NOTE

SUR LA

THÉORIE DES MOUVEMENTS RELATIFS;

PAR M. J. BERTRAND.

La découverte du principe de d'Alembert, et surtout l'ouvrage admirable dans lequel Lagrange développa les conséquences de ce principe, semblent avoir mis fin aux problèmes ingénieux que les géomètres se proposaient par défi sur des questions de mécanique. On pourrait même ajouter que, trop souvent, après avoir étudié la mécanique analytique, on croirait faire une chose inutile en cherchant à compléter l'étude de cette science par la lecture des travaux épars dont les prédécesseurs de Lagrange ont enrichi les recueils académiques du XVIIIe siècle. Je crois que cette tendance, malheureusement très-générale, est de nature à nuire aux progrès de la mécanique, et qu'elle a déjà produit de fâcheux résultats: la trop grande habitude de tout déduire des formules fait perdre jusqu'à un certain point le sentiment net et précis des vérités mécaniques considérées en elles-mêmes; et si la science a gagné d'une manière incontestable à l'introduction de ces méthodes si générales, on peut dire que, par compensation, chaque question doit néanmoins se présenter sous un jour moins lumineux, et qu'enfin les procédés analytiques dont on fait aujourd'hui un si grand usage sont plus propres à convaincre l'esprit qu'à l'éclairer, en lui permettant de suivre d'une manière intuitive les relations des effets avec les causes.

Ces réflexions ne se sont jamais présentées à moi avec plus de force qu'après la lecture successive de deux Mémoires dans lesquels le même sujet est traité, à près de cent ans de distance, par Clairaut et par M. Coriolis.

M. Coriolis, en s'occupant à deux reprises différentes de la théorie des mouvements relatifs, s'est rencontré, sans le savoir, avec l'illustre Clairaut, qui, dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences* pour 1742, avait résolu plusieurs problèmes, en faisant précisément usage du principe de M. Coriolis. Mais ce principe qui, dans le Mémoire plus récent n'est démontré que par des calculs compliqués, semble à Clairaut tellement évident, qu'il néglige d'entrer dans le détail des raisonnements synthétiques qui l'y ont conduit, et se borne à en énoncer en quelques lignes le principe. Ce qui donne encore plus d'intérêt à ce rapprochement, c'est que Clairaut qui, dans l'application de son théorème, ne commet aucune erreur, l'énonce cependant d'une manière inexacte, que l'on peut d'ailleurs corriger en suivant avec soin le raisonnement rapide par lequel commence son Mémoire.

Ainsi se trouvent mis en évidence, de la manière la plus nette, les avantages et les dangers que présentent en mécanique les raisonnements à priori : ils sont la plupart du temps plus rapides, toujours plus satisfaisants pour l'esprit ; mais Clairaut lui-même est exposé à s'y tromper.

Le but que je me propose ici est d'exposer avec détail la démonstration trop peu connue de Clairaut, de la rectifier en montrant pourquoi le théorème dont il est question ne s'applique qu'au principe des forces vives, et de faire voir enfin comment, en suivant les idées de Clairaut, on parvient sans aucun calcul à la notion des forces centrifuges composées, introduites par M. Coriolis dans son second Mémoire sur les mouvements relatifs.

I.

Je commencerai par reproduire textuellement le raisonnement de Clairaut pour montrer en quoi il est défectueux :

« Afin de représenter tous les mouvements qu'un plan peut avoir en » glissant sur un autre plan, imaginons que le rectangle FGHI soit placé » entre deux courbes quelconques AB, CD, et que, pendant qu'on fait mou- » voir à volonté l'angle G de ce rectangle dans la courbe AB, l'angle I du » même rectangle suive la courbe CD. Supposons maintenant qu'un corps M » de ce système, accéléré par la gravité ou par d'autres forces quelconques, » décrive par la nature de ce système la courbe $M\mu$, pour trouver la force » accélératrice ou retardatrice que le mouvement du plan FGHI donnera à » ce système ; voici ce qu'il faut faire :

» On commencera par tracer la courbe PQ que le point M décrirait pen- » dant le mouvement de FGHI si ce point M était fixe dans le plan FGHI ; » on déterminera ensuite la vitesse avec laquelle il se mouvrait dans cette

» ligne, ce qui ne dépendra que de la vitesse donnée de G et des courbes » AB, CD. Cela fait, on cherchera les forces accélératrices qu'il faudrait » supposer répandues dans l'espace ABCD, pour que le corps M, aban- » donné à lui-même avec la vitesse qu'il a en M par Mm, parcourût la ligne » PQ. Que MS, par exemple, représente ce que cette force accélératrice » serait en M, je dis qu'en prolongeant MS et prenant MT qui lui soit égale, » cette droite MT représente la force par laquelle le mouvement du plan » FGHI altère la vitesse de M par Mμ.

