UNIVERSITÉ PARIS VII - DENIS DIDEROT

ÉCOLE DOCTORALE :

Savoirs scientifiques : épistémologie, histoire des sciences, didactique des disciplines- ED 400
Spécialité : Histoire et philosophie des sciences

Painlevé et la relativité générale

Thèse présentée le 9 janvier 2013 pour l'obtention du grade de
DOCTEUR de l'UNIVERSITÉ PARIS VII
par
Jacques FRIC

Thèse dirigée par : Jean-Jacques SZCZECINIARZ,
professeur de philosophie, université Paris 7, directeur du département : Histoire et philosophie des sciences

Rapporteurs :
M. Michel MIZONY : Directeur de l'IREM de Lyon, université Lyon-1,
M. Roland TRIAY : Professeur des universités : Centre de physique théorique, université d'Aix-Marseille.

Jury
M. Jean EISENSTAEDT : Directeur de recherche émérite au CNRS, Syrte, Observatoire de Paris,
M. Yannick GIRAUD-HÉRAUD : Directeur de recherche de 1ère classe au CNRS, APC, université Paris 7,
M. Marc LACHIÈZE REY : Directeur de recherche au CNRS : APC, université Paris 7,
M. Michel MIZONY : Directeur de l'IREM de Lyon, université Lyon-1,
M. Erhard SCHOLZ : Professeur d'histoire des mathématiques : Université Wuppertal, Allemagne,
M. Jean-Jacques SZCZECINIARZ : Professeur de philosophie à l'université Paris7.

Résumé

L'examen des contributions de Painlevé en 1921-1922, visant à comparer les théories de Newton et d'Einstein, révèle une incroyable richesse créative allant bien au-delà de la forme géniale orientée, la première dans l'histoire qui efface la singularité sur l'horizon, prouvant qu'on peut le traverser. Mais c'est sur ce concept essentiel d'orientation de l'espace-temps que les esprits, même les plus brillants, ont achoppé et le débat subséquent à l'Académie des Sciences, même s'il a produit des contributions magistrales, sombrera dans l'oubli.

Sa formulation géométrique covariante spatiale de la solution newtonienne dévoile que le temps newtonien métaphysique est accessoire et que le paramètre dynamique physique est le temps propre, issu de la gravitation à travers la géométrie de son formalisme ! Si sa tentative d'extension à la relativité générale échouera, elle montrera tout de même que la structure causale qu'elle propose est la même que celle de la relativité générale. Ces avancées en rupture avec les concepts de temps et d'espace en vigueur nous conduiront à nous interroger sur les conditions de leurs émergences. Exhumée avec les honneurs dans des contributions récentes, nous montrerons, à travers les différentes descriptions formelles qu'on peut faire de cet espace-temps, comment la phénoménologie particulière que cette forme met en exergue, révèle mieux que toute autre, la physique sous-jacente et les implications épistémologiques associées à ces descriptions.

L'analyse des propos de Painlevé sur le ds^2 montre qu'ils ne justifient pas l'ostracisme qui l'a frappé. La conclusion soulignera la convergence des approches historiques épistémologiques et scientifiques.

Abstract

The study of the Painlevé papers, published in 1921-1922, analyzing differences between the Newtonian theory and the general relativity, reveals an incredible creativity even beyond the still inspired oriented formalism described in his first paper which was the first in the history erasing the singularity on the horizon allowing it to be inwards crossed over by an observer. This spacetime incredible character baffled even the most brilliant minds and the subsequent debate at the "Académie des Sciences" whether it produced masterful contributions, sank into oblivion.

Painlevé proposed also a space covariant geometrical formalism for deriving the equations of geodesic motion in the Newtonian theory. This does not longer involve the absolute time of the classical mechanics but takes the proper time, affine parameter of this geodesic, as dynamical parameter. Whether the extension of this space formalism to general relativity will not fully succeed, it still will yield a correct result for describing the conformal spacetime structure of the Schwarzschild problem in general relativity. One might wonder how, a scientist, not familiar with the general relativity, as Painlevé was able to set up such breaking concepts of time and space in his work. Brought to light with honors in recent papers, we will show how, by using various formal descriptions suitable for this spacetime, the Painlevé formalism reveals better than any other the underlying physics and its epistemological involvements. The controversial Painlevé 's claims about the ds^2 did not deserve to be struck by such ostracism. At the end, we will stress convergence of historical, epistemological and scientific approaches.

Remerciements

Ce projet qui me tenait à cœur n'a pas été facile à mener. Il n'aurait pas été possible sans le soutien de nombreux intervenants qu'il est impossible de tous nommer, mais je tiens à remercier tout particulièrement :

Patrick Boissé Professeur des universités, Directeur de la faculté de Physique, Université Paris 6 qui m'a aidé efficacement tout au long de ma démarche scientifique du M2 à la thèse.

Gabriel Chardin, CNRS, directeur scientifique adjoint pour astroparticules, cosmologie et neutrinos à l'IN2P3, qui m'a dirigé pour le stage de fin de M2 d'astrophysique de l'IAP et m'a utilement conseillé et orienté dans la poursuite de mes études vers la thèse.

Nathalie Deruelle, directeur de recherche au CNRS et à l'IHES, qui a lu mon document préliminaire et m'a longuement reçu pour me faire part de ses commentaires sur les points essentiels, ce qui m'a permis de les préciser et de les approfondir.

Jean Eisenstaedt, Directeur de Recherche au Syrte à l'Observatoire de Paris qui m'a fait découvrir l'histoire des sciences, en particulier de la relativité générale pour la période concernée par ma thèse, ce qui m'a donné les bases nécessaires à la construction du projet.

Mireille Fric, mon épouse, qui a consacré une partie de son temps à la lecture du manuscrit ce qui a permis d'en corriger des erreurs et d'améliorer la forme du document.

Etienne Klein, directeur de recherche au CEA, professeur à l'école centrale de Paris qui m'a reçu pour discuter de l'intérêt de la représentation du temps dans la forme de Painlevé.

Marc Lachièze Rey, directeur de recherche au CNRS, à l'APC, qui m'a reçu à plusieurs reprises, et qui à chaque fois m'a écouté avec attention me recommandant les pistes à suivre pour développer et finaliser le projet que j'avais entrepris.

Michel Mizony, directeur de l'IREM de Lyon, qui en proposant une approche différente de la relativité générale a permis par une démarche dialectique de préciser des points essentiels de la théorie. Qu'il soit également remercié pour le temps qu'il a consacré à la lecture de mon document, en attirant l'attention sur des points sensibles permettant de l'améliorer sur la forme et sur le fond.

Michel Paty, directeur de recherche émérite au CNRS, qui m'a reçu et avec qui j'ai pu discuter de l'originalité de la contribution de Painlevé à la science.

Jean-Jacques Szczeciniarz, Professeur des universités, Université Paris 7, Directeur du département "Histoire et philosophie des sciences", au laboratoire SPHERE, qui m'a accueilli et conseillé sur le projet que j'avais entrepris.

À travers ces témoignages de reconnaissance, je voudrais remercier la communauté scientifique qui, au-delà du cadre contractuel de sa mission d'éducation, de formation des jeunes chercheurs et de recherche ne néglige pas, pour autant, de consacrer encore de son temps à des initiatives qu'elle estime opportunes alors que rien ne l'oblige à assurer cette charge supplémentaire.

La contribution magistrale ignorée de Painlevé à la relativité générale

PAINLEVÉ ET LA RELATIVITÉ GÉNÉRALE....1

LA CONTRIBUTION MAGISTRALE IGNORÉE DE PAINLEVÉ À LA RELATIVITÉ GÉNÉRALE....2

PRÉAMBULE....8

RÉSUMÉ....9

INTRODUCTION....10

PREMIÈRE PARTIE : ÉVOLUTION ET ANALYSE DES IDÉES DE PAINLEVÉ À TRAVERS SES C.R.A.S (OCTOBRE 1921 À MAI 1922) ET DU DÉBAT SUBSÉQUENT....13

1- L'ARTICLE DU 24 OCTOBRE 1921 : PAINLEVÉ FAIT UNE CONTRIBUTION CAPITALE....13

Painlevé définit "l'axiome de causalité", pilier de la mécanique classique selon lui....13
La relativité, épurée de ses artifices, se fondra dans la mécanique classique....14
Painlevé s'interroge sur l'existence des coordonnées de la forme de Schwarzschild....15
Painlevé propose la toute première forme non singulière sur l'horizon au problème....16
Des propos péremptoires sur les conséquences du ds^2....17
Le débat avec Einstein....18
Quelques réactions immédiates à cet article à l'académie des sciences....19
Émile Picard : l'article du 24 octobre 1921....19
La réponse de Paul Langevin à Painlevé et Picard : l'article du 7 novembre 1921....20
Synthèse des idées avancées par Painlevé et débattues à propos de cet article....23

2- L'ARTICLE DU 14 NOVEMBRE 1921 OÙ PAINLEVÉ PROPOSE UNE FORMULATION GÉOMÉTRIQUE DE LA MÉCANIQUE NEWTONIENNE....26

Les axiomes de la mécanique newtonienne....27
Painlevé propose une formulation géométrique covariante de la gravitation newtonienne....31
Painlevé introduit implicitement le temps propre comme paramètre dynamique....33
Temps newtonien et temps propre identifiés comme même paramètre dynamique....34
Émergence d'un temps physique....34
Démonstration du bien-fondé de la géométrisation de la solution newtonienne....35
Interprétation épistémologique et physique de la solution géométrique de Painlevé....37
L'identification du temps propre au temps newtonien réalise la synthèse....42
La géodésique radiale critique est identique en mécanique newtonienne et en relativité générale....44
Covariance de cette formulation géométrique....45
Painlevé estime que la relativité est une simple retouche de la théorie newtonienne....47
Repères absolus chez Newton et repères privilégiés chez Einstein....49
Cas d'un élément très petit P en présence d'un corps sphérique S, tous les autres corps étant éloignés 52
Painlevé montre qu'il a établi nativement sa forme non singulière sur l'horizon....53
Painlevé remplace la coordonnée r par f(r) dans la forme de Schwarzschild....55
La contrainte de "réversibilité " introduite par Painlevé : Painlevé se renie....57
Manifestation de l'orientation de la solution de Painlevé par l'anisotropie locale 63
Autopsie d'un naufrage....75
Le Naufrage était-il inéluctable ?....75
Peut-on tirer des leçons pour que cela ne se reproduise plus ?....77
Un tel naufrage est-il symptomatique d'une rupture ontologique dans la physique ?....78
Painlevé s'intéresse à l'effet de la rotation dans la solution....79
Comparaison des postulats des théories de la gravitation d'après Newton et Einstein....80
Comparaison avec les observations astronomiques dans le système solaire....83
Synthèse et évolutions des idées de Painlevé dans ce deuxième article....86

3- L'ARTICLE DU 1 MAI 1922, PAINLEVÉ TENTE DE GÉNÉRALISER SA FORMULATION À LA RELATIVITÉ GÉNÉRALE....88

La conversion de Painlevé ?....88
Les postulats de la mécanique classique posés par Painlevé....90

Caractère hybride de la solution géométrique proposée par Painlevé....92
La gravitation einsteinienne....94
Bilan des postulats relativistes de Painlevé....100
Différences physiques, structurelles et phénoménologiques entre la relativité et la mécanique classique....101
Le rôle structurel d'une vitesse limite....109
Painlevé propose d'étendre sa méthode géométrique à la relativité générale....133
Painlevé définit la coordonnée temporelle associée à la forme spatiale pour la géodésique....135
La généralisation de Painlevé est correcte dans le cas des géodésiques nulles....136
Vérification de la validité de l'expression de la coordonnée t proposée par Painlevé....138
Cohérence et signification des équations de Painlevé pour la relativité générale....139
Forme géodésique dans le cas de forme complète de la métrique de Schwarzschild....141
La géodésique temporelle définie par Painlevé est-elle identique à celle de la relativité ?....143
On ne peut pas généraliser la solution géométrique validée en mécanique classique....145
Painlevé a généralisé à tort sa formulation géométrique de la gravitation classique....147
Existe- t-il un formalisme qui permet de dériver l'équation géodésique relativiste à partir de l'espace seulement ?....148
Painlevé, avec quelques aménagements, adhère à la forme de Schwarzschild....149
Painlevé propose une théorie semi- einsteinienne....150
Synthèse et évolution des idées de Painlevé dans cet article....154

4- LE DÉBAT À L'ACADÉMIE DES SCIENCES AVANT, PENDANT ET APRÈS LA CONTRIBUTION DE PAINLEVÉ....157

1915-1920 : l'Académie des Sciences ignore superbement la théorie d'Einstein....157
1920 : premières contributions relativistes à l'Académie des sciences....158
1921 : l'article de Painlevé symptomatique de la défiance de l'Académie vis-à-vis d'Einstein....160
1922 Le débat va s'animer et se structurer : un courant favorable à la théorie d'Einstein émerge, dont trois contributions capitales tombées dans l'oubli....167
27 mars 1922 : E. Cartan : "Sur les espaces conformes généralisés et l'Univers optique"....169
10 avril 1922 : Sauger : "Sur une coïncidence remarquable dans la théorie de la relativité"....171
1 mai 1922 : J. Chazy : "Sur les vérifications astronomiques de la théorie de la relativité"....174
1923 : développement et radicalisation du débat....184
1924 : dernières communications de J . Le Roux contre Einstein à l'Académie....190
Synthèse des idées et conclusions qu'on peut tirer de ce débat (1921-1924) 192
Et Painlevé dans ce débat ?....196

DEUXIÈME PARTIE : L'APPORT SCIENTIFIQUE DE LA SOLUTION PROPOSÉE PAR PAINLEVÉ 197

CORPUS 1 : ANALYSE SCIENTIFIQUE DE LA FORME DE PAINLEVÉ....197

5- FORME DE PAINLEVÉ DÉDUITE DE CELLE SCHWARZSCHILD ET PHÉNOMÉNOLOGIE....197

Construction de la forme de Painlevé à partir de celle de Schwarzschild....197
Remarque sur l'expression de la courbure de la forme de Painlevé....200
Forme cartésienne de Painlevé....201
La métrique inverse dans la forme de Painlevé....201
Les formes de Painlevé et Eddington-Finkelstein sont de la même famille....201
Forme de la métrique inverse de la forme de Painlevé généralisée....203
Le trou noir est la forme générique de ce type de solution....204
La nature de la coordonnée temporelle de la forme de Painlevé clarifie la structure de l'espace-temps....205
La coordonnée T est égale au temps propre de l'observateur de Painlevé....207

6- LA QUADRI-VITESSE COVARIANTE DE L'OBSERVATEUR DE PAINLEVÉ DANS CETTE FORME EST CONSTANTE ET ÉGALE À L'UNITÉ....209

Calcul de la quadri-vitesse radiale entrante contravariante....209
Quadri-vitesse covariante entrante en forme de Painlevé....209
Quadri-vitesse covariante entrante en forme de Painlevé avec boost....211
La forme de Painlevé et le référentiel d'émission (réception) des photons....212
Hypersurfaces à temps propre chute libre constant dans la forme de Schwarzschild....212

