



DE LA CONTROVERSE ENTRE *Mrs. LEIBNITZ*
& *BERNOULLI*

SUR LES LOGARITHMES

DES NOMBRES
NEGATIFS ET IMAGINAIRES.

PAR M. EULER.

Quoique la doctrine des logarithmes soit si solidement établie, que les vérités, qu'elle renferme, semblent aussi rigoureusement démontrées que celles de la Geometrie; les Mathématiciens sont pourtant encore fort partagés sur la nature des logarithmes des nombres négatifs & imaginaires : & quand on ne trouve pas cette controverse fort agitée, la raison en est apparemment, qu'on n'a pas voulu rendre suspecte la certitude de tout ce, qu'on avance dans les parties pures de la Mathématique, en développant devant les yeux de tout le monde les difficultés, & même les contradictions, auxquelles les sentimens des Mathématiciens sur les logarithmes des nombres négatifs & imaginaires sont assujettis. Car, bien que leurs sentimens puissent être fort différens sur des questions, qui regardent la Mathématique appliquée, où les diverses manières d'envisager les objets & de les ramener à des idées précises, peuvent donner lieu à des controverses réelles; on a toujours prétendu, que les parties pures de la Mathématique étoient entièrement délivrées de tout sujet de dispute, & qu'il ne



s'y trouvoit rien, dont on ne fut en état de démontrer, ou la vérité ou la fausseté.

Comme la doctrine des logarithmes appartient sans contredit à la Mathématique pure, on sera bien surpris d'apprendre, qu'elle ait été jusqu'ici assujettie à des controverses tellement embarrassées, que de quelque parti qu'on se déclare, on tombe toujours en des contradictions, qu'il semble tout à fait impossible de lever. Cependant si la vérité doit se soutenir partout, il n'y a aucun doute, que toutes ces contradictions, quelque ouvertes qu'elles paroissent, ne peuvent être qu'apparentes, & qu'il n'y sauroit manquer des moyens pour sauver la vérité, quoique nous ne sachions point, de quel endroit nous puissions tirer ces moyens.

Cette controverse sur les logarithmes des nombres négatifs & imaginaires se trouve agitée avec assez de force dans le Commerce littéraire entre M. Leibnitz & M. Jean Bernoulli. Ces deux grands Mathématiciens, à qui nous sommes pour la pluspart redevables de l'Analyse des infinis, furent tellement partagés sur cet article, qu'il n'y avoit pas moyen de les mettre d'accord là dessus ; quoique l'un & l'autre n'ait eu en vuë que la vérité, & qu'ils fussent également éloignés de soutenir leurs sentimens avec opiniâtreté. Mais chacun a trouvé dans le sentiment de l'autre tant de contradictions, que ç'auroit été une complaisance trop outrée, si l'un avoit changé son sentiment en faveur de l'autre. Car il faut remarquer que les contradictions, que ces deux Grands hommes se reprochoient, étoient réelles, & point du tout du nombre de celles, qui ne paroissent telles, qu'à la partie opposée, entêtée de son propre sentiment.

Pour mettre donc cette remarquable controverse dans tout son jour, j'exposerai ici séparément les sentimens de M. Bernoulli & de M. Leibniz ; j'y ajouterai ensuite tous les argumens, dont chacun s'est servi pour maintenir son sentiment : & enfin je détaillerai les objections, qu'on peut faire, tant contre les argumens, que contre chaque sentiment même, & je ferai sentir en toutes leurs forces toutes les contradictions,

aux-



auxquelles l'un & l'autre de ces deux sentimens est assujetti, afin qu'on soit d'autant mieux en état de juger, combien il doit être difficile de découvrir la vérité, & de la garantir contre toutes les objections, après que les deux plus grands hommes y ont travaillé en vain.

Sentiment de Mr. Bernoulli.

Mr. Bernoulli soutint, que les logarithmes des nombres négatifs étoient les memes que ceux des nombres affirmatifs: ou que le logarithme du nombre négatif $-a$ étoit égal au logarithme du nombre affirmatif $+a$. Ainsi le sentiment de M. Bernoulli porte qu'il y a $\log(-a) = \log(+a)$.

M. Leibniz a donné occasion à cette declaration de M. Bernoulli, lorsqu'il avança dans la CX C Epitre du Commerce, que la raison de $+1$ à -1 ou de -1 à $+1$ étoit imaginaire, puisque le logarithme ou la mesure de cette raison, c.à d. le logarithme de -1 , qui est l'exposant de cette raison, étoit imaginaire. Là dessus M. Bernoulli déclara dans la CX CIII Epitre qu'il n'étoit point de meme avis, & qu'il croyoit même, que les logarithmes des nombres négatifs étoient non seulement réels, mais aussi égaux aux logarithmes des mêmes nombres pris positivement. Mr. Bernoulli fortifia aussi son sentiment par les raisons suivantes.

1. *Raison.* Pour prouver que $\log(-x) = \log(+x)$, quelque nombre qu'on marque par x , il recourt aux différentiels; & puisque le différentiel de $\log(-x)$ est $\frac{-dx}{-x}$ ou $\frac{dx}{x}$ de même que celui de $\log(+x)$, il en conclut, que ces quantités mêmes $\log(-x)$ & $\log(+x)$, dont les différentiels sont égaux, doivent être égales entr'elles, & partant qu'il est $\log(-x) = \log(+x)$.

2. *Raison.* Cette raison est tirée de la nature de la courbe logarithmique. Pour la faire mieux comprendre, soit V B M une logarithmique décrite sur l'axe O A P, qui est en même tems son asymptote. Soit la soutangente de cette logarithmique, qui est, comme on fait, con-

PLAN-
CHE I.
Fig. I.



stante, $\equiv 1$; & que l'appliquée fixe AB soit aussi $\equiv 1$. Cela posé, si l'on nomme une abscisse quelconque $AP \equiv x$, prise depuis le point fixe A , & l'appliquée qui y répond $PM \equiv y$, on fait que x exprime le logarithme de y , ou que $x \equiv \log y$. Donc prenant les différentiels, on aura pour cette courbe logarithmique cette équation différentielle

$$dx = \frac{dy}{y} \text{ ou } y dx = dy. \text{ Cette équation demeurant la même, quoi-}$$

qu'on mette $-y$ au lieu de y , M. Bernoulli conclut de là, que cette courbe $VB M$ est accompagnée, en vertu de la loi de continuité, de la branche $v b m$, qui lui est égale & semblable, étant située de l'autre part de l'axe OP , de sorte que cet axe soit en même tems un diamètre de la courbe entière. Et partant, puisque la même abscisse AP répond également aux deux appliquées PM & Pm , dont l'une est la négative de l'autre, de sorte que posant $PM \equiv y$ il est $Pm \equiv -y$; il s'ensuit que x est aussi bien le logarithme de $-y$ que de $+y$, par conséquent $\log -y \equiv \log +y$.

3. *Raison.* Comme tout revient à prouver que la logarithmique est composée de deux branches égales, situées de part & d'autre de l'asymtote OP , M. Bernoulli apporte encore une autre raison, qui est, qu'en considérant les courbes comprises dans cette équation plus générale $dx = \frac{dy}{y^n}$, on est d'accord, que toutes ces courbes, lors-

que l'exposant n est un nombre impair, ont deux branches telles, que l'axe, sur lequel sont prises les abscisses x , en est un diamètre. Donc il faut que cette propriété ait aussi lieu, si $n \equiv 1$; or dans ce cas on aura la logarithmique de l'article précédent; d'où il s'ensuit donc, que tant le logarithme de $PM \equiv +y$, que le logarithme de $Pm \equiv -y$ est le même $\equiv AP \equiv x$.

4. *Raison.* Puisqu'il est certain par la nature des logarithmes, que le logarithme d'une puissance quelconque p^n est égal au logarithme de la racine p multipliée par l'exposant n , ou que $\log p^n \equiv n \log p$; il s'ensuit



suit, que prenant pour p un nombre négatif $-a$, il y aura $l(-a)^n = n l(-a)$. Soit $n = 2$, & il fera $l(-a)^2 = 2 l(-a)$. Or parce que $(-a)^2 = a^2$, nous aurons $l(-a)^2 = l a^2 = 2 l a$; d'où il s'ensuit que $2 l(-a) = 2 l a$, & partant $l - a = l + a$. Cela se montre plus promptement de cette manière: Puisque $(-a)^2 = (+a)^2$, il fera $l(-a)^2 = l(+a)^2$, ou bien $2 l - a = 2 l + a$, & par conséquent $l - a = l + a$.

Toutes les autres raisons, qu'on peut alleguer pour prouver ce sentiment, se réduisent aisément à une des quatre, que je viens d'exposer. Je m'en vai donc étaler les objections, qu'on fait contre ce sentiment, & les raisons dont il est appuyé.

1. *Objection.* M. Leibniz opposa contre la première raison; que la règle de différentier le logarithme d'une quantité variable x , en divisant le différentiel de x par la quantité même x n'avoit lieu, que lorsque x marquoit une quantité positive, de sorte qu'on se trompoit en posant le différentiel de $l - x$ égal à $\frac{-dx}{-x}$ ou à $\frac{dx}{x}$. Or il faut avouer, que cette objection est non seulement extrêmement faible, n'étant soutenue par aucune raison valable; mais qu'elle renverseroit tout à fait le calcul différentiel des logarithmes. Car comme ce calcul roule sur des quantités variables *c. à d.* sur des quantités considérées en général, s'il n'étoit pas vrai généralement, qu'il fut $d. l x = \frac{dx}{x}$, quelque quantité qu'on donne à x , soit positive, ou négative, ou même imaginaire, on ne pourroit jamais se servir de cette règle: la vérité du calcul différentiel étant fondée sur la généralité des règles, qu'il renferme. Or M. Leibniz n'auroit pas eu besoin de se tenir à cette objection pour maintenir son sentiment, puisqu'il auroit pu attaquer la raison de M. Bernoulli par une objection beaucoup plus forte, que voilà.

2. *Objection.* Mr. Bernoulli voulant prouver par l'égalité des différentiels, qu'il étoit $l - x = l + x$, prouveroit par le même raisonnement



nement que $\log 2x = \log x$; car le différentiel de $\log 2x$ est $\frac{2dx}{2x} = \frac{dx}{x}$, tout comme celui de $\log x$. Et partant si le raisonnement de M. Bernoulli étoit juste, il s'ensuivroit que non seulement $\log -x = \log +x$, mais aussi que $\log 2x = \log x$ & en général que $\log nx = \log x$, quelque nombre que marque n : conséquence, que M. Bernoulli lui même n'accorderoit jamais. Or on fait que, lorsque les différentiels de deux quantités variables sont égaux, il n'en suit pas davantage, que ce, que ces quantités variables diffèrent entr'elles d'une quantité constante; & on n'en faudroit conclure, qu'elles fussent égales. Ainsi quoique le différentiel de $x+a$ soit $= dx$ aussi bien que celui de x , la conséquence seroit bien fautive, si l'on en vouloit conclure que $x+a = x$. Par cette raison il est donc clair, que puisque le différentiel de $\log -x$ & de $\log +x$ est le même $\frac{dx}{x}$, les quantités $\log -x$ & $\log +x$ ne diffèrent entr'elles que d'une quantité constante, ce qui est également évident, vu que $\log -x = \log -1 + \log x$. Et de là on comprend aussi aisément, que puisque $\log nx = \log x + \log n$, le différentiel de $\log nx$ doit être égal au différentiel de $\log x$. Il est vrai que M. Bernoulli suppose $\log -1 = 0$, de même qu'il est $\log 1 = 0$, de sorte qu'il seroit $\log -x = \log x + \log -1 = \log x$. Mais comme c'est précisément ce que M. Bernoulli veut prouver par ce raisonnement, on voit bien que cette supposition ne peut pas être admise.

