[handwritten: ... (Differential) I. C.]

MÉLANGES

D'ANALYSE ALGÉBRIQUE

ET

DE GÉOMÉTRIE,

PAR M. J. DE STAINVILLE,

Répétiteur-Adjoint à l'École royale Polytechnique.

ASTOR LIBRARY
NEW-YORK.

A PARIS,

Chez Mme Ve COURCIER, Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins, n° 57.

1815.

232. Après avoir trouvé une valeur approchée du nombre e, il est bon de le considérer en lui-même, et de faire voir que non-seulement il est compris entre 2 et 3, mais qu'aucune fraction rationnelle comprise entre ces deux nombres ne peut le représenter; d'abord il est plus grand que 2, puisque les deux premiers termes de la série

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \text{etc.},$$

22..

sont égaux l'un et l'autre à l'unité, et que la somme des autres termes est positive, mais comme cette somme est moindre que celle des termes de la suite

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \text{etc.},$$

qui est égale à l'unité, puisqu'elle résulte de la division de 1 par 2 — 1, il s'ensuit que la somme des fractions

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \text{etc.},$$

est nécessairement moindre que l'unité, et par suite, que le nombre e est moindre que 3.

Je dis en second lieu, qu'aucune fraction rationnelle ne peut le représenter, car si une fraction irréductible $\frac{m}{n}$ lui était égale, on aurait

$$\frac{m}{n} = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \ldots \frac{1}{2..n} + \frac{1}{2..n.n+1} + \text{etc.};$$

mais si on multiplie les deux membres de cette équation par le produit $1.2..n$ de la suite naturelle des nombres, jusqu'à celui qui indique le dénominateur de la fraction qui se trouve dans le premier membre, on aura

$\{1.2\ldots n-1\}\, m =$ un nombre entier +

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1.n+2}+\frac{1}{n+1.n+2.n+3}+\text{etc.},$$

or

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1.n+2}+\frac{1}{n+1.n+2.n+3}+\text{etc.}$$

est plus petit que

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^3}+\text{etc.},$$

et comme cette dernière quantité est égale à $\frac{1}{(n+1)-1}$, et que le premier membre est un nombre entier, il s'ensuivrait que si à un nombre entier on ajoutait une fraction moindre que $\frac{1}{n}$, le résultat serait un nombre entier, ce qui est absurde ; donc il est également absurde de supposer que le nombre e soit rationnel, donc il est irrationnel.

N. B. Cette démonstration m'a été communiquée par M. Poinsot, qui m'a dit la tenir de M. Fourier.