» Pour le prouver, je commence par distinguer le corps M du point fixe » de FGHI qui lui répond, et je nomme ce point fixe M'; je remarque ensuite » que si, dans l'instant que le corps M vient de parcourir Mμ et M', M'm, » on venait à ôter les courbes AB, CD, et qu'on laissât le plan FGHI *se » mouvoir uniformément et en ligne droite,* avec la vitesse de M' par M'm, » il arriverait nécessairement que le système qui est sur ce plan FGHI se » mouvrait de la même manière que si ce plan était fixe. A cette observation, » je joins celle-ci, que la raison pour laquelle le mouvement par l'arc Mm » est altéré par le mouvement curviligne du plan FGHI, c'est que pour » former ce mouvement curviligne, il faut imaginer qu'à l'instant que M' » vient de parcourir M'm, il reçoit une impulsion MS que le corps ne reçoit » pas; car, si le corps M recevait cette impulsion, le mouvement du sys- » tème serait absolument le même que si FGHI était fixe. Cela posé, je dis » qu'il revient au même que M' reçoive une impulsion, sans que M la re- » çoive, ou que M la reçoive en sens contraire, et que M' n'en reçoive » aucune.

» Donc, on peut regarder le plan FGHI comme fixe, et supposer que » le corps, outre les forces accélératrices qui l'animaient avant le mouve- » ment de FGHI, souffre de plus l'action des forces données MT. »

II.

Le raisonnement que je viens de transcrire est tellement concis, qu'on a quelque peine à voir, d'une manière précise, quelle portée Clairaut a prétendu donner à son théorème; il semble évident, en outre, que l'illustre géomètre a plutôt voulu indiquer la nature des considérations qui l'ont guidé que les exposer avec détail. En étudiant ce passage avec soin, on peut cependant se convaincre que la phrase que j'ai soulignée, exprime une idée inexacte. On sait, en effet, fort bien, qu'un *système* abandonné à lui-même ne se meut pas d'un mouvement rectiligne et uniforme; c'est pour cette raison que la conclusion à laquelle parvient Clairaut n'est pas exacte. On doit aussi remarquer que bien des détails essentiels sont omis, et notamment tous ceux qui devraient se rapporter à l'influence des liaisons qui peuvent exister entre les différents points du système mobile. Je vais essayer, comme je l'ai dit, de corriger ces inexactitudes et de réparer ces omissions.

Au lieu de considérer, comme Clairaut, le mouvement sur un plan mobile, je supposerai généralement qu'un système de forme invariable soit animé d'un mouvement quelconque; je considérerai le mouvement d'un point M, *qui ne soit aucunement lié à ce système,* et dont nous prendrons la masse pour unité. Je chercherai quelles forces on doit adjoindre à celles qui le sollicitent réellement, pour pouvoir déterminer son mouvement par rapport au système mobile, comme si celui-ci était fixe. Quand on étudie le mouvement d'un point par rapport à des axes fixes, on sait que les composantes des forces qui le sollicitent représentent précisément les coefficients différentiels de la vitesse suivant les trois axes; ce sont donc ces coefficients différentiels qu'il faut calculer ici, et les forces cherchées seront ce que l'on doit ajouter aux forces accélératrices qui sollicitent le point M pour obtenir leur expression : or on peut, sans changer la valeur de ces coefficients, imprimer un mouvement commun au point M et au système mobile. Il semblerait naturel de choisir ce mouvement de telle manière que les axes mobiles conservassent, pendant un temps infiniment petit, la même position; mais nous parviendrons au même but en faisant seulement en sorte qu'ils se meuvent parallèlement à eux-mêmes d'un mouvement rectiligne et uniforme, car on sait, et il est d'ailleurs évident, qu'un pareil mouvement des axes de coordonnées altère les vitesses, par rapport à ces axes, d'une quantité constante, et ne change par conséquent en rien leurs coefficients différentiels.

