdot\frac{1395}{2}\cdot\frac{1397}{2}\cdot\frac{1399}{2}\cdot\frac{1401}{2}\cdot\frac{1403}{2}\cdot\frac{1405}{2}\cdot\frac{1407}{2}\cdot\frac{1409}{2}\cdot\frac{1411}{2}\cdot\frac{1413}{2}\cdot\frac{1415}{2}\cdot\frac{1417}{2}\cdot\frac{1419}{2}\cdot\frac{1421}{2}\cdot\frac{1423}{2}\cdot\frac{1425}{2}\cdot\frac{1427}{2}\cdot\frac{1429}{2}\cdot\frac{1431}{2}\cdot\frac{1433}{2}\cdot\frac{1435}{2}\cdot\frac{1437}{2}\cdot\frac{1439}{2}\cdot\frac{1441}{2}\cdot\frac{1443}{2}\cdot\frac{1445}{2}\cdot\frac{1447}{2}\cdot\frac{1449}{2}\cdot\frac{1451}{2}\cdot\frac{1453}{2}\cdot\frac{1455}{2}\cdot\frac{1457}{2}\cdot\frac{1459}{2}\cdot\frac{1461}{2}\cdot\frac{1463}{2}\cdot\frac{1465}{2}\cdot\frac{1467}{2}\cdot\frac{1469}{2}\cdot\frac{1471}{2}\cdot\frac{1473}{2}\cdot\frac{1475}{2}\cdot\frac{1477}{2}\cdot\frac{1479}{2}\cdot\frac{1481}{2}\cdot\frac{1483}{2}\cdot\frac{1485}{2}\cdot\frac{1487}{2}\cdot\frac{1489}{2}\cdot\frac{1491}{2}\cdot\frac{1493}{2}\cdot\frac{1495}{2}\cdot\frac{1497}{2}\cdot\frac{1499}{2}\cdot\frac{1501}{2}\cdot\frac{1503}{2}\cdot\frac{1505}{2}\cdot\frac{1507}{2}\cdot\frac{1509}{2}\cdot\frac{1511}{2}\cdot\frac{1513}{2}\cdot\frac{1515}{2}\cdot\frac{1517}{2}\cdot\frac{1519}{2}\cdot\frac{1521}{2}\cdot\frac{1523}{2}\cdot\frac{1525}{2}\cdot\frac{1527}{2}\cdot\frac{1529}{2}\cdot\frac{1531}{2}\cdot\frac{1533}{2}\cdot\frac{1535}{2}\cdot\frac{1537}{2}\cdot\frac{1539}{2}\cdot\frac{1541}{2}\cdot\frac{1543}{2}\cdot\frac{1545}{2}\cdot\frac{1547}{2}\cdot\frac{1549}{2}\cdot\frac{1551}{2}\cdot\frac{1553}{2}\cdot\frac{1555}{2}\cdot\frac{1557}{2}\cdot\frac{1559}{2}\cdot\frac{1561}{2}\cdot\frac{1563}{2}\cdot\frac{1565}{2}\cdot\frac{1567}{2}\cdot\frac{1569}{2}\cdot\frac{1571}{2}\cdot\frac{1573}{2}\cdot\frac{1575}{2}\cdot\frac{1577}{2}\cdot\frac{1579}{2}\cdot\frac{1581}{2}\cdot\frac{1583}{2}\cdot\frac{1585}{2}\cdot\frac{1587}{2}\cdot\frac{1589}{2}\cdot\frac{1591}{2}\cdot\frac{1593}{2}\cdot\frac{1595}{2}\cdot\frac{1597}{2}\cdot\frac{1599}{2}\cdot\frac{1601}{2}\cdot\frac{1603}{2}\cdot\frac{1605}{2}\cdot\frac{1607}{2}\cdot\frac{1609}{2}\cdot\frac{1611}{2}\cdot\frac{1613}{2}\cdot\frac{1615}{2}\cdot\frac{1617}{2}\cdot\frac{1619}{2}\cdot\frac{1621}{2}\cdot\frac{1623}{2}\cdot\frac{1625}{2}\cdot\frac{1627}{2}\cdot\frac{1629}{2}\cdot\frac{1631}{2}\cdot\frac{1633}{2}\cdot\frac{1635}{2}\cdot\frac{1637}{2}\cdot\frac{1639}{2}\cdot\frac{1641}{2}\cdot\frac{1643}{2}\cdot\frac{1645}{2}\cdot\frac{1647}{2}\cdot\frac{1649}{2}\cdot\frac{1651}{2}\cdot\frac{1653}{2}\cdot\frac{1655}{2}\cdot\frac{1657}{2}\cdot\frac{1659}{2}\cdot\frac{1661}{2}\cdot\frac{1663}{2}\cdot\frac{1665}{2}\cdot\frac{1667}{2}\cdot\frac{1669}{2}\cdot\frac{1671}{2}\cdot\frac{1673}{2}\cdot\frac{1675}{2}\cdot\frac{1677}{2}\cdot\frac{1679}{2}\cdot\frac{1681}{2}\cdot\frac{1683}{2}\cdot\frac{1685}{2}\cdot\frac{1687}{2}\cdot\frac{1689}{2}\cdot\frac{1691}{2}\cdot\frac{1693}{2}\cdot\frac{1695}{2}\cdot\frac{1697}{2}\cdot\frac{1699}{2}\cdot\frac{1701}{2}\cdot\frac{1703}{2}\cdot\frac{1705}{2}\cdot\frac{1707}{2}\cdot\frac{1709}{2}\cdot\frac{1711}{2}\cdot\frac{1713}{2}\cdot\frac{1715}{2}\cdot\frac{1717}{2}\cdot\frac{1719}{2}\cdot\frac{1721}{2}\cdot\frac{1723}{2}\cdot\frac{1725}{2}\cdot\frac{1727}{2}\cdot\frac{1729}{2}\cdot\frac{1731}{2}\cdot\frac{1733}{2}\cdot\frac{1735}{2}\cdot\frac{1737}{2}\cdot\frac{1739}{2}\cdot\frac{1741}{2}\cdot\frac{1743}{2}\cdot\frac{1745}{2}\cdot\frac{1747}{2}\cdot\frac{1749}{2}\cdot\frac{1751}{2}\cdot\frac{1753}{2}\cdot\frac{1755}{2}\cdot\frac{1757}{2}\cdot\frac{1759}{2}\cdot\frac{1761}{2}\cdot\frac{1763}{2}\cdot\frac{1765}{2}\cdot\frac{1767}{2}\cdot\frac{1769}{2}\cdot\frac{1771}{2}\cdot\frac{1773}{2}\cdot\frac{1775}{2}\cdot\frac{1777}{2}\cdot\frac{1779}{2}\cdot\frac{1781}{2}\cdot\frac{1783}{2}\cdot\frac{1785}{2}\cdot\frac{1787}{2}\cdot\frac{1789}{2}\cdot\frac{1791}{2}\cdot\frac{1793}{2}\cdot\frac{1795}{2}\cdot\frac{1797}{2}\cdot\frac{1799}{2}\cdot\frac{1801}{2}\cdot\frac{1803}{2}\cdot\frac{1805}{2}\cdot\frac{1807}{2}\cdot\frac{1809}{2}\cdot\frac{1811}{2}\cdot\frac{1813}{2}\cdot\frac{1815}{2}\cdot\frac{1817}{2}\cdot\frac{1819}{2}\cdot\frac{1821}{2}\cdot\frac{1823}{2}\cdot\frac{1825}{2}\cdot\frac{1827}{2}\cdot\frac{1829}{2}\cdot\frac{1831}{2}\cdot\frac{1833}{2}\cdot\frac{1835}{2}\cdot\frac{1837}{2}\cdot\frac{1839}{2}\cdot\frac{1841}{2}\cdot\frac{1843}{2}\cdot\frac{1845}{2}\cdot\frac{1847}{2}\cdot\frac{1849}{2}\cdot\frac{1851}{2}\cdot\frac{1853}{2}\cdot\frac{1855}{2}\cdot\frac{1857}{2}\cdot\frac{1859}{2}\cdot\frac{1861}{2}\cdot\frac{1863}{2}\cdot\frac{1865}{2}\cdot\frac{1867}{2}\cdot\frac{1869}{2}\cdot\frac{1871}{2}\cdot\frac{1873}{2}\cdot\frac{1875}{2}\cdot\frac{1877}{2}\cdot\frac{1879}{2}\cdot\frac{1881}{2}\cdot\frac{1883}{2}\cdot\frac{1885}{2}\cdot\frac{1887}{2}\cdot\frac{1889}{2}\cdot\frac{1891}{2}\cdot\frac{1893}{2}\cdot\frac{1895}{2}\cdot\frac{1897}{2}\cdot\frac{1899}{2}\cdot\frac{1901}{2}\cdot\frac{1903}{2}\cdot\frac{1905}{2}\cdot\frac{1907}{2}\cdot\frac{1909}{2}\cdot\frac{1911}{2}\cdot\frac{1913}{2}\cdot\frac{1915}{2}\cdot\frac{1917}{2}\cdot\frac

#

$$v = \frac{2\mathfrak{h}}{\pi}\int_0^\infty \frac{dr}{\mathfrak{h}^2+r^2}\, e^{-r^2 kt}\left(\cos ru + \frac{h}{r}\sin ru\right)$$

$$\sqrt{1+hu} - \left(\frac{u^2}{2} + \frac{hu^3}{1\cdot 3}\right)r^2 + \left(\frac{u^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{hu^5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\right)r^4 - \left(\frac{u^6}{2\cdot 3\cdots 6} + \frac{hu^7}{2\cdot 3\cdots 7}\right)r^6 + \dots$$

$$v = \frac{2\mathfrak{h}}{\pi}\int_0^\infty \frac{dr}{\mathfrak{h}^2+r^2}\, e^{-r^2 kt}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{2\mathfrak{h}}{\pi}k\int_0^\infty \frac{dr}{\mathfrak{h}^2+r^2}\, r^2 e^{-r^2 kt}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{2\mathfrak{h}}{\pi}k^2\int_0^\infty \frac{dr}{\mathfrak{h}^2+r^2}\, r^4 e^{-r^2 kt}$$

$$\frac{\partial^3 v}{\partial t^3} = -\frac{2\mathfrak{h}}{\pi}k^3\int_0^\infty \frac{dr}{\mathfrak{h}^2+r^2}\, r^6 e^{-r^2 kt}$$

$$v = \sqrt{1+hu}\cdot v + \frac{u^2}{2k}\cdot 1\cdot\frac{1+\frac{hu}{3}}{1}\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{u^4}{1\cdot 3\cdot 4\,k^2}\cdot\frac{1+\frac{hu}{5}}{1}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{u^6}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\,k^3}\cdot\frac{1+\frac{hu}{7}}{1}\frac{\partial^3 v}{\partial t^3}$$

$$V = \frac{2\mathfrak{h}}{\sqrt{\pi}}\, e^{T^2}\int_T^\infty dr\, e^{-r^2}, \qquad T = \frac{H\sqrt{t}}{\sqrt{KCD}}, \qquad T' = \frac{H^2 t}{KCD}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{2\mathfrak{h}}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\partial T}{\partial t}e^{T^2}\int_T^\infty dr\, e^{-r^2} - \frac{2\mathfrak{h}}{\sqrt{\pi}}\, e^{T^2}\frac{\partial T}{\partial t}e^{-T^2} = \frac{2\mathfrak{h}}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{H^2}{KCD}V - \frac{1}{2}\frac{H}{\sqrt{KCD}}\, t^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{2\mathfrak{h}}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{H^2}{KCD}V - \frac{1}{2}\frac{H}{\sqrt{KCD}}\, t^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{2\mathfrak{h}}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{H^2}{KCD}\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\frac{H}{\sqrt{KCD}}\, t^{-\frac{3}{2}}\right) = \left(\frac{2\mathfrak{h}}{\sqrt{\pi}}\right)^2\mu^4 V - \frac{1}{2}\mu^3 t^{-\frac{1}{2}}\Big) + \frac{2\mathfrak{h}}{\sqrt{\pi}}\,\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\mu t^{-\frac{3}{2}}$$

$$\frac{2\mathfrak{h}}{\sqrt{\pi}} = \beta, \qquad \frac{H}{\sqrt{KCD}} = \mu$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \beta\mu^2 V - \frac{1}{2}\beta\mu t^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \beta^2\mu^4 V - \frac{1}{2}\beta^2\mu^3 t^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\beta\mu\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}}$$

$$\frac{\partial^3 V}{\partial t^3} = \beta^3\mu^6 V - \frac{1}{2}\beta^3\mu^5 t^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\beta^2\mu^3 t^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\beta\mu t^{-\frac{5}{2}}$$

$$\frac{\partial^4 V}{\partial t^4} = \beta^4\mu^8 V - \frac{1}{2}\beta^4\mu^7 t^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\beta^3\mu^5 t^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\beta^2\mu^3 t^{-\frac{5}{2}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}t^{-\frac{7}{2}}$$

$$v = \sqrt{1+hu}\cdot V + \frac{u^2}{2k}\cdot\frac{1+\frac{hu}{3}}{1}\left|\begin{array}{l}\beta\mu^2 V\\ -\frac{1}{2}\beta\mu t^{-\frac{1}{2}}\end{array}\right. + \frac{u^4}{2\cdot 3\cdot 4\,k^2}\cdot\frac{1+\frac{hu}{5}}{1}\left|\begin{array}{l}\beta^2\mu^4 V\\ -\frac{1}{2}\beta^2\mu^3 t^{-\frac{1}{2}}\\ +\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\beta\mu t^{-\frac{3}{2}}\end{array}\right. + \frac{u^6}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\,k^3}\cdot\frac{1+\frac{hu}{7}}{1}\left|\begin{array}{l}\beta^3\mu^6 V\\ -\frac{1}{2}\beta^3\mu^5 t^{-\frac{1}{2}}\\ +\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\beta^2\mu^3 t^{-\frac{3}{2}}\\ -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\beta\mu t^{-\frac{5}{2}}\end{array}\right. + \dots$$

$$\pi = \sqrt{1+hu} + \frac{u^2}{2k}\cdot\frac{1+\frac{hu}{3}}{1}\beta\mu^2 + \frac{u^4}{2\cdot 3\cdot 4\,k^2}\cdot\frac{1+\frac{hu}{5}}{1}\beta^2\mu^4 + \dots$$

$$\rho = 1 + \frac{u^2}{2k}\beta\mu^2 + \frac{u^4}{2\cdot 3\cdot 4\,k^2}\beta^2\mu^4 + \frac{u^6}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\,k^3}\beta^3\mu^6 + \frac{u^8}{2\cdot 3\cdots 8\,k^4}\beta^4\mu^8 + \dots$$

$$q = hu + \frac{hu^3}{2\cdot 3\,k}\beta\mu^2 + \frac{hu^5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\beta^2\mu^4 + \frac{hu^7}{2\cdot 3\cdots 7}\beta^3\mu^6 + \dots$$

$$R = \frac{1}{2}\beta\mu u + \frac{1}{2}\cdot\frac{u^2}{2k}\cdot\frac{1+\frac{hu}{3}}{1}\beta^2\mu^3 + \frac{1}{2}\cdot\frac{u^4}{2\cdot 3\cdot 4\,k^2}\cdot\frac{1+\frac{hu}{5}}{1}\beta^3\mu^5 + \frac{1}{2}\cdot\frac{u^6}{2\cdot 3\cdots 6\,k^3}\cdot\frac{1+\frac{hu}{7}}{1}\beta^4\mu^7 + \dots$$

$$S = \frac{u^4}{2\cdot 3\cdot 4\,k^2}\cdot\frac{1+\frac{hu}{5}}{1}\beta\mu + \frac{u^6}{2\cdot 3\cdots 6\,k^3}\cdot\frac{1+\frac{hu}{7}}{1}\beta^2\mu^3 + \dots$$

$$T = \frac{u^6}{2\cdot 3\cdots 6\,k^3}\cdot\frac{1+\frac{hu}{7}}{1}\beta\mu + \dots$$

$$v = \pi\cdot V - \frac{1}{2}R\, t^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}S\, t^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}T\, t^{-\frac{5}{2}} + \dots$$

$$\rho = 1 + \frac{u^2}{2}q^2 + \frac{u^4}{2\cdot 3\cdot 4}q^4 + \frac{u^6}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}q^6 + \dots = \left(e^{+uq} + e^{-uq}\right)\frac{1}{2}, \qquad \frac{\partial\rho}{\partial u} = q\left(e^{uq} - e^{-uq}\right)\frac{1}{2}$$

$$\rho + \frac{\partial\rho}{\partial u} = \pi = \frac{1+q}{2}e^{uq} + \frac{1-q}{2}e^{-uq}$$

$$\pi = \rho + h\frac{\partial\rho}{\partial u}$$

$$q = h\frac{\partial\rho}{\partial u}$$

$$R = \left(\pi - \sqrt{1+hu}\right)\frac{1}{\beta\mu}$$

$$S = \left(\pi - \sqrt{1+hu} - \frac{u^2}{2k}\cdot\frac{1+\frac{hu}{3}}{1}\right)\frac{1}{\beta\mu^3}$$

$$T = \left(\pi - \sqrt{1+hu} - \frac{u^2}{2k}\cdot\frac{1+\frac{hu}{3}}{1} + \frac{u^4}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 4}\cdot\frac{1+\frac{hu}{5}}{1}\beta^2\mu^4\right)\cdot\frac{1}{\beta^2\mu^5}$$

$$\sqrt{\frac{\beta\mu^2}{k}} = q$$

$$e^{x^2}\int_x^\infty dx\, e^{-x^2} = \frac{1}{2x}\left\{1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{3}{(2x^2)^2} - \frac{3\cdot5}{(2x^2)^3} + \frac{3\cdot5\cdot7}{(2x^2)^4} - \frac{3\cdot5\cdot7\cdot9}{(2x^2)^5} + \dots\right\}$$

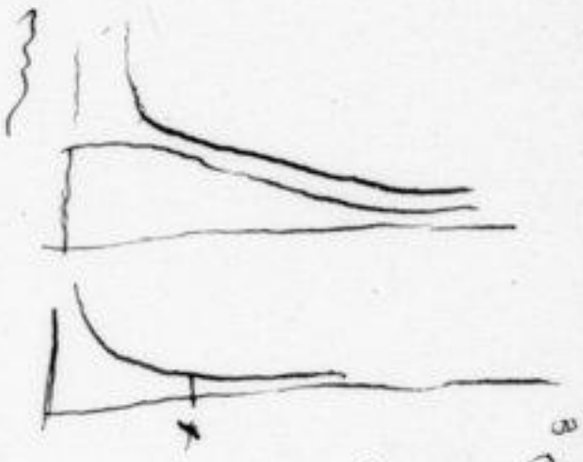
$$e^{x^2}\cdot\frac{1}{2}\int_x^\infty \frac{dx}{x^2}\, e^{-x^2} = \frac{1}{2x}\left\{\frac{1}{2x^2} - \frac{3}{(2x^2)^2} + \frac{3\cdot5}{(2x^2)^3} - \frac{3\cdot5\cdot7}{(2x^2)^4} + \frac{3\cdot5\cdot7\cdot9}{(2x^2)^5} - \dots\right\}$$

$$e^{x^2}\cdot\frac{3}{2^2}\int_x^\infty \frac{dx}{x^4}\, e^{-x^2} = \frac{1}{2x}\left\{\frac{3}{(2x^2)^2} - \frac{3\cdot5}{(2x^2)^3} + \frac{3\cdot5\cdot7}{(2x^2)^4} - \frac{3\cdot5\cdot7\cdot9}{(2x^2)^5} + \dots\right\}$$

$$e^{x^2}\cdot\frac{3\cdot5}{2^3}\int_x^\infty \frac{dx}{x^5}\, e^{-x^2} = \frac{1}{2x}\left\{\frac{3\cdot5}{(2x^2)^3} - \frac{3\cdot5\cdot7}{(2x^2)^4} + \frac{3\cdot5\cdot7\cdot9}{(2x^2)^5} - \dots\right\}$$

$$e^{x^2}\cdot\frac{3\cdot5\cdot7}{2^4}\int_x^\infty \frac{dx}{x^6}\, e^{-x^2} = \frac{1}{2x}\left\{\frac{3\cdot5\cdot7}{(2x^2)^4} - \frac{3\cdot5\cdot7\cdot9}{(2x^2)^5} + \dots\right\}$$

$$e^{x^2}\cdot\frac{3\cdot5\cdot7\cdot9}{2^5}\int_x^\infty \frac{dx}{x^6}\, e^{-x^2} = \frac{1}{2x}\left\{\frac{3\cdot5\cdot7\cdot9}{(2x^2)^5} - \dots\right\}$$



$$e^{x^2}\cdot\frac{3\cdot5\cdot7\cdot9}{2^5}\left|-\frac{e^{-x^2}}{x^7}\cdot\frac{1}{7} + C\right| \qquad \frac{e^{x^2}}{2^5}\cdot\frac{3\cdot5\cdot7\cdot9}{7}\cdot\frac{e^{-x^2}}{x^7}$$

$$\frac{3\cdot5\cdot7\cdot9}{2^5\cdot7}\cdot\frac{1}{x^7} \qquad \frac{u^8}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot9\cdot7\cdot8\cdot9\,m^9}$$

$$\frac{1+\frac{9u}{10}}{2^5}\,e^{x^2}\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9\int_x^\infty dx\,\frac{e^{-x^2}}{x^6}$$

$$\frac{u^4}{2\cdot4\cdot6\cdot8\,m^5} \qquad \frac{1+\frac{9u}{10}}{2^4}\,e^{x^2}\int_x^\infty dx\,\frac{e^{-x^2}}{x^8}$$

$$m = \frac{K}{C\cdot D} \qquad \frac{1}{2\cdot10^2}\left|\begin{matrix} m = \frac{1}{1000} \end{matrix}\right. \qquad \frac{u^8}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot m^9}\,\frac{1+\frac{9u}{10}}{2^5}\,\frac{1}{7x^7}$$

$$\mu = \frac{1}{H}\sqrt{KCD} \qquad \frac{u^2}{200}\,\frac{1+\frac{9u}{3}}{2}\,\frac{1}{x}\,\sqrt{\frac{1}{1000}}$$

$$\frac{1}{x^2} = \frac{KC\cdot D}{H^2 t} \qquad \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{200}} \qquad \frac{1000u^2}{2}\,\frac{1+\frac{9u}{3}}{2}\,\frac{1}{\sqrt{200}} \qquad \frac{1000u^2}{30}\,\frac{1}{33u^2}$$