7- HYPER-SURFACES ISOCHRONES DANS LES FORMES DE SCHWARZSCHILD ET DE PAINLEVÉ....215

Isochrones dans la forme de Schwarzschild....215
Isochrones dans la forme de Painlevé....215

8- GÉODÉSIQUES RADIALES ET HYPERSURFACES ISOCHRONES, DANS LA FORME DE SCHWARZSCHILD....217

Représentation dans le plan r, t de Schwarzschild....217
Comparaison entre courbes isochrones et géodésiques....218

9 – ÉQUATION GÉODÉSIQUE RADIALE DANS LA FORME DE PAINLEVÉ : CE QU'ELLE RÉVÈLE....222

Méthode directe....222
Méthode générale....222
La forme de Painlevé et la mécanique quantique....223
Remarque sur l'équation géodésique dans la forme de Painlevé généralisée....223
Basculement des cônes de lumière vers l'horizon dans la forme de Painlevé....223

10- LA GÉODÉSIQUE CIRCULAIRE RÉVÈLE UNE DIFFÉRENCE ESSENTIELLE....225

Forme réduite identique à celle de Schwarzschild pour une orbite circulaire....225
Temps propre pour décrire une orbite complète....225
Temps coordonnée pour décrire une orbite....226
L'équation géodésique générique dans l'espace-temps statique à symétrie sphérique....226

11- ANALYSE DE LA DIFFÉRENCE ENTRE DISTANCE SPATIALE GÉOMÉTRIQUE ET DISTANCE OBSERVABLE DANS LA FORME DE PAINLEVÉ....228

La distance spatiale géométrique : sections spatiales en posant t = constante....228
La distance spatiale déterminée par la méthode du "radar"....228
On trouve la même "distance" radar pour les formes de Schwarzschild et Painlevé....229
Les distances géométriques données par les deux méthodes sont différentes....229

12- LE TERME NON QUADRATIQUE DE LA FORME DE PAINLEVÉ. CAUSALITÉ, TEMPS, MOUVEMENT....230

Type des vecteurs de base dérivés des coordonnées dans la forme de Painlevé....230
Condition pour qu'une trajectoire radiale soit de type temps pour r < 2GM....231
La coordonnée t est non orthogonale à l'hypersurface t = constante....233

13- CONGRUENCES DE GÉODÉSIQUES : DESCRIPTION COVARIANTE DE L'ESPACE-TEMPS 234

Géodésiques suivies par l'observateur de Painlevé (type temps)....236
Expansion d'une congruence dans le formalisme de Newmann-Penrose....237
Cas des géodésiques nulles....239
Retour sur la causalité....241
Classification de Petrov-Pirani....242
À la recherche d'une solution représentative inspirée de la méthode....244
Cette recherche ne nous conduit pas directement à la forme de Painlevé....248

14- LA FORME DE PAINLEVÉ ÉTABLIE ET SUPERBEMENT IGNORÉE PAR LEMAÎTRE DANS UN ARTICLE FONDAMENTAL DE COSMOLOGIE....251

Les hypothèses de base....251
La solution cosmologique de Friedmann....253
Phénoménologies comparées des solutions de Friedmann et de Schwarzschild....254
La forme de "Painlevé" de la solution cosmologique homogène et isotrope....256
Équation géodésique de l'espace-temps....258
L'équation géodésique de la solution de Schwarzschild par Lemaître....260
La métrique hybride de Lemaître de la solution de Schwarzschild....261
La forme de la métrique de Lemaître....262
La forme de Lemaître pour décrire l'effondrement d'une boule de poussière....265
L'analyse de Synge (1950)....266

15- ÉTUDE COMPARATIVE CROISÉE DES FORMES DE SCHWARZSCHILD ET PAINLEVÉ.....267

Représentation dans les coordonnées de Schwarzschild....267
Temps des observateurs de Painlevé et Schwarzschild en coordonnées de Painlevé....269
Diagramme géodésique associé à l'extension de la forme de Painlevé avec boost....271

16- ESPACE-TEMPS LOCALEMENT PLAT ET PSEUDO-TENSEUR DE GRAVITATION....273

Espace-temps localement plat....273
Coordonnées localement inertielles, référentiel local de Lorentz....275
Coordonnées normales de Riemann....278
Existe-t-il un référentiel local de Lorentz attaché à un système de coordonnées ?....281
Une approche originale non covariante de la relativité générale : le pseudo-tenseur de Landau & Lifchitz d'énergie-impulsion de la gravitation....283
Cas particulier de ce pseudo-tenseur quand le tenseur énergie-impulsion est nul....286
Différentes formules analytiques pour calculer le pseudo-tenseur....287
Caractéristiques communes aux formes de Painlevé et de Kerr-Schild....290
La nullité du pseudo-tenseur résulte de la forme de métrique (choix de jauge)....291
Cas de l'extension de la forme de Painlevé (avec vitesse non nulle à l'infini)....291
Cas de la solution de Robertson-Walker critique....292
Compléments sur le pseudo-tenseur de Landau & Lifchitz....292

17 – UN MODÈLE DE LA FORME DE PAINLEVÉ À CARACTÈRE PSEUDO-MINKOWSKIEN.....298

Introduction....298
Introduction d'un espace de fond plat....302
Équation géodésique et référentiel local en coordonnées cartésiennes de Painlevé....308

18- UNE APPROCHE HAMILTONIENNE NON COVARIANTE : LE FORMALISME ADM.....315

Introduction....315
Comparaison entre le formalisme ADM et celui de la rivière....315
L'interprétation géométrique dans l'approche ADM....316
Hyper-surfaces : première forme fondamentale....319
Hyper-surfaces : courbure extrinsèque, seconde forme fondamentale....320
Les coefficients de Ricci de l'équation géodésique de la rivière sont des tenseurs....322
Convergence entre congruences et hypersurfaces....322
La masse (énergie) ADM....324
La forme de la métrique dans le formalisme ADM appliqué à la forme de Painlevé....326

19- SYNTHÈSE SUR LE CARACTÈRE PSEUDO-MINKOWSKIEN DE LA FORME DE PAINLEVÉ 327

Des propriétés très spécifiques....327
Du modèle de la rivière émerge un espace de fond plat....332
Analyse des caractères associés à la nullité du pseudo-tenseur....333
Conditions analytiques décrivant la nullité pseudo-tenseur de Landau & Lifchitz 335
Les éléments structurants du pseudo-tenseur dans la forme de Painlevé....336
Le Super-potentiel de Freud de la solution peut être représenté par le rotationnel de vecteurs spatiaux ce qui implique que sa divergence (le pseudo-tenseur) est nulle....338
Analyse nullité du pseudo-tenseur : forme de Kerr-Schild sans rotation....341
Les composantes "spatio-temporelles" du super-potentiel de Freud dans la forme de Schild sont le rotationnel de vecteurs spatiaux 3D....343
Les composantes "temporelles" du super-potentiel de Freud qui n'existaient pas dans la forme de Painlevé sont le gradient d'une fonction harmonique....343
Synthèse des propriétés remarquables entraînant la nullité du pseudo-tenseur....344

CORPUS 2 : ANALYSE CONCEPTUELLE ET ÉPISTÉMOLOGIQUE DES ÉLÉMENTS SCIENTIFIQUES....345

Les difficultés conceptuelles de la relativité générale....345
La forme de Painlevé déduite de celle de Schwarzschild....362
Nature de la coordonnée T de la forme de Painlevé et la structure de l'espace-temps....373
La coordonnée temporelle T est égale au temps propre de l'observateur de Painlevé....374
La quadri-vitesse covariante de l'observateur de Painlevé dans cette forme est constante et égale à l'unité....374
Hyper-surfaces isochrones dans les formes de Schwarzschild et de Painlevé....382

Géodésiques radiales et hypersurfaces isochrones, dans la forme de Schwarzschild....384
Équation géodésique radiale dans la forme de Painlevé : ce qu'elle révèle....386
La géodésique circulaire révèle une différence phénoménologique essentielle....388
Analyse épistémologique de la différence entre distance spatiale géométrique et distance observable dans la forme de Painlevé....393
La relativité générale est en rupture ontologique avec la pensée newtonienne....395
Espace-temps, observateurs, observables en relativité générale....396
Incomplétude de la relativité générale ?....399
La causalité concerne les observateurs....402
Le terme non quadratique de la forme de Painlevé. Causalité, temps, mouvement....406
Quel critère physique est fondamental : le temps, le mouvement ou la causalité ?....407
Le référentiel local de l'observateur indissociable de la physique....411
Congruences de géodésiques : description covariante de l'espace-temps....414
La forme de Painlevé établie et superbement ignorée par Lemaître dans un article fondamental de Cosmologie....420
La forme de la métrique de Lemaître....428
Étude comparative croisée des formes de Schwarzschild et Painlevé....429
Espace-temps localement plat et pseudo-tenseur de gravitation....431
Espace-temps localement plat....431
Une approche non covariante de la relativité générale : le pseudo-tenseur de Landau & Lifchitz d'énergie-impulsion de la gravitation....433
Calcul du pseudo-tenseur de Landau-Lifchitz dans différentes formes de métrique....437
Phénoménologie caractérisée par la nullité du pseudo-tenseur de Landau-Lifchitz....439
Un modèle où la forme de Painlevé révèle un caractère pseudo-minkowskien....440
Une approche hamiltonienne non covariante : le formalisme ADM....447
Principe de la méthode....449
Synthèse sur le caractère pseudo-minkowskien de la forme de Painlevé....453
Synthèse des propriétés remarquables entraînant la nullité du pseudo-tenseur....454

TROISIÈME PARTIE: PAINLEVÉ MÉRITAIT-IL L'OPPROBRE POUR SES PROPOS SUR LE DS² ? 456

20- DÉCALAGE SPECTRAL SUR UNE GÉODÉSIQUE RADIALE....456

Définition du décalage spectral....456
Décalage spectral pour l'observateur de Painlevé dans la forme de Painlevé....457
Phénoménologies des photons entrants et sortants dans la forme de Painlevé....459
Décalage spectral pour l'observateur de Schwarzschild dans la forme associée....460
Comparaison des décalages spectraux pour les deux types d'observateurs....460

21- ANALYSE DES PROPOS DE PAINLEVÉ : FAUT-IL LE RÉHABILITER ?....464

Rappel....464
Les propos de Painlevé "dans le texte"....464
Incompréhension des propos précis de Painlevé....465
La phénoménologie qui a pu motiver les propos de Painlevé....466
Comment Painlevé a-t-il construit sa forme de métrique ?....467
À chacun sa vérité....470

22- CONCLUSION....471

ANNEXES....475

ANNEXE 1 : L'ARTICLE DE PAINLEVÉ SUIVI DE CELUI DE E. PICARD....475

ANNEXE 2 : PAINLEVÉ BIOGRAPHIE....481

Le mathématicien....481
L'homme politique....482

ANNEXE 3 : CALCULS DÉTAILLÉS CLASSÉS PAR CHAPITRES....483

Chapitre 1....483
Chapitre 2....485
La relativité s'invite dans la formulation géométrique de la gravitation de Painlevé....487
Formulation géométrique de Painlevé de la gravitation classique et rotation de Wick 488

La géodésique radiale critique est identique en mécanique newtonienne et en relativité générale....491
Comparaison avec les observations astronomiques dans le système solaire....497
Chapitre 3....502
Chapitre 4....520
Chapitre 5....521
Chapitre 6....526
Chapitre 7....526
Chapitre 8....527
Chapitre 9....528
Chapitre 10....529
Forme réduite identique à celle de Schwarzschild pour une orbite circulaire....529
Temps propre pour décrire une orbite complète....530
Temps coordonnée pour décrire une orbite....531
Chapitre 11....532
Chapitre 12....532
Chapitre 13....533
Chapitre 14....534
Chapitre 15....534
Chapitre 16....535
Chapitre 17....539
Le modèle de la rivière et compléments : formulation mathématique....539
Introduction d'un espace de fond plat....545
Le champ de la rivière dans l'espace global de Minkowski....550
Symboles de Christoffel de la forme de Painlevé....556
Chapitre 19....557
Conditions analytiques décrivant la nullité pseudo-tenseur de Landau & Lifchitz....557
Analyse de la structure du pseudo-tenseur et de sa nullité dans la forme de Painlevé....562
Chapitre 20....568
Décalage spectral pour l'observateur de Painlevé dans la forme associée....568
Décalage spectral pour l'observateur de Schwarzschild dans la forme associée....571
Chapitre 21....576
Méthode de balisage spatio-temporel physique d'un univers autour d'un corps unique à symétrie sphérique et forme de Painlevé....576
Démonstration géométrique simple du redshift d'un photon entrant....578

ANNEXE 4 : EINSTEIN AU COLLÈGE DE FRANCE ET À LA S. A. F....582

ANNEXE 4 : EINSTEIN AU COLLÈGE DE FRANCE ET À LA S. A. F....583

ANNEXE 5 : LEMAÎTRE ET LA COSMOLOGIE, QUELQUES ÉLÉMENTS DE SON PARCOURS..587

ANNEXE 6 : RAPPEL DE L'ÉTAT DE L'ART LORSQUE PAINLEVÉ PUBLIE SON ARTICLE....591

ANNEXE 7 : CALCUL DU PSEUDO-TENSEUR GRAVITATION EN UTILISANT MATHEMATICA 4 595

ANNEXE 8 : CALCUL DES COEFFICIENTS DE ROTATION DE RICCI POUR LA TÉTRADE DÉFINIE DANS LE MODÈLE DE LA RIVIÈRE....601

ANNEXE 9 : FONDEMENTS DU FORMALISME ADM....607

ANNEXE 10 : RÉCAPITULATIF DE QUELQUES FORMES DE MÉTRIQUES DE LA SOLUTION ET TÉTRADES ASSOCIÉES UTILISÉES DANS LE DOCUMENT....622

RÉFÉRENCES....630

C.R.A.S SUR LE DÉBAT À L'ACADÉMIE DES SCIENCES, EXTRAITS DES RÉFÉRENCES, PÉRIODE 1921-1924, CLASSÉS PAR ORDRE CHRONOLOGIQUE....637

Préambule

Ce qu'il y a de faux et parfois de fou dans les films, dans les pièces de théâtre, dans tous les livres, dans tous les romans, dans les ouvrages d'histoire et même dans les Mémoires tel que le recueil de souvenirs que vous tenez entre les mains, c'est le découpage des perspectives, leur partialité, leur étroitesse. On dirait qu'il ne s'agit jamais que d'un regard jeté à la dérobée sur une situation plus ou moins arbitraire, sur tel ou tel problème particulier, pour quelques mois à la mode. Quel est sens d'un roman qui raconte une histoire d'amour sans situer ses personnages parmi les événements de l'époque qui tiennent, chacun l'éprouve, une place si énorme dans nos préoccupations de chaque jour

Jean d'Ormesson : "Au plaisir de Dieu"

Jean d'Ormesson se réfère à la nature humaine dans son roman. La science ou plutôt ne devrait-on pas dire la pensée scientifique n'échappe pas à cette règle. Elle est indissociable du contexte de la science de l'époque. Consensus exemplaire des connaissances de l'humanité, patrimoine humain inégalable, d'autant que ses gardiens l'estimaient achevé à cette époque, il est rebelle aux remises en cause. Einstein fut bien audacieux de s'attaquer à l'édifice !