3. *Objection.* On peut opposer la même chose contre la seconde raison de M. Bernoulli, quand il veut prouver par l'équation différentielle de la Logarithmique $y dx = dy$, que cette courbe a deux branches semblables situées de part & d'autre de l'axe. Car non seulement cette équation demeure la même, si l'on met $-y$ au lieu de y , mais aussi si l'on met $2y$, ou en général ny pour y ; d'où il suivroit que cette courbe eut une infinité de branches, & que l'abscisse x fut le logarithme commun, non seulement de y & de $-y$, mais aussi de $2y$, & en général de ny , quelque nombre que soit n . Ainsi par la même raison, qu'on est en droit de nier l'infinité des branches de la Logarithmique, on niera aussi l'existence des deux branches, que M. Bernoulli veut établir.

4. *Ob-*



4. *Objection.* Cette objection est encore dirigée contre les deux branches de la courbe logarithmique. Car quoique qu'on puisse sûrement conclure l'existence d'un diamètre d'une courbe, lorsque son équation entre les coordonnées x & y est telle, qu'elle demeure inaltérée, si l'on met $-y$ à la place de y . Cependant ce critère n'est juste, que lorsque l'équation pour la courbe est algébrique, ou renfermée en termes finis. Car on sait qu'une équation différentielle est beaucoup plus générale, que l'équation finie d'où elle a été tirée, & qu'elle renferme une infinité de courbes, qui ne sont pas comprises dans l'équation finie. Ainsi l'équation de la parabole $yy = ax$ a pour différentielle $2y dy = a dx$; mais cette même équation différentielle convient également à cette équation générale $yy = ax \pm ab$, qui renferme à la fois une infinité de paraboles. Il en est de même de l'équation différentielle de la logarithmique $y dx = dy$, qui convient aussi bien à cette équation finie $x = \ln y$, qu'à celle-ci $x = \ln y$, qu'on a pourtant uniquement en vuë. De là il s'ensuit qu'on ne peut pas juger de la forme d'une courbe, en ne considérant que son équation différentielle.

5. *Objection.* Celle-ci regarde la troisième raison, qui est sans doute beaucoup plus forte. Car si toutes les courbes comprises dans cette équation générale $dx = \frac{dy}{y^n}$, où n marque un nombre impair, sont douées d'un diamètre, la même propriété doit avoir lieu, si $n = 1$, ce qui est le cas de la logarithmique. Mais puisque cette propriété n'est évidente, qu'entant qu'on considère les équations intégrales de l'équation $dx = \frac{dy}{y^n}$, qu'on peut toujours assigner algébriquement hormis le cas $n = 1$; de même manière qu'on doit excepter ce cas, lorsque la question roule sur l'intégrabilité de l'équation $dx = \frac{dy}{y^n}$, on fera en droit de faire la même exception, lorsqu'il s'agit du jugement d'un diamètre. Donc, si l'on ne peut pas prouver par quelque



autre raison, que la logarithmique ait un diametre, cet argument tiré de l'équation générale $dy = \frac{dy}{y^n}$ n'est pas convaincant. Pour en montrer plus clairement l'insuffisance, je ferai voir même dans les courbes algébriques des cas, où une équation générale renferme des courbes toutes douées d'un diametre, & que néanmoins il en faut excepter un cas particulier. Qu'on considere cette équation $y = \sqrt[n]{ax} + \sqrt[n]{a^3(b+x)}$, & on ne doutera pas de conclure, que les courbes exprimées par cette équation n'aient un diametre, puisqu'en réduisant l'équation $y = \sqrt[n]{ax} + \sqrt[n]{a^3(b+x)}$ à la rationalité, on obtient une équation du huitieme degré, où tous les exposans de y sont des nombres pairs. Cependant quelque sure que paroisse cette conclusion, il en faut pourtant excepter le cas où $b=0$; car alors l'équation $y = \sqrt[n]{ax} + \sqrt[n]{a^3x}$ étant delivrée des signes radicaux ne monte qu'au quatrieme degré devenant:

$$y^4 - 2axyy - 4a^2xy + a^2xx - a^3x = 0$$

laquelle à cause du terme $4a^2xy$ est destituée de diametre. De tout cela il s'ensuit donc, que cet argument de M. Bernoulli n'est pas assez rigoureux pour demontrer son sentiment.

6. *Objection.* Je passe à la quatrieme raison de M. Bernoulli, qui est sans doute la plus forte; car on ne sauroit revoquer en doute aucun article, qui y sert de fondement, sans renverser les principes les mieux établis de l'analyse & de la doctrine des logarithmes. Car on ne sauroit nier que $(-a)^2 = (+a)^2$, donc il n'y a aucun doute, que leurs logarithmes ne soient égaux c.à d. $l(-a)^2 = l(+a)^2$. Ensuite il est également certain qu'il est en général $lp^2 = 2lp$, donc il y a $l(-a)^2 = 2l-a$ & $l(+a)^2 = 2l+a$: & partant il sera sans contredit $2l-a = 2l+a$. Les moitiés de ces deux quantités seront donc aussi incontestablement égales entr'elles, & par conséquent il sera $l-a = l+a$, tout comme M. Bernoulli le soutient. Mais si ce

raison-



raisonnement est juste, on en tirera aussi d'autres conséquences, que personne, & encore moins M. Bernoulli, ne sauroit accorder : car on prouvera de la même façon, que les logarithmes des quantités imaginaires seroient aussi bien réels, que ceux des nombres négatifs. Car il est certain que $(a\sqrt{-1})^4 = a^4$, donc il sera aussi $l(a\sqrt{-1})^4 = la^4$, & de plus $4l(a\sqrt{-1}) = 4la$, par conséquent $l(a\sqrt{-1}) = la$.

Outre cela, puisqu'il est $\left(\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}a\right)^3 = a^3$, il sera

$$l\left(\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}a\right)^3 = la^3, \text{ \& partant } 3l\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}a = 3la,$$

donc $l\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}a = la$, ce qu'on ne sauroit admettre sans renver-

ser toute la doctrine des logarithmes.

Il seroit donc, selon le système de M. Bernoulli, non seulement $l-1 = l1 = 0$, mais aussi $l\sqrt{-1} = 0$; $l-\sqrt{-1} = 0$; & $l\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} = 0$. Or M. Bernoulli ayant si heureusement réduit

la quadrature du cercle aux logarithmes des nombres imaginaires, & le logarithme de $\sqrt{-1}$ étoit $= 0$, toute cette belle découverte seroit fautive; par laquelle il a fait voir, que le rayon est à la quatrième partie de la circonférence, comme $\sqrt{-1}$ à $l\sqrt{-1}$. Donc posant le rap-

port du diamètre à la circonférence $= 1 : \pi$, il sera $\frac{1}{2}\pi = \frac{l\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}$, &

partant $l\sqrt{-1} = \frac{1}{2}\pi\sqrt{-1}$, ce qui seroit absurde s'il étoit $l\sqrt{-1} = 0$.

Il n'est pas donc vrai que $l\sqrt{-1} = 0$, d'où il faut conclure que quelque solide que paroisse la 4^{me} raison, elle doit être sujette à caution, puisqu'il en suivroit aussi bien $l\sqrt{-1} = 0$ que $l-1 = 0$. Par conséquent on ne peut pas dire, que le sentiment de M. Bernoulli soit suffisamment prouvé.

Il est ici fort étonnant, que, soit qu'on embrasse le sentiment de M. Bernoulli, ou qu'on le rejette, on tombe également en des embar-



ras insurmontables, & même en des contradictions. Car si l'on soutient que $l - a = l + a$ ou $l - 1 = l + 1 = 0$, on est obligé d'avouer qu'il est aussi $l\sqrt{-1} = 0$, puisque $l\sqrt{-1} = \frac{1}{2} l - 1$. Or il seroit non seulement absurde de soutenir, que les logarithmes des quantités imaginaires ne soient pas imaginaires, mais il seroit aussi faux que $l\sqrt{-1} = \frac{1}{2} \pi \sqrt{-1}$, ce qui est néanmoins rigoureusement prouvé. Ainsi en se déclarant pour le sentiment de M. Bernoulli, on tombe en contradiction avec des vérités très solidement établies.

Posons que le sentiment de M. Bernoulli soit faux, & qu'il n'y ait point $l - 1 = 0$; car c'est à quoi se réduit le sentiment de M. Bernoulli; & on sera obligé d'accuser de fausseté quelque opération sur lesquelles le raisonnement de la 4^{me} raison est fondé: ce qu'on ne pourra faire non plus sans tomber en contradiction avec d'autres vérités démontrées. Pour rendre cela plus évident, soit $l - 1 = \omega$, & s'il n'est pas $\omega = 0$, son double 2ω ne sera non plus $= 0$, or 2ω est le logarithme du carré de -1 , lequel étant $= +1$, le logarithme de $+1$ ne seroit plus $= 0$, ce qui est une nouvelle contradiction. De plus $-x$ est aussi bien $= -1 \cdot x$ que $= \frac{x}{-1}$, donc $l - x = lx + l - 1 = lx - l - 1$: il seroit donc $l - 1 = -l - 1$, sans qu'il fut $l - 1 = 0$; or c'est une contradiction de dire qu'il soit $+a = -a$ sans qu'il soit $a = 0$.

Soit donc qu'on dise l'une ou l'autre de ces deux choses, ou que le sentiment de M. Bernoulli est vrai, ou qu'il est faux, on se plonge également dans le plus grand embarras, ayant à combattre avec des contradictions ouvertes. Cependant il faut absolument, ou que ce sentiment soit vrai, ou qu'il soit faux, & il ne paroît point d'autre parti à prendre. Quel moyen donc de se tirer d'affaire & de sauver la vérité contre de si grandes contradictions? Je passe à l'examen du sentiment de M. Leibniz.

Senti-



Sentiment de M. Leibniz.

M. Leibniz soutint que les logarithmes de tous les nombres négatifs, & à plus forte raison ceux des nombres imaginaires, étoient imaginaires : ou puisque $l-a = la + l-1$, il soutint que $l-1$ étoit une quantité imaginaire.

J'ai déjà remarqué que M. Leibniz soutenoit, que la raison de $+1$ à -1 ou de -1 à $+1$ étoit imaginaire, puisque le logarithme de cette raison ou $l-1$ étoit imaginaire. On voit bien que toutes les objections faites contre le système de M. Bernoulli servent à fortifier ce sentiment, & que les raisons alléguées pour le sentiment de M. Bernoulli doivent être contraires à celui de M. Leibniz. Cependant on peut apporter des raisons particulières pour confirmer le sentiment de M. Leibniz, qui seront le sujet de mon examen, qui suit :

1. *Raison.* Ayant fait voir que le logarithme du nombre $1+x$ est égal à la somme de cette série :

$$l(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6 + \&c.$$

d'où l'on voit d'abord que si $x=1$, il doit être $l1=0$. Maintenant pour avoir le logarithme de -1 , il faut mettre $x=-2$, d'où l'on obtient.

$$l-1 = -2 - \frac{1}{2} \cdot 4 - \frac{1}{3} \cdot 8 - \frac{1}{4} \cdot 16 - \frac{1}{5} \cdot 32 - \frac{1}{6} \cdot 64 - \&c.$$

Or il n'y a aucun doute, que la somme de cette série divergente ne sauroit être $=0$; donc il est certain que $l-1$ n'est pas $=0$. Le log. de -1 sera donc imaginaire, puisqu'il est d'ailleurs clair, qu'il ne sauroit être réel, c. à d. ou positif, ou négatif.