$$x = \frac{H\sqrt{t}}{\sqrt{KC\cdot D}} \qquad \mu^2 = \frac{KCD}{H^2} \qquad \frac{u^2}{2\cdot10^2}\,\frac{1+\frac{9u}{3}}{2}\,\frac{1}{\sqrt{200}}\,\frac{H^2}{KC\cdot D}$$

$$\frac{u^2}{2\cdot10^2}\,\frac{1+\frac{9u}{3}}{2}\,\frac{1}{\sqrt{200}}\,\frac{H^2}{K}\,\frac{1000}{140}$$

$$\frac{u^2}{14\cdot22\frac{1}{2}}\,\frac{9u^4}{3159}\,\frac{6}{21}\,\frac{3}{7}$$

$$g = \frac{H}{K} \qquad \frac{u}{70}\left\{\begin{matrix}\frac{210}{70}\\ 3\end{matrix}\right. \qquad \frac{u^2}{4}\,\frac{1}{2x^2}\,\angle\frac{1}{4} \qquad \frac{1}{3}\,\frac{2}{3}\,\frac{2}{15}$$

$$\frac{1}{x}\,\angle\frac{1}{200} \qquad \frac{u^2}{4\cdot(200)^2} = \frac{u^2}{160000}$$

$$\frac{u^2}{x^2}\,\frac{H^2}{KC\cdot D}\,\frac{1}{5^2}\,\frac{2}{3\cdot16\frac{2}{3}}\,\frac{1}{60\cdot24\cdot365\frac{1}{4}}$$

$$\frac{75000}{60\cdot24\cdot365\frac{1}{4}}\,\frac{1}{25000}$$

$$\frac{u^2}{x^2}\,\angle\frac{1}{2000} \qquad \frac{1}{x^2} = \frac{1}{200}$$

$$\frac{u^2}{200}\,\angle\frac{1}{100}$$

$$u^2\angle2 \qquad u^2\angle8$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{2000}}$$

$$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{200}$$

$$u\angle\frac{30x}{60} \qquad -\frac{x^3}{3}+C \qquad \frac{1}{3x^3}$$

$$u\angle\frac{60}{x^3} \qquad e^{x^2}\,\frac{u^2}{4}\,\frac{1}{3}\,\frac{1}{x^3}$$

$$u^3\angle\frac{45000}{20000} \qquad \frac{u^2}{4}\,\frac{1}{30}\,\frac{1}{x^2} \qquad \frac{u^2}{4\cdot30\cdot200}\,\angle\frac{1}{9}$$

$$u^2\angle\frac{200\cdot200}{9} \qquad u\angle\frac{200}{60}$$

$$\frac{u^2}{4}\,\frac{1}{x^2} \qquad \frac{u^3}{300\cdot200}\,\angle\frac{1}{3\cdot200}$$

$$\frac{gu^3}{12}\,\frac{1}{200^2}\,\angle\frac{1}{9} \qquad \frac{u^3}{504}$$

$$\frac{1}{3}\,\frac{1}{9}\,\frac{2}{15}\,\frac{1}{7}$$

$$\frac{C\cdot D}{Kt}\left\{\begin{matrix}\frac{1}{m}\\ \frac{11}{K}\end{matrix}\right. \qquad t > m\cdot\frac{C\cdot D}{K} \qquad t > 1000\cdot m$$

$$60\cdot24\cdot365\,T > \frac{1000\cdot m}{t} \qquad T > \frac{1000\cdot1000}{60\cdot24\cdot365}$$

$$t > \frac{1}{4}\cdot\frac{1000^2}{2000} \qquad T > \frac{10000}{2000}$$

$$T > 3000\text{ Jahre}$$

$$T > \frac{1000\cdot1000}{1440\cdot365}$$

$$\frac{2}{9}\cdot3\quad\text{Tage}$$

soit $\mu = \frac{1}{H}\sqrt{KCD}$

$V\sqrt{t} = W$

la température $V_{x=0}$ de la surface est donnée par l'expression suivante

$$V_{x=0} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{H}\frac{\sqrt{KCD}}{\sqrt{t}} \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\frac{KCD}{H^2 t} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\left(\frac{KCD}{H^2 t}\right)^2 - \text{etc} \right\}$$ (voir page A)

on trouve $W = \mu t^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\mu^3 t^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\mu^5 t^{-\frac{5}{2}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\mu^7 t^{-\frac{7}{2}} + \text{etc}$

Le problème de la température variable à une profondeur quelconque est résolu par l'expression

$$v = \frac{2}{\pi} H \int_0^\infty \frac{dq}{1+\frac{K^2}{H^2}q^2} \left(\frac{K}{H}\cos qu + \frac{1}{q}\sin qu \right) e^{-q^2 \frac{K}{CD} t}$$ (voir page 12 A)

$\frac{K}{CD} = m$ ... K

$\frac{H}{K} = g$ ... h

q ..... r

$$\mu^2 = \frac{1}{H^2} KCD$$

ou $v = \frac{2}{\pi} g \int_0^\infty \frac{dq}{g^2+q^2} \left(\cos qu + \frac{H}{K}\cdot\frac{1}{q}\sin qu \right) e^{-q^2 mt}$

$$v = \frac{2}{\pi} h \int_0^\infty \frac{dr}{h^2+r^2} e^{-r^2 kt} \left\{ \cos ru + \frac{h}{r}\sin ru \right\}$$ (voir page B ##)

$m = \frac{K}{CD}$

$$v = \frac{2}{\pi} h \int_0^\infty \frac{dr}{h^2+r^2} e^{-r^2 kt} \left\{ \sqrt{1+hu} - \frac{u^2}{2}\sqrt{1+\frac{hu}{3}}\, r^2 + \frac{u^4}{2\cdot3\cdot4}\sqrt{1+\frac{hu}{5}}\, r^4 - \frac{u^6}{2\cdot3\cdot4\cdot6}\sqrt{1+\frac{hu}{7}}\, r^6 + \text{etc} \right\}$$

$m\mu^2 = \frac{K^2}{H^2}$

$$V_{x=0} = \frac{1}{\pi} h \int_0^\infty \frac{dr}{h^2+r^2} e^{-r^2 kt}$$

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{2}{\pi} hk \int_0^\infty \frac{dr}{h^2+r^2} r^2 e^{-r^2 kt}$$

$$\frac{d^2V}{dt^2} = \frac{2}{\pi} hk^2 \int_0^\infty \frac{dr}{h^2+r^2} r^4$$

$$\frac{d^3V}{dt^3} = \frac{2}{\pi} hk^3 \int_0^\infty \frac{dr}{h^2+r^2} r^6$$

etc.

$u = \frac{x}{H}$

$$v = \sqrt{1+5u}\, V + \frac{u^2}{2}\frac{11}{K}\sqrt{\frac{1+5u}{3}}\frac{dV}{dt} + \frac{u^4}{2\cdot3\cdot4}\sqrt{\frac{1+5u}{5}}\frac{1}{K^2}\frac{d^2V}{dt^2} + \frac{u^6}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot5}\sqrt{\frac{1+5u}{7}}\frac{1}{K^3}\frac{d^3V}{dt^3} + \text{etc}$$

$$v = \sqrt{1+5u}\, V + \frac{u^2}{2}\sqrt{\frac{1+5u}{3}}\frac{1}{mt}\frac{dV}{dt} + \frac{u^4}{2\cdot3\cdot4}\sqrt{\frac{1+5u}{5}}\frac{1}{m^2 t^2}\frac{d^2V}{dt^2} + \text{etc}$$

$$W = \mu t^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\mu^3 t^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\mu^5 t^{-\frac{5}{2}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\mu^7 t^{-\frac{7}{2}} + \text{etc}$$ $\Big| V\sqrt{t} = W$

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{1}{2}\mu t^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\mu^3 t^{-\frac{5}{2}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\mu^5 t^{-\frac{7}{2}} + \text{etc}$$

$$\frac{d^2W}{dt^2} = \frac{1}{2}\frac{3}{2}\mu t^{-\frac{5}{2}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\mu^3 t^{-\frac{7}{2}} + \text{etc}$$

$= \left(W - \mu t^{-\frac{1}{2}}\right)\frac{1}{\mu^2}$

$= \left(W - \mu t^{-\frac{1}{2}} + \mu^3 t^{-\frac{3}{2}}\right)\frac{1}{\mu^4}$

etc

ainsi $v\sqrt{t} = \sqrt{1+5u}\, W + \frac{u^2}{2}\sqrt{\frac{1+5u}{3}}\frac{1}{m}\frac{1}{\mu^2}\left(W - \mu t^{-\frac{1}{2}}\right) + \frac{u^4}{2\cdot3\cdot4}\sqrt{\frac{1+5u}{5}}\frac{1}{m^2}\frac{1}{\mu^4}\left(W - \mu t^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\mu^3 t^{-\frac{3}{2}}\right) + \text{etc}$

$$v\sqrt{t} = \sqrt{1+5u}\left\{ \mu t^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\mu^3 t^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\mu^5 t^{-\frac{5}{2}} - \text{etc} \right\}$$

$$+ \frac{u^2}{2}\sqrt{\frac{1+5u}{3}}\frac{H^2}{K^2}\left\{ \frac{1}{2}\mu^3 t^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\mu^5 t^{-\frac{5}{2}} + \text{etc} \right\}$$

$$+ \frac{u^4}{2\cdot3\cdot4}\sqrt{\frac{1+5u}{5}}\left(\frac{H}{K}\right)^4\left\{ \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\mu^5 t^{-\frac{5}{2}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\mu^7 t^{-\frac{7}{2}} + \text{etc} \right\}$$

I

A

Soit Π la valeur de la série $\Pi_0 t^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\mu^3 t^{-\frac{3}{2}} + \alpha$

Π_1 la valeur de 1re série c'est-à-dire la somme de la série moins le premier terme

Π_2 le second reste c'est-à-dire la somme de la série moins les deux premiers termes

Π_3 le 3me reste c'est-à-dire la série moins les trois premiers termes

ce que nous désignerons ainsi

$$W = \frac{1}{H}\sqrt{\frac{K}{\rho}}\, t^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{H}\sqrt{\frac{K}{\rho}}\right)^3 t^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}\,\frac{3}{2}\left(\frac{1}{H}\sqrt{\frac{K}{\rho}}\right)^5 t^{-\frac{5}{2}} - \alpha$$

$\Pi_0 \qquad \Pi_1 \qquad \Pi_2 \qquad \alpha$

ou $v\sqrt{w} = \sqrt{1+gu}\,\Pi_0 + \frac{H\mu^2}{2}\sqrt{1+\frac{gu}{3}}\,\Pi_1 + \frac{H^4\mu^4}{2\cdot 3\cdot 4}\sqrt{1+\frac{gu}{5}}\,\Pi_2 + \alpha$

ou encore

quelle que soit la vitesse initiale il arrivera que le tems viendra dans lequel cette vitesse sera devenue égale à celle qui répond au frottement d'un mètre ensuite il faudra que le tems augmente d'une autre quantité pour que la vitesse diminue de la quantité dont elle doit

$m = 400$

$\frac{4000 \cdot 1000}{4.60.24.365}$

$\frac{24}{1460}$

$\frac{730}{5760}$

$\frac{1000}{60}$ $\frac{100}{476}$

$\frac{100}{6} \cdot \frac{100}{476}$

$\frac{400 \cdot 1000}{4.60.24.365}$

$\frac{400}{240}$ $\frac{1000}{4756}$

$\frac{3}{5} \cdot \frac{25}{219}$

$\frac{125}{657}$ $\frac{657}{625}$ $\frac{125}{3}$

varier à la température suivante. on demande combien il a du s'écouler d'années pour que la vitesse diminue d'abord d'une première fraction de la profondeur étant 1 mètre et la vitesse ayant lieu parce que le frottement du second terme au 1er est $\frac{1}{m}$ le nombre m est le plus grand connu 100 400 m 1000 pour que l'on ait cette condition $\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{CD}{Kt} < \frac{1}{m}$ on demande $\frac{CD}{Kt} \cdot \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{m}$

ou $t = 4m \cdot \frac{CD}{K}$ on a pour le fer $CD = 1626$, $K = \frac{3}{2}$ donc $\frac{CD}{K}$ différent de 1000 donc t compté en minutes $= \frac{1000 \cdot m}{4}$ et le tems T compté en années est $\frac{1000 \cdot m}{4.60.24.365}$ on en conclud qu'après $\frac{1}{3}$ d'année environ la température à une profondeur de 100 mètres différera $\frac{1}{3}$ d'année pour la quelle celle de 400 à cette même profondeur ne diffère que de 100 ainsi après 2000 ans la température à cette profondeur de 400 mètres sera la même que celle qui existe à la surface $\frac{1}{3}$ à cent mètres de profondeur

De profondeur est sensiblement exprimée par le 2e terme de la série l'état final est représenté par cette formule $v\sqrt{\pi} = \frac{1}{1+gu}\int_{\frac{x^2}{\sqrt{KCD}}}^{\infty} dx e^{-x^2}$ et mettant pour g sa valeur $\frac{H}{K}$ on a

$$v = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(1 + \frac{H}{K}u\right)\int_{\frac{H\sqrt{t}}{\sqrt{KCD}}}^{\infty} dx e^{-x^2}$$

ou on voit qu'à peu près partout on connaît la valeur de l'intégrale est exprimée par un seul terme (vrai pour g) on a donc pour l'état final.

$v = \frac{1}{H\sqrt{\pi}}\left(1 + \frac{H}{K}u\right)\frac{\sqrt{KCD}}{\sqrt{t}}$ ou $v = \frac{\sqrt{KCD}}{H\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}}\left(1 + \frac{H}{K}u\right)$ c'est donc une loi très simple que la température augmente avec la profondeur et diminue avec le tems.

la valeur de $\frac{dv}{dx}$ est $\frac{H}{K}\frac{\sqrt{K \cdot C \cdot D}}{H\sqrt{\pi}\sqrt{t}} = \sqrt{\frac{CD}{\pi x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}}$ l'accroissement de température selon la profondeur diminue en raison inverse de la racine quarrée des tems.

la valeur de la température de la surface est $\frac{\sqrt{K \cdot C \cdot D}}{H\sqrt{\pi}\sqrt{t}}$ de sorte que $\frac{dv}{du}$ à la température de la surface est toujours $\frac{H}{K}$ on peut connaître par l'expérience la valeur de H et celle de K et l'on connaîtra par là la valeur de l'accroissement $\frac{dv}{du}$ ainsi on peut déterminer par cette théorie la température de la surface.

Ter
d'un
ter
plan
prin
une
dita
de la

Températures d'un solide infini terminé par un plan échauffé primitivement à une certaine distance au dessous de la surface

le solide ci finissant profondément terminé par un plan. les températures initiales de ce solide sont exprimées par $v = a + bx$ en désignant par x la profondeur et par v la température initiale à cette profondeur a et b sont des constantes qui diffèrent peu respectivement de $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{2}$. cette relation $v = a + bx$ subsiste seulement depuis $x = 0$ jusqu'à $x = n$. à une profondeur quelconque plus grande que n la température initiale est nulle.

le solide étant dans cet état, on suppose tout à coup et pour toujours la surface à la température nulle zero. il s'agit de déterminer l'état variable du solide.

cette question est la même que celle ci.



un prisme solide est indéfiniment prolongé à droite et à gauche de l'origine 0. les températures initiales sont à droite de l'origine $a + bx$ de $x = 0$ à $x = n$ et à gauche de l'origine 0 cette température initiale est $-(a + bx)$ de $x = 0$ à $x = -n$. le solide ne perd de la chaleur que par la surface convexe. il faut déterminer l'état variable du prisme

on arrive à cette question au moyen de l'équation $v = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\omega}^{+\omega} dq\, e^{-q^2} f(x + 2q\sqrt{kt})$

la fonction $f\alpha$ est celle qui détermine l'état initial c'est à dire la température initiale du point dont la distance à l'origine est α.

on décrit la courbe dont l'abscisse est q et l'ordonnée e^{-q^2}. ensuite cherchant $\alpha = 0$ on a $x + 2q\sqrt{kt} = 0$ ou $q = \frac{-x}{2\sqrt{kt}} = -x'$ on porte x' de 0 en x' à gauche

de l'origine on trace une ligne discontinue qui coupe l'axe au point x' et qui a deux branches symétriques l'une supérieure l'autre inférieure elle s'étend de $\alpha = 0$ jusqu'à $\alpha = n$ c'est à dire de $q = \frac{-x}{2\sqrt{kt}}$ jusqu'à $q = \frac{n - x}{2\sqrt{kt}}$ il faut tracer une ligne parallèle aux x' et $n' - x'$ la ordonnée de la ligne discontinue sont celle de la ligne qui exprime l'état initial et qui répond de $\alpha = 0$ à $\alpha = n$ ainsi l'ordonnée de la ligne tracée au dessus de l'axe des abscisses q est $\frac{a + bn}{n}(x + 2q\sqrt{kt})$ et celle de la branche tracée au dessous est $-\left(\frac{a + bn}{n}\right)(x + 2q\sqrt{kt})$. ayant tracé cette ligne il faut multiplier ordonnées par ordonnées et prendre l'intégrale totale cette intégrale est une fonction de x et t qui donne la valeur de $v\sqrt{\omega}$

on voit par exemple que si x est 0 la ligne est placée à l'origine et que la valeur v est toujours nulle quelque soit t. car elle est partout de même que les ordonnées de la ligne discontinue sont nulles sur des limites indéfinies et l'intervalle qui répond à l'une des branches de la ligne est n ou $\frac{n}{\sqrt{kt}}$ et l'intervalle qui répond à l'autre branche est aussi $\frac{n}{\sqrt{kt}}$ si donc $t = 0$ cet intervalle est infini en même temps que x' donc la distance à l'origine est $\frac{x}{2\sqrt{kt}}$ et infiniment reculé vers la gauche

de sorte que l'intégrale totale est $\sqrt{\omega}$ donc la température initiale est 0 quelque soit x ce qui est l'hypothèse.

Si t est infini la distance ox' est infiniment petite et la valeur totale de l'intégrale est nulle quelque soit x.

il faut maintenant trouver la valeur générale de v qui est exprimée par

$$v\sqrt{\omega} = \int_{-x'}^{2x'+n'} dq\, e^{-q^2} \frac{a + bn}{n}(x + 2q\sqrt{kt}) - \int_{-x'-n'}^{-x'} dq\, e^{-q^2} \frac{a + bn}{n}(x + 2q\sqrt{kt})$$

$$2\ \text{ou}\ v\sqrt{\varpi} = \frac{a+bu}{n}\left(\int_0^{x'} dq\, e^{-q^2}(x+\eta q\sqrt{Kt}) + \int_0^{n'-x'} dq\, e^{-q^2}(x+\eta q\sqrt{Kt})\right)$$

$$-\left(\frac{a+bu}{n}\right)\left(\int_0^{n'+x'} - \int_0^{x'}\right) dq\, e^{-q^2}(x+\eta q\sqrt{Kt}) \quad \text{ou}$$

$$v\sqrt{\varpi} = \frac{a+bu}{n}\left(\int_a^{z'} + \int_a^{n'-z'} - \int_0^{n'+x'} + \int_0^{x'}\right) dq\, e^{-q^2}(x+\eta q\sqrt{Kt})$$

$$= \frac{a+bu}{n}\left(2\int_0^{x'} - \int_{n'-x'}^{n'+x'}\right) dq\, e^{-q^2}(x+\eta q\sqrt{Kt})$$ il ne s'agit plus que d'effectuer

les integrations. on a $x' = \frac{x}{2\sqrt{Kt}}$ $n' = \frac{n}{2\sqrt{Kt}}$ on suppose que la limite est très grande

---

l'integrale $\int_0^{x'} dq\, e^{-q^2}$ sera évaluée très exactement par les premiers termes de la série

par cela que la limite x' ou $\frac{x}{2\sqrt{Kt}}$ sera très petit tant que l'on considère d'abord très

grand on a vu dans une des leçons précédentes que l'erreur écrite est $32\,\frac{a^n}{b^n}$ et si $x=$

30 marbres la valeur de l'integrale est donnée exactement par le premier terme

quant à l'integrale $\int_0^{\mu} dq\, e^{-q^2}$ la limite μ étant un grand nombre elle ne peut descendre

que par une autre leçon mais on voit que si n est très grand l'integrale $\int_{n'-x'}^{n'+x'} dq\, e^{-q^2}$ est

une quantité extrêmement petite:

quant à l'integrale $\int_0^{q} dq\, e^{-q^2}\cdot 2q$ elle est $1-e^{-q^2}$ on a donc

$\int_0^{n'+x'} dq\, e^{-q^2}\cdot 2q = 1-e^{-(n'+x')^2}$ et $\int_0^{n'-x'} dq\, e^{-q^2}\cdot 2q = 1-e^{-(n'-x')^2}$ donc

$\int_{n'-x'}^{n'+x'} dq\, e^{-q^2} = e^{-(n'-x')^2} - e^{-(n'+x')^2} = e^{-n'^2+2n'x'-x'^2} - e^{-n'^2-2n'x'-x'^2}$

$= e^{-n'^2-x'^2}\left(e^{2n'x'} - e^{-2n'x'}\right)$: on a donc pour la partie de la valeur de $v\sqrt{\varpi}$

qui ne contient pas x $\left(\frac{a+bu}{n}\right)\sqrt{Kt}\left\{2(1-e^{-x'^2}) - e^{-n'^2-x'^2}\left(e^{2n'x'} - e^{-2n'x'}\right)\right\}$

ou $\frac{a+bu}{n}\sqrt{Kt}\left\{2-2e^{-x'^2} - \left(e^{-(n'-x')^2} - e^{-(n'+x')^2}\right)\right\}$

et la partie de $v\sqrt{\varpi}$ qui contient x est $\frac{a+bu}{n}x\cdot\left(2\int_0^{x'} dq\, e^{-q^2} - \int_0^{n'+x'} dq\, e^{-q^2} + \int_0^{n'-x'} dq\, e^{-q^2}\right)$

---

ou a $\int_T^{\infty} dq\, e^{-q^2} = \frac{e^{-T^2}}{2T}\left(1 - \frac{1}{2T^2} + \frac{1\cdot 3}{2^2T^4} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3T^6} + \cdots\right)$

$\int_{T'}^{\infty} dq\, e^{-q^2} = \frac{e^{-T_1'^2}}{2T_1'}\left(1 - \frac{1}{2T_1'^2} + \alpha\right)$ si la limite T' est très grande

on aura très exactement la valeur de chaque integrale en prenant le premier terme