Les limites de l'étude scientifique, c'est que comme Bachelard le rappelait, lorsque l'homme tente de connaître la nature dans ses retranchements ultimes, il découvre d'étranges empreintes : "Ce sont les siennes" !

L'étude de la manière dont les scientifiques ont fait progresser la science, de leurs intuitions, de leurs erreurs parfois géniales et de leur cheminement souvent tortueux pour arriver au but apparaît être une méthode capable de briser le cercle.

Ainsi, Painlevé trouve une solution géniale en 1921 au problème du corps unique à symétrie sphérique, en fait motivé par une contestation de la théorie d'Einstein. Personne ne la comprend, pas même lui, elle tombe aux oubliettes. L'analyse de ce naufrage nous conduit à constater que si la relativité (restreinte et générale) a réduit en miettes les concepts d'espace et de temps de la mécanique newtonienne le puzzle reconstruit à partir des morceaux n'est pas totalement dégagé des concepts d'origine même chez les plus brillants esprits de l'époque.

Mais, si cela souligne la fragilité de certaines découvertes et montre que leurs auteurs s'ils ont su en trouver la clé ont pu être déroutés par ce qu'il y avait derrière la porte que cette clé ouvrait, cela illustre aussi la puissance épistémologique de certains principes fondateurs de théories aux implications si inattendues que même leurs auteurs ne s'y sont pas reconnus !

Le projet de thèse qui suit tente de réhabiliter la solution de Painlevé, injustement méconnue et méprisée, car les propos incohérents qu'on lui prête se révèlent à l'analyse plutôt anodins. Nous l'étudierons à travers l'approche des scientifiques, au cours du temps, du problème posé et l'examen des difficultés, en particulier conceptuelles, auxquelles ils se sont heurtés.

Et surtout, nous découvrirons son apport scientifique et épistémologique qui, à la lumière des connaissances actuelles, révèle des implications allant bien au-delà du cas spécifique traité.

Résumé

L'examen des contributions de Painlevé, révèle une incroyable richesse créative[1] allant bien au-delà de la forme géniale qu'il a proposée en 1921 et 1922, mais le débat passionné qui a suivi à l'Académie des sciences, comme son analyse le montrera, même s'il a produit des contributions magistrales[2], sombrera dans l'oubli sans sauvegarder l'essentiel.

Painlevé, lui-même, malgré une tentative de clarification louable a, sous la pression de la communauté scientifique, trop vite renoncé. Nous tentons d'éclairer les problèmes, purement conceptuels, que cette solution innovante et ses attendus ont posés aux scientifiques les plus éminents de l'époque, y compris Einstein et ce qui les a troublé au point de la rejeter, à tort !

La forme de la métrique de Painlevé, solution du corps unique à symétrie sphérique, membre d'une famille incluant la forme d'Eddington-Finkelstein, révèle plus que toute autre des propriétés bien singulières comme le caractère newtonien des géodésiques radiales[3] et la nullité du pseudo-tenseur de gravitation de Landau & Lifchitz[4]. L'analyse montrera que ces particularités émergent des symétries de la source du champ qui obèrent partiellement l'auto-couplage gravitationnel, discriminant la relativité générale de la mécanique classique.

Nous montrerons que c'est le produit croisé *dr.dt* dans sa forme de la métrique, conférant une orientation spatio-temporelle à une trajectoire temporelle, qui permet de traverser l'horizon sans singularité. Il éclaire la nature physique de l'espace-temps de la solution, mais c'est précisément sur ce concept essentiel que les esprits, même les plus brillants, ont achoppé[5].

Nous analyserons les circonstances d'un tel naufrage et argumenterons sur son caractère structurel. Nous décrirons comment Lemaître, qui montrera, onze ans plus tard (1932), que la solution peut être décrite en termes cosmologiques, apportera un début de clarification.

Exhumée avec les honneurs dans des contributions récentes[6], en étayant notre argumentaire par des calculs et diagrammes originaux[7], nous nous attacherons à montrer, à travers les différentes descriptions formelles qu'on peut faire de cet espace-temps, comment la phénoménologie particulière que cette forme met en exergue révèle, mieux que toute autre, la physique sous-jacente et les implications épistémologiques associées à ces descriptions en particulier sur les différences entre les interprétations des temps classique et relativiste.

A l'issue de cette analyse de la physique d'un tel espace-temps nous disposerons d'éléments scientifiques objectifs permettant d'apprécier les propos de Painlevé dans leur contexte et nous montrerons que l'ostracisme dont il a été victime n'était pas justifié.

Dans la conclusion nous soulignerons la convergence des approches historiques épistémologiques et scientifiques, car si l'analyse du problème conduit à le séparer en ses éléments, ceci relève d'une méthode, mais sa compréhension ne peut être que globale."

[1]Une géniale formulation géométrique purement spatiale (sans le temps absolu) de la mécanique classique et de la structure conforme de l'espace-temps relativiste, mais dont la généralisation aux autres géodésiques échouera.
[2]E. Cartan (1922c), Sauger (1922), Chazy (1922) : leurs contributions sont totalement passées inaperçues.
[3]Le caractère newtonien ne s'applique qu'aux géodésiques radiales, car bien entendu la solution n'est que "partiellement" newtonienne. Nous en expliciterons les modalités dans ce document.
[4]Le pseudo-tenseur de Landau & Lifchitz caractérisant la gravitation est identiquement nul dans cette solution.
[5]En 1939, Einstein [réf. Einstein 1939] s'efforce encore de démontrer (par un calcul juste, mais des conclusions fausses) la non existence des trous noirs sur un argument qui ne prenait pas en compte la possibilité d'un espace-temps non statique.
[6]Doran(2000), Martell & Poisson (2000), Hamilton& Lisle (2006 & 2008), Mizony (2011), Lin C.Y &Soo C. (2009).
[7]Originaux à notre connaissance, il s'agit de calculs et figures faits indépendamment de toute référence. Nous verrons comment on peut "représenter" la courbure sur ces diagrammes en étudiant les cônes de lumière.

Introduction

L'histoire de cet épisode, peu connu, de l'histoire de la science relativiste n'est pas ordinaire.

En effet, c'est un destin bien singulier que celui de Paul Painlevé (1863-1933)[8], ancien élève de l'école normale supérieure, membre de l'Académie des Sciences depuis 1900, qui en avait été élu président en 1918, et auteur de travaux mathématiques fondamentaux sur les équations différentielles, d'être plus connu en tant que homme politique[9] que scientifique.

Au cours de sa longue carrière, il a été, entre autres, président du conseil en 1917 et 1925, ministre de la guerre à plusieurs reprises en particulier pendant le premier conflit mondial (1917) et en 1928, époque où il ordonna la construction de la ligne Maginot et, à sa mort, il fut l'objet de funérailles nationales et inhumé au Panthéon.

Dans sa carrière bien remplie, dans un intermède consécutif à son éviction par Clémenceau de la vie politique, Painlevé trouva le temps de s'intéresser à la Relativité générale et dans un court compte rendu de 4 pages à l'Académie des Sciences publié en le 24 octobre 1921[10], il fera (bien malgré lui) une contribution capitale à cette théorie.

Nous verrons ce qu'il en adviendra. Ajoutons que dans son étude du problème, qui donnera lieu à deux articles complémentaires plus détaillés, Painlevé fera d'autres propositions très innovantes encore plus méconnues que celle que nous avons citée.

Autre point important, cette contribution va être le détonateur qui va susciter une prrolifération de contributions contradictoires, à propos de la relativité générale, au sein de l'Académie des Sciences qui avait superbement ignorée cette théorie jusqu'à là.

Dans l'article du 24octobre 1921, reproduit en annexe *1*, Painlevé[11], manifestement troublé et irrité, comme bon nombre de ses collègues de l'élite scientifique, par les prétentions "*philosophico- scientifiques"* des "*doctrines d'Einstein"* se livre à une critique sévère de cette théorie.

Nous verrons que la critique de ces prétentions "philosophico-scientifiques"[12] sera prégnante dans le débat, les académiciens les dénonçant comme superfétatoires et y voyant un leurre pour masquer les "incohérences et insuffisances" (selon eux) de la théorie d'Einstein. A l'appui de sa critique Painlevé propose une nouvelle forme de la métrique dont il prétend qu'elle invalide les "prétentions et innovations scientifiques" des tenants de la relativité générale. Il conclut son article sur une assertion intempestive sur ce qu'il qualifie de dogme du ds^2 en relativité générale, ce qui lui a valu d'être totalement discrédité aux yeux de la postérité et de voir sa contribution jetée aux oubliettes de l'histoire.

[8]Voir annexe 2 pour plus de détails.
[9]Il est entré en politique à l'occasion de l'affaire Dreyfus dont il a été l'un des plus ardents défenseurs.
[10]Nous nous intéresserons également à deux articles suivants où il apporte un éclairage sur sa démarche.
[11]Voir annexe 2 pour une biographie succincte.
[12]Alors qu'Einstein ne faisait que justifier épistémologiquement ses hypothèses. La longue introduction de son article de 1916 en est un exemple admirable. On saisit le décalage d'approche entre Einstein et la science "officielle" de l'époque.

Painlevé n'a pas explicité dans le premier article comment il a établi sa forme pour cette solution mais son deuxième article donne des éléments qui permettent d'étayer l'hypothèse d'une méthode très rigoureuse et solide que nous discuterons en particulier au chapitre *21*, ce qui permettra aussi de comprendre ce qu'il voulait dire et montrera que l'anathème dont il a été victime repose sur un malentendu malheureux.

Ironie du sort, de cette contribution qui se voulait dévastatrice émerge une forme de la métrique de la solution de Schwarzschild qui, au lieu de discréditer la théorie, la conforte en évacuant cette singularité indésirable sur l'horizon qui semblait mettre en péril tout l'édifice.

Que Painlevé n'ait pas vu que cela abondait dans le sens de la Relativité Générale, cela se conçoit, l'intention n'y était pas, mais que Einstein lors de ses polémiques avec Painlevé, n'ait pas saisi que cette forme ouvrait des perspectives nouvelles, en éliminant la singularité sur l'horizon, montre bien la confusion des esprits à l'époque vis-à-vis de cette nouvelle théorie.

Ces difficultés de compréhension principalement de nature conceptuelle, qu'on avait de cette solution[13] n'ont pas permis à la proposition innovante de Painlevé de trouver la résonance qu'elle aurait dû avoir, malgré le débat d'idées au sein de l'Académie des Sciences.

Pourtant au-delà de certaines polémiques partisanes, ce débat va montrer une hauteur de vue admirable sur certains points de la théorie et nous verrons que cela démontre que certains esprits avaient bien saisi des aspects formels très difficiles de la théorie, ce qui rend encore plus incompréhensible et dommageable la mise au pilori de Painlevé et de sa solution.

Sans doute, le caractère polémique et la prestation fugace de Painlevé, plus préoccupé par ses ambitions politiques[14] que scientifiques, ont contribué à ce que cette innovante solution ait été superbement ignorée et enterrée. En effet, si on peut s'étonner qu'il y ait encore des choses à découvrir dans la description des trous noirs statiques on remarquera que cette solution ne figure pratiquement dans aucun ouvrage de Relativité Générale, comme cela est souligné dans des contributions relativement récentes, [15] et ce n'est que récemment que quelques contributions [16] montrent que le voile est loin d'avoir été totalement levé sur la solution proposée par Painlevé en 1921.

---

[13]Rien d'étonnant, car encore en 1950 Synge (1950) déclare dans l'introduction de son article :
" *Notre connaissance actuelle des propriétés des solutions des équations (d'Einstein) du champ est bien mince (Il cite Bergmann P.G 1947 à l'appui de ses dires). Il existe des solutions particulières telles que celles de Schwarzschild pour la symétrie sphérique et Weyl et Levi Civita pour la symétrie de rotation. Mais même dans ces solutions il reste des points fondamentaux plutôt obscurs qu'il conviendrait d'éclaircir".*

[14]Il était un membre éminent et très actif du "Cartel des gauches" à cette époque

[15]Citons toutefois, que Visser (1998, 2003), Martel & Poisson (2001), ont remarqué que la métrique de Painlevé avait été redécouverte de nombreuses fois. Étonnamment, cette forme de la métrique a été ignorée, voire méprisée dans les ouvrages de relativité générale, à l'exception du texte "Exploring Black Holes" par Taylor & Wheeler (2000) qui y consacre un chapitre entier, le projet B, l'appelant "le référentiel de la pluie" (la forme de la métrique est donnée page B-13). Taylor & Wheeler attribuent (page B-26) l'idée de référentiel de la pluie au livre de Thorne, Price & MacDonald (1986), p 22 et ailleurs, bien que la métrique n'apparaisse pas explicitement dans ce dernier livre. On s'est aperçu depuis quelques années que certains aspects de la relativité générale pouvaient être conceptualisés en termes de flux. Dans le formalisme ADM (1962) (voir par exemple, Lehner L. (2001), pour un exposé pédagogique), on considère des observateurs repères- FIDO's- dont les lignes d'univers sont orthogonales aux hypersurfaces définies, à temps constant. Le vecteur d'entraînement dans le formalisme ADM est précisément la vitesse de ces FIDO's par rapport aux coordonnées spatiales. Ces références sont tirées de Hamilton A. et Lisle J. (2006).

[16]Contributions anglo-saxonnes. Martel K. & Poisson E. (2000), Hamilton A. & Lisle J. (2006), Doran (2000).

Cette forme ayant été injustement délaissée dans la littérature, après l'examen du tumulte contemporain à sa publication, nous nous attacherons, dans ce document, à y remédier.

La description que nous proposons, dans la deuxième partie du document, examine, sous différents points de vue, la phénoménologie de cet espace-temps, telle que cette solution de Painlevé la révèle, en s'attachant à en souligner les aspects originaux par rapport aux autres formes. Cette partie a été divisée en deux corpus.

Le premier corpus, plus technique, qui s'attache à justifier par des équations la description phénoménologique de la solution que nous considérons, nécessite quelques connaissances mathématiques et des notions de relativité générale, aussi, pour ceux qui n'auraient pas ces connaissances, nous avons écrit un deuxième corpus qui peut se lire indépendamment du premier.

Ce deuxième corpus, après une présentation des concepts originaux, voire déroutants, de la théorie de la relativité générale afin de bien situer dans quel contexte l'analyse prend place, suit le même plan, mais en éludant autant que possible les aspects mathématiques et techniques.

Il s'attache essentiellement aux caractères conceptuels et épistémologiques de la phénoménologie décrite.