2. *Raison.* Soit $y=lx$, & posant e pour le nombre dont le logarithme $=1$, dont la valeur approchée est, comme on fait, $e=2,718281828459$; puisqu'il sera $ye=1/x$, on en tirera $x=e^y$. Ainsi le logarithme du nombre x étant l'exposant d'une puissance de e qui est égale au nombre x , il est clair, qu'aucun exposant réel d'une puissance de e ne sauroit produire un nombre négatif : &



partant pour que e^y devienne $= -1$, ni $y = 0$, ni aucun nombre réel mis pour y sauroit remplir cette condition. Et posant en général pour x un nombre négatif $-a$, dont on suppose le logarithme $= y$, l'équation $e^y = -a$ sera toujours impossible, ou la valeur de y imaginaire.

3. *Raison.* Puisqu'en général la valeur de e^y s'exprime par cette serie infinie :

$$e^y = 1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{1.2} + \frac{y^3}{1.2.3} + \frac{y^4}{1.2.3.4} + \frac{y^5}{1.2.3.4.5} + \&c.$$

qui est toujours convergente, quelque grand nombre qu'on mette pour y , de sorte que les objections tirées de la nature des suites divergentes, comme dans la premiere raison, ne trouvent pas lieu ici. Ainsi le logarithme du nombre x étant posé $= y$, on aura

$$x = 1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{1.2} + \frac{y^3}{1.2.3} + \frac{y^4}{1.2.3.4} + \&c.$$

& partant si y marque le logarithme de -1 , ou qu'il soit $x = -1$, on aura cette égalité

$$-1 = 1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{1.2} + \frac{y^3}{1.2.3} + \frac{y^4}{1.2.3.4} + \&c.$$

à laquelle, comme il est d'abord clair, ne sauroit satisfaire la valeur $y = 0$, vu qu'il en résulteroit $-1 = +1$. Par conséquent il est certain que le logarithme de -1 n'est pas $= 0$.

Je me contente d'avoir apporté ces trois raisons, puisque les autres argumens, par lesquels on peut confirmer le sentiment de Mr. Leibniz, sont déjà contenus dans les objections faites contre le système de Mr. Bernoulli. Cependant ces trois raisons que je viens d'exposer, sont sujettes aux objections suivantes.

1. *Objection.* Contre la premiere raison on dira d'abord, que l'accroisse-



l'accroissement continuel des termes, qui sont tous négatifs, de cette suite :

$$-2 - \frac{1}{2}. 4 - \frac{1}{3}. 8 - \frac{1}{4}. 16 - \frac{1}{5}. 32 - \frac{1}{6}. 64 - \&c.$$

n'est pas une marque feure que la somme de cette suite ne sauroit être $= 0$. Car si cette serie geometrique

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 - x^7 + x^8 - \&c.$$

donne pour le cas $x = -2$, celle-cy

$$-1 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + \&c.$$

& pour le cas $x = -3$ celle-cy.

$$-\frac{1}{2} = 1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + \&c.$$

pourquoi, dira-t-on, ne feroit il pas possible, que la somme d'une serie, dont les termes croissent ayant par tout le meme signe, ne fut $= 0$. Pour en donner un exemple, on n'a qu'à ajouter à la derniere serie termes pour termes, celle-cy :

$$\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \&c.$$

& on aura effectivement :

$$0 = 2 + 2 + 10 + 26 + 82 + 242 + 730 + \&c.$$

Donc si la somme de cette serie, est $= 0$, quelle absurdité feroit il donc de soutenir, qu'il fut aussi

$$0 = -2 - \frac{1}{2}. 4 - \frac{1}{3}. 8 - \frac{1}{4}. 16 - \frac{1}{5}. 32 - \frac{1}{6}. 64 - \&c.$$

& partant la premiere raison n'est pas convainquante.

2. *Objection.* La seconde raison est telle, qu'on pourroit aussi s'en servir pour prouver le sentiment opposé. Car puisqu'il y a $x = e^y$ supposant y le logarithme du nombre x , toutes les fois que y est une fraction ayant pour dénominateur un nombre pair, il faut avouer qu'alors la valeur de e^y & partant aussi de x , est aussi bien negative qu'affirmative. Ainsi si $\frac{m}{2n}$, est un logarithme, le nombre x qui lui répond

étant



étant $e^{\frac{m}{2n}} = \sqrt[n]{e^{\frac{m}{2}}}$, fera tant affirmatif que negatif; de sorte que dans ce cas tant x que $-x$ aura le même logarithme $\frac{m}{2n}$. Donc, puis-

que les logarithmes ne sont pas des nombres rationels, & par conséquent équivalens à des fractions, dont les numérateurs & dénominateurs sont infiniment grands, on pourra toujours regarder les dénominateurs comme des nombres pairs; il s'ensuit que le même logarithme, qui convient au nombre positif $+x$, conviendra aussi au nombre negatif $-x$.

3. *Objection.* La troisième raison est sans doute la plus forte, puisqu'elle semble exclure absolument les nombres négatifs du nombre de ceux, à qui répondent des logarithmes réels. Car il est clair que quelque nombre réel qu'on mette pour y , la valeur de cette série

$$x = 1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{1.2} + \frac{y^3}{1.2.3} + \frac{y^4}{1.2.3.4} + \&c.$$

ne fauroit jamais devenir négative, de sorte qu'aucun logarithme réel ne fauroit répondre à un nombre négatif. Cependant cette série n'étant vraie, qu'autant qu'elle découle de la formule finie e^x , les objections précédentes ont ici également lieu. Car si e^x peut donner un nombre négatif, il importe fort peu, si la série qui lui est égale en donne aussi un ou non? Pour reconnoître cela, on n'a qu'à considérer une formule radicale, comme $\frac{1}{\sqrt[1]{1-x}}$, qui est aussi bien $\frac{+1}{\sqrt[1]{1-x}}$ que

$\frac{-1}{\sqrt[1]{1-x}}$, quoique la série égale

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1.3}{2.4}x^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^3 + \&c.$$

ne donne que la valeur affirmative, quelque nombre qu'on mette pour x .

M. Leibniz ne manqueroit pas de répondre à ces objections; & comme la première ne prouve pas le contraire de son sentiment, & qu'elle



qu'elle ne rend que douteuse la premiere raison, il ne perdrait rien de renoncer à cette premiere raison, & de s'en tenir principalement aux autres. Car au fond la seconde objection ne détruit point son sentiment, qui se réduit uniquement à prouver que $l-1$ n'est pas $= 0$: or la seconde objection ne porte aucune atteinte à cela, vu que si e^y doit être $= -1$, l'exposant y ne sauroit être aucune fraction de la forme $\frac{m}{2n}$, pour que le signe radical puisse fournir une valeur negative.

Car on conviendra aisément, que soit qu'on mette pour y un nombre affirmatif plus grand que zero, ou un nombre negatif quelconque pour y , la valeur de la puissance e^y ne devient jamais $= -1$. Donc si y n'est pas imaginaire, il faudroit qu'il fut $e^y = -1$ dans le cas $y=0$. Mais dans ce cas évanouit toute ambiguité de signes, qui pourroit avoir lieu à cause des signes radicaux, & il est indubitablement $e^0 = +1$. Et si l'on vouloit dire, qu'on put regarder 0 comme $\frac{0}{2}$, & e^0 comme $\sqrt[e^0]{e^0} = \sqrt[e^0]{1}$, dont la valeur seroit aussi $= -1$; ce seroit une exception fort foible, puisque par la même raison on prouveroit que $-a = +a$: car posant $a = a^{\frac{2}{2}} = \sqrt[a^2]{a^2}$, on en tireroit aussi bien $a = -a$ que $a = +a$. Pour prévenir ces sortes de conséquences fausses on n'a qu'à remarquer, qu'une telle expression $a^{\frac{m}{2n}}$ n'a deux valeurs, l'une affirmative & l'autre negative, que lorsque la fraction $\frac{m}{2n}$ est réduite à ses plus petits termes, & que le dénominateur demeure encore un nombre pair. Ainsi comme la valeur de ces puissances, a^1, a^2, a^3, a^4 , &c. n'est pas ambiguë, aussi celle-cy a^0 ne sauroit être ambiguë. Il est donc toujours $a^0 = +1$, ce qui suffit pour détruire la seconde objection; & la troisième n'a aucune force, qu'en tant que la seconde subsiste.

Il paroît donc que le sentiment de M. Leibniz est mieux fondé, puisqu'il n'est pas contraire à la découverte de M. Bernoulli, qu'il est



$\log V-1 = \frac{1}{2} \pi V-1$; puisque M. Leibniz soutient, que le logarithme de -1 , & à plus forte raison celui de $V-1$, est imaginaire. Mais en adoptant le sentiment de Mr. Leibniz on se jette dans les difficultés & contradictions susmentionnées. Car si $\log -1$ étoit imaginaire, son double c.à d. le logarithme de $(-1)^2 = +1$ le seroit aussi, ce qui ne convient pas avec le premier principe de la doctrine des logarithmes, en vertu duquel on suppose $\log +1 = 0$.

De quelque coté donc qu'on se tourne, soit qu'on embrasse le sentiment de M. Bernoulli, ou celui de M. Leibniz, on rencontre toujours de si grands obstacles à maintenir son parti, qu'on ne se sauroit mettre à l'abri des contradictions. Cependant il semble, que si l'un de ces deux sentimens est faux, l'autre doit nécessairement être vrai; & qu'il n'y a point de milieu à choisir. Voilà donc une question extrêmement importante, qui est, d'établir la doctrine des logarithmes, de telle sorte qu'elle ne soit plus assujettie à aucune contradiction.

Mais après avoir bien pesé les contradictions, qui se trouvent de part & d'autre, on sera porté à croire, qu'une telle conciliation est une chose tout à fait impossible; & les ennemis des Mathématiques ne manqueront pas d'en tirer des conséquences fort facheuses contre la certitude de cette science. Car quand les Pyrrhoniens ont attaqué toutes les sciences, on conviendra aisément, qu'il s'en faut beaucoup, que les objections, qu'ils ont apportées contre aucune science, approchent seulement, à l'égard de leur solidité, des objections que je viens d'exposer contre la doctrine des logarithmes. Cependant je ferai voir si clairement, qu'il n'y restera plus le moindre doute, que cette doctrine est solidement établie, & que toutes les difficultés susmentionnées ne tirent leur origine, que d'une seule idée peu juste: de sorte que dès qu'on rectifiera cette idée, toutes ces difficultés & contradictions, quelque fortes qu'elles aient pu paroître, s'évanouiront d'abord, & alors toute cette doctrine des logarithmes se soutiendra si bien, qu'on sera en état de résoudre aisément toutes les objections, qui ont paru irrésolubles auparavant. Sans ce developement, qui a pourtant été



été inconnu jusqu'ici aux Mathématiciens, je ne sai pas, de quel oeil on devroit envisager la doctrine des logarithmes : d'un coté on devroit avouër, qu'elle est vraie & aussi solidement établie qu'aucune autre partie de l'Analyse ; or de l'autre coté on ne sauroit disconvenir, que cette même doctrine seroit assujettie à des contradictions, auxquelles il seroit impossible de répondre. On seroit par conséquent obligé d'avouër, que la Mathématique, & même l'Analyse, renferme des mystères incompréhensibles à nos esprits. Ensuite si ces mystères n'ont été tels qu'à cause d'une seule idée, qui n'étoit pas entierement exacte, on en tirera cette conséquence fort importante, qu'il est extrêmement dangereux de juger des choses, dont on ne se peut former que des idées imparfaites : or il est bien certain, que hormis les Mathématiques le nombre des idées distinctes & complètes est fort petit.