Donc $\int_T^{T'} = \frac{e^{-T^2}}{2T} - \frac{e^{-T_1'^2}}{2T'} = \frac{e^{-(\mu-\nu)^2}}{2(\mu-\nu)} - \frac{e^{-(\mu+\nu)^2}}{2(\mu+\nu)}$ ce sont ces formules qui doivent

être appliquées au calcul de l'integrale $\int_{n'-x'}^{n'+x'} dq\, e^{-q^2}$

3 le calcul précédent suppose que x' est une petite quantité et que u' est une grande quantité. ainsi $\frac{1}{2\sqrt{\pi}}$ devient en effet l'integrale $\int_0^r dr e^{-r^2} = r - \frac{1}{3}r^3 + 2$

et on peut la réduire à r si $\frac{r^2}{3}$ est une petite fraction w

l'integrale $\int_T^\omega dq\, e^{-q^2} = \frac{e^{-T^2}}{2T}\left(1 - \frac{1}{2T^2} + 2\right)$ que l'on peut réduire à $\frac{e^{-T^2}}{2T}$

si $\frac{1}{2T^2}$ est une petite fraction w. de les limites des integrales pris ci dessus

sont prises l'une x' et prises les autres $u' - x'$ et $u' + x'$ supposons

donc $r = \frac{x}{2\sqrt{Kt}} = x'$ et supposant x' tout $T' = \frac{u}{2\sqrt{Kt}} = u'$ donc

$\frac{r^2}{3}$ ou $\frac{x^2}{3.4.Kt}$ doit être une petite fraction $\frac{1}{g}$ et $\frac{1}{2T^2}$ ou $\frac{2Kt}{u^2}$ doit

être une petite fraction $\frac{1}{h}$ il faut donc que l'on ait $\frac{x^2}{3.4Kt} < \frac{1}{g}$

et $\frac{2Kt}{u^2} < \frac{1}{h}$ donc $t > \frac{g.x^2}{3.4.K}$ et $t < \frac{u^2}{2Kh}$ il faut écrire

$\frac{K}{C.D}$ au lieu de K donc $t > \frac{g x^2 . C.D}{3.4.K}$ et $t < \frac{u^2.C.D}{2K.h}$ or $\frac{CD}{K}$ est en jours

1083 et si l'on compte le Temps en années il faut que l'on ait

$t^{ans}.60.24.365 > \frac{g x^2.C.D}{3.4K}$ et $t^{ans}.60.24.365 < \frac{u^2.C.D}{2Kh}$

et $t < \frac{u^2.1083}{2h.525600}$

ou $t^{ans} > \frac{g.x^2.1083}{3.4.525600}$

$f(h + 2q\sqrt{t}) \;\Big|\; fx + 2q\sqrt{t}\, f'x + \frac{1}{2}(2q\sqrt{t})^2 f''x + \frac{1}{2.3}(2q\sqrt{t})^3 f'''x +$

$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int dq_2 e^{-q_2^2} \int dq e^{-q_1^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int dp\, e^{-p^2}$

$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int dq_2 e^{-q_2^2} \int dq_1 e^{-q_1^2} \left(2q_1\sqrt{t_1} + 2q_2\sqrt{t_2}\right)$

$(2p\sqrt{t_1} + 2q\sqrt{t_2})^2$

$4p^2 t_1 + 4pq\, t_1 t_2 + 4q^2 t_2$

$4ht_1 + 4gt_2$

$4ght_1 + 4ght_2$

On propose d'appliquer la solution de la question précédente au mouvement de la chaleur dans une sphère ou globe ainsi échauffé, de sorte que jusqu'à une certaine distance b du centre, le reste du globe ayant la température 0. on suppose le rayon total de la sphère extrêmement grand.

On emploiera la formule de la page 230 théorie de la chaleur.

$$\int_0^r dx \cdot x h \cdot \sin nx = \frac{h}{n^2}\left(\sin(nr) - nr\cos(nr)\right)$$

l'intégrale $\int dx f x \sin nx$ doit être prise de $x=0$ à $x=r$ distance moindre que le rayon total X - on trouve pour la valeur de cette intégrale

$$\int x \sin nx\, dx = c - \frac{x}{n}\cos nx + \frac{1}{n^2}\sin nx$$

$$x\sin nx + \frac{1}{n}\cos nx$$

$$-\frac{1}{n}\cos nx$$

$$\int_0^r = \frac{\sin nr - nr\cos nr}{n^2}$$

on désigne par h la température initiale commune de tous $x=0$ jusqu'à $x=r$.

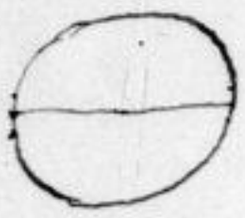
la solution est donc ainsi exprimée

$$\frac{ux}{2} = \sum_{n=1}^{n=\infty} e^{-Kn^2t} \cdot h \cdot \frac{\sin(nr) - nr\cos(nr)}{n^2} \cdot \frac{\sin(nx)}{X} - \frac{1}{2ii}\sin 2nx$$



la valeur de n est donnée par l'équation $\frac{nX}{\tan nX} = 1 - gX$ gradualité

ici le quotient $\frac{H}{K}$ des deux conductibilités et X désigne $\frac{K}{C\cdot D}$. la valeur X étant extrêmement grande, on a très sensiblement $\frac{nX}{\tan nX} = \frac{1}{0}$; ainsi nX est l'arc ϖ, 2ϖ, 3ϖ, ... $i\varpi$, i étant un nombre entier quelconque.



donc donc $n = \frac{i\varpi}{X}$, $nr = i\varpi\cdot\frac{r}{X}$. le terme général de la valeur de $\frac{ux}{2}$ est donc $he^{-\frac{n^2Kt}{CD}}\cdot\left(\sin\left(i\varpi\frac{r}{X}\right) - i\varpi\cdot\frac{r}{X}\cos\left(i\varpi\frac{r}{X}\right)\right)\frac{\sin\left(i\varpi\frac{x}{X}\right)}{n^2X}$.

ou $\dfrac{he^{-\frac{Kt}{C\cdot D}\frac{i^2\varpi^2}{X^2}}}{\frac{i^2\varpi^2}{X^2}\cdot X}\left(\sin\left(i\varpi\cdot\frac{r}{X}\right) - \left(i\varpi\frac{r}{X}\right)\cos\left(i\varpi\frac{r}{X}\right)\right)\sin\left(\frac{i\varpi}{X}x\right)$

ainsi le terme général de la valeur de $\frac{1}{2}u$ est

$$\frac{he^{-\frac{Kt}{C\cdot D}\frac{i^2\varpi^2}{X^2}}}{i\varpi}\left\{\sin\left(i\varpi\cdot\frac{r}{X}\right) - i\varpi\cdot\frac{r}{X}\cos\left(i\varpi\frac{r}{X}\right)\right\}\frac{\sin\left(i\varpi\frac{x}{X}\right)}{i\varpi\frac{x}{X}}$$

---

considérons maintenant le mouvement de la chaleur dans deux sphères différentes supposons que K, C, D, aient les mêmes valeurs pour les deux solides et que $\frac{r}{X}$ soit égale à $\frac{r'}{X'}$ et que de plus $\frac{t}{X^2} = \frac{t'}{X'^2}$ et que la première $\frac{x}{X} = \frac{x'}{X'}$ le terme général sera le même pour les deux solides. ainsi le mouvement de la chaleur est le même pour les points homologues et dans les temps homologues restera tout ainsi semblablement dit que celui des rayons. par ce moyen on connaîtra à des valeurs finies quelconques de t et x dans une sphère d'un rayon donné.

$$\frac{1}{2}v = \frac{\sin\left(\varepsilon\frac{r}{X}\right)\int_0^{\varpi} d\Omega\, f\Omega\cdot\Omega\sin\varepsilon\frac{\Omega}{X}}{x\left(2\varepsilon - \sin 2\varepsilon\right)\frac{X}{2\varepsilon}} = \frac{X}{x}\cdot\frac{2\varepsilon}{2\varepsilon - \sin 2\varepsilon}\sin\left(\varepsilon\frac{x}{X}\right)\int_{\frac{a}{X}=0}^{\frac{x}{X}-1}\left(\frac{\Omega}{X}\right)\left(\frac{a}{X}\right)\sin\varepsilon\frac{a}{X}$$

225.

on peut rendre cette comparaison plus générale, et l'établir quelque soit l'état initial de la sphère. il faut pour cela écrire sous la forme — suivante la solution de la page 330. theo. chal.

l'équation $\frac{\pi X}{\tan \pi X} = 1 - \frac{H}{K} X$ (2) remarquons d'abord pag. 157 theo. chal. que la dimension de H est -2 celle de X est 1 et celle de K est -1 ainsi $\frac{HX}{K}$ est un nombre abstrait pour lui que πX est un certain arc ξ représenté par un nombre

considérons deux sphères différentes. pour la 1ère on a X pour l'une et X' pour l'autre

la conductibilité extérieure est H pour l'une et H' pour l'autre

les coefficients K, C, D sont respectivement les mêmes pour l'une et l'autre sphère.

la fonction $F x$ qui représente l'état initial est une certaine fonction $f\left(\frac{x}{X}\right)$ dans laquelle on a remplacé x par $\frac{x}{X}$

supposons que cette fonction soit la même pour les deux sphères ainsi les états initiaux des deux solides avant le refroidissement sont homologues c'est à dire que les couches homologues ont la même température initiale.

supposons de plus que l'on ait $HX = H'X'$ (3) ensuite que les conductibilités relatives au milieu extérieur soient en raison inverse des rayons X et X'. on voit d'abord que l'arc ξ ou πX sera la même pour les deux solides en vertu de l'équation (2) et de la condition (3)

concevons maintenant que les deux solides dont l'état initial est homologue commencent ensemble le refroidissement et que l'on compte pour le premier le temps t et pour le second le temps t'; je dis que si les temps t et t' sont tels que l'on ait la condition (4) $\frac{t}{X^2} = \frac{t'}{X'^2}$ et

si l'on compare l'état du premier solide après le temps écoulé t à l'état du second solide après le temps écoulé t' on trouvera toujours les deux solides dans des états homologues c'est à dire que la température d'une couche quelconque du premier sera à un moment quelconque la même que la température relative de la couche homologue du second après le temps t'.

en effet la formule générale de la page 330 peut être mise sous la forme différentielle qui rend la comparaison manifeste on écrira en la transformant comme il a été dit dans le mémoire

$$\frac{1}{2} v = \sin\left(\xi \frac{x}{X}\right) \int_0^{\frac{x}{X}} da\, F 2 \cdot a \cdot \sin \xi \frac{a}{X} = \frac{X}{x} \cdot \frac{2\xi}{2\xi - \sin 2\xi} \sin\left(\xi \frac{x}{X}\right) \int_0^{\frac{x}{X}} \frac{da}{X} \cdot f\left(\frac{a}{X}\right) \frac{a}{X} \sin \xi \frac{a}{X}$$

$$x \left(2\xi - \sin 2\xi\right) \frac{X}{8\xi}$$

ou adonc en écrivant l'exponentielle et le bornant au terme général

$$\frac{\frac{x}{x}}{\frac{x}{x}} \cdot \frac{\sin(\xi\frac{x}{x})}{\sin(\xi\frac{x}{x})} \int_{\frac{x}{x}=0}^{\frac{x}{x}=1} \varphi(\tfrac{x}{x})\, f(\tfrac{x}{x}) \sin(\xi\tfrac{x}{x})\, \tfrac{x}{x} \cdot e^{-\frac{K}{C\cdot D} t \cdot \frac{\xi^2}{x^2}}$$

dans l'une et l'autre sphère on a par hypothèse $\frac{t}{x^2} = \frac{t'}{x'^2}$

l'arc ξ est le même les coefficients K C D sont les mêmes et ainsi que l'on comparera les valeurs homologues les valeurs $\frac{x}{x}$ et $\frac{x'}{x'}$ sont les mêmes. Quant aux quantités placées sous le signe d'intégration elles sont aussi les mêmes donc la valeur de v qui répond à $\frac{x}{x}$ et au temps t est la même que la valeur de v qui répond à $\frac{x'}{x'}$ et au temps t'.

ainsi les courbes semblablement situées dans l'une et l'autre sphère conservent des températures égales entre elles qui y sont constamment dans le même rapport. il faut seulement comparer les deux sphères aux temps t et t' qui sont entr'eux dans le rapport des quarrés des dimensions.

---

on peut d'après cela se former une juste idée du mouvement de la chaleur dans une sphère d'une dimension extrêmement grande comparable au globe terrestre.

il faut concevoir un globe dont le rayon ait un million de fois moindre que celui de la terre ainsi le quart de la circonférence soit un mètre. Supposons que l'on veuille connoître l'état initial du globe étant donné quel état moindre il a presque le valeur d'autant d'années mille ans il faudra diviser mille ans par le quarré d'un million et l'on trouvera une durée extrêmement petite. or l'état de la moindre sphère après cette durée extrêmement petite sera exactement égal à l'état du globe après mille ans. cette proposition est vraie quelque soit l'état initial comparé aux deux globes. si l'on réduit l'intervalle de mille années en secondes on trouve 31 53 6000000" qu'il faut diviser par $(1000000)^2$

$60.24.365.1000$
3153600000 "
31536000000

ce qui donne $\frac{31536}{1000000}$ ou $0,031536$ ainsi l'état du globe après mille ans sera rapporté par l'état de la moindre sphère après une durée moindre que la trentième partie d'une seconde or il est évident que dans un intervalle aussi court la sphère ne subit point une diminution de température sensible si ce n'est à l'extérieur sur la surface. et l'on en aura d'autant plus rigoureusement que l'influence de l'intérieur sur le globe terrestre après mille ans ne pourra point être bien sensible qu'est quelque rapport sensible avec la grandeur des rayons

Il n'en est pas de même si l'on suppose dans l'effet de refroidissement à une profondeur le commencement plus petite que la moyenne. Cet effet est très subit et aura pour conséquence de faire l'équateur [illegible] ou tire de la comparaison précédente de la marche égale et du globe une conséquence qui [illegible] la question des températures terrestres.

Si l'état initial du globe était tel qu'une sphère intérieure fut [illegible] échauffée, le reste de la sphère ayant la température zéro [illegible] théorème précédent fait voir que deux hypothèses [illegible] auront encore lieu en sorte que l'effet produit par un globe intérieur dont le rayon sera un triple le nombre $\frac{3}{4}$ du rayon total ne pourra produire d'effet sensible dans l'enveloppe terrestre qu'après qu'il se sera écoulé après un temps immense car l'effet produit après un temps donné dans une sphère solide de quarante milles de circonférence. il faut que les globes aient déterminé l'état variable de l'enveloppe terrestre pendant une certaine masse de siècles comme 60 ou 80 siècles il est absolument impossible d'assigner à l'état de l'intérieur du globe il faut de considérer l'état actuel de l'enveloppe par [illegible] profondeurs alors peut aussi d'abord par supposition que cet état variable soit déterminé nécessairement par l'action des globes célestes qui [illegible] sur lui déterminé immédiatement./.

• on peut démontrer en général que pour un corps [illegible] de forme quelconque deux états semblables qui auraient dans [illegible] initial semblable et qui [illegible] progressivement dans le même milieu conservent [illegible] semblables entre eux — conditions suivantes 1° les temps écoulés soient proportionnels aux carrés des dimensions 2°. les coefficients H qui expriment l'action du milieu ambiant en raison inverse des dimensions.

par exemple si on double les dimensions d'une sphère solide en conservant le coefficient H a la même valeur le refroidissement sera 4 fois plus lent en sorte que ce qui demandait un temps t demandera 4t plus long. l'état de la seconde sphère à un temps quadruple sera le même que l'état de la première sphère à un temps t.

Ce théorème est analytiquement que les équations de l'équilibre [illegible] déduit de ces équations A et B changent. Il [illegible] et devient en effet $\frac{dv}{dt} = t\left(\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2}\right)$ pag. 138

$b = 100$

$\Delta = \frac{1}{30}$

$\frac{CD}{K} = 1083$

$t = \frac{b^2}{\omega^2} 1083 \cdot 900$

$60 \cdot 24 \cdot 365 \frac{\pi}{7} = 6 \cdot \frac{1083}{\omega}$

ans $T = 6^2 \frac{1083 \cdot 900}{60 \cdot 24 \cdot 365}$

$T = 6^2 \frac{1083 \cdot 900 \cdot 113}{60 \cdot 24 \cdot 365 \cdot 355}$

$T = 6^2$ années

$6 = 80^\circ$ ant.

$T = 6400$

et varieront si tadimension en longueur devient double et le tems quadruple ou vient changé.

Donc l'equation B page 141 donne

$$\frac{m}{q}du + \frac{n}{q}du.\frac{dx}{dy} + \frac{p}{q}du.\frac{dz}{dz} + \frac{h}{K}u.dx = 0$$

or m, n, p, q sont de cette nature si dimension si donc on double dans le terme $\frac{h}{K}udx$ la dimension en longueur et si l'on prend la unité du coefficient H l'equation subsistera comme auparavant. cette considération donne le théorème dont il s'agit

---

ce théorème devient encore plus évident si l'on compare à chaque instant les états de deux solides dont l'une a une dimension double ou triple ou quadruple de l'autre.
en effet si l'on decompose les deux corps semblables en élémens semblables et si l'on examine la quantité de chaleur acquise par un élement quelconque dans un certain tems on trouvera que cette chaleur acquise est proportionelle à la masse de l'élément, pour un même tems semblable elle est proportionelle aux quarrés des dimensions. en effet si la dimension est double la surface de l'élement sera quadruple l'action de la force de chaleur intérieure K sera deux fois plus forte toutes choses d'ailleurs égales et la chaleur acquise sera quadruple inverse de l'épaisseur la masse sera huit fois plus grande. or la quantité de chaleur nécessaire pour échauffer également sera deux fois plus grande donc le tems est quatre fois plus grand dans une seconde dimension donc si deux solides semblables dont l'une a une dimension double de l'autre, le premier solide. le même raisonnement est applicable à tous les autres solides et comme on peut d'une infinité de manières décomposer les deux solides semblables.
à l'egard de ceux qui ont trois dimensions inégales il faudra au moins deux dimensions qui soient plus grandes or la surface est 4 fois plus grande et le tems requis est 4 fois plus grand les chaleurs acquises seront donc 16 fois plus grande et elle seront alors que la masse est 64 fois plus grande il faut donc que le coefficient H soit une valeur deux fois plus petite lorsque la dimension est double.

---

lorsque le rayon de la sphere est extrêmement grand comme le rayon terrestre effet on aura que l'effet de refroidissement pendant mille années sur une sphere à une distance donnée augmentera moins que le rayon car cet effet est celui qui auroit lieu pendant une centième de seconde sur une sphere solide d'un rayon de dix pieds environ mais il est évident que il n'aura pas cet effet une terrible produit quand même on réduit à la surface d'une sphere solide d'un rayon immense.
j'ai donné Exposition plus détaillée au n° 1810 page 68 du premier volume
suivante $t = \frac{\delta^2}{\Delta^2}\frac{C.D}{K\Pi}$ qui exprime une relation entre le temps nécessaire initiale C, D, K coefficients spécifiques t temps écoulé et Δ accroissement de température que reçoit de la surface.

$T = \delta^2 \varphi(\nu, \delta)$

Si l'on veut compter le temps en années et si la substance dont il s'agit est telle qu'en année $60 \cdot 24 \cdot 365\frac{1}{4} \cdot T^{année} = \frac{\delta^2}{\Delta^2} \frac{C \cdot D}{K \varpi} = \frac{\delta^2}{\Delta^2} \cdot \frac{1083}{\omega}$

on aura $T = \frac{\delta^2}{\Delta^2} \cdot \frac{1083}{60 \cdot 24 \cdot 365\frac{1}{4}} \cdot \frac{113}{355}$ comme l'accroissement

actuel exprimé en degrés centésimaux est environ $\frac{1}{30}$ d'année

$1083 = 3,0346283$

$113 \ldots 2,0530784$

δ étant exprimé en dixièmes centésimaux: $T = \delta^{2} \frac{1083 \cdot 900 \cdot 113}{60 \cdot 24 \cdot 365\frac{1}{4} \cdot 355}$

$3,0877069$

$2,9542425$

$7,0419494$

δ coefficient de δ^2 ne différera pas de l'unité de son logarithme de 0,6 environ 6000 de nos centésimaux, on aura pour T environ 6400 ans

$1440 \ldots 3,1583625$

$365\frac{1}{4} \ldots 2,5622928$

$355 \ldots 2,5502743$

$8,2714836$

$7,0419494$

$8,2714836$

$0,7704658$

$59 \mid 0,59$

soit $\delta = 80$ centésimaux

ainsi après soixante-neuf siècles, la température primitive aura été réduite à la température de $\frac{1}{4}$ de degré centésimal, résultat que répond une accélération annuelle égale à $\frac{1}{30}$ de degré.

La valeur de K était nécessaire pour déterminer l'accélération de $\frac{1}{4}$ de degré par siècle; elle était nécessaire pour déterminer la température initiale δ et regardant Δ comme donnée par l'observation on a une relation entre le temps écoulé t, δ et Δ. D'une autre côté l'observation donne une relation entre la température initiale δ, le temps écoulé t, la profondeur x et la température U à cette profondeur. Il faut donc pour t trouver en moyen de Δ une expression de δ contenant δ et Δ ainsi pour une profondeur donnée U on aura l'expression de v contenant δ et Δ ainsi pour une même δ pour que Δ et donnés par l'observation.

1083
900
974700
113
29241
9747
9747
$110141 \ldots 1100$
1440
365
720
464
432
325800

Sont $\delta = 10000$ ou centième (ou) centième ou cent pour T dix mille (ou) δ mille ou 60 millions d'années

325600
355
26280
26280
13764
146344.00

$710141 \ldots$

$1863880 \ldots$

$0,5$

pour trouver le nombre d'années qui suivent de l'accident jusque que la température de la surface augmente d'une température de degré à la profondeur d'un mètre il faut prendre les 6 dixièmes du quarré de la température initiale exprimée en degrés centésimaux.