Le plan suivi, identique à celui de la partie plus technique, permet de s'y référer simplement, si besoin est, pour des compléments et une éventuelle justification mathématique.

La troisième partie, en se référant aux connaissances acquises, permettra d'analyser objectivement les propos qui lui sont reprochés et nous montrerons que le désastre qui en a résulté n'avait pas lieu d'être.

La conclusion synthétise l'analyse et les réflexions que « l'affaire Painlevé » nous a inspiré.

Le document comporte des annexes, où ont été déportés des éléments trop spécialisés ou trop détaillés pour y être inclus.

Il se termine par les références qui ont été évoquées ou invoquées dans le document.

Première partie : évolution et analyse des idées de Painlevé à travers ses C.R.A.S (octobre 1921 à mai 1922) et du débat subséquent

---

Cette partie qui est à caractère essentiellement historique et épistémologique comporte malgré tout quelques équations qui nous ont paru utiles à la compréhension. Elles sont, soit extraites des articles de Painlevé, soit propres à l'analyse que nous en faisons. Elles peuvent être ignorées sachant que nous les accompagnons d'un commentaire en donnant la signification. Nous analysons chronologiquement les différentes publications de Painlevé. Nous en extrayons ses contributions essentielles et analysons l'évolution de ses idées au cours du débat auquel il a donné lieu. À la fin de chaque article nous proposons une synthèse des idées et concepts développés dans cet article et de leur évolution par rapport aux articles précédents. Une synthèse générale, à la fin, résume cette évolution dans le contexte de l'époque.

1- L'article du 24 octobre 1921 : Painlevé fait une contribution capitale

Dans un compte rendu à l'académie des sciences[17], daté du 24 octobre 1921, Painlevé développe une analyse critique de la théorie de la relativité Générale.

Il commence par rappeler les fondements, selon lui, de la mécanique classique.

Painlevé définit "l'axiome de causalité", pilier de la mécanique classique selon lui

---

"Je voudrais exposer brièvement à l'Académie certaines conclusions d'une étude critique de la théorie de la relativité que je publierai prochainement où je compare les postulats de la théorie de la relativité (restreinte et généralisée) aux postulats de la mécanique newtonienne.

J'y discute notamment la question de savoir s'il existe ou non des axes privilégiés [18]*parmi tous les modes de référence possibles.*

La mécanique classique repose tout entière sur cet axiome qu'on peut appeler l'axiome de causalité *en mécanique :*

Il est possible une fois pour toutes, et pour tout l'univers, de définir une mesure des longueurs, du temps, et un trièdre de référence tel que le principe de causalité soit vrai toujours et partout"

D'emblée, Painlevé indique clairement qu'il va utiliser une approche axiomatique dans la comparaison des deux théories.

[17]Les notations sont celles des articles originaux.

[18]C'est un point qui est central dans son approche et qu'on retrouvera comme leitmotiv dans ses écrits ultérieurs.

Il explicite ensuite le sens de son propos, conclut à l'existence en mécanique newtonienne d'un repérage d'espace-temps absolu et bien que qualifiant la Relativité Générale de "*doctrines d'Einstein*"[19], il en salue tout de même l'audace de pensée et la puissance constructive[20] et il se demande si la relativité conduira à abandonner ce postulat fondamental de la mécanique newtonienne.

La relativité, épurée de ses artifices, se fondra dans la mécanique classique

Suite à ces développements, il déclare que :

"C*es doctrines se réduiront à un corps de formules, qui sans la contredire, se fondra dans la science classique, mais que ne subsisteront pas les principes ou conséquences philosophico-scientifiques qui ont été selon les jugements, le miracle ou le scandale de la théorie de la relativité".*[21]

Au-delà de la première affirmation dans cette phrase qui dénie tout caractère original à la théorie d'Einstein, alors que la relativité générale est une théorie de la gravitation fondamentalement différente de celle de Newton, même si les prédictions des deux théories convergent dans des conditions particulières, il stigmatise les principes et conséquences philosophico-scientifiques dont Einstein fait usage pour présenter sa théorie.

Ce thème va être récurrent tout au long du débat qui va s'ensuivre, car pour certains académiciens toute théorie scientifique respectable ne peut que s'appuyer sur des considérations strictement formelles.

Selon eux, user de considérations épistémologiques, comme Einstein l'a fait,[22] pour la relativité générale pour fonder sa théorie, est suspect d'imperfections à masquer et ne peut qu'en polluer la rigueur.

On imagine alors l'aversion viscérale de ces mêmes détracteurs vis-à-vis des "doctrines d'Einstein".

Painlevé, à ce stade n'échappe pas à cette vision des choses, même si sa phrase se réfère à une opinion qui se veut extérieure. Il évoluera, comme nous le verrons sur ce point.

---

[19]Il semble qu'à cette époque le caractère péjoratif de l'expression soit moins marqué.
[20]Cette audace de pensée suscite manifestement l'intérêt des académiciens qui l'invoqueront à plusieurs reprises.
[21]Painlevé cite, comme références, dans son article, deux C.R.A .S de J. Le Roux (détracteur le plus acharné de la relativité générale), qui ont précédé le sien de quelques mois. Nous présenterons ces articles par la suite.
[22]Einstein (1916). La longue introduction a été écrite par Einstein pour fonder épistémologiquement sa théorie.

Cela participe à la défiance d'une partie de l'élite scientifique vis-à-vis d'Einstein considéré par eux comme un "autodidacte", un amateur certes doué, mais qui se méprend sur ses compétences scientifiques réelles.

Nous verrons combien cela restera sous-jacent, dans les critiques, pendant assez longtemps.

Painlevé s'interroge sur l'existence des coordonnées de la forme de Schwarzschild

Il considère ensuite le cas du corps central dans les coordonnées de Schwarzschild.[23]

Il indique que les "einsteiniens" supposent implicitement l'existence de telles coordonnées, ayant les propriétés indiquées (champ statique).

Mais ce raisonnement est implicitement newtonien.

Il suppose ces coordonnées physiques, alors qu'en relativité générale elles ne sont qu'un moyen formel d'étiqueter les points de l'espace-temps[24], et n'ont pas nécessairement de caractère physique[25] (mesurable directement).

C'est une différence épistémologique fondamentale à laquelle il va se heurter sans cesse dans ses articles suivants sans vraiment bien en comprendre les implications comme sa proposition curieuse qu'il qualifie lui-même de "semi-einsteinienne" [26] le montrera.

Soulignons que ce problème épistémologique de caractère physique des coordonnées est récurrent en relativité générale et qu'il est même exacerbé dans les solutions non stationnaires, comme le modèle standard en cosmologie.

Comme les coordonnées, en général, ne sont pas des "observables", ceci nécessite un modèle issu d'une théorie pour calculer la valeur, dans ces coordonnées, d'un jeu d'observables propres à une expérience ou à une observation, faite par un observateur donné, qu'on va alors confronter à la valeur mesurée par cet observateur, dans cette expérience ou observation.

S'il y a désaccord indiscutable[27], compte tenu de la précision des mesures, la théorie est invalidée. S'il a accord, la théorie est un candidat possible, mais pas nécessairement le seul et pas nécessairement le meilleur.

---

[23] $ds^2 = -(1- r_s/r)\, dt^2 + dr^2/(1- r_s/r) + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta.d\varphi^2)]$. Rappelons que $r_s = 2Gm$ est le rayon de Schwarzschild (en posant $c = 1$). J. Eisenstaedt (1982), p 167 montre que cette forme de "Schwarzschild" est en fait due à Droste, voir Droste (1916). Cependant cette forme étant connue (à tort) sous le nom de forme de Schwarzschild nous sacrifierons aux usages et l'appellerons forme de Schwarzschild.

[24] Cf. annexe *3*, chapitre *1* pour une description moderne de la définition et de l'utilisation des coordonnées sur une variété.

[25] Ce qui est d'ailleurs le cas, la coordonnée ***r*** n'a pas de caractère physique au sens newtonien..Bien qu'Einstein lui ait répondu très clairement sur ce point, ".la grandeur *r* n'a en elle-même aucune signification physique." dans une lettre datée du 7 décembre 1921 (Eisenstaedt 1982 p. 174) cela ne satisfait pas Painlevé qui a besoin d'avoir une référence "physique" pour décrire les phénomènes comme l'avance du périhélie de Mercure. Pour lui une distance sans référence physique intrinsèque n'a aucune utilité en physique. A la décharge de Painlevé, rappelons que Einstein lui-même avait mis trois ans pour l'admettre (cf. Balibar F., Darrigol O., Jech B., Stachel J. (1993) Relativité I, page 132, note 18 sur la conférence de Einstein A. de 1933).

[26] C'est dans le dernier article (Mai 1922). Nous verrons que cela s'inscrit dans une méthode utilisée et reconnue en mécanique newtonienne.

[27] Le propos est théorique, car on a déjà vu des résultats "indiscutables" remis en cause par la suite.

Donc, un jeu d'observations (résultats de mesures d'observables) va permettre de discriminer parmi différents modèles possibles ceux qui s'ajustent le mieux aux résultats expérimentaux.

Nous reviendrons sur ce point fondamental[28] au chapitre *11* qui montre la complémentarité entre le modèle géométrique de l'espace-temps donné par l'équation d'Einstein et ce que les observateurs peuvent en appréhender directement et en déduire.

Painlevé propose la toute première forme non singulière sur l'horizon au problème

Painlevé poursuit sa critique en faisant remarquer que la forme de Schwarzschild n'est pas la seule solution au problème, il y en a une infinité et en propose une, *a priori*,[29] qui s'écrit [30]:

$$ds^2 = \left(1-\frac{a}{r}\right)dt^2 + 2\sqrt{\frac{a}{r}}\,dr.dt - \left(dr^2 + r^2\left(\sin^2\theta\, d\varphi^2 + d\theta^2\right)\right) \qquad ([1]) \quad (1\text{-}1)$$

Painlevé note *t* la nouvelle coordonnée de temps et *a* le rayon de Schwarzschild[31].

Notons, incidemment, que cette forme décrit la région où l'univers est en expansion "le trou blanc" ce que ni Painlevé ni Einstein et ses adeptes n'ont relevé.

Dommage, cela n'aurait pu que les interpeller et conduit à s'interroger plus avant sur la nature physique de cette solution.

En général on s'intéresse plutôt à la forme symétrique (le trou noir) qui sous la forme moderne[32] s'écrit :

$$ds^2 = -\left(1-2\frac{GM}{r}\right)dt^2 + 2\sqrt{\frac{2GM}{r}}\,dr.dt + \left(dr^2 + r^2\left(\sin^2\theta\, d\varphi^2 + d\theta^2\right)\right) \quad ([2]) \quad (1\text{-}2)$$

[28]Notons la similitude avec la mécanique quantique. Des équations définissent un système (ici un espace-temps), les opérateurs des observables. La différence est que le résultat n'est pas probabiliste ici.

[29]Painlevé avait bien compris qu'il y avait une infinité de formes de la métrique correspondant à la solution de Schwarzschild et que le choix de la forme de la métrique était arbitraire. Voir Eisenstaedt J. (1982). p 174.

[30]Gullstrand A.(1922) a proposé la même forme, indépendamment, peu de temps après. Ici $r_s = 2GM/c^2 = 2GM$, car on pose en général $c = 1$, est noté *a* dans l'article de Painlevé.

[31]Notée souvent *T* dans la suite, indiquant qu'elle correspond au temps propre d'un observateur en chute libre. Rappelons que $r_s = 2GM$ avec $c = 1$, ici noté *a*, est le rayon de Schwarzschild.

[32]À l'époque, selon les notations de l'article fondateur de la Relativité Générale d'Einstein de 1916, on utilisait la signature (+, -, -, -) pour la métrique, aujourd'hui on utilise plutôt (-, +, +, +) et les coordonnées étaient notées x^1, x^2, x^3, x^4 où x^4 est le temps et les autres coordonnées l'espace. Aujourd'hui on note les coordonnées x^0, x^1, x^2, x^3 où x^0 est le temps et les autres coordonnées l'espace. Nous respecterons les notations d'origine pour les "citations" mais, sauf indication contraire, pour les développements nous utiliserons les notations modernes.

L'argumentation de Painlevé étant relative à la forme de la solution, nous pouvons nous placer dans la solution trou noir, qui est plus familière et réputée plus physique que le "trou blanc".[33]

Cela ne modifiera pas la substance de l'analyse de ses contributions et du débat qui a suivi, car à l'époque, personne ne s'en est aperçu.

Sans le savoir, Painlevé avait exposé dans sa proposition tous les attributs caractérisant la solution d'extension analytique maximale qui sera élaborée quarante ans plus tard.

Ceci rappelé, revenons à l'exposé de sa critique, Painlevé poursuit:

"*Or on sait que pour les einsteiniens, le ds² a une signification mystique et universelle contraignant tous les phénomènes à se couler dans une sorte d'espace-temps, comme l'eau dans un vase.".*

Si on retire le terme "mystique", qui n'a rien à y faire, de la phrase de Painlevé, son commentaire est pertinent.

La propriété essentielle du ds^2 [34] est que, par exemple, dans le cas d'une ligne d'univers parcourue par un objet physique, avec son observateur associé, elle est de type temps et peut être associée à la mesure du temps par l'horloge de l'observateur sur cette ligne d'univers et que, indépendamment de définir une grandeur géométrique, la forme de la métrique qui définit le ds^2 a bien d'autres usages comme permettre de calculer les décalages spectraux entre un référentiel d'émission et un référentiel de réception, avec leurs observateurs associés, situés en des points différents de l'espace-temps.

Si ceci avait été bien compris cela aurait évité les malentendus, dont nous préciserons la nature ultérieurement, qui tiennent à une définition erronée du décalage spectral.

Des propos péremptoires sur les conséquences du ds²

Ensuite, Painlevé dénonce les conclusions qu'ils en tirent (décalage spectral, raccourcissement des "solides, dits invariables") et s'appuyant sur le fait que dans la forme qu'il propose pour $dt = 0$, le ds^2 de l'espace est euclidien[35], il déclare :

---

[33]Ces formes traitent le cas du champ à symétrie sphérique à l'extérieur de la matière, mais les trous noirs ou blancs en sont la solution générique. Notons que trous noir et trous blanc décrits dans une métrique statique ou stationnaire sont éternels. Dans un effondrement de matière un trou noir peut se former, mais dans ce cas il n'y a pas de "trou blanc" associé.

[34]Formellement le ds^2, ne se réfère ni à la différentielle, ni au carré de quoi que ce soit, mais désigne le tenseur métrique, une application multilinéaire de deux vecteurs sur les réels. Cf. Carroll S. (2003) p.72

[35]C'est une propriété importante dont Painlevé n'a pas tiré toutes les implications. Mais on voit que Painlevé fait référence à un ds² une nature de distance spatiale qui en relativité n'est en général pas une observable.