DENOÛEMENT DES DIFFICULTÉS PRÉCÉDENTES.

Il faut d'abord avouër, que si l'idée, que Mrs. Leibniz & Bernoulli ont attachée au terme de logarithme, & que tous les Mathématiciens ont eu jusqu'ici, étoit parfaitement juste, il seroit absolument impossible de délivrer la doctrine des logarithmes des contradictions, que je viens de proposer. Or l'idée des logarithmes étant tirée de leur origine, dont nous avons une parfaite connoissance, comment seroit-il possible qu'elle fut défectueuse ? Lorsqu'on dit que le logarithme d'un nombre proposé est l'exposant de la puissance d'un certain nombre pris à volonté, laquelle devient égale au nombre proposé, il semble qu'il ne manque rien à la justesse de cette idée. Cela est aussi bien vrai ; mais on accompagne communément cette idée d'une circonstance, qui ne lui convient point : c'est qu'on suppose ordinairement, presque sans qu'on s'en apperçoive, qu'à chaque nombre il ne répond qu'un seul logarithme ; & pour peu qu'on y réfléchisse, on trouvera que toutes les difficultés & contradictions, dont la doctrine des loga-



arithmes sembloit embarrassée, ne subsistent qu'entant qu'on suppose, qu'à chaque nombre ne répond qu'un seul logarithme. Je dis donc, pour faire disparoitre toutes ces difficultés & contradictions, qu'en vertu même de la définition donnée il répond à chaque nombre une infinité de logarithmes; ce que je démontrerai dans le theoreme suivant.

Theoreme.

Il y a toujours une infinité de logarithmes, qui conviennent également à chaque nombre proposé: ou, si y marque le logarithme du nombre x, je dis que y renferme une infinité de valeurs differentes.

DEMONSTRATION.

Je me bornerai ici aux logarithmes hyperboliques, puisqu'on sait que les logarithmes de toutes les autres especes sont à ceux-cy dans un rapport constant, ainsi quand le logarithme hyperbolique du nombre x est nommé $= y$, le logarithme tabulaire de ce même nombre sera $= 0,4342944819.y$. Or le fondement des logarithmes hyperboliques est, que si ω signifie un nombre infiniment petit, le logarithme du nombre $1 + \omega$ sera $= \omega$, ou que $l(1 + \omega) = \omega$. De là il s'ensuit que $l(1 + \omega)^2 = 2\omega$; $l(1 + \omega)^3 = 3\omega$, & en général $l(1 + \omega)^n = n\omega$. Mais puisque ω est un nombre infiniment petit, il est evident, que le nombre $(1 + \omega)^n$ ne sauroit devenir égal à quelque nombre proposé x , à moins que l'exposant n ne soit un nombre infini. Soit donc n un nombre infiniment grand, & qu'on pose $x = (1 + \omega)^n$, & le logarithme de x , qui a été nommé $= y$, sera $y = n\omega$.

Donc pour exprimer y par x , la premiere formule donnant $1 + \omega = x^{\frac{1}{n}}$.

& $\omega = x^{\frac{1}{n}} - 1$, cette valeur étant substituée pour ω dans l'autre for-

mule produira $y = n, x^{\frac{1}{n}} - n = l x$. D'où il est clair que la valeur de la
formule



formule $n x^{\frac{1}{n}} - n$ approchera d'autant plus du logarithme de x , plus le nombre n sera pris grand; & si l'on met pour n un nombre infini, cette formule donnera la vraie valeur du logarithme de x . Or comme il est certain, que $x^{\frac{1}{2}}$ a deux valeurs différentes, $x^{\frac{1}{4}}$ trois, $x^{\frac{1}{8}}$ quatre, & ainsi de suite, il sera également certain, que $x^{\frac{1}{n}}$ doit avoir une infinité de valeurs différentes, puisque n est un nombre infini. Par conséquent cette infinité de valeurs différentes de $x^{\frac{1}{n}}$ produira aussi une infinité de valeurs différentes pour $\log x$, de sorte que le nombre x doit avoir une infinité de logarithmes. C. Q. F. D.

De là il s'ensuit que le logarithme de $+1$ n'est pas seulement $= 0$, mais qu'il y a encore une infinité d'autres quantités, dont chacune est également le logarithme de $+1$. Cependant on comprend aisément que tous ces autres logarithmes, hormis le premier 0 seront, des quantités imaginaires; de sorte que dans le calcul on est en droit de ne regarder que 0 comme le logarithme de $+1$, tout de même que lorsqu'il s'agit de la racine cubique de 1, on ne se sert que de 1, quoique ces quantités imaginaires $\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$ & $\frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$ soient également des racines cubiques de 1. Mais quand on veut comparer le logarithme de 1 avec les logarithmes de -1 , ou de $\sqrt{-1}$, qui sont tous, à ce que je ferai voir dans la suite, imaginaires, il faut considérer le logarithme de 1 dans toute son étendue; & alors toutes les difficultés & contradictions rapportées cy-dessus disparaîtront d'elles memes. Car soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta$, &c. les logarithmes imaginaires de l'unité, qui lui répondent aussi bien que 0, & on comprendra aisément qu'il peut être $2\alpha - 1 = 1 + 1$, quoique tous les logarithmes de -1 soient imaginaires: car pour satisfaire à l'équation $2\alpha - 1 = 1 + 1$, il suffit que le double de tous les logarithmes de -1 , se trouvent parmi les logarithmes imaginaires de $+1$. De même, puisque $4\sqrt{-1} = 1 + 1$,



chaque logarithme de $V-1$ multiplié par 4 se doit rencontrer dans la serie $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \&c.$ Ainsi les égalités $2/V-1 = 1+1$ & $4/V-1 = 1+1$, se peuvent maintenir, sans qu'on soit obligé de soutenir qu'il soit ou $1-1=0$ ou $1/V-1=0$, comme M. Bernoulli a prétendu. Mais tout cela sera mis dans tout son jour, quand je déterminerai actuellement tous les logarithmes de chaque nombre proposé, ce qui sera le sujet des problemes suivans.

Probleme I.

Déterminer tous les logarithmes, qui répondent à un nombre affirmatif proposé $+a$ quelconque.

SOLUTION.

Puisque a est un nombre positif, il aura certainement un logarithme réel, qui se trouve par les règles assés connues. Soit donc A ce logarithme réel du nombre a , & puisque $a = 1.a$, il sera $1.a = 1 + A$: ou bien chaque logarithme de l'unité étant ajouté à A donnera un logarithme du nombre proposé a ; & pour trouver tous ses logarithmes, on n'a qu'à chercher tous les logarithmes de l'unité $+1$. Prenant donc y pour marquer un logarithme quelconque de $+1$, les valeurs de y doivent être tirées de l'équation du Theoreme en y mettant

$x = 1$, & on aura cette équation $y = n \cdot 1^{\frac{1}{n}} - n$, qui se change en $1 + \frac{y}{n} = 1^{\frac{1}{n}}$, & la délivrant des exposans rompus, on aura

$(1 + \frac{y}{n})^n = 1$, où n marque un nombre infini. Cette équation

étant maintenant pour ainsi dire rationnelle, chacune de ses racines donnera une valeur convenable pour y , c'est à dire un logarithme de $+1$. Or pour trouver toutes les racines de cette équation, on fait qu'il les faut tirer des facteurs de la formule $(1 + \frac{y}{n})^n - 1$, en supposant cha-

que



que facteur $= 0$. Mais en général il est démontré, que d'une telle formule $p^n - q^n$ un facteur quelconque est $p^2 - 2pq \cos. \frac{2\lambda\pi}{n} + q^2$, où λ marque un nombre entier quelconque & π l'angle de 180° , ou la moitié de la circonférence d'un cercle dont le rayon $= 1$; de sorte que donnant à λ successivement toutes les valeurs possibles, qui sont $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5$, &c. on obtienne enfin tous les facteurs de la formule $p^n - q^n$. Et partant toutes les racines de l'équation $p^n - q^n = 0$ seront comprises dans cette expression générale $p = q \left(\cos \frac{2\lambda\pi}{n} \pm \sqrt{-1} \cdot \sin \frac{2\lambda\pi}{n} \right)$, qui se trouve en posant $p^2 - 2pq \cos \frac{2\lambda\pi}{n} + q^2 = 0$. Donc toutes les racines de notre équation trouvée.

$$\left(1 + \frac{y}{n}\right)^n - 1 = 0$$

posant $p = 1 + \frac{y}{n}$ & $q = 1$ seront contenues dans cette expression générale

$$1 + \frac{y}{n} = \cos \frac{2\lambda\pi}{n} \pm \sqrt{-1} \cdot \sin \frac{2\lambda\pi}{n}.$$

Or puisque n marque un nombre infini, l'arc $\frac{2\lambda\pi}{n}$ sera infiniment petit; il sera donc

$$\cos \frac{2\lambda\pi}{n} = 1 \quad \& \quad \sin \frac{2\lambda\pi}{n} = \frac{2\lambda\pi}{n}$$

d'où il s'ensuit $1 + \frac{y}{n} = 1 \pm \frac{2\lambda\pi}{n} \sqrt{-1}$, & partant

$$y = \pm 2\lambda\pi \sqrt{-1}.$$

On n'a qu'à substituer maintenant pour λ successivement toutes les valeurs



leurs déterminées qu'elle renferme, savoir 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, &c. à l'infini; & tous les logarithmes de l'unité, ou toutes les valeurs possibles de $l\ 1$ seront:

$$0; \pm 2\pi V - 1; \pm 4\pi V - 1; \pm 6\pi V - 1; \pm 8\pi V - 1; \&c.$$

Donc tous les logarithmes du nombre proposé a , dont on fait déjà le logarithme réel A , seront:

$$A; A \pm 2\pi V - 1; A \pm 4\pi V - 1; A \pm 6\pi V - 1; A \pm 8\pi V - 1; \&c.$$

C. Q. F. T.

De là il est clair, que chaque nombre positif n'a qu'un seul logarithme réel, & que tous les autres logarithmes infinis sont imaginaires. Cependant tous ces logarithmes imaginaires jouissent de la même propriété que le réel, & on s'en pourroit servir également dans le calcul en observant les mêmes règles. Car soient A, B, C, D &c. les logarithmes réels des nombres positifs a, b, c, d , &c. de sorte qu'il soit en général.

$$la = A \pm 2\lambda\pi V - 1; lb = B \pm 2\mu\pi V - 1; lc = C \pm 2\nu\pi V - 1 \&c.$$

Maintenant soit $c = ab$, & on sait qu'il sera $C = A + B$: or prenant les logarithmes en général on verra aussi, que la somme des logarithmes des facteurs a, b est toujours égale au logarithme du produit $ab = c$. Car on aura

$$la + lb = A + B \pm 2\zeta\pi V - 1$$

mettant pour ζ un nombre quelconque entier, qui peut résulter en ajoutant les termes $\pm 2\lambda\pi V - 1$ & $\pm 2\mu\pi V - 1$. Or il est clair que mettant $A + B = C$ cette expression de $la + lb$ convient parfaitement avec celle-cy $lc = C \pm 2\nu\pi V - 1$. Le même accord se trouvera aussi dans la division, l'élevation aux puissances, & l'extraction des racines, où l'on fait usage des logarithmes. Mais pour ce qui regarde l'extraction des racines, comme le nombre des racines est toujours égal à l'exposant du signe radical, cette manière d'exprimer les logarithmes généralement a cet avantage sur la manière ordi-



ordinaire, qu'elle nous découvre toutes les racines; au lieu que par la methode ordinaire on ne trouve dans chaque cas, qu'une racine, savoir la réelle & qui est en même tems positive: ce qu'on reconnoitra plus évidemment, lorsque j'aurai déterminé tous les logarithmes des nombres tant négatifs qu'imaginaires.