Supplément à la remarque du n° 116 De mémoire sur la chaleur



On a supposé que chaque parallèle conserve à la surface une température constante qui est la même pour chaque point; et que la température de chaque parallèle diroit depuis l'équateur jusqu'au pole. on appelle x la distance d'un point du solide au plan de l'équateur et y la distance de ce point à l'axe p o. v est la température fixe d'une sphère dont les coordonnées sont x et y la fonction v doit satisfaire à l'équation $\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{1}{y}\frac{dv}{dy} = 0$

on peut prendre pour v la valeur particulière $a \cos nx \int e^{ny\cos q} dq$ l'intégrale étant prise depuis $q=0$ jusqu'à $q=\varpi$ si l'on affecte a et n des signes de sorte que i en écrivant a_i et n_i et ayant soin de prendre la valeur de v du signe de sorte que S on aura une valeur générale de v. il reste à déterminer a et n

premièrement pour température 0 celle des points p et o et soit le rayon de la sphère $= r$ on voit que la valeur de v sera toujours nulle au pôle ou $y = 0$ et $x = r$ pourvu que $\cos n_i r = 0$ ou entier $n_i r = (2i+1)\frac{\varpi}{2}$ ou $n = (2i+1)\frac{\varpi}{2r}$

i est successivement 0 1 2 3 &c

si maintenant on désigne par φx la température des points de l'axe il faudra que l'on ait $\varphi x = a\cos\frac{\varpi x}{2r} + b\cos\frac{3\varpi x}{2r} + c\cos\frac{5\varpi x}{2r} + \&c$

ou a en général $\frac{1}{2}\varpi f u = \frac{1}{2}\int f u\,du + \cos u \int f u \cos u\,du + \cos 2u \int f u \cos 2u\,du + \cos 3u \int f u \cos 3u\,du + \&c$

l'intégrale étant prise depuis $u=0$ jusqu'à $u=\varpi$ soit $u = \frac{\varpi x}{2r}$ on aura

$$\frac{1}{2}\varpi f\left(\frac{\varpi x}{r}\right) = \frac{1}{2}\int F\frac{\varpi x}{r}\cdot\frac{\varpi}{2r}dx + \cos\frac{\varpi x}{2r}\int F\left(\frac{\varpi x}{2r}\right)\cos\frac{\varpi x}{2r}\cdot\frac{\varpi}{2r}dx + \&c$$

soit $F\left(\frac{\varpi x}{2r}\right) = \varphi x$ on aura

$$\frac{1}{2}\varpi f x = \frac{1}{2}\int \varphi x\,dx + \cos\frac{\varpi x}{2r}\int \varphi x\cdot\cos\left(\frac{\varpi x}{2r}\right)dx + \cos 2\frac{\varpi x}{2r}\int \varphi x\cos\left(2\frac{\varpi x}{2r}\right)dx + \&c$$



$$r\,\varphi x = \frac{1}{2}\int \varphi(x)\,dx + \cos\frac{\varpi x}{2r}\int \varphi x\cdot\cos\left(\frac{\varpi x}{2r}\right)dx + \cos 2\frac{\varpi x}{2r}\int \varphi x\cos\left(2\frac{\varpi x}{2r}\right)dx + \&c$$

les intégrales doivent être prises depuis $\frac{\varpi x}{2r} = 0$ jusqu'à $\frac{\varpi x}{2r} = \varpi$ ou depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 2r$

il faut maintenant si la courbe mm correspond à la fonction de x depuis c jusqu'au point o' il faut répéter cette même figure au-delà de l'axe depuis o jusqu'en o' par ce moyen les intégrales du 1er du 3ème du 5ème terme n'éprouveront aucune altération de signe et l'on aura

$$r\,\varphi x = \cos\frac{\varpi x}{2r}\int \varphi x\cos\frac{\varpi x}{2r}dx + \cos 3\frac{\varpi x}{2r}\int \varphi x\cos 3\frac{\varpi x}{2r}dx + \cos 5\frac{\varpi x}{2r}\int \varphi x\cos 5\frac{\varpi x}{2r}dx + \&c$$

ou a donc $a_{2i+1} = \frac{1}{r}\int \varphi x\cos(2i+1)\frac{\varpi x}{2r}dx$ on prendra l'intégrale depuis $x=0$ jusqu'à $x = 2r$ on fait successivement $i = 0, 1, 2, 3 \ldots$ &c

la valeur de v enfin donnée par l'équation

$$v = \frac{1}{r}\sum \cos(2i+1)\frac{\varpi x}{2r}\int e^{y\cdot\frac{2i+1}{2r}\varpi\cdot\cos q}dq \cdot \int \varphi x\cos(2i+1)\frac{\varpi x}{2r}dx$$

$$v = \cos\left(\frac{\varpi x}{2r}\right)\int e^{\frac{\varpi y}{2r}\cdot\cos q}dq \int \varphi x\cos\left(\frac{\varpi x}{2r}\right)dx + \cos 3\frac{\varpi x}{2r}\int e^{3\frac{\varpi y}{2r}\cdot\cos q}dq \int \varphi x\cos\left(3\frac{\varpi x}{2r}\right)dx + \&c$$



il faut au lieu de i ecrire 0 1 2 3 &c la premiere integrale est prise depuis $q=0$ jusqu'à $q=\varpi$ la seconde depuis $x=0$ jusqu'à $x=2\pi$ la fonction φx representera l'etat permanent de l'axe du solide cet etat peut etre regardé comme arbitraire et l'ancrage en regard de l'etat de la surface comme arbitraire la fonction φx dépend de cet etat de la surface.

~~Supposons premierement que le rayon de la sphere soit tres grand et en dernier lieu comme infini~~

il est manifeste que l'on peut supposer $r=1$ sans diminuer en rien la generalité de la solution alors x et y sont des fractions · nous supposerons plutot $2r=\varpi$
on aura alors

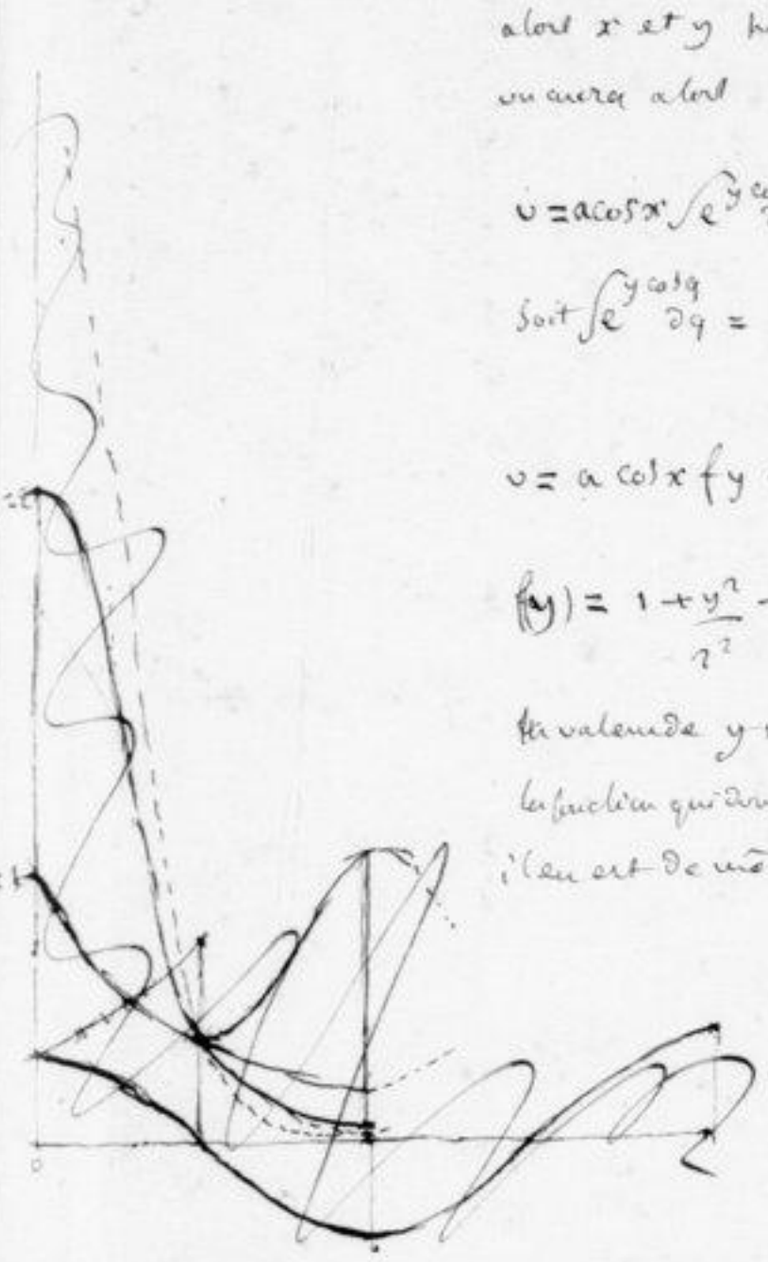
$$v = a\cos x \int e^{y\cos q}\,dq + b\cos 3x \int e^{3y\cos q}\,dq + c\cos 5x \int e^{5y\cos q}\,dq + d\cos 7x \cdot e \int e^{7y\cos q}\,dq.$$

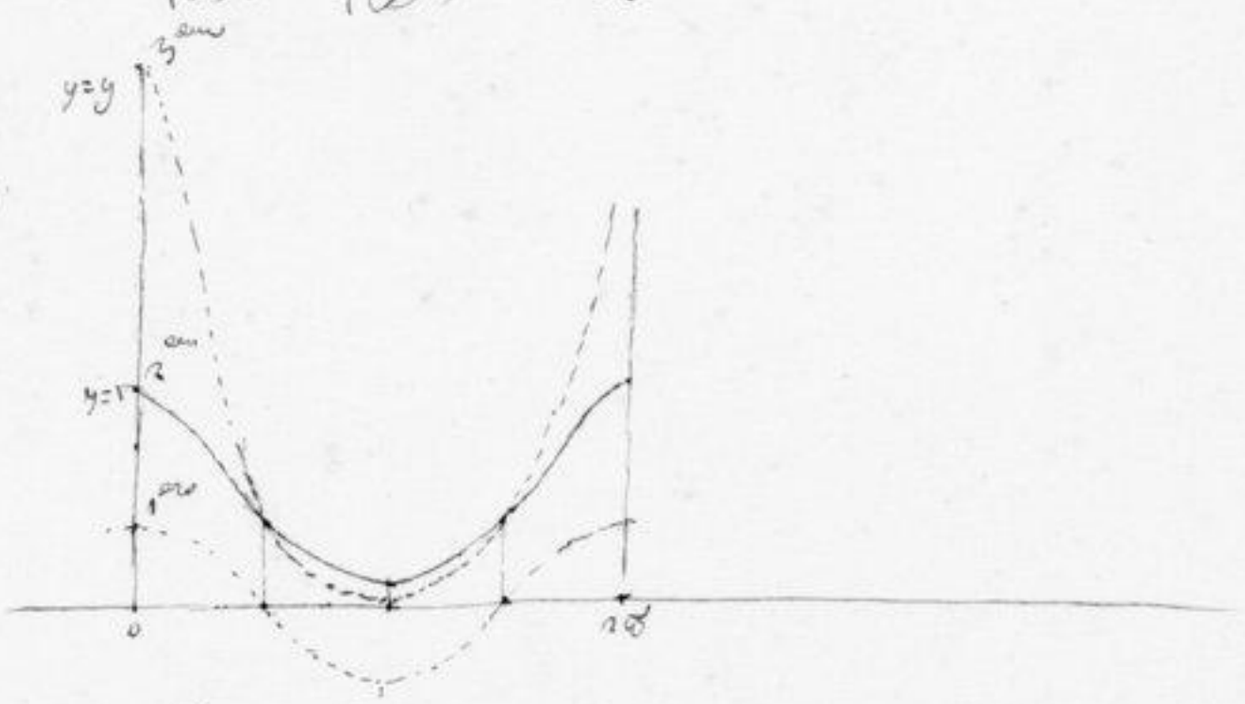
Soit $\int e^{y\cos q}\,dq = fy$ fonction variable comme on sait

$$v = a\cos x\, fy + b\cos 3x\, f(3y) + c\cos 5x\, f(5y) + \text{etc.}$$

$$f(y) = 1 + \frac{y^2}{1^2} + \frac{y^4}{1^2\cdot 4^2} + \frac{y^6}{1^2\cdot 4^2\cdot 6^2} + \text{etc.}$$

la valeur de y ne peut surpasser le rayon $\frac{1}{2}\varpi$
la fonction qui donne fy devient necessairement convergente quelque soit la valeur de y
il en est de même de $f(3y)\ldots f(5y)\ldots$ &c.



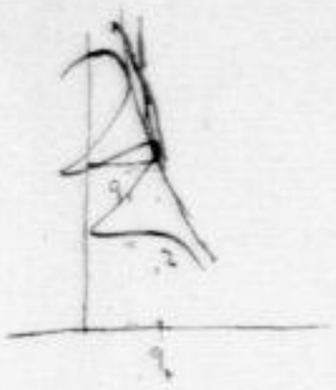


pour construire la fonction $\int e^{y\cos q}\,dq$ l'integrale étant prise de $q=0$ à $q=\varpi$ on la coupera par la 1ère courbe dont l'ordonnée est $\cos q$ puis par celle dont l'ordonnée est $e^{\cos q}$ puis on prendra la portion y des ordonnées de la 2de courbe et l'on aura les ordonnées de la 3ème courbe dont la derniere comprise entre elle et l'axe de $q=0$ à $q=\varpi$ est la valeur cherchée.
soit $z = e^{ny\cos q}$ l'equation de la 3ème courbe q etant l'abscisse et z l'ordonnée
on aura $\frac{dz}{dy} = -ny\sin q\, e^{ny\cos q}$ lorsque $q=0$ ou ϖ · la courbe est parallele à l'axe
lorsque $q=\frac{1}{2}\varpi$ la valeur de $\frac{dz}{dy}$ est $-ny$ de $q=0$ à $q=\frac{1}{2}\varpi$ la tangente $\frac{dz}{dy}$ est negative
ou a $\frac{d^2z}{dq^2} = -n\cos q\, y\, e^{ny\cos q} + n^2y^2\sin q^2 e^{ny\cos q}$. faisant $\frac{d^2z}{dq^2}=0$ on a

$ny\sin q^2 = \cos q = \sqrt{1-\sin q^2}$ ou $n^2y^2\sin q^4 = 1-\sin q^2$ ou $\sin q^4 + \frac{1}{ny^2}\sin q^2 = \frac{1}{n^2y^2}$

ou $\sin q^2 = -\frac{1}{2n^2y^2} \pm \sqrt{\frac{1}{n^2y^2} + \frac{1}{4n^4y^4}}$ par exemple si $ny=1$ on a $\sin q^2 = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$


q
e
q1



Soit $ny = \frac{1}{0}$ on a $\Delta_{nq}^2 = \frac{1}{ny}\left(-\frac{1}{2} + \sqrt{1}\right) = \frac{1}{2ny}$ $\sin q^2 = \frac{1}{ny}$ et $q = \frac{1}{\sqrt{ny}}$

pour cette valeur de q on a $\frac{\partial z}{\partial q} = -\sqrt{ny} \cdot e^{ny \cos q} = -2\sqrt{ny}$

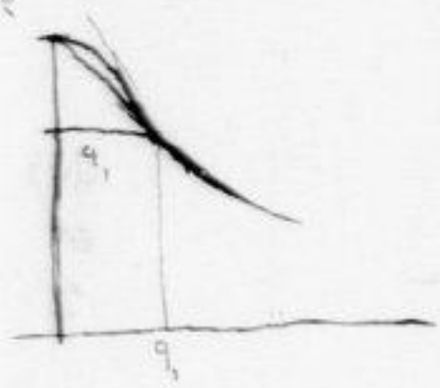
Soit q_1 la valeur de q qui répond au point d'inflexion.

la troisième courbe étant concave à l'origine l'aire du trapèze exprimée par

$\frac{1}{2} q_1 \left(e^{ny} + e^{ny \cos q_1} \right)$ est moindre que l'aire comprise entre la courbe et base



depuis $q = 0$ jusqu'à $q = q_1$



lorsque n est un très grand nombre la valeur de q_1 converge continuellement et à mesure que n augmente vers $\frac{1}{\sqrt{ny}}$ le terme $e^{ny \cos q_1}$ converge continuellement vers $e^{ny\left(1 - \frac{q_1^2}{2} + \ldots\right)}$ ou vers $e^{ny\left(1 - \frac{1}{2}\frac{1}{ny}\right)}$ ou vers $e^{ny - \frac{1}{2}}$ ou vers $e^{ny} \cdot e^{-\frac{1}{2}}$

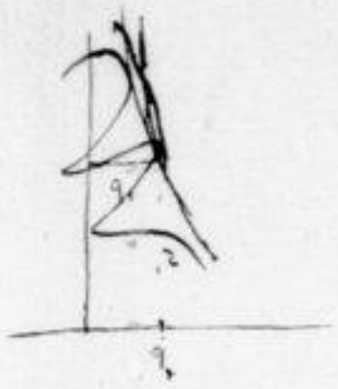
Donc l'aire du trapèze est exprimée par $\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{ny}}\left(e^{ny} + e^{ny} e^{-\frac{1}{2}}\right)$ ou par

$\frac{e^{ny}}{2\sqrt{ny}}\left(1 + e^{-\frac{1}{2}}\right)$. il paroit donc indubitable que la trapèze dont il s'agit peut devenir aussi grand que l'on veut et même que n augmente.

par conséquent l'aire de la courbe devient infinie a fortiori en intégrant depuis de $q = 0$ à $q = q_1$ donc l'aire totale ou la fonction $f(ny)$ devient infinie lorsque n augmente à l'infini.

Dans l'équation qui donne une valeur de Δ il faut bien remarquer que les fonctions fy $f_2 y$ $f_3 y$ ... ont des valeurs infinies qui croissent à l'infini. c'est pour cela que la solution ne peut être considérée comme nulle et qu'elle est seulement susceptible d'une intégration analytique quelconque d'après la théorie.

il faudra donc si l'on veut appliquer cette solution mettre sous une autre forme l'intégrale de l'équation $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1}{y}\frac{\partial v}{\partial y} = 0$



Soit $ny = \frac{1}{0}$ on a $\Delta_{nq}^2 = \frac{1}{ny}\left(-\frac{1}{2} + \sqrt{1}\right) = \frac{1}{2ny}$ $\sin q^2 = \frac{1}{ny}$ et $q = \frac{1}{\sqrt{ny}}$

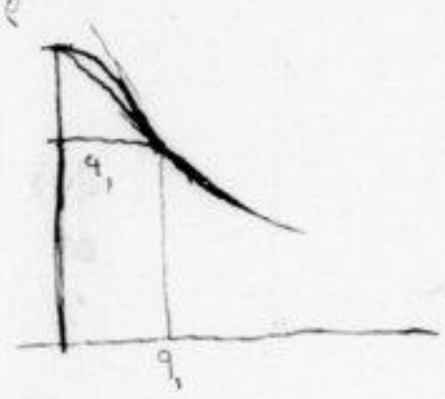
pour cette valeur de q on a $z = \frac{dz}{dq} = -\sqrt{ny} \cdot e^{ny\cos q} = -2\sqrt{ny}$

Soit q_1 la valeur de q qui répond au point d'inflexion.

la troisième courbe étant concave à l'origine l'aire du trapèze exprimée par

$\frac{1}{2} q_1 \left(e^{ny} + e^{ny\cos q_1} \right)$ est moindre que l'aire comprise entre la courbe et l'axe

depuis $q=0$ jusqu'à $q = q_1$



lorsque n est un très grand nombre la valeur de q_1 converge continuellement

et à mesure que n augmente vers $\frac{1}{\sqrt{ny}}$ le terme $e^{ny\cos q_1}$ converge

continuellement vers $e^{ny\left(1 - \frac{q^2}{2} + \ldots\right)}$ ou vers $e^{ny\left(1 - \frac{1}{2}\frac{1}{ny}\right)}$ ou vers $e^{ny} \cdot e^{-\frac{1}{2}}$

Donc l'aire du trapèze est exprimée par $\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{ny}}\left(e^{ny} + e^{ny}e^{-\frac{1}{2}}\right)$ ou par

$\frac{e^{ny}}{2\sqrt{ny}}\left(1 + e^{-\frac{1}{2}}\right)$. il paroit donc indubitable que la trapèze dont il s'agit

peut devenir aussi grand que l'on veut et même que n augmente.

par conséquent l'aire de la courbe devient infinie à fortiori en même temps que de $q=0$ à $q=q_1$ donc l'aire totale ou la fonction $f(ny)$ devient infinie lorsque n augmente à l'infini.

avec dans l'équation qui donne la valeur de Δ il faut bien remarquer que la fonction f_y f_{2y} f_{3y} ... ont des valeurs toujours croissant à l'infini. cela prouve que la solution ne peut être considérée comme stable et qu'elle sert seulement à représenter analytiquement le mouvement de la chaleur.

il faudrait donc si l'on voulait appliquer cette solution mettre sous une autre forme l'intégrale de l'équation $\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{1}{y}\frac{dv}{dy} = v$

1

~~Note~~

233.

Sur le mouvement de la chaleur dans une sphère solide d'un rayon très grand

on suppose qu'une sphère solide ayant été échauffé par une longue immersion dans un milieu ~~égal~~ en a été retirée et placée dans un espace vide que entoure une enceinte maintenue à une température constante. Le problème est à déterminer ~~est~~ variable la température d'un instant quelconque de la sphère pour un instant donné.

x désigne la distance d'une molécule au centre de la sphère

t est le temps écoulé depuis que l'on a placé la sphère dans l'espace vide

v est la température que la molécule située à la distance x contenue après le temps écoulé t.

X est la rayon total de la sphère

k est la conductibilité spécifique de la substance d'une telle solide, est la moi

C la capacité spécifique de cette substance

D la densité.

H la conductibilité de la surface par rapport à l'espace vide

~~de la température quelle~~

~~la température~~

une ingénue de mode de rayonnement tel que toutes points d'une même surface sphérique dont le rayon est x ont acquis une température initiale commune V, cet point continuent pendant toute la durée du refroidissement une température commune v qui de droit à même que le temps augmente.

La température initiale d'une autre surface dont le rayon vaut x' peut différer de celle de la surface dont le rayon est x.

Fx Désigne la température initiale V d'une surface dont le rayon est x

~~arbitraire~~ Quant aux fonctions ~~arbitraire~~ Fx ~~quant~~ comme entièrement arbitraire ~~est~~ dont il ne dépend de rien d'autre que x ~~la fonction Fx est donnée~~ les quantités K, C, D, H étant connues par observation.

v est une fonction inconnue de x et t c'est cette fonction $\varphi(x,t)$ qu'il s'agit de déterminer. elle doit contenir les constantes physiques K, C, D, h, la dimension X, et la fonction arbitraire Fx.