"*Ma conclusion c'est que c'est pure imagination de prétendre de tirer du* ds² *des conséquences de cette nature."*

Une formulation plus nuancée, où il aurait explicité son propos, aurait été plus appropriée.

Cela montre que dans les milieux scientifiques, à l'époque, non seulement la relativité générale était loin de faire l'unanimité mais qu'elle suscitait des débats où la passion l'emportait souvent sur la raison.

Mais comme nous le montrerons la position de Painlevé n'est pas erronée, car ce dont il parle n'est pas le décalage spectral ni la contraction des longueurs.

Le débat avec Einstein

La nature et les propriétés de l'intervalle de temps ds²

Cet article a donné lieu à quelques échanges épistolaires, malheureusement pas très constructifs, entre Einstein et Painlevé.[36]

En effet Einstein lui a fait remarquer, à juste titre, qu'un changement de coordonnées ne change pas la nature physique de la solution et que Painlevé se méprend sur la nature du ***ds²*** qui n'est pas "pure imagination"[37] mais la pierre d'achoppement de la théorie. En effet, ce ***ds²*** permet de calculer une grandeur physique observable, par une horloge, pour une ligne d'univers de type temps par exemple.

Mais Einstein n'a pas vu la contribution que cette forme *(1-1)* apportait à la compréhension de la solution de Schwarzschild, car cette forme, qui ne diverge plus sur le rayon de Schwarzschild ($r = r_s$), ce que Painlevé n'a pas relevé non plus d'ailleurs, éliminait cette singularité, tant contestée dans la théorie qu'on s'efforçait d'ignorer.

De plus, les sections spatiales sont euclidiennes, ce que Painlevé a bien relevé.

S'il en a tiré des conclusions controversées, cette propriété n'est pourtant pas sans intérêt comme des travaux postérieurs le montreront.

---

[36]Ces polémiques ont peut-être nui à Einstein pour l'attribution du Nobel, car Gullstrand, ophtalmologiste de l'université d'Upsala, qui a proposé indépendemment la même solution peu de temps après, était membre du comité Nobel en 1921 et 1922. Il était également très critique envers Einstein: cité dans Eisenstaedt 1982 p.177. On comprend la prudence de ses collègues se reposant sur son avis d'expert pour l'attribution du Nobel.

[37]Voir Eisenstaedt (1982) p 174-175.

Différents type d'intervalle d'espace-temps ds²

À ce propos il est utile de rappeler qu'en fonction du signe du ds^2, évalué par une métrique de signature (-, +, +, +) sur une ligne d'univers, on distingue les lignes d'univers de type temps si $ds^2 < 0$, de type nul si $ds^2 = 0$ (cas de la lumière) ou de type espace si $ds^2 > 0$.

Le qualificatif nul est clair, par contre la forme de métrique étant homogène il est clair que sa nature (temps ou espace) ne varie pas avec le signe du ds², signe qui est conventionnellement associé à des propriétés physiques de la ligne d'univers. Le temps et l'espace sont généralement homogénéisés à l'espace en multipliant le temps par la vitesse de la lumière *c*.

Quelques réactions immédiates à cet article à l'académie des sciences

L'article de Painlevé n'a pas non plus laissé sans réaction ses collègues de l'Académie des sciences (voir annexe *4*) où on relève sur le sujet pas moins de 10 communications en 2 mois, 18 communications en 1922 et 11 en 1923. Nous aurons l'occasion de commenter ces réactions, tombées dans l'oubli pour la plupart, dans la suite du document

Émile Picard : l'article du 24 octobre 1921

Dans la même séance du 24 octobre 1921, Émile Picard[38] présente un article beaucoup plus prudent[39], montrant par ailleurs une bonne compréhension de la théorie :

"Ayant écrit pour l'annuaire du bureau des Longitudes de 1922, une notice sur la théorie de la relativité et l'astronomie, je demande la permission de faire quelques remarques sur cette théorie, à l'occasion de la très intéressante communication que vient de faire M. Painlevé.

En traçant une esquisse de la théorie moderne de la relativité, j'ai voulu tout d'abord rester impartial, n'ayant pas encore une opinion sur la place que l'avenir réservera à l'édifice, si séduisant par certains côtés, construit par Einstein, me demandant, si c'est un progrès de chercher de ramener la physique à la géométrie; j'admire d'ailleurs hautement l'effort accompli dans cette audacieuse tentative.....

La première partie de celle-ci, dite théorie de la relativité restreinte, se développe harmonieusement ....., la cinématique de cette relativité restreinte est une des plus belles parties de l'œuvre d'Einstein. .....

Le raccord, si je puis dire entre la relativité restreinte et la théorie générale se fait par ce qu'on appelle l'Univers tangent en chaque point à l'Univers envisagé....."

---

[38]Qui avait collaboré avec Paul Painlevé à certains travaux mathématiques (voir annexe 2).

[39]E. Picard est présenté comme un mandarin anti-relativiste très prudent dans Moatti A. (2007) p.102. Il serait resté hostile en coulisses à Einstein, ayant eu, en particulier, une responsabilité (il était secrétaire perpétuel de l'Académie et entre deux présidences il assumait l'intérim) dans la menace de boycott d'Einstein par l'Académie des Sciences qui a conduit P. Langevin (organisateur de la tournée d'Einstein) et A.Einstein à renoncer à y être reçu pour ne pas se heurter à une réception humiliante. Moatti A. (2007) p.109.

Émile Picard s'interroge ensuite sur l'expérience de Sagnac où le mouvement de rotation est mis en évidence par un décalage de franges d'interférences[40] et tout en convenant qu'il ne s'agit pas d'un mouvement de translation uniforme donc qui ne met pas en cause la relativité restreinte, mais que, à son avis, la relativité générale se doit de l'expliquer.

Il poursuit en soulignant que si certains points paraissent obscurs ou paradoxaux dans la théorie, de son point de vue ce qui importe ce sont les prédictions que fait cette théorie et qu'on doit la juger en fonction de l'accord de ces prédictions avec les résultats expérimentaux.

Nous voyons que Picard a une vision assez juste et objective de l'édifice théorique construit par Einstein. Il est intéressant de noter que nulle part le principe d'équivalence, qui est pourtant la base physique de la théorie, n'est cité.

La réponse de Paul Langevin à Painlevé et Picard : l'article du 7 novembre 1921

Peu de temps après, dans la séance du 7 novembre 1921, P. Langevin répond dans une note :

"D'intéressantes remarques sur la théorie de la relativité ont été présentées récemment par MM Painlevé et Picard. Je montrerai ultérieurement comment les difficultés soulevées par M. Painlevé ne sont qu'apparentes et comment on peut mettre à profit ses critiques."

Langevin rappelle que la théorie d'Einstein est la seule qui permet de représenter les faits expérimentaux connus et qui a été capable de prédire des phénomènes inconnus tels que la déviation des rayons lumineux par le Soleil qui a été vérifiée en 1919 (Eddington) et le décalage des raies spectrales dans le champ de gravitation du Soleil.[41]

Il poursuit :

"Pour montrer combien cette synthèse est complète et répondre en même temps au désir exprimé par M. Picard, je vais montrer comment la théorie de la relativité généralisée explique, de manière quantitative, le résultat de l'expérience de M. Sagnac et en donne en même temps l'interprétation le plus simple et la plus conforme à la nature des choses."

---

[40]Il fait le parallèle avec l'expérience de Michelson Morley où aucun mouvement "absolu" n'avait été mis en évidence par l'expérience ce qui avait conforté le fondement de la relativité restreinte. Ici une expérience semble mettre en évidence cette rotation lui conférant un caractère "absolu" en contradiction avec les hypothèses relativistes.

[41]Cet effet n'avait pas été vérifié quand P. Langevin publie son article. Il a d'abord été vérifié en laboratoire en 1960 (Harvard), puis observé sur des naines blanches et enfin sur le Soleil en 1991 (précision de 2 %), la turbulence de sa photosphère rendant la mesure délicate. Merci à Nathalie Deruelle pour cette précision.

Langevin, qui avait bien compris que les scientifiques français avaient tout intérêt à renouer des liens avec leurs collègues allemands, à l'issue du premier conflit mondial, est le premier à défendre publiquement la théorie d'Einstein au sein de l'Académie.

Dans sa démonstration il fait remarquer que c'est une expérience au premier ordre où toutes les théories de l'optique, mécanique, électromagnétique ou relativiste sont d'accord qualitativement et quantitativement, donc qui ne peut être discriminante, à la différence de celle de Michelson-Morley qui est au second ordre et qui est discriminante, vis-à-vis des théories citées précédemment qui prédisent des résultats différents.

Sans rentrer dans le détail de la démonstration qui suit, Langevin invoque l'influence sur la propagation de la lumière d'un effet inertiel lié à cette rotation équivalent à un champ de gravitation[42].

Il conclut :

"Cette expérience optique du premier ordre s'apparente ainsi à l'expérience du pendule de Foucault ou à celle du gyroscope et manifeste une fois de plus, depuis Newton, la possibilité de mettre en évidence le mouvement de rotation d'un système matériel par des expériences intérieures au système".

Nous passerons ultérieurement en revue certains articles que nous avons mentionnés.

Il faut aussi signaler le débat entre M. Chazy, J. Bequerel [43] et Painlevé sur le choix de coordonnées auxquelles Painlevé attache tant d'importance, en tant que newtonien convaincu.

Painlevé écrira trois autres articles dans cette période. Ils seront publiés dans les mémoires et communications de l'Académie des Sciences du 14 novembre 1921 pour le premier et dans ceux du 1er mai 1922, pour les deux derniers articles (en fait le dernier est juste une remarque).

Nous allons examiner ses articles du 14 novembre et du 1er mai, moins connus, qui révèlent pourtant des contributions très originales, qui vont nous permettre de mieux comprendre sa démarche et suivre l'évolution de sa position suite aux réactions que son article a suscité.

---

[42]Langevin invoque, sans le nommer, implicitement le principe d'équivalence, assimilant une accélération cinématique à l'action d'un champ gravitationnel. En fait ce n'est pas de la relativité générale (il n'y a pas de champ gravitationnel) mais plutôt une version préliminaire qu'avait proposé Einstein en 1907, voir Einstein (1907) chapitre V" Principe de Relativité et Gravitation", où il évoque pour la première fois, sans le nommer, le principe d'équivalence. Mais pour un résultat au premier ordre cela fait l'affaire. On invoque aussi quelquefois cet argument pour expliquer le paradoxe des jumeaux de Langevin. L'article de 1907 est traduit dans : Balibar F., Darrigol O. Eisenstaedt J. Pottier L., Ritter J., Stachel J. (1993). Relativité I p. 115-123.

[43]Voir Eisenstaedt 1982 p. 174.

Ces articles entraîneront des débats avec ses collègues qui, s'ils ont été polémiques pour certains, ont été globalement très constructifs mais malheureusement trop souvent méconnus.

Ceci nous incitera à en rendre compte pour montrer combien l'Académie, à travers certaines de ses publications, était à cette époque, très en pointe en ce qui concerne la compréhension et le développement de la théorie de la relativité générale.

Malheureusement, cet engouement ne s'est pas perpétué au-delà de 1924 et l'avance intellectuelle, acquise au cours de ce débat, va s'effriter jusqu'à avoir disparu lorsque les grands problèmes relativistes vont revenir au goût du jour, à travers les découvertes astrophysiques et cosmologiques, ce qui fait que la science française sera la grande absente de cette épopée.

Synthèse des idées avancées par Painlevé et débattues à propos de cet article

Notons que cet article est, conformément à l'usage pour un compte-rendu hebdomadaire de l'Académie des Sciences, relativement court.

Ceci explique sans doute que les assertions qui y figurent ne soient que superficiellement étayées.

En particulier, il ne dit rien sur la démarche qui l'a conduit à proposer sa forme de métrique originale et innovante, car s'il y en a une infinité comme il l'indique à juste titre, nous ne pouvons que supputer sur ce qui l'a amené à choisir précisément celle-là.

Après un rappel des axiomes de la mécanique newtonienne, Painlevé affirme que la relativité générale va se fondre dans la mécanique classique. Il adopte un point de vue moins radical que certains de ses collègues de l'Académie[44] qui, à la même époque, pensent que cette théorie n'est qu'une vaste supercherie.

Mais la position de Painlevé n'est pas banale, car précisément, la relativité générale rend compte de phénomènes que la mécanique classique, pourtant bien maîtrisée à cette époque, n'explique pas.

Son idée est qu'elle peut être transposée dans le cadre de la mécanique classique, ce qui le conduit à s'interroger sur la nature des coordonnées en relativité générale qui, pour que la transposition soit possible, doivent respecter les préceptes newtoniens.

Mais à ce stade, s'il s'intéresse à l'axiomatique de la mécanique newtonienne, il est étonnant qu'il ne fasse pas de même pour la relativité générale et surtout qu'il ne s'intéresse pas aux fondements épistémologiques des deux théories, car si, comme il le pense, elles sont parfaitement et totalement compatibles, leurs fondements épistémologiques ne peuvent pas diverger.

Il n'a pas réalisé l'importance de sa forme[45], en particulier son caractère non singulier sur l'horizon.

Il l'a manifestement proposée pour dénier certains arguments des relativistes puisqu'il soutient, dans sa conclusion, qu'elle invalide un certain nombre de conséquences que les relativistes déduisent de l'invariance du ds^2.

Painlevé attribue bien aux deux formes relativistes citées les mêmes caractères objectifs, ce qui est correct puisqu'elles se déduisent l'une de l'autre par un changement de coordonnées[46], ce qui lui permet d'affirmer que si la sienne invalide certaines propriétés physiques, ce doit être vrai pour l'autre donc pour toutes.

[44]Ce point sera développé au chapitre *4*.
[45]La suite le confirmera.
[46]Changement de coordonnées qui présente une singularité tout de même ce qui pourrait en atténuer la portée.

Mais il se méprend sur la définition et la signification du décalage spectral et de la dilatation temporelle et spatiale.

Par exemple, considérant l'émission d'un rayonnement par un atome excité, qui est un phénomène local, il place résolument son observateur dans le référentiel local du phénomène, où évidemment celui-ci est caractéristique de l'atome, ce que son observateur peut vérifier en le mesurant dans le même référentiel qu'il soit inertiel ou non (ce qu'on constate dans un laboratoire terrestre qui d'ailleurs n'est pas inertiel).

Mais si on mesure la fréquence d'un rayonnement dans un référentiel autre que celui dans lequel il a été émis, le résultat est en général différent. Il s'agit d'un décalage spectral relatif.

C'est cela qu'on entend par décalage spectral.

Sa position n'est pas dénuée de tout fondement, si on s'attache à donner un caractère au phénomène qui impliquerait que le champ gravitationnel produirait un effet qu'on pourrait mesurer localement par des instruments réputés insensibles au champ gravitationnel, comme un mètre rigide indéformable[47] par exemple.

À ce titre, les référentiels inertiels, que sa forme de métrique invoque implicitement comme nous le verrons, satisfont au premier ordre à cette contrainte, car sur une géodésique le mètre rigide n'est contraint que par un effet de marée en r^{-3}.