Probleme II.

Déterminer tous les logarithmes, qui répondent à un nombre négatif quelconque $-a$.

SOLUTION.

Puisque $-a = -1 \cdot a$, il fera $l-a = la + l-1$, & prenant pour la le logarithme réel de a , on aura tous les logarithmes du nombre négatif $-a$, si l'on cherche tous les logarithmes de -1 . Mais ayant vu, que mettant y pour le logarithme du nombre x en général, il est $y = nx^{\frac{1}{n}} - n$, d'où l'on tire, $1 + \frac{y}{n} = x^{\frac{1}{n}}$ & partant

$(1 + \frac{y}{n})^n - x = 0$. Donc y exprimera tous les logarithmes de -1 si l'on met $x = -1$, de sorte que tous les logarithmes de -1 seront les racines de cette équation

$$(1 + \frac{y}{n})^n + 1 = 0, \text{ posant le nombre } n \text{ infiniment grand.}$$

Or on fait que de cette équation générale $p^n + q^n = 0$ toutes les racines se trouvent de la résolution de cette formule $p^2 - 2pq \cos \frac{(2\lambda-1)\pi}{n} + q^2 = 0$, prenant pour λ successivement tous les nombres entiers tant affirmatifs que négatifs: & partant on aura $p = q \left(\cos \frac{(2\lambda-1)\pi}{n} \pm \sqrt{-1} \cdot \sin \frac{(2\lambda-1)\pi}{n} \right)$. Donc les racines de cette équation proposée :



$$\left(1 + \frac{y}{n}\right)^n + 1 = 0,$$

seront toutes comprises dans cette formule générale :

$$1 + \frac{y}{n} = \cos \frac{(2\lambda-1)\pi}{n} \pm \sqrt{-1} \sin \frac{(2\lambda-1)\pi}{n},$$

laquelle à cause de $n = \infty$ se change en

$$y = \pm (2\lambda-1)\pi \sqrt{-1}.$$

Par conséquent mettant pour λ successivement toutes les valeurs, qui lui conviennent, tous les logarithmes de -1 seront :

$$\pm \pi \sqrt{-1}; \pm 3\pi \sqrt{-1}; \pm 5\pi \sqrt{-1}; \pm 7\pi \sqrt{-1}; \pm 9\pi \sqrt{-1}; \&c.$$

Donc si nous posons $l + a = A$, ou que A marque le logarithme réel du nombre positif $+a$, tous les logarithmes du nombre négatif $-a$ seront :

$$A \pm \pi \sqrt{-1}; A \pm 3\pi \sqrt{-1}; A \pm 5\pi \sqrt{-1}; A \pm 7\pi \sqrt{-1}; \&c.$$

dont le nombre est infini. C. Q. F. T.

De là il est clair, que tous les logarithmes d'un nombre négatif quelconque, sont imaginaires, & qu'il n'y a aucun nombre négatif, dont un de ses logarithmes soit réel. Mr. Leibniz a eu donc raison de soutenir, que les logarithmes des nombres négatifs étoient imaginaires. Cependant puisque les nombres affirmatifs ont aussi une infinité de logarithmes imaginaires, toutes les objections de M. Bernoulli contre ce sentiment perdent leur force. Car quoiqu'il soit $l-1 = \pm (2\lambda-1)\pi \sqrt{-1}$ le logarithme de son carré sera $l(-1)^2 = \pm 2(2\lambda-1)\pi \sqrt{-1}$ expression qui se trouve parmi les logarithmes de $+1$, de sorte qu'il demeure vrai que $2l-1 = l+1$, quoique nul des logarithmes de -1 se trouve parmi les logarithmes de $+1$. Soit A le logarithme réel du nombre positif $+a$, & que p marque en général tous les nombres pairs, & q tous les nombres impairs entiers : & ayant en général :

$$l+1 = \pm p\pi \sqrt{-1} \quad \& \quad l-1 = \pm q\pi \sqrt{-1}.$$

&



$$\& \quad l+a = A \pm p\pi V-1 \quad \& \quad l-a = A \pm q\pi V-1.$$

d'où l'on voit que $l(-a)^2 = 2l-a = 2A \pm 2q\pi V-1$. Or $2q$ étant $= p$, & $2A$ le logarithme réel de a^2 , on voit que $2A \pm p\pi V-1$ est la formule générale des logarithmes de a^2 ; ainsi il est $l(-a)^2 = la^2$ ou bien $2l-a = 2l+a$, sans qu'il soit $l-a = l+a$: ce qui seroit sans doute contradictoire, si les nombres $+a$ & $-a$ n'avoient qu'un seul logarithme; car alors on auroit raison de conclure, qu'il fut $l-a = l+a$ s'il étoit $2l-a = 2l+a$. Mais dès qu'on tombe d'accord, que tant $-a$ que $+a$ ont une infinité de logarithmes, cette conséquence, toute nécessaire qu'elle fut auparavant, n'est plus juste; puisque pour qu'il soit $2l-a = 2l+a$, il suffit, que les doubles de tous les logarithmes de $-a$ se rencontrent dans les logarithmes de $+a$. Ce qui peut arriver, comme nous voyons, sans qu'aucun des logarithmes de $-a$ soit égal à aucun des logarithmes de $+a$.

Il faut cependant avouer que toutes les valeurs de $2l-a$ sont différentes des valeurs de $2l+a$, vu qu'il est :

$$2l+a = 2A \pm 2p\pi V-1 \quad \& \quad 2l-a = 2A \pm 2q\pi V-1,$$

où $2p$ marque un nombre parement pair, & $2q$ un nombre impairement pair quelconque. Mais il faut remarquer que les logarithmes de $+a^2$, comme d'un nombre affirmatif dont le logarithme réel est $= 2A$, sont compris dans cette formule générale $la^2 = 2A \pm p\pi V-1$, où p marque un nombre pair quelconque sans en excepter zero. Cela remarqué il est clair, que toutes les valeurs de $2l-a$ sont comprises dans celles de la^2 , aussi bien que celles de $2l+a$. Ainsi quoiqu'on puisse dire que $2l-a = la^2$ & $2l+a = la^2$, prenant le signe de $=$ pour marquer, que les valeurs de $2l-a$ ou de $2l+a$ se rencontrent parmi les valeurs de la^2 ; on ne sauroit dire à la vérité qu'il soit $2l-a = 2l+a$. Néanmoins comme dans les formules $l+a = A \pm p\pi V-1$ & $l-a = A \pm q\pi V-1$ les nombres p & q sont indéterminés, rien n'oblige qu'en doublant ces logarithmes on prenne pour p & q les mêmes nombres. Ainsi pour faire ces multi-



plications dans toute leur étendue, que p, p', p'', p''' &c. marquent des nombres pairs quelconques égaux ou inégaux, & q, q', q'', q''' , &c. des nombres impairs égaux ou inégaux entr'eux; ces duplications se feront de la maniere suivante :

$$\begin{array}{l|l} l+a = A \pm p \pi V - 1 & l-a = A \pm q \pi V - 1 \\ l+a = A \pm p' \pi V - 1 & l-a = A \pm q' \pi V - 1 \\ \hline 2l+a = 2A \pm (p+p') \pi V - 1 & 2l-a = 2A \pm (q+q') \pi V - 1 \end{array}$$

Ici maintenant $p + p'$ marquant la somme de deux nombres pairs quelconques, & $q + q'$ la somme de deux nombres impairs quelconques, tant $p + p'$ que $q + q'$ marquera un nombre pair quelconque; & partant il sera $p + p' = q + q'$, donc $2l - a = 2l + a$. Par conséquent dans ce sens on pourra soutenir qu'il est $2l - a = 2l + a$, sans qu'il soit $l - a = l + a$. De même maniere il sera

$$\begin{array}{l} 3l+a = 3A \pm (p+p'+p'') \pi V - 1 = 3A \pm p \pi V - 1 = l+a^3 \\ 3l-a = 3A \pm (q+q'+q'') \pi V - 1 = 3A \pm q \pi V - 1 = l-a^3 \end{array}$$

car $p + p' + p''$ produit tous les nombres pairs, & convient par conséquent avec p ; pareillement $q + q' + q''$ produit tous les nombres impairs & convient avec q . Or puisque $q + q' + q'' + q'''$ produit tous les nombres pairs, cette expression sera équivalente avec p : donc les quadruples seront :

$$\begin{array}{l} 4l+a = 4A \pm (p+p'+p''+p''') \pi V - 1 = 4A \pm p \pi V - 1 = l+a^4 \\ 4l-a = 4A \pm (q+q'+q''+q''') \pi V - 1 = 4A \pm q \pi V - 1 = l-a^4 \end{array}$$

Ainsi cette maniere de trouver les logarithmes des puissances tant de $+a$ que de $-a$ s'accorde parfaitement avec les principes connus tant des puissances que des logarithmes. & toutes les objections rapportées cy-dessus n'ont plus aucune prise sur ces vérités démontrées. Le même accord s'observera aussi dans les logarithmes des quantités imaginaires, que je m'en vai développer dans le probleme suivant.

Proble-



Probleme III.

Déterminer tous les logarithmes d'une quantité imaginaire quelconque.

SOLUTION.