Les équations qui servent à déterminer v sont les suivantes

$$\frac{dv}{dt} = \frac{K}{C\cdot D}\left(\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{dv}{dx}\right) \quad (1) \qquad K\left(\frac{dv}{dx}\right) + H(v) = 0 \quad (2) \qquad V = Fx \quad (3)$$

La première exprime une condition générale qui subsiste dans tout les points du solide et à tout instant elle dérive de l'équation générale du mouvement de la chaleur

La seconde a lieu à la surface, et nous fait connaître que v, valeur de v lorsque $x = X$ est une fonction φ de t, ainsi $(v) = \varphi(X,t)$ et en désignant par $\varphi'(x,t)$ le coefficient différentiel $\frac{d}{dx}\varphi(x,t)$ on a $\left(\frac{dv}{dx}\right) = \varphi'(X,t)$

La troisième équation $V = Fx$ convient à tous les points, nous dit seulement lorsque $t = 0$ ensuite que V représente la fonction $\varphi(x,0)$

+ les unités de mesure sont pour le temps 1 minute pour les longueurs 1 mètre la température 1 est celle de l'ébullition de l'eau sous une pression moyenne.

C est la quantité de chaleur qu'il faut ajouter à une unité de masse d'une certaine substance pour la porter d'une température 0 à la température 1 de l'échelle. cette unité donnée l'unité d'après (un kilogramme)

~~C est la forme exacte~~ l'unité qui mesure les quantités de chaleur est celle qui est un kilogramme de glace.
C est exprimé en unité d'unité.

H est la quantité de chaleur qui fait pendant l'unité de temps l'unité de surface d'un certain corps ~~solide~~ calorifère à la température 1 et porte dans le vide de quatrième une enceinte entourante à la température 0

D est le ~~nombre indéfini~~ pris de l'unité de volume d'une substance

K est la quantité de chaleur qui traverse pendant l'unité de temps une unité de surface dans l'intérieur d'un solide formé par deux plans indéfinis parallèles et distant d'une unité de longueur et limités par des surfaces qui maintiennent la température 1 et l'autre plan étant maintenu à la température 0. on suppose le solide primitivement à l'état final où la température est la même que celle de l'unité de surface et bornée dans le solide par un plan parallèle au plan lui-même.

mais cette dernière est celle qu'il faut employer pour représenter clairement l'état variable dans l'espace. cette intégrale montre différentes lois qui se rétablissent dans cet espace. cette intégrale montre différentes lois que suivent les températures les quantités de chaleur qui traversent la surface extérieure même couche quelconque de chaque enveloppe sphérique. c'est à dire l'expression analytique de ces phénomènes.

température moyenne

à mesure que le tems s'écoule devient plus grand la valeur de v devient de plus en plus simple et après un tems assez grand il ne reste plus que le premier terme de la valeur de v et exprimée par un seul terme.

alors toutes les températures deviennent moins leurs rapports se changent plus. c'est à dire que les températures de deux points quelconques conservent leur rapport constant. toutes les observations confirment pleinement ces résultats.

Si l'échauffement initial est tel que toutes les parties du solide ont reçu une température commune θ l'équation (3) devient $f_2 = b$ on a dans ce cas particulier

$$v = b \sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{2H}{K} X \; \frac{\sin(\xi_i \frac{x}{X})}{\xi_i \frac{x}{X}} \cdot \frac{e^{-\frac{K}{C \cdot D} \xi_i^2 t}}{\frac{\xi_i}{\sin \xi_i} - \omega \xi_i} \qquad (b)$$

la valeur de ξ_i est une des racines de l'équation

$$\frac{\xi_i}{\tan g \, \xi_i} = \left(1 - \frac{H}{K} X\right)$$

Les racines X de la sphère solide donnent entr'elles un grand (1) nombre de l'équation donnent une forme très différente.

Les solides homogènes de plusieurs genres de cette sorte dont connus exactement les lois que suit la température lorsqu'ils se refroidissent dans des corps d'une profondeur immense.

Supposons qu'un solide d'une profondeur infinie est traversé par un plan horizontal et reçu dans une chaleur que la température soit la même dans toutes les parties situées à une même profondeur cette température θ commune à tous les points et qu'ensuite on maintienne les molécules de la surface à la température primitive 0 il s'agit de connaître l'état du solide après un tems donné. en désignant par v la profondeur d'une molécule quelconque v la température de cette molécule après le tems t qui s'est écoulé depuis l'origine du refroidissement v est une fonction de x et t et c'est cette fonction qu'il s'agit d'exprimer l'intégrale de l'équation du mouvement de la chaleur peut être mise pour cette question sous la forme suivante qui est simple

$$v = \frac{2\theta}{\omega} \int_0^{\infty} \frac{dp}{p} e^{-\frac{p^2 K t}{C \cdot D}} \sin(px) \qquad v = \frac{2\theta}{\omega} \int_0^{\infty} dp \cdot \frac{e^{-\frac{p^2 K t}{C \cdot D}}}{p} \sin(px)$$

$$\frac{6\sqrt{K}\sqrt{C \cdot D}}{\sqrt{\omega}\sqrt{t}} e^{-\frac{u^2}{4\frac{K t}{C \cdot D}}} \qquad (6)$$

p est la variable auxiliaire et l'on doit intégrer entre les limites $p=0$ et $p=\frac{1}{0}$

cette expression de v se ramène facilement aux intégrales définies dont la valeur est donnée par la table (comme) on a alors

$$v = \frac{2\theta}{\sqrt{\omega}} \int_0^{R} dr \, e^{-r^2}$$

la limite R est égale à $\frac{u}{2\sqrt{\frac{Kt}{C \cdot D}}}$

la quantité de chaleur qui pendant l'unité de temps traverse la section de température qui existait au bout du plan horizontal placé à la profondeur u est

$$\frac{6\sqrt{K \cdot C \cdot D}}{\sqrt{\omega}\sqrt{t}} e^{-\frac{u^2}{4\frac{Kt}{C \cdot D}}}$$

cette quantité est

[illegible] de terminée [illegible] hyperboliques
et a cette hyperbole d'ordre égale $\int r \dot{e}^{-rz}$ et celle du boyau [illegible] limitée
à la surface de laquelle. [illegible] quant aux indices généraux
du mouvement ainsi tout demeure clair pour cette solution. [illegible]
par exemple qu'une même température polle successivement à la profondeur
x à une profondeur plus grande x' et que les temps écoulés pour avoir
tant à partir de part l'origine du refroidissement tout autre chose comme les
grandeurs des profondeurs. Ainsi aussi que la [illegible] de chaleur [illegible]
à la surface intérieure est exprimée par $\frac{b\sqrt{\kappa c \cdot \nu}}{\sqrt{\omega}\sqrt{t}}$
la quantité de chaleur perdue pendant le temps écoulé
est $\int_0^t \frac{b\sqrt{\kappa c \cdot \nu}}{\sqrt{\omega}\sqrt{t}} = \frac{2b\sqrt{\kappa \cdot c \cdot \nu}}{\sqrt{\omega}}\sqrt{t}$ elle croît
comme les racines carrées des temps écoulés [illegible]
par exemple quelle est la température à une
même profondeur après un temps double
[illegible] (l'application donne que la
température pour exemple $b(0,0011)$ devient égale à b il faut qu'il se soit écoulé plus de 52 000 années) et pour que la même
température $b(0,00113)$ soit observée à mille mètres de
profondeur il faut qu'il se soit écoulé plus de 5,229,670 ans.
[illegible] la vraie loi de cette question [illegible]
on suppose que la température initiale du globe varie avec la profondeur x et suivant
une loi donnée mais entièrement arbitraire. [illegible] cet état initial
étant connu on s'astreint par la surface extérieure à une température
toujours constante 0 mais on suppose dans un espace vide que l'on
aura soin de remplir par 0. il s'agit de déterminer la température variable
v en fonction de la profondeur x et du temps t depuis l'instant initial
Depuis le commencement du refroidissement la fonction donnée
représentant la température initiale du globe à toutes les profondeurs
cette question est résolue complètement par l'intégrale suivante

$$R = \frac{1}{100} \qquad v = b \cdot \frac{\int_0^{\frac{1}{100}} 2r e^{-r^2}}{\int_0^{\infty} 2r e^{-r^2}} = b \cdot \left(\frac{\int_0^{\infty} 2r e^{-r^2} - \int_{\frac{1}{100}}^{\infty} 2r e^{-r^2}}{\int_0^{\infty} 2r e^{-r^2}} \right)$$

$$\frac{v}{b} = 1 - \frac{0,8762274}{0,8862269} = \frac{0,0099968}{0,8862269} = 0,00113$$

$$\frac{u}{2\sqrt{\frac{Kt}{C \cdot D}}} = \frac{1}{100} \qquad \frac{u^2}{4 \cdot \frac{Kt}{C \cdot D}} = 10^4 \qquad \frac{Kt}{C \cdot D} = \frac{u^2 \cdot 10^4}{4}$$

$$t = \frac{u^2 \cdot 10^4 \cdot 1083}{4} \qquad n = \frac{u^2 \cdot 10^4 \cdot 1083}{4 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 365}$$

pour $K = 1$ mètre carré

$$n = \frac{10^4 \cdot 3}{4 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 24} = \frac{1}{3} \cdot \frac{125}{8} \cdot \frac{361}{365}$$

pour 10 mètres carrés

pour 100 mètres carrés

pour 1000 mètres carrés

$$\frac{361}{365} = \frac{10^3}{4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{361}{365} = \left(\frac{10}{4}\right)^3 \cdot \frac{361}{365} = \left(\frac{5}{2}\right)^3 \cdot \frac{361}{365} = \frac{125}{8} \cdot \frac{361}{365} = (5.2833)\left(1 - \frac{4}{365}\right)$$

$$\frac{4}{365} = \frac{1}{91}$$

5,283333 | 91
455 | 58063
273
603
546
573
546
273
27

5,283333 | 58063
58063
5,229,670

999968 | 886226
886226 | 113
113740
886226
2511940

125 | 24
120 | 5,2833
50
48
200
192
80
72

$$v = \frac{2}{\varpi} \int_0^\infty \frac{dp\, e^{-p^2 \frac{Kt}{c \cdot D}}}{p^2 + \frac{H^2}{K^2}} \left(\frac{H}{p} \sin pu + p \cos pu \right) \int_0^\infty d\lambda \sin p\lambda \left(\frac{H}{K} F\lambda - \frac{d}{d\lambda} F\lambda \right)$$

on met pour $F\lambda$ et $\frac{d}{d\lambda} F\lambda$ leurs valeurs en fonction de λ les limites de l'intégrale par rapport à λ entre les limites 0 et $\frac{1}{0}$.

les limites de l'intégrale par rapport à p sont aussi 0 et $\frac{1}{0}$. après avoir mis v en évidence on obtient quatre variables u, t, les coefficients K, H, C, D et la fonction arbitraire $F\lambda$ définie par f

cette expression de v qui paraît d'abord compliquée représente la température dans un milieu homogène limité par un plan indéfini, elle sert à en mesurer tous les éléments.

On peut appliquer par exemple à trouver la température intérieure d'un solide b depuis $u = 0$ jusqu'à une époque donnée t et quand toutes les parties intérieures de la température initiale est 0.

Dans ce cas il faut déterminer $F\lambda$ et prendre l'intégrale entre les limites 0 et $\frac{1}{0}$. on trouve

$$v = \frac{2bH}{K\varpi} \int_0^\infty \frac{dp\, e^{-p^2 \frac{Kt}{c \cdot D}}}{p^2 + \frac{H^2}{K^2}} \sin \cdot \text{vers}(pA) \left(\frac{H}{K} \frac{\sin(pu)}{p} + \cos(pu) \right)$$

on peut mettre ainsi A

Dans la dernière valeur de v on remarque. Aussi il est facile de voir que elle se réduit à

$$v = \frac{2bH}{K\varpi} \int_0^\infty dp \cdot \frac{e^{-p^2 \frac{Kt}{c \cdot D}}}{p^2 + \frac{H^2}{K^2}} \cdot \left(\frac{H}{K} \cdot \frac{\sin(pu)}{p} + \cos pu \right)$$

Cette formule représente l'état variable d'une solide dont tous les points sont pris à une température initiale commune et qui est terminé par une surface plane exposée de point contact dans un air ambiant dont la température est constante.

par exemple si l'on veut connaître la température variable (v) de la surface on trouve

$$(v) = \frac{2bH}{K\varpi} \int_0^\infty dp\, e^{-p^2 \frac{Kt}{c \cdot D}} \cdot \frac{\text{on peut encore exprimer cette expression en intégrale}}{p^2 + \frac{H^2}{K^2}}$$

indéfinie, et l'on a $(v) = \frac{2b}{\sqrt{\varpi}} e \cdot \int_R^\infty dr\, e^{-r^2}$ la quantité désignée par R est $\frac{H\sqrt{t}}{\sqrt{K \cdot C \cdot D}}$. on trouve facilement

au moyen de la seconde table rapportée par M^r. Kramp.

X 7

applications numériques

Lorsque la valeur de t est devenue assez grande (Si elle devient mille années et si la substance que l'on considère est le fer) la valeur de $\frac{v}{b}$ est exprimée avec

dans cet exemple $(v) = b \cdot \frac{\sqrt{K \cdot C \cdot D}}{H \sqrt{\varpi} \sqrt{t}}$

la température de la surface devient en raison inverse de la racine carrée du temps écoulé.

si la température de la surface est à 6 à quel degré de

que la température de la surface est à $\frac{6}{1000}$ à quel degré de

qu'il s'est écoulé 147600 années depuis le commencement du refroidissement

la diminution de température devient insensible elle ne serait que d'un deux centième de degré au bout de 1400 années. L'accroissement de température dû à la profondeur serait encore d'une centième de degré centigrade pour un mètre ainsi il serait tout à fait insensible.

XI

Comparaison du mouvement de la chaleur dans la sphère et dans le solide d'une profondeur infinie

La chaleur se propage uniformément dans la sphère comme dans le solide d'une profondeur infinie

à quelque profondeur dans un rayon extrêmement grand comme celui de la terre

Il est évident que les deux effets doivent être les mêmes pendant un temps immense et pour toutes les valeurs qui ne sont pas extrêmement éloignées de la surface. C'est ce que prouvent en effet les équations

de l'ellipsoïde. Cette remarque peut servir à confirmer l'analyse précédente

il est nécessaire par exemple qu'un rayon allumant dans l'intégrale (3) un rayon total soit une valeur pour laquelle la température variable de la surface

Dans l'article précédent. en effet si dans la solution exprimée par l'équation 5 on fait croître le rayon extrêmement grand l'intégrale prend une autre forme elle se change en une intégrale définie, l'équation déterminée $\varepsilon_i = \left(1 - \frac{H}{K} x\right) \tang(\varepsilon_i)$ donnant alors cette valeur de ε_i, $\varepsilon_i = i\varpi - \text{arc.tang}\left(\frac{i\varpi \cdot K}{Hx}\right)$. Dans ce cas pour

XII.

Conséquences générales

l'expression de la température (v) de la surface

$$v = \frac{2b}{\varpi} \frac{H}{K} \int_0^{\varpi} \frac{\partial p\, e^{-p^2 \frac{Kt}{C \cdot D}}}{p^2 + \frac{H^2}{K^2}}$$

revient à celle que l'on avait déjà trouvée par une

analyse entièrement différente.

On a déjà remarqué que les valeurs qui conviennent aux très grands et très petits temps sont indépendantes de la nature du globe terrestre ni des coefficients C. K qui règlent la distribution de la chaleur. Il reste à calculer d'abord de la manière la plus exacte les températures qui conviennent au mouvement de la chaleur dans une sphère homogène, il sera facile de différencier les solutions générales en supposant que les coefficients D, C, K varient avec la profondeur, et avec la température. les changements qui en résultent n'affectent sensiblement les valeurs des températures à de grandes profondeurs mais ils influent sensiblement sur les conséquences générales de l'hypothèse

(sur le verso)
(ces questions)

Il remarquons ensuite Ici les effets alternatifs de la chaleur
Dans les [illegible] qui résultent des changements de hauteur, de déclinaison, et de distance
de cet examen dépend d'une question d'une autre sorte il faut examiner
si quand on dit que la chaleur entretient qui donne une température
constante à l'espace [illegible] on l'entend de la température qui
[illegible] peut être produite par les rayons du soleil
[illegible] Pour cette question on peut recourir aussi par la voie
que les effets de la chaleur sur [illegible] du globe dit ont lieu à des profondeurs
[illegible] Dans l'enveloppe il [illegible]
[illegible] on peut dire le fondement sur des
observations exactes déterminer la valeur numérique de cette température
relative commune de l'espace [illegible]

§ II

Cet article pourrait être :

1°. que [illegible] la chaleur a reçu primitivement une température
[illegible] qui diminue dans les mois des hivers elle ne conserve
aujourd'hui à la surface [illegible] de chaleur appréciablement
sa température actuelle étant déterminée par deux causes
[illegible] savoir la température fondamentale de l'espace
et l'action des rayons solaires.
un accident de [illegible] dans [illegible] après [illegible] à la surface
[illegible] un accroissement d'une [illegible] de degré
[illegible] à la profondeur d'une toise

2°. qu'en tel [illegible] de la surface ou ce qui est la même
dans un [illegible] tel accroissement de température avec la
profondeur suppose que la refroidissement a duré plusieurs
milliers d'années, [illegible] si le globe terrestre a été entièrement solide
à la température de l'incandescence la surface n'a pu parvenir
à l'état que nous observons aujourd'hui qu'en plusieurs centaines de milliers d'années

3°. [illegible] la température actuelle de la superficie [illegible]
[illegible] de celle qui est due aux causes extérieures
et l'excès étant inférieur à [illegible] de degré centigrade il l'en faut très notablement
que [illegible] température ne parvienne à [illegible]
dans l'espace de 1400 ans [illegible] à [illegible] de degré
[illegible] à la profondeur d'une toise
Delà vient à [illegible] un très petit excès de température à la surface
un accroissement réel qui semble avec la profondeur et [illegible]
l'on [illegible] Herschel de températures. ces deux effets sont liés ensemble par les mêmes
de la théorie de la chaleur.

4° [illegible] quoique l'enveloppe de
[illegible] soit dans un état très voisin de celui que détermineraient les deux causes
extérieures les couches [illegible] que soit plus chaudes à une profondeur très [illegible]
comme [illegible] mais [illegible] [illegible] [illegible] si elles l'ont été autrefois.
[illegible] [illegible] [illegible] [

Température d'un corps solide exposé à l'action périodique d'un foyer.

1.



Le solide terminé par un plan infini est exposé à l'action d'un foyer et cette action varie avec le temps.

Soit g la quantité de chaleur que le foyer dans un état unique communique pendant l'unité de temps à l'unité de surface. g n'est pas une quantité constante mais elle varie avec le temps et l'on suppose que ces variations sont périodiques, en sorte que la valeur de g reprenne après un intervalle de temps déterminé θ la valeur qu'elle avait auparavant.

La surface échauffée laisse échapper dans l'espace environnant une partie de sa chaleur. La température de l'espace environnant est V et l'unité de surface ayant la température $V+1$ donne pendant l'unité de temps une quantité de chaleur h.

Cela posé le mouvement de la chaleur est exprimé par $\frac{dv}{dt} = \frac{K}{C \cdot D} \frac{d^2 v}{dx^2}$

x est la distance perpendiculaire d'un point du solide infini au plan qui le termine
K est la conductibilité propre de la matière du solide, et le produit $C \cdot D$ est
la capacité de chaleur rapportée à l'unité de volume.
La quantité de chaleur perdue par l'unité de surface pendant l'instant dt
est $h(v-V)dt$ et la quantité de chaleur reçue est $g\,dt$.
Par conséquent un élément prismatique dont la base est l'unité de surface
et la profondeur dx reçoit de l'intérieur une chaleur exprimée par
$g\,dt - h(v-V)dt$ ce même élément sort par la surface opposée une quantité
de chaleur mesurée par $-K \cdot \frac{dv}{dx} dt$ on a donc l'équation

$$h(v-V) - g = K \frac{dv}{dx}$$ représentons par $g\varphi t$ la fonction g telle
que $\varphi(t+i\theta)$ est la même chose que la fonction φt. cette fonction
périodique ne devant point changer de valeur lorsque on augmente t
d'un multiple de θ on aura pour déterminer v les deux conditions

$$\frac{dv}{dt} = \frac{K}{C \cdot D} \frac{d^2 v}{dx^2} \quad \text{et} \quad h(v-V) - K \frac{dv}{dx} = g\varphi t$$

cette seconde condition doit avoir lieu à la surface.

Soit $v = a e^{-mx} \cos\left(2m^2 \frac{K}{C \cdot D} t - mx\right) + b e^{-mx} \sin\left(2m^2 \frac{K}{C \cdot D} t - mx\right) + \ldots$

on aura

$$\frac{dv}{dx} = -m e^{-mx} \left/ a\left(\cos 2m^2 \frac{K}{C \cdot D} t - mx\right) + b \sin\left(2m^2 \frac{K}{C \cdot D} t - mx\right) \right/$$
$$+ m e^{-mx} \left/ a \sin\left(2m^2 \frac{K}{C \cdot D} t - mx\right) - b \cos\left(2m^2 \frac{K}{C \cdot D} t - mx\right) \right/ + \ldots$$

[illegible] si ellas l'ont elû autrefois.

[illegible] pero nema altra volta parlia de lenne terra pur alzare il [illegible]
[illegible] il sefort e cambi un legno de terra qui en cade hurtes le inalze qual l'impara encarrer.