Il n'est pas absurde de penser que ce paramètre n'a pas été étranger à ce choix.

Cependant, quand il conclut que l'espace[48] étant euclidien dans la forme qu'il donne, la phénoménologie est celle d'un espace euclidien où de tels décalages spectraux n'existent pas, Painlevé est *"*hors sujet*"* puisque ce dont il parle n'est pas le décalage spectral gravitationnel.

Pourtant, derrière ces erreurs se cache une phénoménologie remarquable, en particulier, si on considère, comme nous l'avons fait remarquer, l'observateur qu'on va naturellement attacher[49] à la forme originale de la métrique de Painlevé, où son assertion, sous réserve de disposer d'un mètre infiniment rigide[50], prend du sens.

[47]Ce qui confère sa rigidité au mètre, ce n'est pas la gravitation, mais des effets résiduels de l'interaction électromagnétique, qui mêmes résiduels, sont considérablement plus forts. Si on considère la cosmologie, l'univers en expansion est perçu comme tel parce que localement nous n'y sommes pas sensibles (liaison gravitationnelle très forte).

[48]La section spatiale de sa forme, à temps constant, est euclidienne, ce qui n'est pas la même chose et n'a pas la même signification qu'en mécanique classique où le temps est indépendant et absolu, car en relativité générale, c'est seulement une partie non indépendante d'une forme quadridimensionnelle.

[49]Nous indiquerons dans un autre chapitre du document que le critère retenu pour associer un observateur à une forme de métrique est que sa ligne d'univers soit orthogonale à la section spatiale avec une condition aux limites. Ici le résultat est remarquable la ligne d'univers est géodésique et les sections spatiales sont euclidiennes, ce qui confère à cette forme des propriétés très originales.

[50]Nous sommes en 1921, le mètre était défini par le mètre étalon. Il y a quelques paradoxes célèbres (Ehrenfest) en relativité restreinte entre autres à propos de la "contraction" du mètre rigide. Un mètre infiniment rigide témoigne d'une référence absolue d'espace. D'une part il a fallu l'étalonner dans un espace donné d'autre part il est supposé rester invariable dans des déplacements. Nous savons qu'il y a de nombreux paradoxes en relativité

Certes, Painlevé s'est trompé, mais son erreur témoigne de ce qu'un esprit avisé peut produire dans de telles circonstances.

La véritable faute a été d'avoir tout jeté, car parmi les idées et concepts qui ont résultés de sa réflexion figuraient les fondements d'une approche incroyablement féconde.

C'est un point dont nous explorerons les différentes facettes dans la suite du document.

Il est quand même étonnant que Painlevé ait pu donner ce sens au décalage spectral, car dans un compte rendu antérieur de l'Académie des Sciences[51] A. Perot avait tenté de mesurer la fréquence d'une raie caractéristique d'un atome dans la lumière du Soleil pour la comparer à la même mesurée dans un laboratoire sur Terre, ce qui correspond bien au concept de décalage spectral tel qu'on l'entend en physique.

Ce qui est encore plus étonnant c'est que personne ne lui ait fait remarquer que, par décalage spectral, on entendait autre chose que ce qu'il décrivait.

Très naturellement, il étend cette remarque aux contractions des longueurs et du temps puisque cela procède des mêmes lois physiques.

Ceci l'amène à sa conclusion au sujet du ds^2 qui est inopportune et n'était pas de nature à inciter les relativistes au dialogue, ce qui peut expliquer ces malentendus préjudiciables.

restreinte au sujet du corps solide. C'est parce que cette rigidité n'est pas due à l'interaction gravitationnelle que certaines lois relatives à ces objets rigides ne sont pas de son ressort. Pour la relativité générale les géodésiques sont des lignes d'univers spécifiques où cette notion de rigidité des corps, compte tenu des contraintes en r^{-3}, peut reste vraie au premier ordre localement. À ce titre l'observateur de Painlevé est, dans cette solution de la relativité générale l'exemple le plus probant.

[51] Perot A. (1920)

2- L'article du 14 novembre 1921 où Painlevé propose une formulation géométrique de la mécanique newtonienne

---

Dans ce deuxième article Painlevé va proposer une formulation géométrique covariante de la mécanique classique, très innovante. Nous montrerons comment cela permet d'intégrer le temps newtonien en tant que paramètre affin de la géodésique et comment cela conduit à lui attribuer une signature négative. Painlevé va ensuite expliciter la méthode qui l'a conduit à proposer sa forme de l'article précédent mais sous la pression de la communauté scientifique va y renoncer, tentant de le justifier par des arguments épistémologiques. Nous analyserons la nature de ces errements dans le contexte de l'époque. Dans ce cadre restreint, Painlevé poursuit ensuite sa comparaison entre les deux théories.

Comme annoncé dans l'article précédent Painlevé va développer son argumentaire, mais bien que cet article soit publié peu de temps après le premier, il va toutefois (malheureusement) tenir compte des réactions que son article a suscitées dans la communauté scientifique.

"Le but de cette note est de préciser les concordances et les divergences des deux théories."

Le ton est moins polémique. Mais son approche reste résolument newtonienne et il persiste à considérer cette théorie comme la référence.

En effet, s'il ménage maintenant ses critiques vis-à-vis de la théorie d'Einstein il cherche toujours à l'intégrer et, au cas où ce n'est pas possible, à interpréter les différences dans le contexte de la référence newtonienne. Le résultat, qui se traduira par un reliquat de différences irréductibles, donne le sentiment d'un document inachevé[52].

[52]Painlevé s'en rend sans doute compte, car il reprendra cette analyse dans sa note du 1er mai 1922.

Les axiomes de la mécanique newtonienne

Au début de son article que nous ne commenterons pas en détail, Painlevé dresse, à sa manière, un inventaire des fondements de la mécanique classique postulant l'existence d'un espace absolu avec un trièdre spatial de référence Oxyz, un temps absolu indépendant de l'espace.

Considérant un corps sphérique S dont il situe le centre C en O, il se réfère aux principes de Kepler : un corps, très éloigné de tous les autres, reste immobile par rapport au trièdre de référence.

Considérant un système formé de S et d'un autre corps sphérique S', il se réfère au postulat des conditions initiales : le mouvement du système est déterminé par la position et la vitesse de ces éléments à l'instant t_0.

L'axiome de symétrie définit le plan du mouvement, déterminé par les conditions initiales du vecteur vitesse, définissant une droite, et le centre de symétrie du système (un point).

L'axiome de causalité, tel qu'il le décrit, traduit l'invariance liée à la symétrie sphérique, avec des conditions initiales identiques, à une rotation spatiale près, autour du centre de symétrie les mouvements sont identiques.

Le principe d'inertie est invoqué pour déclarer que les géodésiques sont des droites, loin de tout corps matériel, propriété qu'il attribue aussi à la lumière.

Pour conclure il déclare :

"Nous donnerons à cet ensemble de principes le nom d'axiomes newtoniens fondamentaux"

À toutes ces d'hypothèses, il ajoute :

"*Dans la théorie des ondulations, le dernier principe se complète du suivant que j'appellerai pour abréger l'axiome de Fresnel. Dans le vide et à grande distance de tout corps matériel, la vitesse de la lumière est la même dans tous les sens* [53]*."*

"Postulat de Galilée- Les accélérations des éléments du système P[54]*, S à l'instant t, ne dépendent que de la position du système à cet instant et non à ses vitesses*[55]*.*

Ce principe a été admis, en fait, par les Newtoniens en vertu des observations astronomiques. Je le distingue néanmoins des précédents, parce que la conception newtonienne de la causalité en Mécanique subsiste même si le principe de Galilée est en défaut."

---

[53]Note de Painlevé : "*Dans la théorie de l'émission, c'est cette vitesse diminuée géométriquement de la vitesse absolue de la source qui est la même dans tous les sens"*.

[54]Painlevé introduit P sans vraiment le définir, d'après le contexte, on suppose que c'est le centre de la sphère S'.

[55]Note de Painlevé : "*Le mouvement de P est pour Galilée, une sorte de compromis continuel entre la vitesse acquise et l'influence du corps S"*.

Sur ce dernier point, Painlevé est prudent, il tente une synthèse de cette partie.

"En définitive, la théorie newtonienne admet qu'on peut définir une mesure du temps et des distances et choisir des axes privilégiés Oxyz de telle façon que tous les principes précédents soient vrais. Si (sans changer la mesure du temps et des distances) on substitue au trièdre Oxyz un trièdre animé d'une translation rectiligne et uniforme, tous les principes précédents subsistent, sauf l'axiome de Fresnel"

Il se place dans l'hypothèse du mouvement d'un corps d'épreuve S' (de masse négligeable) dans un champ créé par une masse unique à symétrie sphérique S, de centre C, qui reste sensiblement immobile dans ce cas si sa vitesse initiale est nulle, qu'on fait généralement coïncider avec le centre O du trièdre de référence.[56]

Après ces considérations générales, il rappelle les équations newtoniennes du mouvement :

"D'où cette conclusion ;

Les axes Oxyz ayant constamment C comme origine et des directions absolument fixes (c'est-à-dire en fait fixes par rapport aux étoiles lointaines), tous les axiomes précédents restent vrais (sauf peut-être celui de Fresnel)[57] .

Le mouvement du point P sera donc un mouvement plan. Si r, θ désignent les coordonnées polaires dans ce plan, les équations du mouvement (en vertu des axiomes newtoniens fondamentaux) seront de la forme [58]

$$d^2r/dt^2 = G(r, dr/dt, d\theta/dt), \qquad d^2\theta/dt^2 = H(r, dr/dt, d\theta/dt) \qquad ([1]), \quad (2\text{-}1)$$

elles ne dépendront explicitement ni de t, ni de θ."

On reconnaît dans ces propriétés générales les caractéristiques des axiomes qu'il a énoncés.

Il va préciser les équations en utilisant le principe de Galilée.

---

[56]On rappelle que l'accélération ne dépend ni de la vitesse ni directement du temps mais seulement de la position (distance au corps central) qu'elle est centrale et que l'orbite est plane.

[57]Note de Painlevé : "*Si, au postulat de Galilée, on substituait celui-ci (moins restrictif) : "Pour une position déterminée de P et S, l'accélération de P(comme celle de C) ne dépend que de la différence géométrique des vitesses absolues de P et C, une translation rectiligne et uniforme imposée aux axes Oxyz laisserait subsister tous les axiomes précédents, sauf celui de Fresnel, mais on ne pourrait conclure qu'à la forme (I) des équations du mouvement et non à la forme (II)".*

[58]Pour respecter la numérotation "locale" des équations dans les articles des auteurs cités (ici Painlevé) dans les citations et pour éviter la confusion avec notre propre numérotation "globale" indexée par le chapitre nous noterons *([i])* les équations *(i)* originales des articles. La portée de cette numérotation est l'article. Cela conduit en général à une double numérotation (locale et globale).

"En vertu du principe de Galilée, l'accélération de P sera centrale et fonction seulement de r ; les composantes de l'accélération suivant le rayon vecteur et la normale à ce rayon étant r'', -rθ'² et d(r²θ')/dt, les équations (I) prendront la forme

$$d^2r/dt^2 - r\,(d\theta/dt)^2 = F(r), \qquad r^2 d\theta/dt = \text{constante} \qquad ([2]), \quad (2\text{-}2)$$

où F est – ou + suivant que l'accélération est dirigée vers O ou en sens contraire.

Les postulats précédents laissent complètement indéterminée la fonction F(r). Des observations astronomiques, Newton a déduit que :

1° l'accélération F(r) est la même (r étant donné) pour tous les éléments P (infinitésimaux) ;

2° F(r) est négatif et inversement proportionnel au carré de la distance."

Painlevé particularise l'équation *(2-1)* en utilisant des équations générales de la mécanique pour établir l'équation *(2-2)* et souligne de caractère totalement empirique du principe d'équivalence faible et de la loi de la gravitation en $1/r^2$ de Newton.

Pour poursuivre sa démonstration, Painlevé définit le potentiel gravitationnel.

"L'équation de Laplace-Poisson- Si on pose :[59]

$$U = \int F(r)\,dr$$

U sera de la forme

$$U = \frac{\mu}{r}$$

μ désignant une constante positive, la même pour tous les éléments P. On sait que U vérifie, en dehors du corps l'équation de Laplace

$$\Delta U = \partial^2U/\partial x^2 + \partial^2U/\partial y^2 + \partial^2U/\partial z^2 = 0 \qquad (2\text{-}3)$$

et qu'à l'intérieur de la sphère (supposé homogène) ΔU est égal à une constante négative (équation de Poisson). Inversement ces conditions imposées jointes à celles de s'annuler à l'infini, impose à U (en dehors de S) la forme U = μ/r."

---

[59]Les conventions de signe de Painlevé sont différentes de celles que nous utilisons aujourd'hui où on pose $F = -grad\ U$ et $U = -m/r$. Les deux signes étant inversés, la phénoménologie décrite est la même (la force dérivant du potentiel est bien orientée vers la masse centrale), mais ceci devra être pris en compte pour interpréter correctement certaines équations de Painlevé dans le contexte des formes actuellement utilisées comme la forme du lagrangien classique qu'on écrit aujourd'hui : $L = W - U = 1/2\,(dx^\mu/dt)^2 - (-m/r) = 1/2\,(dx^\mu/dt)^2 + m/r$.

On peut retenir que pour le problème que nous allons traiter le potentiel gravitationnel sera de la forme $U = \mu/r$ où en fait μ est la masse du corps S telle que déterminée par les orbites képlériennes (masse active, qui génère le champ, égale à la masse passive, qui subit le champ, en vertu de l'égalité action-réaction et à la masse inerte en mécanique classique en vertu du principe d'équivalence faible comme nous l'avons déjà signalé).

En plus de la convention entre le potentiel et l'accélération, soulignons aussi la convention de signe pour U. Aujourd'hui on définit U généralement par la relation $U = -\mu/r$, ce qui fait que le potentiel est nul à l'infini mais négatif ailleurs, d'autant plus qu'on se rapproche de $r = 0$.

Comme l'énergie cinétique est posée positive, on voit que de cette manière l'énergie totale est conservée lorsque la particule de test plonge en accélérant dans le puits de potentiel.

Il faudra tenir compte des conventions de Painlevé dans ses équations pour bien interpréter le signe des équations en particulier quand on fait des comparaisons avec des équations qu'on utilise aujourd'hui.

Mais ce n'est pas un problème majeur qu'il est facile de régler en considérant les conventions prises de part et d'autre.

Remarquons toutefois que Painlevé est cohérent avec lui-même, car la forme qu'il donne dans son article du 24 octobre 1921 correspond à la région en expansion où le potentiel a bien cette forme et la vitesse qui en dérive toujours selon ses conventions est positive (dirigée vers les r croissants) ce qui a laissé de glace ses contemporains et montre bien que les esprits n'étaient pas très clairvoyants sur le sujet à l'époque.