Il est démontré que toute quantité imaginaire, quelque compliquée qu'elle soit, se réduit toujours à cette forme $a + b\sqrt{-1}$, où a & b sont des quantités réelles. Je pose maintenant $\sqrt{(aa + bb)} = c$, & $\frac{a}{\sqrt{(aa + bb)}}$ & $\frac{b}{\sqrt{(aa + bb)}}$ seront le cosinus & le sinus d'un certain angle, qu'il sera aisé de trouver par les tables. Soit donc cet angle $= \phi$, qui marque en même tems la quantité de l'arc de cercle, qui est la mesure, le sinus total étant posé $= 1$. On aura donc $a = c \cos \phi$ & $b = c \sin \phi$; & la formule imaginaire, dont il faut chercher tous les logarithmes, sera

$$a + b\sqrt{-1} = c (\cos \phi + \sqrt{-1} \sin \phi)$$

ou, puisque c est un nombre affirmatif, soit C son logarithme réel, & on aura :

$$l(a + b\sqrt{-1}) = C + l(\cos \phi + \sqrt{-1} \sin \phi)$$

Il s'agit donc de chercher tous les logarithmes de la quantité imaginaire $\cos \phi + \sqrt{-1} \sin \phi$, laquelle étant mise pour x , ses logarithmes seront les valeurs de y tirées de cette équation $(1 + \frac{y}{n})^n - x = 0$, n marquant un nombre infini. Mais pour pouvoir comparer cette équation avec la forme générale $p^n - q^n = 0$, je remarque que $x = \cos \phi + \sqrt{-1} \sin \phi = (1 + \frac{\phi \sqrt{-1}}{n})^n$, dont la vérité est suffisamment prouvée ailleurs. Car on fait que

$$\cos \phi = 1 - \frac{\phi^2}{1.2.} + \frac{\phi^4}{1.2.3.4.} - \frac{\phi^6}{1.2.3.4.5.6.} + \&c.$$

$$\& \sin \Phi = \Phi - \frac{\Phi^3}{1.2.3.} + \frac{\Phi^5}{1.2.3.4.5.} - \&c.$$

Or puisque n est un nombre infini, il fera :

$$\left(1 + \frac{\Phi \sqrt{-1}}{n}\right)^n = 1 + \frac{\Phi \sqrt{-1}}{1} - \frac{\Phi^2}{1.2} - \frac{\Phi^3 \sqrt{-1}}{1.2.3} + \frac{\Phi^4}{1.2.3.4} + \frac{\Phi^5 \sqrt{-1}}{1.2.3.4.5} - \&c.$$

d'où il est clair que $\left(1 + \frac{\Phi \sqrt{-1}}{n}\right)^n = \cos \Phi + \sqrt{-1} \sin \Phi$. Nous

aurons donc $p = 1 + \frac{y}{n}$ & $q = \frac{1 + \Phi \sqrt{-1}}{n}$, pour l'équation à re-

soudre $p^n - q^n = 0$. Mais ayant vu déjà que chacune des racines de cette équation est contenuë dans cette formule générale

$p = q \left(\cos \frac{2\lambda\pi}{n} \pm \sqrt{-1} \sin \frac{2\lambda\pi}{n} \right)$, prenant pour λ tous les nombres entiers, ou affirmatifs ou négatifs, il fera pour notre cas :

$$1 + \frac{y}{n} = \left(1 + \frac{\Phi \sqrt{-1}}{n}\right) \left(\cos \frac{2\lambda\pi}{n} \pm \sqrt{-1} \sin \frac{2\lambda\pi}{n} \right)$$

& parce que à cause du nombre n infini il est $\cos \frac{2\lambda\pi}{n} = 1$ & $\sin \frac{2\lambda\pi}{n} = \frac{2\lambda\pi}{n}$, il fera $1 + \frac{y}{n} = \left(1 + \frac{\Phi \sqrt{-1}}{n}\right) \left(1 \pm \frac{2\lambda\pi}{n} \sqrt{-1}\right)$; ce qui donne

$y = \Phi \sqrt{-1} \pm 2\lambda\pi \sqrt{-1}$: d'où tous les logarithmes de la formule $\cos \Phi + \sin \Phi \sqrt{-1}$ seront :

$\Phi \sqrt{-1}$; $(\Phi \pm 2\pi) \sqrt{-1}$; $(\Phi \pm 4\pi) \sqrt{-1}$; $(\Phi \pm 6\pi) \sqrt{-1}$; &c.

& les logarithmes de la formule imaginaire $a + b \sqrt{-1}$, posant $c = \sqrt{aa + bb}$, & $\tan \Phi = \frac{b}{a}$, ou $\cos \Phi = \frac{a}{c}$ & $\sin \Phi = \frac{b}{c}$, & de

plus $lc = C$, seront :

$C + \Phi \sqrt{-1}$; $C + (\Phi \pm 2\pi) \sqrt{-1}$; $C + (\Phi \pm 4\pi) \sqrt{-1}$; $C + (\Phi \pm 6\pi) \sqrt{-1}$; &c.
C. Q. F. T.

Delà



De là il est clair, que tous les logarithmes d'une quantité imaginaire sont aussi imaginaires; car, lorsque ou $\Phi = 0$, ou $\Phi = \pm 2\lambda\pi$, qui sont les cas où quelcun de ces logarithmes pourroit devenir réel, cela ne peut arriver, que lorsque $\text{tang } \Phi = \frac{b}{a} = 0$; il seroit donc $b = 0$, & la quantité $a + b\sqrt{-1}$ cesseroit d'être imaginaire. Donc, si l'on prend p pour signifier chaque nombre pair, ou affirmatif ou négatif, tous les logarithmes de la quantité imaginaire $a + b\sqrt{-1}$ seront renfermés dans cette formule générale $C + (\Phi + p\pi)\sqrt{-1}$, où C est le logarithme réel de la quantité affirmative $\sqrt{aa + bb} = c$, & l'arc ou l'angle Φ est pris tel, qu'il est $\sin \Phi = \frac{b}{c}$ & $\cos \Phi = \frac{a}{c}$. Or puisqu'il y a une infinité d'angles, qui conviennent au même sinus $\frac{b}{c}$ & cosinus $\frac{a}{c}$, qui sont tous compris dans la formule $\Phi + p\pi$, on pourroit omettre le terme $p\pi$, & dire que le logarithme de $a + b\sqrt{-1}$ est en général $= C + \Phi\sqrt{-1}$; puisque cet angle Φ renferme déjà tous ces angles. Cependant si l'on prend pour Φ le plus petit angle affirmatif, qui répond au sinus $\frac{b}{c}$ & au cosinus $\frac{a}{c}$; la formule générale des logarithmes de $a + b\sqrt{-1}$ sera $= C + (\Phi + p\pi)\sqrt{-1}$.

Si l'angle Φ est tel, qu'il tient une raison commensurable avec π ou la circonférence du cercle, ce sera toujours une marque, qu'une certaine puissance de la quantité imaginaire $a + b\sqrt{-1}$ devient réelle.

Car soit $\Phi = \frac{\mu}{\nu}\pi$, & puisqu'il est $l(a + b\sqrt{-1}) = C + \left(\frac{\mu}{\nu}\pi + p\pi\right)\sqrt{-1}$: il sera

$$l(a + b\sqrt{-1})^\nu = \nu C + (\mu + \nu p)\pi\sqrt{-1}.$$

d'où l'on voit que si $\mu + \nu p$ est un nombre pair, ou seulement μ pair, la puissance



puissance $(a + b\sqrt{-1})^p$ sera un nombre réel affirmatif, & même $= c^p = \left(\sqrt{aa + bb}\right)^p$: or si $\mu + \nu p$, ou seulement μ est un nombre impair, la puissance $(a + b\sqrt{-1})^p$ sera un nombre négatif $= -c^p$.

Jusqu'ici on auroit pu croire, qu'il seroit indifférent de donner à π quelque valeur que ce soit, puisqu'il ne paroît rien; ni dans les logarithmes des nombres affirmatifs $l + a = A \pm p\pi\sqrt{-1}$, ni dans ceux des nombres négatifs $l - a = A \pm q\pi\sqrt{-1}$, d'où nous puissions comprendre, pourquoi la lettre π dût plutôt marquer la demi-circonférence d'un cercle décrit du rayon $= 1$, que tout autre nombre. Mais à présent, où il s'agit des logarithmes des nombres imaginaires, la raison en devient évidente; puisqu'il faut comparer l'angle Φ à π , de sorte que si l'on donnoit à π toute autre valeur que celle de deux angles droits, les formules deviendroient fausses, & ne seroient plus d'accord avec celles, que nous avons trouvées pour les nombres affirmatifs & négatifs.

Pour faire voir cela plus clairement, supposons $c = 1$ & $C = 0$, pour avoir cette formule $\cos \Phi + \sqrt{-1} \sin \Phi$, dont tous les logarithmes seront renfermés dans cette formule générale

$$l(\cos \Phi + \sqrt{-1} \sin \Phi) = (\Phi + p\pi)\sqrt{-1}$$

p marquant un nombre entier pair quelconque, soit affirmatif, soit négatif, ou même zero.

De là nous tirerons premièrement d'abord les formules supérieures pour les logarithmes des nombres réels affirmatifs ou négatifs. Car soit $\Phi = 0$, & à cause de $\cos \Phi = 1$ & $\sin \Phi = 0$, il sera $l + 1 = p\pi\sqrt{-1}$, ou bien en détaillant $l + 1 = 0; \pm 2\pi\sqrt{-1}; \pm 4\pi\sqrt{-1}; \pm 6\pi\sqrt{-1}; \pm 8\pi\sqrt{-1}; \&c.$ or mettant $\Phi = \pi = 180$, à cause de $\cos \Phi = -1$ & $\sin \Phi = 0$, il sera $l - 1 = (1 + p)\pi\sqrt{-1} = q\pi\sqrt{-1}$, prenant q pour marquer un nombre impair quelconque. On aura donc:

$$l - 1 = \pm \pi\sqrt{-1}; \pm 3\pi\sqrt{-1}; \pm 5\pi\sqrt{-1}; \pm 7\pi\sqrt{-1}; \&c.$$

Deve-



Dévelopons maintenant aussi les cas les plus simples des nombres imaginaires, & soit :

1. $\Phi = 90^\circ = \frac{1}{2}\pi$, & à cause de $\cos \Phi = 0$ & $\sin \Phi = +1$, il fera $l(+V-1) = (\frac{1}{2} + p)\pi V-1$; donc tous les logarithmes de $+V-1$ seront :

$$\frac{1}{2}\pi V-1; \frac{3}{2}\pi V-1; \frac{5}{2}\pi V-1; \frac{7}{2}\pi V-1; \frac{9}{2}\pi V-1; \&c. \\ -\frac{1}{2}\pi V-1; -\frac{3}{2}\pi V-1; -\frac{5}{2}\pi V-1; -\frac{7}{2}\pi V-1; -\frac{9}{2}\pi V-1; \&c.$$

Ajoutant ici deux valeurs quelconques ensemble pour avoir le logarithme de $l(+V-1)^2$, c'est à dire de $l-1$, on trouvera ou $\pm\pi V-1$, ou $\pm 3\pi V-1$; ou $\pm 5\pi V-1$; &c. qui sont tous des logarithmes de -1 .

2. Soit $\Phi = 270^\circ = \frac{3}{2}\pi$, & à cause de $\cos \Phi = 0$ & $\sin \Phi = -1$ il fera $l(-V-1) = (-\frac{1}{2} + p)\pi V-1$; donc tous les logarithmes de $-V-1$ seront contenus dans les expressions suivantes :

$$+\frac{1}{2}\pi V-1; +\frac{3}{2}\pi V-1; +\frac{5}{2}\pi V-1; +\frac{7}{2}\pi V-1; +\frac{9}{2}\pi V-1; \&c. \\ -\frac{1}{2}\pi V-1; -\frac{3}{2}\pi V-1; -\frac{5}{2}\pi V-1; -\frac{7}{2}\pi V-1; -\frac{9}{2}\pi V-1; \&c.$$

où il est clair comme auparavant, que deux valeurs quelconques étant ajoutées ensemble donnent $q\pi V-1$, posant q pour un nombre impair quelconque; ce qui est le logarithme -1 ou de $(-V-1)^2$. De plus si l'on ajoute un logarithme quelconque de $-V-1$ à un logarithme quelconque de $+V-1$, pour avoir un logarithme du produit $(+V-1) \cdot (-V-1)$, qui est $= -1$, on ne trouvera en effet que des logarithmes de -1 . Et il est clair de même qu'il sera :

$l(+V-1) - l(-V-1) = l-1$ ou $l(-V-1) - l(+V-1) = l-1$ tout comme la nature de ces expressions exige.