[illegible]

à la surface ou $x = 0$ ona

$$\frac{\partial v}{\partial x} = m\left(a\left(\sin 2w^2 \frac{K}{c\cdot p} t - \cos 2w^2 \frac{K}{c\cdot p} t\right) + b\left(\cos 2w^2 \frac{K}{c\cdot p} t + \sin 2w^2 \frac{K}{c\cdot p} t\right)\right)$$

ou a aussi $v = a \cos 2w^2 \frac{K}{c\cdot p} t + b \sin 2w^2 \frac{K}{c\cdot p} t + \text{etc}$

on trouve en dans l'équation de condition

$$\frac{\partial}{K} \varphi t = \frac{h}{K}(A - V) + \frac{h}{K} a \cos 2w^2 \frac{K}{c\cdot p} t + \frac{h}{K} b \sin 2w^2 \frac{K}{c\cdot p} t + \text{etc}$$

$$\begin{array}{l|l} +ma & -ma \\ +mb & +mb \end{array}$$

pour que cette fonction φt soit périodique, et ne change point lorsque t devient $t + i\theta$. il faut que l'on ait $2w^2 \frac{K}{c\cdot p} i\theta = 2j\varpi$ ou

$w^2 \frac{K}{c\cdot p} \theta = \varpi$ on entire $w^2 = \frac{j\varpi}{\frac{K}{c\cdot p}\theta}$ ainsi les différentes valeurs que l'on peut donner à w sont connues.

pour déterminer a et b c, et d &c on réduit la fonction φt en une série de sinus ou de cosinus d'arcs multiples.

pour trouver le premier terme qui doit donner la valeur de $A - V$ il faut intégrer $\frac{\partial}{K}\varphi t\, dt$ entre les limites de la première période.

on voit par là que $A - V$ est donnée par la valeur moyenne ou la somme des quantités de chaleur introduites dans le solide pendant la durée de la période.

à la surface ou $x=0$ ona

$$\frac{\partial v}{\partial x} = m\left(a\left(\sin 2w^2 \frac{K}{C\cdot D} t - \cos 2w^2 \frac{K}{C\cdot D} t\right) + b\left(\cos 2w^2 \frac{K}{C\cdot D} t + \sin 2w^2 \frac{K}{C\cdot D} t\right)\right)$$

ou a aussi $v = a \cos 2w^2 \frac{K}{C\cdot D} t + b \sin 2w^2 \frac{K}{C\cdot D} t + \text{Cte}$

on trouve en Dans l'équation de condition

$$\frac{\partial}{K} \varphi t = \frac{h}{K}(A-V) + \frac{h}{K} a \cos 2w^2 \frac{K}{C\cdot D} t + \frac{b}{K} b \sin 2w^2 \frac{K}{C\cdot D} t + \text{Cte}$$

$$\begin{array}{l|l} +ma & -ma \\ +mb & +mb \end{array}$$

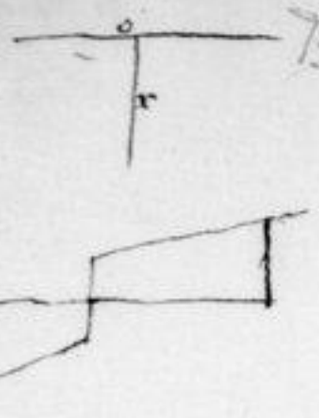
pour que cette fonction φt soit périodique, et ne change point lorsque t devient $t + i\theta$. il faut que l'on ait $2w^2 \frac{K}{C\cdot D} i\theta = 2j\varpi$ ou

$w^2 \frac{K}{C\cdot D} \theta = \varpi$ on entire $w^2 = \frac{j\varpi}{\frac{K}{C\cdot D}\theta}$ ainsi les différentes valeurs que l'on peut donner à w sont connues.

pour déterminer a et b c, et d On réduit la fonction φt en une série de sinus ou de cosinus d'arcs multiples.

pour trouver le premier terme qui doit donner la valeur de $A-V$ il faut intégrer $\frac{\partial}{K}\varphi t\, dt$ entre les limites de la première période.

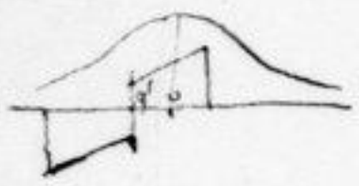
on voit par là que $A-V$ est donnée par la valeur moyenne ou la somme des quantités de chaleur introduites dans le solide pendant la durée de la période.



Températures d'un solide infini échauffé près de sa surface seulement

un solide indéfiniment profond est terminé par un plan infini. l'état initial du solide est ainsi exprimé $V = a + bx$. x est la profondeur au dessous du plan a et b sont des nombres positifs. cette température $a+bx$ n'a de valeur habituelle que depuis $x=0$ jusqu'à $x=n$ le reste du solide a la température initiale 0. le plan extrême est assujetti à la température constante 0 il s'agit de connaître l'état variable du solide. a est égal à $\frac{1}{4}$, b est $\frac{1}{30}$

on rivient cette question par l'équation suivante $v = \frac{1}{\sqrt{K}} \int_{-\infty}^{+\infty} dq\, e^{-q^2} f(x + zq\sqrt{Kt})$ le coefficient K représente $\frac{K}{C \cdot D}$. la fonction $f\lambda$ est telle que si λ est positif la valeur de la fonction est $a+bx$ de $x=0$ à $x=n$ et si λ est négatif la valeur $f\lambda$ est $-a-bx$ de $x=0$ à $x=-n$. elle est également nulle au delà de $+n$ et de $-n$ hors nulles. il s'agit de connaître le mouvement de la chaleur dans une barre infinie dont l'état primitif est ainsi exprimé.



si l'on fait $x + zq\sqrt{Kt} = 0$ ou $q = -\frac{x}{z\sqrt{Kt}}$. on portera à la gauche de 0 de 0 en q' la valeur $-\frac{x}{z\sqrt{Kt}}$ et l'on placera au delà de 0 la courbe dont l'ordonnée est e^{-q^2} et l'abscisse q. et au delà de q' la ligne d'intégration qui répond à l'état initial l'ordonnée de cette ligne est 0 lorsque $q = -\frac{x}{z\sqrt{Kt}}$ cette ordonnée pendant répond à l'abscisse q est $\frac{a+bn}{n}\left(x + zq\sqrt{Kt}\right)$ car elle devient 0 lorsque $q = -\frac{x}{z\sqrt{Kt}}$ et elle est $\pm(a+bn)$ lorsque $x + zq\sqrt{Kt} = \pm n$.

$n = 400$ mètres

K ou $\frac{K}{C \cdot D}$

$\frac{C \cdot D}{K}$ $\frac{1623}{3650}$ 1083

$\frac{C \cdot D}{K} = 1083$

$\frac{400}{2\sqrt{t}\sqrt{K}}$

$\frac{400}{2\sqrt{t}}\frac{1}{\sqrt{}}$

$\frac{200}{\sqrt{t}}$ 1083

$\frac{(200 \cdot 1000)^2 \cdot \ldots}{Kt}$

$200 \cdot 1083 < m\sqrt{t}$

$\sqrt{t} > \frac{200 \cdot 1083 \cdot m}{60 \cdot 24 \cdot 365}$

$\sqrt{t} > \frac{250 \cdot \text{---} \cdot m}{30 \cdot \text{---}}$

$\sqrt{t} > 4 \cdot m$ 160 m

$\sqrt{t} > 400$ $t > 160000$

$t > 160,000$

365
143
1460
1460
365
52560

$T = \frac{n}{\sqrt{Kt}}$ $T^2 = \frac{n^2}{Kt}$ $\frac{1000 \cdot 10 \cdot \text{---} \cdot 1083}{3 \text{---} \text{---}}$ 2000

I. Sur les températures d'un prisme infini dont la surface est assujettie à une température périodique.



la base du prisme solide infini est attachée à une température périodique $V = \varphi t$ la durée de la période est θ. ainsi φt est égale à $\varphi(t+\theta)$. l'action périodique qui s'exerce à la surface détermine dans le prisme supposé un temps infini un état variable périodique. la température v d'un point dont la distance à la base est x est exprimée par une fonction de x et t. cette fonction v périodique de durée de la période est θ. on a démontré l'équation

$$v = \frac{1}{\theta}\int_0^\theta dt\,\varphi t + \sum \left\{ \frac{2}{\theta} e^{-x\sqrt{i\frac{\omega}{\kappa\theta}}} \left\{ \begin{array}{l} \cos\left(i\frac{2\omega}{\theta}t - x\sqrt{i\frac{\omega}{\kappa\theta}}\right)\int_0^\theta dt\,\varphi t \cos\left(i\frac{2\omega}{\theta}t\right) \\ + \sin\left(i\frac{2\omega}{\theta}t - x\sqrt{i\frac{\omega}{\kappa\theta}}\right)\int_0^\theta dt\,\varphi t \sin\left(i\frac{2\omega}{\theta}t\right) \end{array} \right\} \right.$$

il faut mettre pour i successivement $1\ 2\ 3\ 4\ldots$ à l'infini et prendre la somme des termes. on voit que v est une certaine fonction $\psi(x,t)$ qui est périodique et qui dépend de la fonction donnée φt.

si une seconde cause exerce une action de même genre à la surface et l'on désigne par $\varphi_1 t$ et $\varphi_2 t$ les deux fonctions périodiques connues θ_1 et θ_2 étant les deux périodes on aura $\psi_1(x,t)$ et $\psi_2(x,t)$ pour les deux fonctions respectives et les deux causes réunies agissant à la fois l'état du prisme sera représenté par $\psi_1(x,t) + \psi_2(x,t)$

si $\theta_2 = \theta_1$ les deux effets se composent en un seul.

mais si les périodes θ_1 et θ_2 sont inégales les deux effets ne peuvent être observés distinctement à des profondeurs différentes.

---

pour fixer les idées à cet égard on supposera que la base du prisme est entretenue dans l'état périodique exprimé par la fonction

$\varphi t = a \sin\left(2\pi\frac{t}{\theta}\right)$ on supposera ensuite que la fonction φt devient $a\sin 2\pi\frac{t}{\theta}\left\{1 + 2\sin\left(2\pi\frac{tn}{(n+1)\theta}\right)\right\}$ et l'on comparera les résultats de ces deux hypothèses.

on voit que dans le second cas le facteur $a\sin\left(2\pi\frac{t}{\theta}\right)$ est multiplié par un facteur périodique.

dans ce second facteur on suppose le nombre n extrêmement grand par exemple 10000 on voit d'après cela que ce facteur diffère extrêmement peu de $\left(1 + 2\sin 2\pi\frac{t}{\theta}\right)$ et l'avantage que l'on suppose dans le second facteur que t est augmenté de $(n+1)\theta$ la grandeur totale dont cette augmentée de $2\pi n$ ainsi le second facteur est périodique et a la durée de la période est bien θ comme pour le premier facteur mais cette période est $(n+1)\theta$ c'est à dire incomparablement plus grande.

il s'agit maintenant d'appliquer ces hypothèses générales.

$$\int_0^{2\pi} dx \cos x \cdot \cosh x = \cosh x \int_0^{2\pi} dx \cos x + \int_0^{2\pi} dx \sin x \sinh x$$

$$\int dx\, xy = \frac{x^2}{2} y + c - \frac{x^2}{2} \frac{dy}{dx} + \int \frac{x^2}{2} \frac{d^2y}{dx^2} dx$$

$$\int dx \cos x \cosh x = c + \cosh x \int dx \cos x + h \sinh x \int dx \cos x - h^2 \int dx \cosh x \int dx \int dx \cos x$$

$$\cos x \cosh x = \cos x \cosh x + h \sinh x \int dx \cos x - h \sinh x \int dx \cos x + h^2 \cosh x \int dx \int dx \cos x$$

$$\int dx \cos x \cosh x = \text{const.} + \cosh x \cdot \sin x - h \sinh x \cos x + h^2 \int dx \cosh x \cos x$$

$$\cos x \cosh x = \cos x \cosh x + h \sinh x \sin x + h^2 \cosh x \cos x$$
$$- h \sinh x \sinh x - h^2 \cosh x \cos x$$

$$\int_0^x dx \cos x \cosh x = \cosh x \sin x - h \sinh x \cos x + h^2 \int_0^x dx \cosh x \cos x$$

$$(1-h^2) \int_0^x dx \cos x \cosh x = \cosh x \sin x - h \sinh x \cos x$$

$$\int_0^x dx \cos x \cdot \cosh x = \frac{\cosh x \sin x - h \sinh x \cos x}{1-h^2}$$

$$\int_0^{2\omega} dx \cos x \cosh x = \frac{-h}{1-h^2} \sin(2\omega h)$$

$$\frac{1}{2} \int_0^x dx \cos(x-hx) + \frac{1}{2} \int_0^x dx \cos(x+hx) = \int_0^x dx \cos x \cosh x$$

$$\frac{1}{1-h} \sin(x-hx) + \frac{1}{1+h} \sin(x+hx)$$

$$\left(\frac{1}{1-h} + \frac{1}{1+h} \right) \sin 2\omega h = \frac{1}{2} \sin 2\omega h \left(\frac{1}{1+h} - \frac{1}{1-h} \right) = -\frac{1}{2} \sin 2\omega h \cdot \frac{2h}{1-h^2}$$

$$= \frac{-h}{1-h^2} \sin 2\omega h$$

II. la forme de cette solution est celle-ci

$$\varphi t = A + A_1 \cos\frac{2\pi t}{\theta} + A_2 \cos\left(\frac{2\pi 2t}{\theta}\right) + \dots$$
$$B_1 \sin\left(\frac{2\pi t}{\theta}\right) + \dots$$

$$\text{et } \varphi = \int e^{-x\sqrt{\frac{i\omega}{\kappa\theta}}} \chi d.$$

$$\text{et } v = \frac{1}{\theta}\int \varphi t\, dt + \sum e^{-x\sqrt{\frac{i\omega}{\kappa\theta}}} \left(A_i \cos\left(i\frac{2\pi t}{\theta} - x\sqrt{\frac{i\omega}{\kappa\theta}}\right) + B_i \sin\left(i\frac{2\pi t}{\theta} - x\sqrt{\frac{i\omega}{\kappa\theta}}\right)\right)$$

puisque l'on a ici $\varphi t = a \sin\frac{2\pi t}{\theta}$ il est évident que $A_0 = 0$ et $A_2 = 0$

et $B_2 =$ a toutes les autres coefficients sont nuls

par conséquent la solution qui convient au premier cas est

$$v = a e^{-x\sqrt{\frac{\omega}{\kappa\theta}}} \sin\left(\frac{2\pi t}{\theta} - x\sqrt{\frac{\omega}{\kappa\theta}}\right)$$ cette formule donne la valeur de

x et t. Supposons maintenant que la fraction $\frac{1}{e}$ étant une petite fraction ω en sorte que la différence de température trop petite pour être observée. on ne pourra discerner aucune variation de température à la distance x telle que $x\sqrt{\frac{\omega}{\kappa\theta}} = q$ car la plus grande valeur du facteur exponentielle est 1 et la plus grande différence observable est $2a e^{-x\sqrt{\frac{\omega}{\kappa\theta}}}$ ou $2a\omega$ à partir de cette valeur on ne pourra discerner aucune variation de température lorsque x surpasse la valeur qui rend $\sqrt{\frac{\omega}{\kappa\theta}}$ égale à q.

---

en continuant de raisonner de même.

la fonction qui exprime l'état périodique est $a \sin\left(2\pi\frac{t}{\theta}\right)\left\{1 - 2a \sin\left(2\pi\frac{n}{n+1}\frac{t}{\theta}\right)\right\}$

et comme la première partie est l'objet de la solution précédente

on a écrira seulement $\varphi t = a\lambda \sin\left(2\pi\frac{t}{\theta}\right\} \sin\left(2\pi\frac{t}{\theta}\frac{n}{n+1}\right)$

ou $\varphi t = \frac{a\lambda}{2}\left\{\cos\left(2\pi\frac{t}{\theta} - 2\pi\frac{t}{\theta}\frac{n}{n+1}\right) + \cos\left(2\pi\frac{t}{\theta} + 2\pi\frac{t}{\theta}\frac{n}{n+1}\right)\right\}$

$$= \frac{a\lambda}{2}\cos\left(2\pi\frac{t}{\theta}\left(1 - \frac{n}{n+1}\right)\right) + \frac{a\lambda}{2}\cos\left(2\pi\frac{t}{\theta}\left(1 + \frac{n}{n+1}\right)\right)$$

ainsi il reste d'appliquer deux fois la solution générale

$$\int_0^{\theta} \cos x \cos\left(\frac{2\omega x}{\theta}\right) \cos\left(\frac{2\omega x}{\theta} + \frac{\theta}{n}\right)$$

$$\int \cos x \cos\left(2\omega \frac{x}{\theta}\right) \cdot \cos\left(2\omega \frac{x}{\theta} \frac{n}{n+1}\right)$$

$$2\omega \frac{x}{\theta} = x \qquad h = \frac{n}{n+1}$$

$$t = \frac{\theta}{2\omega} x$$

$$\frac{\theta}{2\omega} \int_0^{2\omega} \cos x \cos hx \cdot \cos hx$$

$$h = \frac{n}{n+1} \qquad 1 - h^2 = 1 - \frac{n^2}{n^2+2n+1}$$

$$= \frac{2n+1}{n^2+2n+1}$$

$$\frac{\frac{n}{n+1}}{1 - \frac{n^2}{n^2+2n+1}} \qquad \frac{\frac{n}{n+1}}{\frac{n^2+2n+1}{2n+1}}$$

$$\frac{n}{n+1} \cdot \frac{2n+1}{n^2+2n+1}$$

$$\frac{n(n+1)}{2n+1}$$

$$\frac{n^2}{2n} \qquad \frac{n}{2}$$

$$\theta \cdot \frac{n}{2}$$

$$v = \frac{\theta}{2\omega} \frac{n^2+2n}{2n+1} \times$$

$$\cdot \sin 2\omega \frac{(i-1)}{n+1}$$

$$\cdot \cos \frac{2\omega}{n+1}$$

$$v = \frac{\theta}{2} \frac{n}{n} \left(- \frac{2\omega}{n} (i-1) - \frac{2\omega}{n} \right)$$

$$v = -\frac{\theta}{2} (i-1) \cdots$$

$$\frac{2\omega n}{n+1} = 2\omega + q$$

$$q = \frac{2\omega n}{n+1} - 2\omega = 2\omega \left(\frac{1}{n+1} \right)$$

$$q = -\frac{2\omega}{n} = b$$

$$\sin q = -\frac{2\omega}{n}$$

$$+ \frac{\theta}{2\omega} \frac{n^2+n}{2n+1} \frac{2\omega}{n}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \theta$$

$$+ (n+1) + 1$$

$$\int_{(i-1)\theta}^{i\theta} \cos x \cos\left(2\omega \frac{x}{\theta}\right) \cos\left(2\omega \frac{x}{\theta} \cdot \frac{n}{n+1}\right)$$

$$\frac{2\omega x}{\theta} = x$$

$$t = \theta \frac{x}{2\omega}$$

$$dt = \theta \frac{dx}{2\omega}$$

$$h = \frac{n}{n+1}$$

$$\frac{\theta x}{2\omega} = i\theta - \theta$$

$$\frac{x}{2\omega} = (i-1)$$

$$x = 2\omega(i-1)$$

$$\frac{\theta x}{2\omega} = i\theta$$

$$x = i \cdot 2\omega$$

$$\frac{\theta}{2\omega} \int_{2\omega(i-1)}^{2i\omega} dx \cos x \cos hx$$

$$v = \frac{1}{2} \int dx \cos(x - hx) + \frac{1}{2} \int dx \cos(x + hx) \Big|_{2\omega}^{2i\omega}$$

$$v = \left(\frac{1}{1-h} \sin(x - hx) + \frac{1}{1+h} \sin(x + hx) + c \right)_{2\omega}^{2i\omega}$$

$$- \frac{1}{1-h} \sin(2i\omega - 2h\omega) + \frac{1}{1+h} \sin(2i\omega - 2h\omega) + c = 0$$

$$v = \frac{\theta}{2\omega} \frac{h}{1+h} \left(\sin(2i\omega - 2h\omega) - \sin 2h\omega \right) = \frac{\theta}{2\omega} \frac{n^2+2n}{2n+1} \left(\sin \frac{2n\omega}{n+1}(i-1) - \sin \frac{2n\omega}{n+1} \right)$$

$$\frac{2n\omega}{n+1}(i-1) = 2\omega + q \qquad q = \frac{2ni\omega - 2n\omega - 2ni\omega - 2i\omega}{n+1} = -\frac{2n\omega - 2i\omega}{n+1}$$

$$r = 2\omega(i-1) \qquad = -2\omega + r$$

III.

pour la première partie on aura $(n+1)\theta = \theta'$ et l'on aura $\varphi t = a\lambda \omega 2\pi \frac{t}{\theta'}$

désignant donc par v' l'effet du $\bar{a}$ une première partie on aura ici

$A_0 = 0 \quad A_1 = a\lambda, \quad B_1 = v$ et tous les autres coefficients nuls donc

$$v' = a\lambda e^{-x\sqrt{\frac{\omega}{\kappa\theta'}}} \cos\left\{2\pi\frac{t}{\theta'} - x\sqrt{\frac{\omega}{\kappa\theta'}}\right\}$$

faisant $\frac{(n+1)\theta}{2n+1} = \theta''$ et désignant par v'' l'effet dans la huitième partie on aura $v'' = a\lambda e^{-x\sqrt{\frac{\omega}{\kappa\theta''}}} \cos\left(2\pi\frac{t}{\theta''} - x\sqrt{\frac{\omega}{\kappa\theta''}}\right)$.

il s'ensuit que pour t quand est ou la valeur de la fraction φt est $a \sin 2\pi\frac{t}{\theta}\left(1 + \lambda \sin 2\pi\frac{nt}{(n+1)\theta}\right)$ la valeur totale de v est ainsi exprimée

$$v = ae^{-x\sqrt{\frac{\omega}{\kappa\theta}}} \sin\left(2\pi\frac{t}{\theta} - x\sqrt{\frac{\omega}{\kappa\theta}}\right)$$

$$+ a\lambda e^{-x\sqrt{\frac{\omega}{\kappa\theta}\cdot\frac{2n+1}{n+1}}} \left\{\cos\left\{2\pi\frac{t}{\theta}\frac{2n+1}{n+1} - x\sqrt{\frac{\omega}{\kappa\theta}\cdot\frac{2n+1}{n+1}}\right\}\right.$$

$$\left. + a\lambda e^{-x\sqrt{\frac{\omega}{\kappa\theta}\cdot\frac{1}{n+1}}} \cos\left\{2\pi\frac{t}{\theta}\frac{1}{n+1} - x\sqrt{\frac{\omega}{\kappa\theta}\cdot\frac{1}{n+1}}\right\}\right\}$$

Voici comme précédemment x la valeur de x qui est telle que

$\left(\frac{1}{e}\right)^{x\sqrt{\frac{\omega}{\kappa\theta}}} = \left(\frac{1}{e}\right)^{q} = w$ est petite fraction

pourquoi donc $x\sqrt{\frac{\omega}{\kappa\theta}} = q$ donc $x\sqrt{\frac{\omega}{\kappa\theta}}\cdot\sqrt{\frac{2n+1}{n+1}}$ qui devra être peu

de $x\sqrt{\frac{\omega}{\kappa\theta}}\cdot\sqrt{2}$ est à très peu près $q\sqrt{2}$. par conséquent la fraction