Painlevé propose une formulation géométrique covariante de la gravitation newtonienne

Pour permettre une comparaison formelle directe avec le ds^2 de la relativité générale définissant une géométrie d'un espace courbe dans lequel les trajectoires inertielles en sont les géodésiques, il va définir un ds^2 spatial[60].

"Il suit de là, comme on voit, qu'on peut donner à la théorie de la gravitation newtonienne la forme suivante (principe de moindre action) : Les trajectoires du point P sont les géodésiques du ds^2

$$ds^2 = (U+h)\,(dx^2+dy^2+dz^2) \qquad (2\text{-}4)$$

où U est une fonction de x, y, z qui s'annule à l'infini dont le ΔU est nul à l'extérieur de la sphère S et est égal à une constante négative dans S".

Quand Painlevé déclare "*Il suit de là.....*", il se réfère à ce qu'il vient de déclarer qui correspond à la citation précédente du document où il indique que la fonction $U(x, y, z)$, qui représente le potentiel gravitationnel en mécanique classique, est une fonction scalaire des coordonnées spatiales, de la forme $\boldsymbol{U = \mu/r}$ dans le cas du corps unique à symétrie sphérique.

Son laplacien (ΔU) est nul à l'extérieur du corps central (équation de Poisson), et h est une constante que Painlevé qualifie "d'arbitraire".

On sait qu'ajouter une constante à un potentiel ne change pas les lois du mouvement, elle n'intervient que dans les conditions initiales (constante d'intégration).

Il n'est pas explicite[61], mais il s'appuie, sans-doute, sur le fait que le potentiel gravitationnel étant une fonction scalaire qui ne dépend pas du temps, dans ces conditions, comme P. Appell l'a montré dans un traité de mécanique rationnelle en 1904, la géodésique peut être obtenue par application du principe de moindre action à une expression du type de celle donnée par son équation *(2-4)*.

La formulation que Painlevé propose est une représentation géométrique purement spatiale de la gravitation newtonienne où comme dans la théorie de la relativité générale les trajectoires spatiales des corps d'épreuve sont définies géométriquement comme des géodésiques d'un espace (ici spatial à trois dimensions) dont le ds^2 qu'il a défini donne l'élément métrique.

On peut supposer qu'il le fait dans le but de faciliter la comparaison entre la mécanique classique et la relativité générale en leur donnant des formes similaires et pour obtenir une

[60]Une telle formulation avait été proposée par Appell (1904), édition 2, T2, dans le chapitre 486 "Principe de moindre action" p.425-429 dans un contexte plus général d'un traité. Cependant Painlevé qui devait sans doute connaître cet ouvrage, ne le mentionne pas en référence.

[61]Ce type de note s'adressant à ses collègues de l'Académie des Sciences, il suppose sans-doute la chose connue.

formulation intrinsèquement invariante : le ds² définit un intervalle d'espace dans cette géométrie.

Il y a pourtant des différences épistémologiques importantes, car sa représentation est purement spatiale, le temps reste une variable dynamique indépendante à la différence de la relativité générale qui est intrinsèquement à quatre dimensions[62] dont la formulation géométrique est à caractère épistémologique, puisque c'est nativement une théorie géométrique de la gravitation, alors que dans la formulation de Painlevé cette formulation, purement calculatoire, s'introduit lors du calcul des géodésiques.

Painlevé ne dit pas si sa formulation correspond à un changement épistémologique de fondement de la mécanique newtonienne ou si c'est seulement une variante opératoire, en vue d'obtenir une formulation covariante pour permettre une comparaison homogène avec la relativité générale, mais on peut craindre que ce soit la deuxième hypothèse qui soit la sienne.

L'équation *(2-4)* montre que l'espace à trois dimensions ainsi défini est "conformément [63]" euclidien, la physique (le potentiel gravitationnel) déterminant le facteur conforme.

La métrique applicable sur cet espace caractérise un espace courbe, ce qu'on peut vérifier en calculant le tenseur de Riemann qui n'est pas nul mais dont le tenseur de Weyl, (partie sans trace du tenseur de Riemann) invariant par une transformation conforme, est nul comme en métrique euclidienne.

Le tenseur de Ricci, le scalaire de Ricci et le tenseur d'Einstein ne sont donc pas nuls à la différence de ce qu'on observe dans la forme relativiste complète de Painlevé[64] donnée dans son article du 24 octobre 1921. [65]

Ces différences géométriques caractérisent des différences structurelles irréductibles entre les deux théories.

[62]Il peut y avoir moins de quatre degrés de liberté dans des solutions où des quantités conservées, qui correspondent à des symétries existent, par exemple la conservation de l'énergie associée à l'invariance par translation dans le temps.

[63]Une transformation conforme, encore dite "invariante d'échelle", conserve les angles. Il existe une forme quadratique de métrique relativiste, coordonnées isotropes, définie à l'extérieur de l'horizon, correspondant au même problème dont la section spatiale est aussi conformément euclidienne mais de facteur conforme différent.

[64]Et dans toutes les formes décrivant cette solution du corps central à symétrie sphérique, à l'extérieur du corps.

[65]Le tenseur de Ricci, le scalaire de Ricci et le tenseur d'Einstein sont nuls du fait de la nullité locale du tenseur énergie-impulsion (solution dans le vide) mais le tenseur de Weyl n'est pas nul. Mais il faut faire cette comparaison avec discernement, car on compare des solutions à *3* dimensions avec des solutions à *4* dimensions.

Painlevé introduit implicitement le temps propre comme paramètre dynamique

Cette représentation purement spatiale, si elle semble adaptée à la définition de la géométrie spatiale de la géodésique[66], peut paraître incomplète dans le cadre de la mécanique classique puisque faute d'équations complémentaires faisant intervenir le temps absolu indépendant de l'espace, paramètre dynamique des équations classiques, elle ne semble pas capable de décrire le mouvement sur la géodésique spatiale donnée en mécanique classique. Mais les hypothèses invoquées qui supposent la conservation de l'énergie, vont rendre cette formulation cohérente.

En effet, si Painlevé ne cite pas le temps dans cet article, sa formulation invoquant le *"*principe de moindre action*"*, en se référant sans doute au livre de P. Appell, inclut, *de facto*, une contrainte (réduisant les degrés de liberté) de stationnarité[67], impliquant la conservation de l'énergie du système étudié et la relation entre le temps et l'espace[68] qui s'en déduit.

Mais ce qu'il n'a pas vu, c'est que ce formalisme sous-tend un autre paramètre dynamique de type affin qui apparaît comme une longueur mais qui, sous réserve d'un paramétrage adéquat, comme nous le verrons, pourra être interprété comme un temps propre, paramètre dynamique du mouvement qu'on va rendre équivalent au temps absolu newtonien et qui va s'y substituer.

Cette approche épistémologiquement différente est celle de la relativité générale définissant le paramètre affin de la géodésique (ou de la ligne d'univers en général) comme paramètre dynamique. Elle n'a pas été considérée par Painlevé, car, sans-doute, il voulait absolument s'en tenir aux concepts primordiaux de la mécanique classique.

Les équations conduisent au même résultat, mais on ne leur donne pas la même signification.

Montrons comment nous pouvons concilier les points de vue.

Comme le temps absolu newtonien n'est pas une coordonnée, entrant au même titre que les autres dans une forme géométrique, la gravitation newtonienne n'est pas une théorie spatio-temporelle nécessitant une coordonnée temporelle pour élaborer avec l'espace une forme caractéristique physique à quatre dimensions.

Le temps newtonien est un paramètre dynamique physique, ce qui va rendre l'équivalence avec le temps propre relativiste, paramètre affin de la géodésique qui en caractérise la dynamique, structurellement possible.

---

[66]Une conique (qui peut être dégénérée) qu'on obtient par l'équation (*2-13-2*), ci-après, en mécanique classique.

[67]§ 486. Principe de moindre action, P. Appell déclare : *"*Ce principe, moins général que le principe de Hamilton, s'applique au mouvement d'un système assujetti à des liaisons indépendantes du temps et soumis à des forces dérivant d'une fonction des forces U. Le principe de moindre action exprime une propriété géométrique indépendante de la notion de temps*"*.

[68]Voir P. Appell T2, p. 428-429 qui établit cette relation. Painlevé donnera cette valeur du temps dans son troisième article plus complet que celui-ci, dans les équations (1) et (2).

Temps newtonien et temps propre identifiés comme même paramètre dynamique

Cela va être un premier point de convergence épistémologique avec l'approche relativiste, où le temps propre, paramètre affin de la ligne d'univers d'un observateur, est le paramètre dynamique d'un système physique tel que constaté par cet observateur.

Dans cette formulation, le temps absolu newtonien va perdre son caractère "métaphysique" pour "s'ancrer" à l'espace, en tant que paramètre dynamique de l'évolution d'un système physique ce qu'il a toujours été en fait, du moins dans les systèmes stationnaires, où le nombre de degrés de liberté est réduit à trois, que nous considérons, puisque le principe de moindre action invoqué requiert cette caractéristique.

Ajoutons que, dans le procédé que nous allons développer qui permet cet ancrage, la signature spécifique du temps dans la métrique de la relativité générale va mécaniquement s'imposer.[69]

Pour bien comprendre la pertinence, dont il n'a pas forcément tiré toutes les conséquences, de la proposition de Painlevé, nous nous proposons d'expliciter en quoi sa contribution ouvrait une passerelle entre la conception newtonienne de l'espace et du temps et la conception relativiste de l'espace-temps conçu comme une seule entité.

Émergence d'un temps physique.

Dans cette approche purement spatiale, nous voyons que le temps newtonien est absent.

Le paramètre affin, variable dynamique, représente le temps propre d'un observateur soumis au mouvement géodésique (naturel) dans la géométrie spatiale conformément euclidienne.

Cette géométrie non euclidienne est déterminée par le champ gravitationnel représenté par le potentiel scalaire en gravitation newtonienne.

C'est cette géométrie qui détermine la géodésique, donc son paramètre affin, et comme cette géométrie ne dépend que du champ gravitationnel, nous sommes fondés à déclarer que le temps, que nous considérons ainsi, émerge de la physique, à savoir de la gravitation dans notre cas, ce qui lui confère une nature physique.

Alternativement, on pourrait considérer que la gravitation contraint et façonne un temps abstrait fictif qui serait pré-existant et immanent. C'est une hypothèse qui, si elle est plus conforme à nos schémas de pensée habituels, est superflue dans la phénoménologie que nous considérons. De même qu'en relativité générale où l'espace-temps n'a pas besoin d'un espace-temps pré-existant pour être totalement défini, le temps propre n'a pas besoin d'un temps pré-existant pour être parfaitement spécifié, ce qui confère une légitimité aux mesures physiques qu'on peut en faire par des instruments physiques comme les horloges.

Remarquons la parenté conceptuelle avec la relativité générale puisque, dans les deux cas, le phénomène physique, la gravitation en l'occurrence, courbe la géométrie donc en définit les géodésiques et en particulier son paramètre affin qui détermine le temps propre.

C'est une avancée épistémologique majeure vers une approche commune de la gravitation même si les théories sont différentes.

[69] Au chapitre *12* nous développerons ces relations phénoménologiques entre temps et espace.

Démonstration du bien-fondé de la géométrisation de la solution newtonienne

Démontrons que, dans le contexte de stationnarité que nous imposons, les géodésiques de l'espace correspondant à cette formulation sont les géodésiques de la mécanique newtonienne.[70]

Nous nous restreindrons au cas du champ gravitationnel généré par le corps unique à symétrie sphérique, objet de la contribution de Painlevé.

La méthode consiste à calculer la même géodésique dans deux formalismes différents.

D'une part, on la calcule dans la forme géométrique *(2-4)* donnée par Painlevé, par l'équation de Lagrange appliquée au lagrangien[71] *L* géodésique, comme on le fait en relativité générale, puisque c'est une formation géométrique dont le paramètre dynamique est le paramètre affin λ de la forme géodésique.

D'autre part, on calcule la même géodésique en mécanique classique par l'équation de Lagrange appliquée au lagrangien classique, qui est simplement l'énergie cinétique moins l'énergie potentielle, dont le paramètre dynamique est le temps absolu newtonien *t.*

On obtient deux expressions et on détermine les conditions pour que les deux formulations produisent des équations du mouvement identiques.

Cette identité qui s'obtient par une relation particulière entre les paramètres dynamiques du phénomène, résulte simplement la conservation géodésique du hamiltonien[72] d'une particule dans un champ qui ne dépend pas du temps (conservation de l'énergie), contrainte qui, comme nous l'avons indiqué, est inhérente à la méthode utilisée par Painlevé.

---

[70]On trouve une démonstration générale (dans le cas de plusieurs masses) dans l'ouvrage cité de Paul Appell (1904), mais ici nous utiliserons une autre méthode de démonstration plus simple destinée mettre en évidence une propriété intéressante, entre le paramètre affin spatial et le temps de la mécanique classique. Notons que nous traitons le cas d'une masse unique, mais comme le potentiel résultant de plusieurs masses en un point est additif, cela se généralise naturellement au cas de plusieurs masses.

[71]Le lagrangien est une expression, une fonction scalaire des paramètres du système, qui contient les informations permettant de déterminer, à partir de conditions initiales, le mouvement des éléments du système. Le lagrangien géodésique, très simple, vaut ici $L = ½\ ds^2$. Le ds^2 est celui donné par l'équation *(2-4)* de Painlevé. Le lagrangien classique pour une particule unique vaut ici : $L = ½\ mv^2 - U(r)$. Par contre on utilise des paramètres dynamiques différents pour la mise en œuvre de l'équation de Lagrange permettant d'établir les équations du mouvement.

[72]Le hamiltonien est une autre expression, qui a des relations avec le lagrangien, qui décrit l'énergie totale d'un système. Dans le cas où les équations du système de dépendent pas du temps ce hamiltonien est une grandeur conservée. Ceci résulte de théorèmes très profonds (E. Noether) qui associent le temps à l'énergie, l'espace à la quantité de mouvement et au moment angulaire et les invariants par rapport aux translations, rotations aux quantités conservées correspondantes.

Cela va conduire à la relation $\lambda = i.t$, où λ est le paramètre affin de la géodésique spatiale dans l'espace conformément euclidien défini par Painlevé, t le temps (absolu) de la mécanique newtonienne et i tel que $(i^2 = -1)$.

Le nombre imaginaire i qui s'introduit naturellement dans la démonstration caractérise la différence de nature entre coordonnées spatiales et temporelle dans la formulation géométrique de la théorie qu'on retrouve en relativité.

Le détail du calcul, avec exemples, donné en annexe *3* au chapitre *2,* n'a pas été inséré dans le corps du texte pour ne pas l'alourdir.

Nous recommandons à ceux, que quelques équations ne dissuadent pas trop, de s'y reporter, car il explicite bien le principe invoqué.