Remarquons que les axes mobiles qui doivent définir le mouvement du système dont ils font partie peuvent être choisis arbitrairement. On peut donc supposer qu'à un instant donné, leur origine coïncide avec la position du point M; désignons cette origine par M'. Au bout d'un temps infiniment petit dt, elle aura décrit un arc de courbe M'P', tandis que le point mobile M sera venu de M′ en P. Pendant ce temps les axes auront changé de direction, et quel que soit ce changement, on sait qu'il peut être considéré comme une rotation infiniment petite effectuée autour d'un axe passant par l'origine : si donc nous voulons que les axes aient un mouvement uniforme de translation dans l'espace, et que l'origine décrive une ligne droite, il faut imprimer au système, autour d'un axe instantané passant par le point P′, une rotation égale et contraire à celle qu'il a exécutée réellement, et, de plus, supposer à tous les points un mouvement commun suivant des droites égales et parallèles à P′K, de telle manière que le point M′, au lieu de venir en P′, vienne se placer en K sur la tangente à la courbe M′P′ à une distance M′K égale à celle que la vitesse acquise lui ferait parcourir dans le temps dt; et, en supposant que le point M participe à ces deux mouvements, rien ne sera changé dans son mouvement par rapport aux axes mobiles, et par conséquent les coefficients différentiels de sa vitesse, parallèlement à ces axes, seront précisément égaux à ceux que nous voulons calculer. Or ces deux mouvements, que nous devons imprimer au point M, le déplacent l'un et l'autre de quantités infiniment petites du second ordre; on peut donc les supposer produits par deux forces agissant pendant le temps dt, et dont il est facile d'apprécier la valeur. La première, celle qui correspond au mouvement de rotation, est évidemment perpendiculaire au plan qui passe par l'axe instantané et par la direction de la vitesse relative; cette force doit, de plus, être capable de faire parcourir, dans le temps dt, un arc infiniment petit du second ordre ayant pour angle $\omega\, dt$, ω étant la vitesse de rotation du système mobile autour de l'axe instantané, et pour rayon $v\, dt$, v étant la projection de la vitesse relative sur un plan perpendiculaire à cet axe : or un pareil arc égal à $\omega v dt^2$ est parcouru sous l'influence d'une force $2\omega v$; telle est donc la première des forces par laquelle on doit supposer le point M sollicité : c'est la force centrifuge composée de Coriolis. Quant à la seconde, il faut qu'elle soit capable d'amener le point M′ de P′ en K; on voit sans peine qu'elle est égale et contraire à celle qui devrait solliciter un point libre pour qu'il restât invariablement lié au système, en supposant qu'il soit placé en M′ avec la vitesse actuelle de ce point M′. Si donc nous ajoutons ces deux forces à celles qui sollicitent le point M, nous pourrons regarder les axes comme se mouvant parallèlement à eux-mêmes d'un mouvement rectiligne et uniforme, et, par conséquent, les équations du mouvement comme étant les mêmes que par rapport à des axes fixes.

Nous avons donc, dans le cas d'un point isolé qui n'est nullement lié aux axes mobiles, le théorème suivant qui est précisément celui de M. Coriolis: Pour avoir les équations du mouvement relatif d'un point, il faut ajouter aux termes existants pour le mouvement absolu, d'abord ceux qui proviennent de la force égale et contraire à celle qui forcerait le point considéré à rester invariablement lié aux axes mobiles, et, en outre, ceux qui proviendraient d'une force perpendiculaire à la vitesse relative et à l'axe instantané de rotation des axes mobiles, égale au double du produit de la vitesse angulaire de rotation des axes mobiles, par la vitesse relative projetée sur un plan perpendiculaire à cet axe.

III.

Le cas d'un point entièrement libre comprend implicitement tous les autres; quelle que soit, en effet, la nature des liaisons qui définissent le système dont on cherche le mouvement, liaisons qui peuvent établir, en outre, une dépendance entre ce système et celui des axes mobiles, on peut toujours regarder chaque point comme complétement isolé et libre, pourvu qu'on adjoigne aux forces qui le sollicitent, des forces nouvelles de direction déterminée, mais d'intensité inconnue, qui représentent l'action que peuvent exercer les liaisons. Or, en supposant toutes ces forces de liaisons connues, et chaque point devenu libre, nous pourrons appliquer le théorème précédent à la recherche de son mouvement, et nous aurons ainsi des équations différentielles, qui seront en nombre égal à celui des coordonnées des points du système; ces équations seront précisément celles qu'on eût dû écrire, si les axes mobiles avaient été fixes, et qu'on eût ajouté aux forces accélératrices de chaque point les deux forces définies par le théorème de M. Coriolis. Il est inutile d'indiquer comment ces équations différentielles, jointes aux équations de liaisons et aux circonstances initiales, définissent complétement les coordonnées en fonction du temps, et permettent, en outre, de déterminer les coefficients inconnus introduits comme facteurs dans les composantes des forces de liaison; cette discussion se trouve dans tous les Traités de mécanique, et il n'y aurait rien à y changer dans le cas actuel.