$e^{-x\sqrt{\frac{\omega}{\kappa\theta}\cdot\frac{2n+1}{n+1}}}$ est extrêmement petite à moins que la profondeur x est devenue très grande pour que la première terme de v soit sensible il faut encore de même à fortiori du second terme. le système d'ondes sera représenté par une fraction comme $\frac{1}{13}$ $\frac{1}{10}$ $\frac{1}{100}$

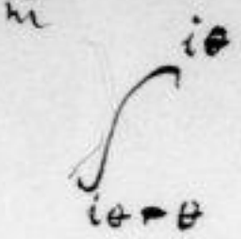
quant à huitième terme il devient suivant une loi fort différente la quantité $x\sqrt{\frac{\omega}{\kappa\theta}\cdot\frac{1}{n+1}}$ est $\frac{q}{\sqrt{n+1}}$. on voit donc qu'à une profondeur extrêmement grande les deux premiers termes sont entièrement insensibles mais que le huitième terme conserve sa valeur car la quantité sous le cosinus devient 1 et -1 après multiplié par $e^{-x\sqrt{\frac{\omega}{\kappa\theta}\cdot\frac{1}{n+1}}}$ ##

les résultats sont singulièrement remarquables ils montrent que dans un lieu donné de la terre aux différentes profondeurs ou les variations d'une même nature sont sensibles les variations de la chaleur dues au déplacement de la lune deviennent insensibles et produisent un effet moyen

$$\frac{n}{n+1} = h$$

$$\frac{2\pi t}{\theta} = x$$

$$t \frac{\theta}{2\pi} = t$$



$$\frac{\theta x}{2\pi} = i\theta - \theta$$

$$(i-1)2\pi = x$$

$$v = \int_{i\theta-\theta}^{i\theta} d\tau \sin\left(2\pi \frac{t}{\theta}\right) \sin\left(2\pi \frac{t}{\theta} \frac{n}{n+1}\right)$$

$$v = \frac{\theta}{2\pi} \int_{2i\pi-2\pi}^{2i\pi} dx \sin x \sin hx$$

$$2v \cdot \frac{\pi}{\theta} = \int dx \cos(x - hx) - \int dx \cos(x + hx) = \frac{1}{1-h} \sin(x - hx) - \frac{1}{1+h} \sin(x + hx) + \text{const.}$$

$$0 = -\frac{1}{1-h} \sin 2\pi h(i-1) - \frac{1}{1+h} \sin 2\pi h(i-1) + \text{const.}$$

$$2v \cdot \frac{2\pi}{\theta} = \sin 2\pi(i-1)h \cdot \frac{2}{1-h^2} - \frac{2}{1-h^2} \cdot \sin 2hi\pi$$

$$v = \frac{\theta}{2\pi} \frac{1}{1-h^2} \left\{ \sin(2hi\pi - 2h\pi) - \sin 2hi\pi \right\}$$

$$\sin\left(2\pi(i-1)\frac{n}{n+1}\right) = 2\pi(i-1) + r$$

$$0 = 2\pi(i-1) + r(n+1) \qquad r = -\frac{2\pi(i-1)}{n+1}$$

$$v = \frac{\theta}{2\pi} \frac{1}{1-h^2} \left\{ \sin\left(2i\pi \frac{n}{n+1}\right) - \sin\left(2(i-1)\pi \frac{n}{n+1}\right) \right\}$$

$$v = \frac{\theta}{2\pi} \frac{1}{1-h^2} \left\{ \frac{2i\pi}{n} - \frac{2i\pi}{n} + \frac{2\pi}{n} \right\} = \frac{\theta}{2\pi} \frac{1}{1-h^2} \frac{2\pi}{n}$$

$$h^2 = \frac{n^2}{n^2+n+1}$$

$$1 - h^2 = \frac{2n+1}{(n+1)^2}$$

$$\frac{1}{1-h^2} = \frac{(n+1)^2}{2n+1}$$

$$= \frac{n}{2}$$

$$= \frac{\theta}{2\pi} \frac{n}{2} \frac{2\pi}{n}$$

$$= \frac{1}{2}\theta$$

$$\psi = nt + 2e \sin nt$$

$$\sin\psi = \sin nt \cos(2e \sin nt) + 2e \sin nt \cos nt$$

$$\sin\psi = \sin(nt) + e \sin 2nt = \sin\left(2\pi \frac{t}{\theta}\right) + e \sin\left(2 \cdot 2\pi \frac{t}{\theta}\right)$$

comme la surface à laquelle on vient de parvenir est fort remarquable, et que l'examen de l'indéterminée du rivelet n'est pas facile sur un tel mouvement continuement croissant il faut reprendre ce calcul avec beaucoup d'attention.

On représente l'état variable de la barre du cylindre par la fonction périodique φt

$= V = a \sin \frac{2\pi t}{\theta} \left(1 + \lambda \sin \frac{2\pi t}{\theta} \cdot \frac{n}{n+1}\right)$ les coefficients a et λ sont des nombres le nombre n est extrêmement grand comme dix mille il s'agit de déterminer l'état périodique fixe du prisme en la valeur de v en fonction de la profondeur x et du temps écoulé t.

on a $\varphi t = a \sin \frac{2\pi t}{\theta} + \frac{a\lambda}{2} \left\{ -\cos \frac{2\pi t}{\theta} \left(1 + \frac{n}{n+1}\right) + \cos \frac{2\pi t}{\theta} \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) \right\}$

ou $\varphi t = a \sin \frac{2\pi t}{\theta} + \frac{a\lambda}{2} \left\{ \cos \left(\frac{2\pi t}{\theta} - \frac{2n+1}{n+1} \right) + \cos \left(\frac{2\pi t}{\theta} \frac{1}{n+1} \right) \right\}$

on doit avoir l'équation générale $\frac{dv}{dt} = \frac{k}{c \cdot D} \frac{d^2 v}{dx^2}$ on a supposé $\frac{kt}{c \cdot D} = t$ et c'est cette nouvelle indéterminée t que l'on a substituée à t.

cela posé on a en l'équation $\frac{dv}{dt} = \frac{d^2 v}{dx^2}$.

on modifiera maintenant l'intégrale qui satisfait à l'équation dans sa première partie ce qui est ainsi exprimé

$$(1) \qquad v = a e^{-x\sqrt{\frac{\pi}{\theta}}} \cdot \sin \left(\frac{2\pi t}{\theta} - x \sqrt{\frac{\pi}{\theta}} \right)$$ c'est à dire que l'on aura ainsi la valeur de v si la fonction φt était seulement $a \sin \frac{2\pi t}{\theta}$ en effet on a

$$\frac{dv}{dt} = \frac{2\pi}{\theta} a e^{-x\sqrt{\frac{\pi}{\theta}}} \cos \left(\frac{2\pi t}{\theta} - x \sqrt{\frac{\pi}{\theta}} \right) \text{ et}$$

$$\frac{dv}{dx} = -a\sqrt{\frac{\pi}{\theta}} e^{x\sqrt{\frac{\pi}{\theta}}} \sin \left(\frac{2\pi t}{\theta} - x\sqrt{\frac{\pi}{\theta}} \right) - a\sqrt{\frac{\pi}{\theta}} e^{-x\sqrt{\frac{\pi}{\theta}}} \cos \left(\frac{2\pi t}{\theta} - x\sqrt{\frac{\pi}{\theta}} \right)$$

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = a \frac{\pi}{\theta} e^{-x\sqrt{\frac{\pi}{\theta}}} \sin \left(\frac{2\pi t}{\theta} - x\sqrt{\frac{\pi}{\theta}} \right) + a \frac{\pi}{\theta} e^{-x\sqrt{\frac{\pi}{\theta}}} \cos \left(\frac{2\pi t}{\theta} - x\sqrt{\frac{\pi}{\theta}} \right)$$

$$+ a \frac{\pi}{\theta} e^{-x\sqrt{\frac{\pi}{\theta}}} \cos \left(\frac{2\pi t}{\theta} - x\sqrt{\frac{\pi}{\theta}} \right) - a \frac{\pi}{\theta} e^{-x\sqrt{\frac{\pi}{\theta}}} \sin \left(\frac{2\pi t}{\theta} - x\sqrt{\frac{\pi}{\theta}} \right)$$

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = 2a \frac{\pi}{\theta} e^{-x\sqrt{\frac{\pi}{\theta}}} \cos \left(\frac{2\pi t}{\theta} - x\sqrt{\frac{\pi}{\theta}} \right) = \frac{dv}{dt}$$ ainsi la valeur de v donnée par l'équation (1) satisfait à l'équation de Mr Lieville de plus cette valeur de v lorsque $x = 0$ devient $a \sin \frac{2\pi t}{\theta}$ par conséquent il n'y a aucune doute que l'équation (1) ne soit l'intégrale cherchée.

$$v=\int_{i\theta-\theta}^{i\theta} d\tau \sin\left(2\varpi\frac{t}{\theta}\right)\sin\left(2\varpi\frac{t}{\theta}\frac{n}{n+1}\right) \quad \left|\begin{array}{l}\frac{n}{n+1}=h\\ \frac{2\varpi t}{\theta}=x\end{array}\right. \qquad \int_{i\theta-\theta}^{i\theta} \quad n$$

$$v=\int_{i\theta-\theta}^{i\theta} dt\ \sin\left(2\varpi\frac{t}{\theta}\right)\cos\left(2\varpi\frac{t}{\theta}\frac{n}{n+1}\right) \quad \left|\begin{array}{l}\frac{n}{n+1}=h\\ \frac{2\varpi t}{\theta}=x \qquad t=\frac{\theta}{2\varpi}\cdot x\end{array}\right.$$

$$v=\frac{\theta}{2\varpi}\int_{2i\varpi-2\varpi}^{2i\varpi} dx\ \sin x\cos hx \qquad \frac{\theta}{2\varpi}x=i\theta-\theta$$

$$x=2\varpi(i-1)\cdots 2i\varpi$$

$$\frac{2\varpi}{\theta}2v=\int dx\ \sin(x+hx)+\int dx\ \sin(x-hx)+\text{con}$$

$$\frac{2\varpi}{\theta}\cdot 2v=\frac{-1}{1+h}\cos(x+hx)-\frac{1}{1-h}\cos(x-hx)+\text{const.}$$

$$0=\frac{-1}{1+h}\cos 2\varpi h(i-1)-\frac{1}{1-h}\cos 2\varpi h(i-1)+\text{con}$$

$$0=-\left(\frac{1}{1+h}+\frac{1}{1-h}\right)\cos 2\varpi h(i-1)+c$$

$$h^2=\frac{n^2}{(n+1)^2}$$

$$1-h^2=\frac{2n+1}{(n+1)^2}$$

$$\frac{1}{1-h^2}=\frac{n^2+2n+1}{2n+1}$$

$$\frac{n}{2}$$

$$0=\frac{-2}{1-h^2}\cos 2\varpi h(i-1)+c$$

$$\frac{2\varpi}{\theta}\cdot 2v=\frac{2}{1-h^2}\left\{\cos\left[2\varpi h(i-1)\right]-\cos 2\varpi hi\right\}$$

$$v=\frac{\theta}{2\varpi}\frac{1}{1-h^2}\left(\cos\left\{2\varpi(i-1)\frac{n}{n+1}\right\}-\cos\left(2\varpi i\frac{n}{n+1}\right)\right)$$

$$\cos\left(2\varpi\frac{Kn}{n+1}\right)=2\varpi\cdot K+r \quad \left|\ 2\varpi Kn=2\varpi Kn+2\varpi K+r(n+1)\right.$$

$$0=2\varpi k+r(n+1)$$

$$r=-\frac{2\varpi\cdot K}{n+1}$$

$$v=\frac{\theta}{2\varpi}\frac{n}{2}\left(\cos\frac{2\varpi(i-1)}{n+1}-\cos\frac{2\varpi i}{n+1}\right)$$

$$1-\frac{1}{2}\frac{2^2\varpi^2}{n^2}(i-1)^2 \qquad -1+\frac{1}{2}\frac{2^2\varpi^2 i^2}{n^2}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{2^2\varpi^2}{n^2}\left(i^2-2i+1-i^2\right)$$

$$v=-\frac{\theta}{2\varpi}\cdot\frac{n}{2}\cdot\frac{1}{2n^2}2^2\varpi^2(1-2i)$$

$$v=(2i-1)\frac{\theta}{2}\frac{2\varpi}{2}\frac{1}{n}$$

NT.

Soit maintenant $\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{K}{c \cdot D} \frac{\partial^2 v}{\partial x'^2}$ et $x \sqrt{\frac{c \cdot D}{K}} = x'$ on aura $dx = dx' \sqrt{\frac{K}{c \cdot D}}$

et $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{K}{c \cdot D} \frac{\partial^2 v}{\partial x'^2}$ et $x' = x \sqrt{\frac{K}{c \cdot D}}$ d'où $dx' = dx \frac{K}{c \cdot D}$

on aura donc $\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ en appliquant à la solution

précédente on trouve que l'intégrale de l'équation $\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{K}{c \cdot D} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$

est $v = a e^{-x \sqrt{\frac{\varpi \cdot c \cdot D}{K \theta}}} \sin\left(\frac{2 \varpi t}{\theta} - x \sqrt{\frac{\varpi \cdot c \cdot D}{K \theta}} \right)$ lorsque la valeur de v

qui répond à $x = 0$ est $V = a \sin \frac{2 \varpi t}{\theta}$ selon l'hypothèse.

Soit maintenant φt valeur de v lorsque $x = 0$ de sorte que $\varphi t = a \cos \frac{2 \varpi t}{\theta}$

on aura l'équation différentielle étant $\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{K}{c \cdot D} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$

$v = a e^{-x \sqrt{\frac{\varpi \cdot c \cdot D}{K \theta}}} \cos\left(\frac{2 \varpi t}{\theta} - x \sqrt{\frac{\varpi \cdot c \cdot D}{K \theta}} \right)$ en effet on a

$\frac{\partial v}{\partial t} = -a \frac{2 \varpi}{\theta} e^{-x \sqrt{\frac{\varpi \cdot c \cdot D}{K \theta}}} \sin\left(\frac{2 \varpi t}{\theta} - x \sqrt{\frac{\varpi \cdot c \cdot D}{K \theta}} \right)$

$\frac{\partial v}{\partial x} = -a \sqrt{\frac{\varpi \cdot c \cdot D}{K \theta}} e^{-x \sqrt{\frac{\varpi \cdot c \cdot D}{K \theta}}} \cos\left(\frac{2 \varpi t}{\theta} - x \sqrt{\frac{\varpi \cdot c \cdot D}{K \theta}} \right) + a e^{-x \sqrt{\frac{\varpi \cdot c \cdot D}{K \theta}}} \sin\left(\frac{2 \varpi t}{\theta} - x \sqrt{\frac{\varpi \cdot c \cdot D}{K \theta}} \right)$

$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = +a \frac{\varpi \cdot c \cdot D}{K \theta} e^{-x \sqrt{\frac{\varpi \cdot c \cdot D}{K \theta}}} \cos\left(\frac{2 \varpi t}{\theta} - x \sqrt{\frac{\varpi \cdot c \cdot D}{K \theta}} \right) - a \frac{\varpi \cdot c \cdot D}{K \theta} e^{-x \sqrt{\frac{\varpi \cdot c \cdot D}{K \theta}}} \sin\left(\frac{2 \varpi t}{\theta} - x \sqrt{\frac{\varpi \cdot c \cdot D}{K \theta}} \right)$

$- a \frac{\varpi \cdot c \cdot D}{K \theta} e^{-x \sqrt{\frac{\varpi \cdot c \cdot D}{K \theta}}} \sin\left(\frac{2 \varpi t}{\theta} - x \sqrt{\frac{\varpi \cdot c \cdot D}{K \theta}} \right) - a \frac{\varpi \cdot c \cdot D}{K \theta} e^{-x \sqrt{\frac{\varpi \cdot c \cdot D}{K \theta}}} \cos\left(\frac{2 \varpi t}{\theta} - x \sqrt{\frac{\varpi \cdot c \cdot D}{K \theta}} \right)$

$= -a \frac{2 \varpi \cdot c \cdot D}{K \theta} e^{-x \sqrt{\frac{\varpi \cdot c \cdot D}{K \theta}}} \sin\left(\frac{2 \varpi t}{\theta} - x \sqrt{\frac{\varpi \cdot c \cdot D}{K \theta}} \right)$ ou $\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{K}{c \cdot D} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ ainsi

la valeur de v satisfait à l'équation différentielle. De plus lorsque $t = 0$ elle devient $\cos 2 \frac{\varpi t}{\theta}$ ainsi il n'y a aucun doute qu'elle ne contienne

la solution cherchée quelle que soit la valeur de θ.

maintenant on mettra ambiende θ 1° $\theta \frac{n+1}{2n+1}$ 2° $\theta(n+1)$

et par conséquent on ne peut douter que la solution ainsi trouvée

question ne soit en général comme il faut!

$$u = (2i-1)\frac{\theta}{2}\ \frac{2\pi}{2}\ \frac{\pi}{n}$$

$$-\frac{1}{2}\ \frac{\pi}{n}\ 1$$

VI.



la température variable φt de la base du prisme infini est donnée par l'équation donnée

$$\varphi t = a \sin \frac{2\pi t}{\theta} - \frac{a\lambda}{2} \cos\left\{\frac{2\pi t}{\theta} - \frac{n+1}{n+1}\right\} + \frac{a\lambda}{2} \cos\left\{\frac{2\pi t}{\theta} - \frac{1}{n+1}\right\}$$

la température variable v d'un point pris à la profondeur x sera exprimée par l'équation.

$$v = a e^{-x\sqrt{\frac{\pi \cdot c \cdot D}{\kappa \theta}}} \sin\left(\frac{2\pi t}{\theta} - x\sqrt{\frac{\pi \cdot c \cdot D}{\kappa \theta}}\right)$$

$$- \frac{a\lambda}{2} e^{-x\sqrt{\frac{\pi \cdot c \cdot D}{\kappa \theta}} \frac{2n+1}{2n+1}} \cos\left(\frac{2\pi t}{\theta} \frac{n+1}{n+1} - x\sqrt{\frac{\pi \cdot c \cdot D}{\kappa \theta}} \frac{2n+1}{n+1}\right)$$

$$+ \frac{a\lambda}{2} e^{-x\sqrt{\frac{\pi \cdot c \cdot D}{\kappa \theta (n+1)}}} \cos\left(\frac{2\pi t}{\theta(n+1)} - x\sqrt{\frac{\pi \cdot c \cdot D}{\kappa \theta (n+1)}}\right)$$

cette solution est évidemment celle qui convient à la fonction φt car 1° elle satisfait à l'équation générale $\frac{dv}{d\tau} = \frac{\kappa}{c \cdot D} \frac{d^2 v}{dx^2}$

2° elle devient égale à φt lorsque x ou $t = 0$.

cette valeur de φt est aussi égale à

$$a \sin \frac{2\pi t}{\theta} \left(1 + 2 \sin \frac{2\pi t}{\theta} \frac{n}{n+1}\right)$$ pour toutes les valeurs de t inférieures à θ puisque φt est périodique de la base du prisme et est représenté par $a \sin \frac{2\pi t}{\theta} \left(1 + 2 \sin \frac{2\pi t}{\theta} \frac{n}{n+1}\right)$ le mouvement d'un point pris à la profondeur x ne sera exprimé par la valeur précédente de v.

Si l'on suppose maintenant que la profondeur x est assez grande pour que la fraction $\left(\frac{1}{e^{\sqrt{\frac{\pi \cdot c \cdot D}{\kappa \theta}}}}\right)^x$ soit extrêmement petite et fasse toujours mathématiquement partie d'un nombre compris entre $+1$ et -1 il est manifeste que la première partie de v sera insensible. il en sera de même de la seconde que le facteur exponentiel est $\left(\frac{1}{e^{\sqrt{\frac{\pi \cdot c \cdot D}{\kappa \theta}}}}\right)^{x\sqrt{2 + \frac{1}{n}}}$ car la fraction exponentielle devient un angle petit, puisque $\frac{2 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}}$ n'est pas de même ordre que la troisième partie de l'intégrale. le facteur trigonométrique devenant 1 et en outre ± 1. cette troisième partie de l'intégrale varie entre les limites $\pm \frac{a\lambda}{2} e^{-x\sqrt{\frac{\pi \cdot c \cdot D}{\kappa \theta}} \sqrt{\frac{1}{n+1}}}$

VII.

La troisième partie de l'énigme de même donne incomparablement plus grande que les deux autres et d'une valeur très sensible à mesure de profondeur. ainsi cette troisième partie semble être à la profondeur de tel autre observateur s'il en existait. ce qui est la principale preuve que il ne reste plus qu'à appliquer cette théorie au mouvement du Soleil

---

Supposons en premier lieu que le Soleil demeure dans l'équateur et au zenith d'un lieu donné sur l'équateur. Si le Soleil demeure de cet astre ne changeant point le lieu prendrait une température fixe, et l'on n'observerait aucune variation dans ses comparaisons de la verticale.

Si le Soleil ne demeure point au zenith mais s'il change et est mesuré par une horloge pendule d'un tems θ. soit θ la durée d'une période. la fonction serait telle par conséquent qu'en augmentant la variable θ de l'intervalle θ on aurait la même valeur que si l'on n'avait point ajouté l'intervalle. il est facile de voir que dans ce cas et après que la cause a encore agi pendant un tems θ, la température relative dans le sein de la terre doit être mesurée par une horloge pendule d'un tems θ et que la durée de la période est θ de la et de l'analyse qui suit il suit qu'à une certaine profondeur les variations périodiques qui sont semblables. cette même horloge pendule d'une égale longueur de période est θ de la durée de la période devient quatre fois neuf fois seize fois plus grande.

Supposons maintenant que le Soleil ne demeure point au zenith mais qu'il fasse quelque mouvement périodique il passe au tropique boréal à l'équateur et pour le sud puis qu'à l'autre tropique puis ainsi successivement et dans une période de tems donnée θ'. (la période précédente était la durée est θ et celle ci dans laquelle est θ' commencent ensemble à l'origine du tems. Soit si θ = θ' il est manifeste que le thermomètre revient analogue au précédent c'est à dire que la chaleur acquise sera sujette une température locale périodique dont l'intervalle sera θ qui enfermera de même d'une période quelconque de la verticale, que les grandeurs des variations diminuent avec la profondeur et qu'elles diminuent insensibles à une distance même bornée par la plus grande de la durée θ.