3. Soit $\Phi = 60^\circ = \frac{1}{3}\pi$ ou coi $\Phi = \frac{1}{3}$ & $\sin \Phi = \frac{V}{2}$; on trouvera $l\frac{1+V-3}{2} = (\frac{1}{3} + p)\pi V-1$, de sorte que tous les lo-



garithmes de cette expression imaginaire $\frac{+1 + \sqrt{-3}}{2}$ seront :

$$+\frac{1}{3}\pi\sqrt{-1}; +\frac{2}{3}\pi\sqrt{-1}; +\frac{4}{3}\pi\sqrt{-1}; +\frac{5}{3}\pi\sqrt{-1}; +\frac{8}{3}\pi\sqrt{-1}; \&c.$$

$$-\frac{1}{3}\pi\sqrt{-1}; -\frac{2}{3}\pi\sqrt{-1}; -\frac{4}{3}\pi\sqrt{-1}; -\frac{5}{3}\pi\sqrt{-1}; -\frac{8}{3}\pi\sqrt{-1}; \&c.$$

où il est clair, que trois quelconques de ces logarithmes étant ajoutées ensemble produisent $q\pi\sqrt{-1}$, ou quelcun des logarithmes de -1 , puisque $\left(\frac{1 + \sqrt{-3}}{2}\right)^3 = -1$.

$$4. \text{ Soit } \phi = 120^\circ = \frac{2}{3}\pi \text{ ou } \cos \phi = -\frac{1}{2} \& \sin \phi = \frac{\sqrt{3}}{2}; \&$$

l'on trouvera $\log \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} = (\frac{2}{3} + p)\pi\sqrt{-1}$. Ainsi tous les lo-

garithmes de la formule imaginaire $\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$ seront :

$$+\frac{2}{3}\pi\sqrt{-1}; +\frac{8}{3}\pi\sqrt{-1}; +\frac{14}{3}\pi\sqrt{-1}; +\frac{20}{3}\pi\sqrt{-1}; +\frac{26}{3}\pi\sqrt{-1}; \&c.$$

$$-\frac{4}{3}\pi\sqrt{-1}; -\frac{10}{3}\pi\sqrt{-1}; -\frac{16}{3}\pi\sqrt{-1}; -\frac{22}{3}\pi\sqrt{-1}; -\frac{28}{3}\pi\sqrt{-1}; \&c.$$

& puisque $\left(\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}\right)^3 = +1$, on verra qu'on obtient effectivement les logarithmes de $+1$ en ajoutant ensemble trois quelconques de ces logarithmes.

$$5. \text{ Soit } \phi = 240^\circ = \frac{4}{3}\pi, \text{ ou } \cos \phi = -\frac{1}{2} \& \sin \phi = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \&$$

l'on aura $\log \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} = (\frac{4}{3} + p)\pi\sqrt{-1}$, de sorte que tous les lo-

garithmes de cette formule $\frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$ seront :

$$+\frac{4}{3}\pi$$



$+ \frac{1}{3}\pi V-1; + \frac{1^9}{3}\pi V-1; + \frac{1^6}{3}\pi V-1; + \frac{2^2}{3}\pi V-1; + \frac{2^4}{3}\pi V-1; \&c.$

$- \frac{2}{3}\pi V-1; - \frac{8}{3}\pi V-1; - \frac{1^4}{3}\pi V-1; - \frac{2^0}{3}\pi V-1; - \frac{2^6}{3}\pi V-1; \&c.$

d'où l'on tirera comme auparavant, en ajoutant trois quelconques de ces logarithmes ensemble, quelcun des logarithmes de $+1$, puisqu'il est

$\left(\frac{-1-V-3}{2}\right)^3 = +1$. De même deux de ces logarithmes quel-

conques ajoutés ensemble produiront un logarithme de $\frac{-1+V-3}{2}$;

car il est $\left(\frac{-1-V-3}{2}\right)^2 = \frac{-1+V-3}{2}$. Et puisqu'il est réci-

proquement $\left(\frac{-1+V-3}{2}\right)^2 = \frac{-1-V-3}{2}$, on verra aussi, que la

somme de deux logarithmes quelconques de $\frac{-1+V-3}{2}$ produit un

logarithme de $\frac{-1-V-3}{2}$.

6. Soit $\Phi = 300^\circ = \frac{5}{3}\pi$ ou $\cos \Phi = \frac{1}{2}$ & $\sin \Phi = \frac{-V-3}{2}$; & l'on aura $\frac{1-V-3}{2} = (\frac{5}{3} + p)\pi V-1$. Par conséquent les logarithmes

de cette formule $\frac{+1-V-3}{2}$ feront

$+ \frac{5}{3}\pi V-1; + \frac{1^1}{3}\pi V-1; + \frac{1^7}{3}\pi V-1; + \frac{2^3}{3}\pi V-1; + \frac{2^9}{3}\pi V-1; \&c.$

$- \frac{1}{3}\pi V-1; - \frac{2}{3}\pi V-1; - \frac{1^3}{3}\pi V-1; - \frac{1^9}{3}\pi V-1; - \frac{2^5}{3}\pi V-1; \&c.$

Où il est évident, que trois quelconques de ces logarithmes étant ajoutés ensemble donnent un logarithme de -1 , conformément à ce qu'il

est $\left(\frac{1-V-3}{2}\right)^3 = -1$. Et en général on verra toujours, que tou-



tes les opérations, qu'on fera avec ces logarithmes, sont parfaitement d'accord avec les opérations relatives faites avec les nombres, qui leur conviennent; de sorte qu'on ne rencontrera plus le moindre inconvénient à l'égard des opérations en logarithmes, & de celles qui leur répondent en nombres.

7. Soit $\phi = 45^\circ = \frac{1}{4}\pi$ ou $\cos \phi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ & $\sin \phi = \frac{1}{\sqrt{2}}$; & l'on aura $\log \frac{1 + \sqrt{-1}}{\sqrt{2}} = (\frac{1}{4} + p)\pi\sqrt{-1}$. Ainsi tous les logarithmes de cette expression imaginaire $\frac{1 + \sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$ seront.

$$+\frac{1}{4}\pi\sqrt{-1}; +\frac{5}{4}\pi\sqrt{-1}; +\frac{9}{4}\pi\sqrt{-1}; +\frac{13}{4}\pi\sqrt{-1}; +\frac{17}{4}\pi\sqrt{-1}; \&c.$$

$$-\frac{7}{4}\pi\sqrt{-1}; -\frac{11}{4}\pi\sqrt{-1}; -\frac{15}{4}\pi\sqrt{-1}; -\frac{19}{4}\pi\sqrt{-1}; -\frac{23}{4}\pi\sqrt{-1}; \&c.$$

8. Soit $\phi = 135^\circ = \frac{3}{4}\pi$; ou $\cos \phi = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ & $\sin \phi = +\frac{1}{\sqrt{2}}$; & l'on aura $\log \frac{-1 + \sqrt{-1}}{\sqrt{2}} = (\frac{3}{4} + p)\pi\sqrt{-1}$. Et partant tous les logarithmes de cette formule $\frac{-1 + \sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$ seront:

$$+\frac{3}{4}\pi\sqrt{-1}; +\frac{7}{4}\pi\sqrt{-1}; +\frac{11}{4}\pi\sqrt{-1}; +\frac{15}{4}\pi\sqrt{-1}; +\frac{19}{4}\pi\sqrt{-1}; \&c.$$

$$-\frac{5}{4}\pi\sqrt{-1}; -\frac{9}{4}\pi\sqrt{-1}; -\frac{13}{4}\pi\sqrt{-1}; -\frac{17}{4}\pi\sqrt{-1}; -\frac{21}{4}\pi\sqrt{-1}; \&c.$$

Chacun de ces logarithmes étant ajouté à quelcun des précédens de $\frac{1 + \sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$ produit un logarithme de la forme $q\pi\sqrt{-1}$ ou de -1 ,

tout comme il faut, puisque $\frac{1 + \sqrt{-1}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{-1 + \sqrt{-1}}{\sqrt{2}} = -1$

9. Soit $\phi = 225^\circ = \frac{5}{4}\pi$ ou $\cos \phi = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ & $\sin \phi = -\frac{1}{\sqrt{2}}$; & l'on

aura



aura $\log \frac{-1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}} = (\frac{1}{4} + p) \pi \sqrt{-1}$. Donc tous les logarithmes de cette formule $\frac{-1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$ seront :

$$+\frac{1}{4}\pi\sqrt{-1}; +\frac{1.3}{4}\pi\sqrt{-1}; +\frac{2.1}{4}\pi\sqrt{-1}; +\frac{2.3}{4}\pi\sqrt{-1}; \&c.$$

$$-\frac{3}{4}\pi\sqrt{-1}; -\frac{1.1}{4}\pi\sqrt{-1}; -\frac{1.3}{4}\pi\sqrt{-1}; -\frac{2.1}{4}\pi\sqrt{-1}; \&c.$$

qui sont les négatifs des précédens ; ce qui est aussi parfaitement bien d'accord avec les opérations analytiques, puisqu'il est $\frac{-1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$

$$= 1 : \left(\frac{-1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}} \right) \& \text{ partant } \log \frac{-1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}} = -\log \frac{-1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}.$$

$$10. \text{ Soit } \Phi = 315^\circ = \frac{7}{4}\pi, \text{ ou } \cos \Phi = +\frac{1}{\sqrt{2}} \& \sin \Phi = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

d'où l'on aura $\log \frac{+1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}} = (\frac{7}{4} + p) \pi \sqrt{-1}$. Par conséquent tous

les logarithmes de cette formule $\frac{+1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$ seront :

$$+\frac{7}{4}\pi\sqrt{-1}; +\frac{1.5}{4}\pi\sqrt{-1}; +\frac{2.3}{4}\pi\sqrt{-1}; +\frac{3.1}{4}\pi\sqrt{-1}; \&c.$$

$$-\frac{1}{4}\pi\sqrt{-1}; -\frac{2}{4}\pi\sqrt{-1}; -\frac{1.7}{4}\pi\sqrt{-1}; -\frac{2.5}{4}\pi\sqrt{-1}; \&c.$$

Tous ces logarithmes des quatre derniers articles ont cette propriété que chacun multiplié par 4 produit un logarithme de -1 , ce qui est conforme à la vérité ; puisque les quarré-quarrés de ces quatre formules :

$$\frac{+1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}; \frac{-1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}; \frac{-1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}; \frac{+1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$$

produisent le nombre -1 .

Ces exemples suffisent pour faire voir, que l'idée des logarithmes que je viens d'établir est la véritable, & qu'elle est parfaitement d'ac-



cord avec toutes les opérations, que la théorie des logarithmes renferme : de sorte qu'on n'y rencontre plus aucune difficulté ; & que toutes les contradictions, auxquelles cette doctrine paroïssoit assujettie, disparoissent entièrement. Par conséquent la grande controverse, qui partagea autrefois Mrs. Leibniz & Bernoulli, est à présent parfaitement décidée, enforte que ni l'un ni l'autre ne trouveroit plus le moindre sujet de refuser son consentement.

La belle découverte de Mr. Bernoulli, de ramener la quadrature du cercle aux logarithmes imaginaires, se trouve aussi non seulement parfaitement d'accord avec cette théorie, mais elle en est une suite nécessaire, & est portée même par là à une infiniment plus grande étendue : puisque nous voyons, que les logarithmes de tous les nombres, entant qu'ils sont imaginaires, dépendent tous de la quadrature du cercle.