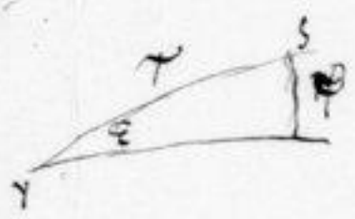
---

mais si les grandeurs θ et θ' sont inégales on ne peut confondre ce dernier cas avec le précédent la question consiste à examiner quelles sont alors les variations périodiques.
les grandeurs θ et θ' ayant commencé ensemble s'écoulent de la même durée pendant un temps t et sont alors inégales par la différence de leur effet thermométrique dans les deux cas. voici à quoi nous réduirons l'action de chacune d'elle.

VIII.



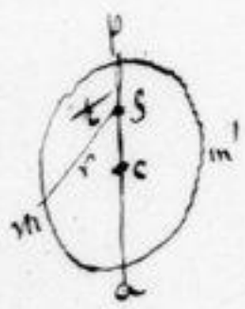
on suppose que l'astre dont la chaleur émane parte de l'équateur avec la vitesse v revienne en e ensuite le porte en t' en e en t ainsi de suite. on suppose aussi que la distance de ce foyer soit variable et qu'elle change de manière à représenter les variations successives de la distance du soleil à la terre. lorsque le foyer est en S la quantité de chal sur qu'il envoye à l'élément ω de la surface du globe terrestre est en raison composée de l'inverse du quarré de la distance du soleil à la terre et de la cosinus de l'angle compris entre la direction du rayon et la verticale (c'est à dire de la déclinaison du soleil) et de l'inverse du quarré de la distance du soleil à la terre. l'action de foyer peut être représentée par



$\frac{k}{r^2}\cos\varphi$ en désignant par φ la déclinaison.

ou désignant par γ la longitude $\underline{\gamma s}$ du soleil ou la différence à l'équinoxe du printemps, on a $\sin\varphi = \sin\varepsilon . \sin\lambda$ dans ε est l'inclinaison de l'écliptique. ainsi l'action du foyer sur l'élément ω peut être représentée par $\frac{k\omega}{r^2}(1-\sin^2\varepsilon\sin^2\lambda)^{\frac{1}{2}}$ en désignant par k une constante $\cos\varphi = (1-\sin^2\varepsilon\sin^2\lambda)^{\frac{1}{2}}$

on voit aisément que l'action de la surface du globe terrestre est en raison composée de $\frac{k\cos\varphi}{r^2}$ ou $\frac{k(1-\sin^2\varepsilon\sin^2\lambda)^{\frac{1}{2}}}{r^2}$ il est d'ailleurs évident que si l'on augmente φ de 2π la quantité $\frac{k\cos\varphi}{r^2}$ ne varie pas de sorte qu'en désignant par θ le nombre de jours que contient l'année tropique et par t le nombre de jours écoulé $k\left(1-\sin^2\varepsilon\sin^2\left(\frac{2\pi t}{\theta}\right)\right)^{\frac{1}{2}}$ il faut substituer au dénominateur



soit pma m' p l'ellipse terrestre et t le nombre de jours écoulé depuis le passage de la planète au périgée p jusqu'à son arrivée en m et r le rayon vecteur. p by a mener la droite commune entre $\frac{r}{a}$ et t on désigne par a la demi grande axe cp. et nous supposerons ici a = 1. la. relation entre φ et t la loi des aires donne une équation $nt = u - e\sin u$

$r = 1 - e\cos u$

le nombre n est un nombre constant qui dépend de a. il faut éliminer u et l'on trouve la relation entre r et t. désignant par u et e deux nouvelles variables dont la première est l'excentricité.

lorsque e est nulle on a $nt = u$ soit donc $u = nt + he + \ldots$ ordonnée suivant les puissances de l'excentricité e et l'on trouve facilement la première puissance on aura donc $\sin u = \sin nt + he\cos nt$

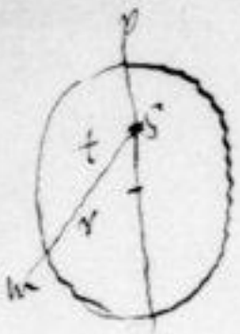
$\cos u = \cos nt - he\sin nt$

donc les deux équations deviennent $nt = nt + he - e\sin nt$

$r = 1 - e\cos nt$

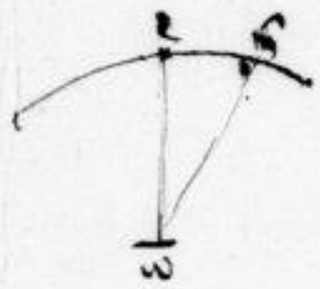
il faut voir que si l'excentricité était entièrement nulle comme nous le supposerons toujours.

IX, m.



on doit avoir $r = \frac{N}{1 - e \cos nt}$ c'est ce qui fait que l'horizon coupe 249
au moyen de la formule commune (mécanique voy. page 179 Duchanel
celel. tome 1er livr. II.) c'est à dire que dans l'ellipse presque circulaire

la différence de la distance moyenne 1 au rayon vecteur ou
l'équation de la distance moyenne et du rayon comprise de l'excentricité
e et du cosinus de l'anomalie moyenne nt
soit θ' le nombre de jours que le soleil le passage de la planète
au périgée par qui à son retour au périgée. il est certain que n
est $\frac{2\varpi}{\theta'}$ et que l'on a ainsi $r = 1 - e \cos\left(\frac{2\varpi t}{\theta'}\right)$ il ne peut y avoir
aucun doute sur ce résultat premièrement que l'excentricité est très petite
et il est manifeste que θ' est la durée de l'année qui conduit l'astronome
de son périgée au périgée année qui diffère bien peu de l'année
tropique



on a maintenant pour l'expression de l'action variable du
foyer. la quantité $K \left(1 - \sin^2\varepsilon \sin^2 x\right)^{\frac{1}{2}}$ on développant
$\left(1 - e \cos\left(\frac{2\varpi t}{\theta'}\right)\right)^2$

par z cette action du foyer qui varie avec le temps à compté t

$\sin^2 x = \frac{1}{2}\cos(x-x) - \frac{1}{2}\cos(x+x)$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$

$1 - \sin^2\varepsilon \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right)$

$\left(1 - \frac{1}{2}\sin^2\varepsilon\right) + \frac{1}{2}\cos 2x \sin^2\varepsilon$

$\frac{1 + \frac{1}{2}\sin^2\varepsilon \cdot \cos 2x}{1 - 2e\cos y}$

$\left(1 + \frac{1}{2}\sin^2\varepsilon \cos 2x\right)(1 + 2e\cos y)$

$1 + 2e\cos y + \frac{1}{2}\sin^2\varepsilon \cos 2x$

$+ e\sin^2\varepsilon \cos 2x \cos y$

$+ e\sin^2\varepsilon \cos(2x+y)$

$- \frac{1}{2}e\sin^2\varepsilon \cos(2x+y)$

on a enfin $z = \frac{K\sqrt{1 - \sin^2\varepsilon \sin^2 \frac{2\varpi t}{\theta}}}{\left(1 - e\cos\left(2\varpi \frac{t}{\theta'}\right)\right)^2}$ ·

en général l'action du foyer varie par deux causes 1° à raison de la déclinaison
φ 2° à raison de la distance r exprimée par l'expression $z = \frac{K\cos\varphi}{r^2}$

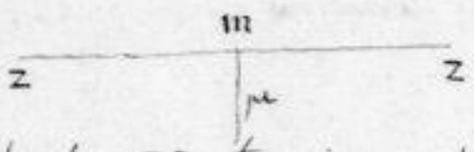
le numérateur P est une fonction périodique du temps qui ne change
point de valeur lorsque le temps t est augmenté de θ durée de l'année
tropique. le dénominateur Q ou r^2 est une fonction de t qui
ne change point de valeur lorsque le temps augmente de θ' durée de l'année
anomalistique qui ramène la terre du périgée au périgée.

il suit de là que z est de cette forme

$$z = \left(a_0 + a_1 \cos 2\varpi\frac{t}{\theta} + a_2 \cos 2\cdot 2\varpi\frac{t}{\theta} + \ldots + b_1 \sin 2\varpi\frac{t}{\theta} + b_2 \sin 2\cdot 2\varpi\frac{t}{\theta}\right)\left(a'_0 + a_1 \cos 2\varpi\frac{t}{\theta'} + a_2 \cos 2\cdot 2\varpi\frac{t}{\theta'} + \beta_1 \sin 2\varpi\frac{t}{\theta'} + \beta_2 \sin 2\cdot 2\varpi\frac{t}{\theta'}\right)$$

or l'action d'une cause variable représentée par ce produit déterminé
certainement dans une variation à très longue période qui pénètre dans
profondeur incomparablement plus grande que les variations annuelles.
c'est la propriété que je vais maintenant d'examiner
quelle peut être la grandeur de cette variation séculaire.

Températures d'un solide exposé à l'action périodique d'un foyer.



le plan zz termine un solide infini au dessus duquel il est placé. le point m du plan est exposé à l'action variable d'un foyer de chaleur. le solide est ainsi echauffé dans tous les points de la surface depuis un tems infini. l'action variable du foyer est périodique. il s'agit de déterminer la loi suivant laquelle varie la température d'un point donné du solide.

les points de la surface qui sont placés autour du point m etant assujettis aux mêmes conditions que lui il est visible qu'il suffit de considérer le mouvement de la chaleur dans la verticale qui passe par le point m. c'est à dire qu'un point pris de cette verticale est en contact avec des points qui ont à chaque instant la même température que lui. il ne s'agit donc que de considérer l'action mutuelle des points de la même verticale.

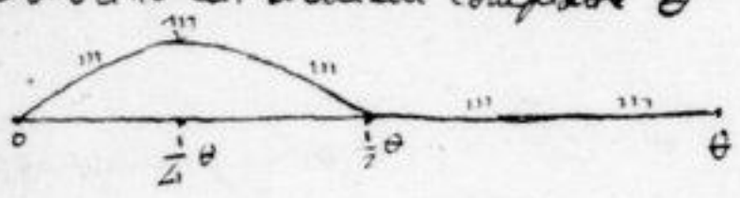
soit u la distance à laquelle est placé le point pe et v la température variable de ce point v est une fonction de u et du tems t. on a donc l'équation $\frac{dv}{dt} = \frac{K}{C.D}\left(\frac{d^2v}{du^2}\right)$ en désignant par K, C, D la conductibilité spécifique la capacité de chaleur et la densité ou faisant $\frac{K}{C.D} = \kappa$ on aura

$\frac{dv}{dt} = \kappa \frac{d^2v}{du^2}$. on satisfait à cette équation en supposant $v = a e^{-gu} \cos(g^2\kappa t - gu)$ et l'on y satisfait aussi en supposant $v = b e^{-hu} \sin(h^2\kappa t - hu)$ les quantités a et g sont arbitraires il en est de même de b et h. on peut donc prendre pour v la somme d'une infinité de valeurs particulières de cette espece en donnant aux arbitraires a, g, b, h toutes les valeurs que l'on voudra.

l'action variable du foyer étant supposée périodique il est manifeste qu'à près un tems infini la surface du solide parvient à un état périodique qui se rétablit après un intervalle de tems θ égal à celui qui règle l'action du foyer on pourroit démontrer rigoureusement ce résultat mais on peut aussi le regarder comme évident de lui même. la température de la surface est exprimée par la valeur de v lorsqu'on fait u = 0 et il s'ensuit que cette valeur de v se rétablira après le tems égal à θ si l'on fait $g^2\kappa\theta = 2i\omega$ i etant un nombre entier on a donc $g^2 = \frac{i\omega}{\kappa\theta}$. si l'on donne à i toutes les valeurs possibles $i = 0 \ldots 1 \ldots 2 \ldots 3 \ldots$ on arrivera enfin à toutes les valeurs que l'on peut donner à g et h ou plutôt il est visible que si l'on prend pour g et h toutes les valeurs la fonction v satisfera 1° à l'équation différentielle 2° à la condition de se rétablir à la surface après le tems θ, 2θ, 3θ, 4θ .. on a ainsi le moyen de déterminer les arbitraires a b ... en considérant l'action variable du foyer qui est supposée connue.

la quantité $\bar{K}\frac{dv}{du}dt$ exprime ce qui passe de chaleur pendant l'instant dt du point dont la profondeur est u + du au point dont la profondeur est u si dans l'expression $\bar{K}\frac{dv}{du}dt$ on suppose u = 0

Supposons que la fonction φt soit représentée par l'ordonnée de la courbe o m m m m et croit l'ordonnée croit de o à $\frac{1}{4}\theta$ de croit jusqu'à ce que l'abcisse soit égale à $\frac{1}{2}\theta$ et de même nulle jusqu'à cette abcisse ait la valeur complette θ



on résoudra par les principes connus cette fonction φt en une série telle qu'on a

$$(\xi)\quad \varphi t = a_0 + a_1 \sin 2\varpi\frac{t}{\theta} + a_2 \sin 2\cdot\frac{2\varpi t}{\theta} + a_3 \sin 3\frac{2\varpi t}{\theta} + \&c + b_1 \cos 2\varpi\frac{t}{\theta} + b_2 \cos 2\frac{2\varpi t}{\theta} + b_3 \cos 3\frac{2\varpi t}{\theta}$$

et l'on comparera cette série à la suivante.

$$(c)\quad f\varphi t = -\frac{Ah}{f} + \grave{a}h + \left(hb - \bar{K}\overline{a - b\sqrt{\frac{\varpi}{K\theta}}}\right)\sin 2\varpi\frac{t}{\theta} + ha + \bar{K}\overline{a + b\sqrt{\frac{\varpi}{K\theta}}}\cos 2\varpi\frac{t}{\theta} + hb' - \bar{K}(a' - b')\sqrt{2\frac{\varpi}{K\theta}}\sin 2\cdot\frac{2\varpi t}{\theta} + ha' + \bar{K}(a' + b')\sqrt{2\frac{\varpi}{K\theta}}\cos 2\cdot\frac{2\varpi t}{\theta} + \&c$$

les valeurs de $\grave{a}$ et $\begin{matrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \end{matrix}$ dépendent des valeurs indéterminées qui répondent aux valeurs successives de φ qui sont données par les valeurs différentes de i savoir $0 \ldots 1 \ldots 2 \ldots 3$ &c on peut donc facilement déterminer ces coefficients à $\begin{matrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \end{matrix}$ &c et par conséquent il ne restera rien d'inconnu dans la valeur générale de v.



Supposons qu'une surface égale et limitée soit exposée à l'action du foyer et que cette surface appartienne à un vase rempli d'un liquide à la température commune A. la surface totale équivaut à S et avant que le foyer n'agisse toute la surface intérieure du vase est à la température A. Supposons maintenant que l'action du foyer commence à échauffer le vase et qu'elle y établisse bientôt une température constante $A + \Delta$. il faut que la quantité de chaleur communiquée par le foyer en θ compense celle qui se dissipe par la surface et équivalue à $hS\Delta$ ou on aura donc

$$\frac{f}{h} = \Delta\frac{S}{\theta}$$

la quantité Δ pouvant être connue par l'observation il est facile de déterminer cette quantité $\frac{f}{h}$ qui entre dans l'équation (c) on peut aussi déterminer par l'expérience la valeur de $\frac{\bar{K}}{12}$ ainsi que la valeur de K ou $\frac{\bar{K}}{c.p}$

---

la valeur de v à la fin

$$\varphi t = \grave{a} + a\cos$$
$$+ b\sin$$

et $\varphi t = \grave{a} + a\cos\frac{2\varpi}{\theta}$

$b\sin 2\varpi$

soit $\frac{2\varpi t}{\theta} = t$

ou mieux $\psi\left(t\cdot\frac{\theta}{2\varpi}\right)$

Depuis $t = 0$

si donc la circonf

$$\psi t = \grave{a} + a\cos$$
$$b\sin$$

d'après le théorème

$t = 2\varpi$ ainsi la

déterminer cette température

la valeur générale

$$ae^{-g}$$
$$v = \grave{a} + $$
$$+ be^{-g}$$

lorsque la profondeur

que v devient égale

profondeur n'est

facile de connaître

si maintenant on

autre chose que la

d'abord

on a

la valeur de v à la surface est exprimée par l'équation suivante.

$$\psi t = \grave{a} + \frac{a \cos 2g^2 \kappa t}{1^n} + \frac{a' \cos 2g'^2 \kappa t}{} + \text{&c. ou encore } 2g^2\kappa\theta = 2i\varpi$$
$$+ b \sin 2g^2 \kappa t + b' \sin 2g'^2 \kappa t + \text{- - &c.}$$

$$\text{et } \psi t = \grave{a} + \frac{a \cos 2\varpi t}{\theta} + \frac{a' \cos 2 \frac{2\varpi t}{\theta}}{} + \frac{a'' \cos 3 \frac{2\varpi t}{\theta}}{} + \text{- - - équation qui a lieu depuis } t=0 \text{ jusqu'à } t=\theta$$
$$b \sin \frac{2\varpi t}{\theta} \quad b' \sin 2 \frac{2\varpi t}{\theta} \quad b'' \sin 3 \frac{2\varpi t}{\theta}$$

soit $\frac{2\varpi t}{\theta} = t$

$$\text{on aura } \psi\left(t \cdot \frac{\theta}{2\varpi}\right) = \grave{a} + \frac{a \cos t}{b \sin t} + \frac{a' \cos 2t}{b' \sin 2t} + \text{- - - équation qui doit avoir lieu}$$

depuis $t=0$ jusqu'à $t=2\varpi$.

si donc la dite comparaison entre nos deux valeurs de ψt divisé par θ on aura

$$\psi t = \grave{a} + \frac{a \cos t}{b \sin t} + \frac{a' \cos 2t}{b' \sin 2t} + \text{&c.} \quad \text{or la valeur de } 1^{er} \text{ coefficient } a' \text{ est}$$

d'après le théorème connu $\frac{1}{2\varpi} \int \psi t \cdot dt$ l'intégrale étant prise depuis $t=0$ jusqu'à $t=2\varpi$ ainsi le coefficient $\grave{a}$ est en effet la température moyenne de la surface ou la somme de toutes les températures divisée par le nombre.

---

la valeur générale de v est donnée par l'équation suivante

$$v = \grave{a} + \frac{a e^{-gu} \cos(2g^2\kappa t - gu)}{+ b e^{-gu} \sin(2g^2\kappa t - gu)} + \frac{a' e^{-g'u} \cos(2g'^2\kappa t - g'u)}{b' e^{-g'u} \sin(2g'^2\kappa t - g'u)} + \text{- - - -}$$

lorsque la profondeur u est un peu considérable il est vraisemblable d'après les valeurs de $g\ g'\ g''$ &c que v devient égale à $\grave{a}$. on reconnait par là que la température prise à une certaine profondeur n'est rien autre chose que la température moyenne de la surface. il est toujours facile de connaître par l'expérience la valeur du coefficient $\grave{a}$.

---

si maintenant on examine l'équation (E) page 2 on voit que la valeur de a_0 n'est rien autre chose que la valeur moyenne de la variable φt ou $\frac{1}{2\varpi} \int \varphi t$

on a d'abord l'équation $\frac{h}{f}(\grave{a} - A) = a_0$

on trouvera la quantité de chaleur qui sort à chaque instant de la surface du solide.

Soit A la température extérieure et constante de l'espace qui est au delà du plan. et H la conductibilité de la surface du solide à cet espace on aura $h(v-A)$ pour exprimer la quantité de chaleur qui se communique du solide echauffé à l'espace.

Supposons maintenant pour définir l'action du foyer que pendant l'unité de tems la quantité de chaleur que l'action permanente et invariable du foyer considéré dans un certain état fait pénétrer dans le solide soit f. on aura $f\varphi(t)$ pour exprimer l'action variable du foyer. la fonction φt peut etre supposée égale à 0 lorsque $t=0$ égale à 1 pour une certaine valeur T et égale à 0 lorsqu'on fait $t=\theta$ de plus il est nécessaire que selon l'hypothèse la valeur de $\varphi(t+\theta)$ soit la même que $\varphi(t)$. on peut aussi supposer que la plus grande valeur de φt est 1 et qu'elle répond à $t=\frac{1}{4}\theta$. cet hypothèses rapprochant la question des phénomènes naturels que l'on peut calculer.

Le solide perd donc à chaque instant la quantité $h(v-A)dt$ et reçoit la quantité $f\varphi(t)$; par conséquent la couche qui est au dessous de la surface transmet la quantité

$(h(v-A) - f.\varphi t.)dt$ on aura donc l'équation $k\frac{dv}{du} + f\varphi t = h(v-A)$ qui se rapporte à la surface lorsqu'on fait $u=0$

Les termes semblables à $ae^{-gu}\cos(2g^2kt-gu)$ donnent

$$\frac{dv}{du} = -age^{-gu}\cos(2g^2kt-gu) + age^{-gu}\sin(2g^2kt-gu)$$ et lorsque $u=0$

$$\left(\frac{dv}{du}\right) = ag\{\sin 2g^2kt - \cos 2g^2kt\}.$$ Les termes semblables à $be^{-hu}\sin(2h^2kt-hu$

donnent $\frac{dv}{du} = -hbe^{-hu}\sin(2h^2kt-hu) - hbe^{-hu}\cos(2h^2kt-hu)$ et lorsque $u=$

$$\left(\frac{dv}{du}\right) = -hb(\sin 2h^2kt + \cos 2h^2kt)$$ par conséquent la somme des termes semblables aux précédents donnera $\frac{dv}{du} = \overline{ag-bg}\sin 2g^2kt - \overline{ag+bg}\cos 2g^2kt$. Si les valeurs de g et

leurs mêmes on connoit par la la forme générale de la quantité $\frac{dv}{du}$ il suffit de mettre pour toutes les valeurs possibles indiquées précédemment.

la valeur de v à la surface sera $a\cos 2g^2kt + b\sin 2g^2kt$ en mettant pour g toutes les valeurs indiquées. on aura donc en substituant dans l'équation $k\frac{dv}{du} - h(v-A) = -f\varphi t$

$$f\varphi t = -Ah + \sin 2g^2kt(hb - k\overline{ag-bg}) + \cos 2g^2kt(ha + k\overline{ag+bg})$$

en mettant dans le second membre à la place de a toutes les valeurs indiquées.

BIBLIOTHÈQUE IMPÉRIALE MSS.