Ainsi les logarithmes de $+1$ étant $\pm p \pi \sqrt{-1}$, il fera $\frac{1+1}{\sqrt{-1}}$ toujours une quantité réelle, mais qui renferme une infinité de valeurs, à cause de l'infinité des logarithmes de $+1$. Conséquemment à cela, si l'on pose le rapport du diamètre à la circonference $= 1 : \pi$, toutes les valeurs de cette expression $\frac{1+1}{\sqrt{-1}}$ seront les suivantes :

$$0; \pm 2\pi; \pm 4\pi; \pm 6\pi; \pm 8\pi; \pm 10\pi; \&c.$$

De même les logarithmes de -1 étant divisés par $\sqrt{-1}$ fourniront les quantités réelles suivantes, qui renferment également la quadrature du cercle. Car les valeurs de

$$\frac{1-1}{\sqrt{-1}} \text{ sont } \pm \pi; \pm 3\pi; \pm 5\pi; \pm 7\pi; \pm 9\pi; \&c.$$

De la même manière on verra, que les valeurs des expressions suivantes seront :



Les valeurs de	seront celles-cy à l'infini
$\frac{I(+V-1)}{V-1}$	$+ \frac{1}{2} \pi; + \frac{5}{2} \pi; + \frac{9}{2} \pi; + \frac{13}{2} \pi; + \frac{17}{2} \pi; \&c.$ $- \frac{3}{2} \pi; - \frac{7}{2} \pi; - \frac{11}{2} \pi; - \frac{15}{2} \pi; - \frac{19}{2} \pi; \&c.$
$\frac{I(-V-1)}{V-1}$	$+ \frac{3}{2} \pi; + \frac{7}{2} \pi; + \frac{11}{2} \pi; + \frac{15}{2} \pi; + \frac{19}{2} \pi; \&c.$ $- \frac{1}{2} \pi; - \frac{5}{2} \pi; - \frac{9}{2} \pi; - \frac{13}{2} \pi; - \frac{17}{2} \pi; \&c.$

& on tirera également des autres exemples developés cy-dessus de semblables expressions réelles, qui renfermeront toutes la quadrature du cercle.

J'ai déjà fait sentir le bel accord de ces logarithmes avec l'extraction des racines, ayant fait voir que les doubles tant des logarithmes de -1 , que de $+1$, sont contenus parmi les logarithmes de $+1$, puisqu'il est $1 = (+1)^2 = (-1)^2$: de même puisque il est

$$1 = (+1)^3 = \left(\frac{-1 + V-3}{2} \right)^3 = \left(\frac{-1 - V-3}{2} \right)^3$$

on verra, que les triples des logarithmes de $+1$, de $\frac{-1 + V-3}{2}$

& de $\frac{-1 - V-3}{2}$ se trouvent parmi les logarithmes de $+1$. Mais

je remarque ici de plus, comme 1 n'a que ces deux racines quarrées $+1$ & -1 , ainsi si l'on range les doubles de tous les logarithmes tant de $+1$, que de -1 dans une suite, on obtiendra la serie complete de tous les logarithmes de $+1$; car:

$$2I+1 \text{ est } 0; \pm 4\pi V-1; \pm 8\pi V-1; \pm 12\pi V-1; \&c.$$

$$2I-1 \text{ est } \pm 2\pi V-1; \pm 6\pi V-1; \pm 10\pi V-1; \&c.$$

De la même maniere les trois racines cubiques de $+1$ étant $+1$;

$\frac{-1 + V-3}{2}$ & $\frac{-1 - V-3}{2}$, si l'on range les triples de tous les loga-



logarithmes de ces trois racines dans une suite, il en résultera la suite complete des logarithmes de $+1$, car:

$$3l+1 \text{ donne } 0; \pm 6\pi\sqrt{-1}; \pm 12\pi\sqrt{-1}; \pm 18\pi\sqrt{-1} \text{ \&c.}$$

$$3l \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \dots +2\pi\sqrt{-1}; +8\pi\sqrt{-1}; +14\pi\sqrt{-1}; \text{ \&c.}$$

$$-4\pi\sqrt{-1}; -10\pi\sqrt{-1}; -16\pi\sqrt{-1}; \text{ \&c.}$$

$$3l \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} \dots +4\pi\sqrt{-1}; +10\pi\sqrt{-1}; +16\pi\sqrt{-1}; \text{ \&c.}$$

$$-2\pi\sqrt{-1}; -8\pi\sqrt{-1}; -14\pi\sqrt{-1}; \text{ \&c.}$$

Dans ces trois series chaque logarithme de $+1$ se trouve, & aucun ne s'y rencontre qu'une seule fois; ce qui est une marque, que l'unité n'a que ces trois racines cubiques, & qu'il faut les trois ensemble pour épuiser la nature de l'unité.

Il en est de même de toutes les autres racines de l'unité, & comme les racines quarré-quarrées de $+1$ sont:

$$+1, \quad -1; \quad +\sqrt{-1}; \quad \& \quad -\sqrt{-1}$$

on verra que les quadruples des logarithmes de chacune de ces racines ne donnent que la quatrième partie des logarithmes de $+1$. Or tous ces quadruples de toutes les quatre racines ensemble, produisent toute la suite des logarithmes de $+1$. Il est aussi remarquable que tous les logarithmes d'une racine quelconque sont differens des logarithmes de toute autre racine du même nom. Cependant quoique ces deux logarithmes $l+1$ & $l-1$ soient differens entr'eux, il est néanmoins $2l+1 = l+1$ & $2l-1 = l+1$, sans qu'il soit $2l+1 = 2l-1$. De la même maniere ces trois logarithmes $l+1$; $l \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$

& $l \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ sont differens entr'eux; cependant nonobstant cette inégalité il est

$$2l+1 = l+1; \quad 3l \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} = l+1; \quad \& \quad 3l \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} = l+1.$$

Nous



Nous voyons donc qu'il est essentiel à la nature des logarithmes, que chaque nombre ait une infinité de logarithmes, & que tous ces logarithmes soient differens non seulement entr'eux, mais aussi de tous les logarithmes de tout autre nombre. Il en est de même des logarithmes, que des angles, ou des arcs de cercle; car, comme à chaque sinus & cosinus répond une infinité d'arcs differens, ainsi à chaque nombre convient une infinité de logarithmes differens. Mais il faut ici remarquer une grande difference. qui est, que tous les arcs, qui répondent au même sinus & cosinus sont réels, au lieu que tous les logarithmes du même nombre sont imaginaires à la reserve d'un seul, lorsque le nombre donné est positif; car tous les logarithmes des nombres, tant négatifs qu'imaginaires, sont sans aucune exception imaginaires. Or comme à un arc donné ne convient qu'un seul sinus & cosinus, ainsi à un logarithme proposé ne répond qu'un seul nombre; de sorte que c'est un probleme, qui n'admet qu'une seule solution, lorsqu'on demande le nombre, qui convient à un logarithme proposé.

Probleme IV.

Un logarithme quelconque étant proposé, trouver le nombre qui lui répond.

SOLUTION. ■

Posons premièrement que le logarithme proposé soit une quantité réelle $= f$, & on fait que posant le nombre $= e$, dont le logarithme réel $= 1$, le nombre qui répond au logarithme f sera $= e^f$.

En second lieu, soit le logarithme proposé $= g \sqrt{-1}$ ou simplement imaginaire, & soit x le nombre qui lui répond. Puisque g est un nombre réel, qu'on le compare avec π , & qu'il soit $g = m\pi$, & il est clair, si m est un nombre entier ou pair ou impair, le nombre x sera ou $+1$ ou -1 . Mais pour tout autre cas quelconque le nombre x sera imaginaire, & pour le trouver on n'a qu'à prendre un arc de cercle



$=g$, le rayon étant $=1$ & ayant cherché son sinus & cosinus, le nombre cherché sera $x = \cos g + \sqrt{-1} \sin g$.

En troisième lieu, soit le logarithme proposé une quantité imaginaire quelconque $=f + g\sqrt{-1}$, puisqu'on fait que toute quantité imaginaire se peut réduire à cette forme $f + g\sqrt{-1}$; en sorte que f & g soient des nombres réels. Cela posé, il est clair que le nombre cherché x fera le produit de deux nombres, dont l'un aura pour logarithme f & l'autre $g\sqrt{-1}$. Par conséquent le nombre qui répond au logarithme $f + g\sqrt{-1}$ fera $=e^f (\cos g + \sqrt{-1} \sin g)$. C. Q. F. T.

On voit donc que le nombre, qui répond au logarithme proposé $f + g\sqrt{-1}$ sera réel, lorsque $\sin g = 0$, c'est à dire, lorsque $g = m\pi$, le coefficient m étant un nombre entier quelconque, ou affirmatif ou négatif. Dans ce cas on voit de plus, que si m est un nombre pair, à cause de $\cos g = +1$, le nombre cherché sera affirmatif, mais si m est un nombre impair, qu'à cause de $\cos g = -1$, le nombre cherché sera négatif $= -e^f$. Dans tous les autres cas, où m , c'est à dire $\frac{g}{\pi}$ sera un nombre rompu, ou même irrationnel, le nombre qui répond à ce logarithme $f + g\sqrt{-1}$ sera infailliblement imaginaire.

Par le moyen de cette règle on pourra aussi se servir des logarithmes dans le calcul des nombres imaginaires. Pour en donner un exemple, qu'on cherche la valeur de cette expression $\left(\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}\right)^4 \left(\frac{+1 + \sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\right)^3 \left(\frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}\right)^2 \sqrt{-1} = A$. Pour cet effet on n'a qu'à prendre un logarithme quelconque de chaque facteur, & en faire les opérations conformément aux règles généralement reçues en sorte:



$$1 \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} = \frac{2}{3} \pi \sqrt{-1}. \text{ Donc } 4 \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} = \frac{8}{3} \pi \sqrt{-1}$$

$$1 \frac{+1 + \sqrt{-1}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{4} \pi \sqrt{-1}; \dots 3 \frac{+1 + \sqrt{-1}}{\sqrt{2}} = \frac{3}{4} \pi \sqrt{-1}$$

$$1 \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} = \frac{4}{3} \pi \sqrt{-1}; \dots 2 \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} = \frac{8}{3} \pi \sqrt{-1}$$

& enfin

$$1 \sqrt{-1} = \frac{1}{2} \pi \sqrt{-1}$$

Donc la somme ou

$$1 A = \frac{\frac{7}{12} \pi \sqrt{-1}}{\frac{1}{12} \pi \sqrt{-1}}$$

Par conséquent le produit cherché sera

$$A = \cos \frac{7}{12} \pi + \sqrt{-1} \cdot \sin \frac{7}{12} \pi \quad \text{ou bien}$$

$$A = \cos \frac{7}{12} \pi + \sqrt{-1} \cdot \sin \frac{7}{12} \pi$$

Je remarque encore que le logarithme proposé étant $\frac{f+g\sqrt{-1}}{e^{f+g\sqrt{-1}}}$ le nombre répondant selon la règle commune se trouve $\frac{f+g\sqrt{-1}}{e^{f+g\sqrt{-1}}}$. Or cette expression est tout à fait équivalente à celle que nous venons de trouver, Car on fait d'ailleurs que $e^{g\sqrt{-1}} = \cos g + \sqrt{-1} \cdot \sin g$ & partant $e^{f+g\sqrt{-1}} = e^f \cdot e^{g\sqrt{-1}} = e^f (\cos g + \sqrt{-1} \cdot \sin g)$: mais cette dernière expression est plus commode que la première, ou les imaginaires entrent dans l'exposant.