Il met en œuvre les équations *(2-5)* à *(2-13-1).*

On pourra noter qu'à la différence de P. Appell qui utilise explicitement dans sa démonstration le principe de moindre action, nous utilisons la conservation du hamiltonien, donc implicitement ce principe, puisque il s'en déduit mais alors que P. Appell en déduit la relation entre le temps newtonien absolu t et les coordonnées spatiales, nous nous intéressons explicitement à la relation entre ce temps t et le paramètre affin de la géodésique que nous avons noté λ, ce qui est conceptuellement un autre objectif.

Interprétation épistémologique et physique de la solution géométrique de Painlevé

Interprétation épistémologique

Comment une géodésique purement spatiale, peut-elle décrire un phénomène spatio-temporel ?

Cela est structurellement possible, car d'une part l'espace, structure tridimensionnelle, et le temps unidimensionnel sont "indépendants" dans la représentation de la mécanique classique, et, car d'autre part la contrainte de stationnarité réduit le nombre de degrés de liberté à trois.

Il est possible, comme la mécanique newtonienne le fait, d'établir séparément la courbe géodésique spatiale dans un espace euclidien et la loi du mouvement sur cette courbe.

Si on considère les équations de la mécanique classique on s'aperçoit que le paramètre affin de la géodésique spatiale n'est pas utilisé puisque c'est le temps absolu newtonien qui est le paramètre dynamique.

Cette courbe spatiale, plane dans ce cas, est définie par ses coordonnées.

Le paramètre affin est donc libre.

Sa mesure naturelle est celle de la longueur d'arc évaluée en métrique euclidienne mais rien ne nous interdit de la modifier en introduisant, en facteur, une fonction scalaire de l'espace réalisant une transformation de jauge, ce qui compte tenu du caractère scalaire de la gravitation newtonienne (condition essentielle) est adéquat[73], et d'utiliser cette métrique conformément équivalente (conformément euclidienne) pour évaluer le paramètre affin.

C'est ce que fait la formulation géométrique proposée par Painlevé. Ce point conceptuellement fondamental aurait mérité d'être explicité, car présenté ainsi il fait figure de simple procédé technique alors qu'il est beaucoup plus que cela.

L'analyse montre que cela va conduire à introduire le temps newtonien comme paramètre affin, mais nous en verrons les limites quand Painlevé voudra l'utiliser en relativité générale.

[73]Le fait que la théorie dérive d'un potentiel gravitationnel scalaire est essentiel. Pour une théorie non scalaire comme la relativité générale cette méthode est vouée à l'échec ne serait-ce que pour cela.

Interprétation physique

Rappel : représentation paramétrique d'une courbe

En pratique on représente souvent une courbe Γ dans un espace euclidien par un diagramme cartésien en coordonnées cartésiennes spatiales (x, y, z) ou en coordonnées sphériques (r, θ, φ) par une fonction entre les coordonnées. La métrique euclidienne (dans ce cas) permet de calculer la longueur infinitésimale de l'arc de courbe et la longueur de la courbe Γ par intégration en utilisant la métrique.

Rappelons que comme les géodésiques spatiales en mécanique newtonienne sont planes, cela prend une forme particulièrement simple du type $y = f(x)$ en coordonnées cartésiennes ou $r = f(\varphi)$ en coordonnées polaires, souvent les plus utilisées, comme nous le rappelons ci-dessous.

Mais, toujours en la représentant dans un diagramme cartésien par exemple, on peut aussi définir une courbe Γ de manière paramétrique où, en utilisant la "longueur" de l'arc de courbe λ qu'on appelle alors paramètre "affin", on définit les coordonnées x^i de la courbe par des fonctions $f_i(\lambda)$, de ce paramètre affin.

On a alors, pour les coordonnées (x, y, z) par exemple, des relations du type :

$$x^1 = x = f_x(\lambda) = f_1(\lambda), \qquad x^2 = y = f_y(\lambda) = f_2(\lambda), \qquad x^3 = z = f_z(\lambda) = f_3(\lambda)$$

L'intérêt de ces coordonnées paramétriques c'est que la définition de la tangente à la courbe Γ est immédiate et on peut définir un vecteur tangent de composantes

$$V^i = dx^i/d\lambda$$

qui peut caractériser une vitesse, en particulier la vitesse d'un corps se mouvant sur cette courbe puisque ce vecteur y est tangent. Cette définition s'étend à l'espace-temps à quatre dimensions de la relativité générale, quadri-vitesse, où le temps propre est le paramètre affin.

Cette définition montre que pour une courbe donnée, représentée sur un diagramme en coordonnées cartésiennes par exemple, si la direction du vecteur est déterminée, le module de cette vitesse dépend du paramétrage du paramètre affin λ qui, comme nous venons de le voir, dépend la métrique de l'espace qu'on utilise pour le calculer à partir des coordonnées.

Comme seul le module du vecteur est concerné, une transformation qui modifie seulement l'échelle de la métrique en tout point en la multipliant par une fonction $h(x, y, z) = h(x^i)$ modifiant l'échelle en tout point, ce que réalise une transformation conforme, convient.

Le tenseur de métrique euclidienne $\delta_{\mu\nu}$ où $\delta_{\mu\nu} = 1$ si $\mu = \nu$ et $\delta_{\mu\nu} = 0$ si $\mu \neq \nu$ devient alors $g_{\mu\nu}$ qui est le tenseur métrique non euclidien tel que : $g_{\mu\nu} = h(x^i)\, \delta_{\mu\nu}$.

C'est cette propriété que Painlevé utilise pour que ce vecteur caractérisant la vitesse corresponde à la vitesse définie en mécanique classique.

Géodésiques newtoniennes en représentation paramétrique dans la métrique conforme.

Considérons l'espace euclidien à trois dimensions où les géodésiques liées aux lois du mouvement dans un champ à potentiel central, en mécanique classique, sont des coniques, courbes planes, qu'on représente dans cet espace euclidien.

La méthode pour établir que ces géodésiques sont des coniques utilise les lois régies par les équations de la mécanique classique, celles qu'à citées Painlevé au début de cet article.

Ces équations sont des équations aux dérivées partielles d'ordre deux par rapport au temps (absolu de la mécanique classique) qui font intervenir deux constantes du mouvement $r^2 d\varphi$ (conservation du moment angulaire) et l'énergie E (conservation de l'énergie).

Pour obtenir l'équation d'une conique qui est une courbe purement spatiale, à partir d'équations faisant intervenir le temps il faut évidemment l'éliminer.

Sans refaire les calculs assez laborieux, donnons le résultat qui peut s'exprimer par l'équation[74]

$$\frac{1}{r}=\frac{1+e\cos(f)}{p}\,,\ avec\ ,\ e=\sqrt{1+\frac{2C^2E}{\mu^2}}\,,\ p=\frac{C^2}{\mu}\,,\ f=\varphi-\omega \qquad (2\text{-}13\text{-}2)$$

où $C = r^2(d\varphi/dt)$ est la constante du mouvement correspondant à la conservation du moment angulaire, E l'énergie totale, μ la masse du corps central dans notre cas et ω une constante d'intégration de la variable angulaire φ.

Ceci donne la courbe spatiale (ellipse, hyperbole, parabole, selon un paramètre d'énergie totale et des conditions initiales) mais ne dit rien sur le mouvement d'une particule de test qui sont données par d'autres lois et équations indépendantes (lois des aires, de Kepler, conditions aux limites).

Nous avons besoin de deux descriptions indépendantes et complémentaires pour décrire le phénomène, une spatiale et l'autre spatio-temporelle pour établir le lien avec le temps, ce qui est bien conforme à l'approche classique.

Dans cette représentation purement spatiale dans l'espace euclidien, le temps n'est évidemment pas concerné puisqu'il est extérieur et indépendant de cet espace, la représentation ne décrivant qu'une courbe spatiale où le paramètre affin est la longueur (spatiale) curviligne d'un arc de la courbe.

En espace euclidien les géodésiques géométriques spatiales étant des droites, ces coniques ne sont pas des géodésiques géométriques de cet espace.

Sur une de ces coniques, prenons une ellipse par exemple, le mouvement suivi par un corps d'épreuve n'est pas régulier. La longueur d'arc d'ellipse parcourue pendant un intervalle de temps donné, sa vitesse, est plus grande quand le corps est au périhélie que lorsqu'il est à l'aphélie (loi des aires en mécanique classique).

[74]Voir par exemple : Perez Jérôme : gravitation classique, ENSTA, IAP pour l'établissement de cette équation. La numérotation tient compte des équations *(2-5)* à *(2-13-1)* données en annexe d'où le saut.

Quant à la période pour décrire l'orbite, qui est un autre paramètre temporel, elle est donnée par une autre loi de Kepler.

Pour définir des intervalles de temps nous avons fait référence au temps qui est un paramètre indépendant dans une "autre dimension" indépendante de l'espace.

Comme cette vitesse n'est pas constante on ne peut pas utiliser le temps, tel quel, comme paramètre affin en géométrie euclidienne.

Pour illustrer cela par un diagramme utilisons la propriété que nous avons rappelée au paragraphe sur la définition paramétrique d'une courbe. Représentons symboliquement le cas d'une orbite elliptique en coordonnées cartésiennes.

L'équation de l'ellipse est du type $y = \pm f(x)$.

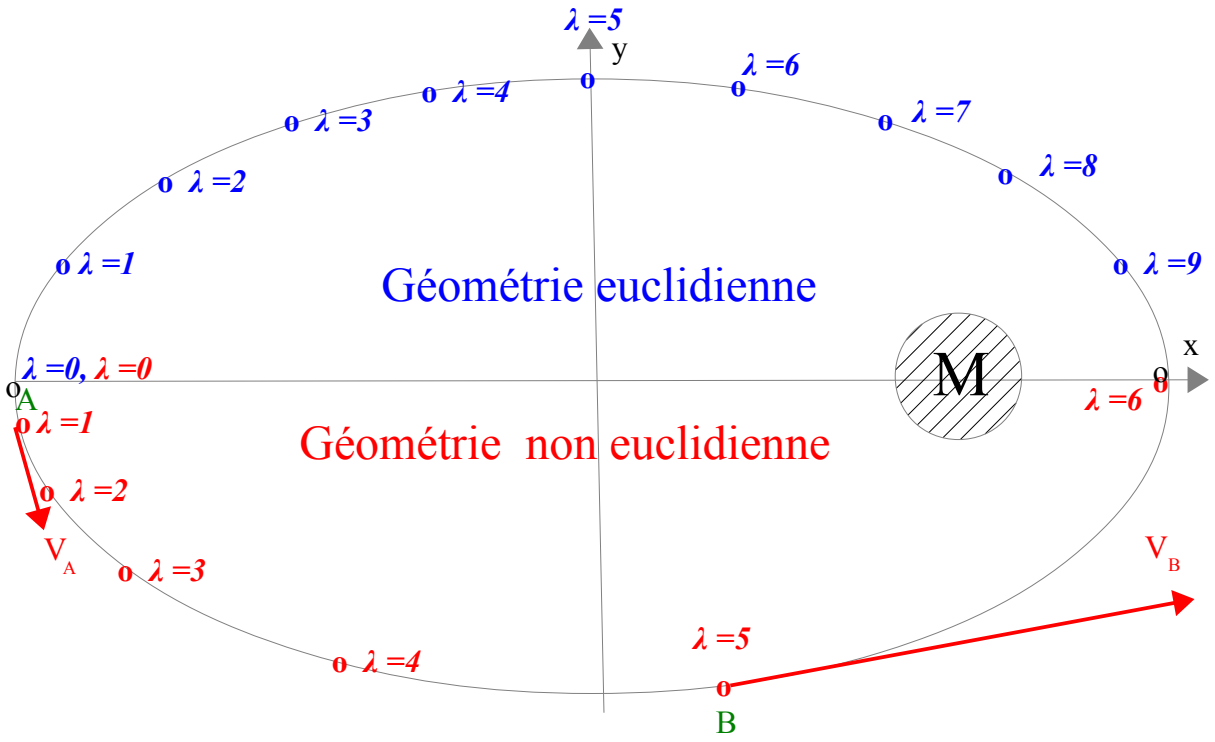


Figure 2-1. *Géodésique elliptique représentée sur un support euclidien. La demi-ellipse supérieure, y = + f(x)est en géométrie euclidienne, la demi ellipse inférieure y = - f(x) en*

géométrie conformément euclidienne, sous l'influence de la masse M qui génère le potentiel U, telle que Painlevé l'impose dans son équation (2-4)[75]

La représentation symbolique est "cartésienne" en géométrie euclidienne (la feuille sur laquelle nous représentons la figure est euclidienne). Si on s'en tenait à cela, la longueur du paramètre affin serait déterminée par la géométrie euclidienne[76].

Les marqueurs de la courbe sont des bornes balisant les intervalles égaux du paramètre affin.

En géométrie euclidienne (demi-ellipse supérieure) le balisage affin montre des arcs de longueur égale sur la figure.

En géométrie conformément euclidienne (demi-ellipse inférieure), ce n'est plus le cas, les intervalles égaux en paramètre affin (représentatifs du temps de parcours donc du temps absolu de la mécanique classique) sont représentés par des intervalles inégaux sur la figure du fait que la géométrie de la figure n'est pas celle de la géométrie définie par Painlevé, ce qui entraîne une distorsion de la représentation de la longueur.

Ces intervalles inégaux correspondent à la distance parcourue sur la courbe pendant des intervalles de temps égaux.

Nous avons également représenté la vitesse $V^i = dx^i/d\lambda$ en deux points A et B qui montre comment elle varie en fonction du paramétrage adopté pour le paramètre affin.

Ce diagramme simple permet d'illustrer comment la métrique conforme permet d'introduire le temps comme paramètre affin sur la géodésique spatiale.

[75]La figure n'est pas rigoureusement exacte, elle a valeur d'illustration.

[76]La figure que nous allons présenter est fausse mais en fait, nous verrons dans la suite que nous n'allons pas arrêter de raisonner sur des figures fausses en présentant des diagrammes de Minkowski en deux dimensions qui sont deux degrés de liberté associés aux coordonnées, en général *(r, t)* qui suffisent compte tenu de la symétrie sphérique spatiale de la solution sous forme euclidienne ce qui fait que les courbes tracées ont des longueurs fausses (si on les mesurait sur le diagramme) la géométrie étant Lorentzienne $(ds^2 = -dt^2 + dx^2)$.

L'identification du temps propre au temps newtonien réalise la synthèse

La méthode proposée par Painlevé qui traduit une évolution vers la relativité générale, même si elle se limite au formalisme utilisé et non pas au contenu sémantique de la théorie, marque un pas important qui a été complètement ignoré à son époque.

Elle réalise une "intégration" du paramètre dynamique attaché au temps newtonien et de l'espace dans une structure géométrique unique, ce qui est la base d'une approche spatio-temporelle où temps et espace ne sont plus des structures indépendantes.

Sur ces hypothèses, on va pouvoir déduire les lois du mouvement de la métrique soit par l'équation géodésique dans un espace courbe, soit de façon équivalente par le lagrangien géodésique.

On retrouve les mêmes constantes du mouvement liées à la conservation de l'énergie et du moment angulaire, car la métrique, dans ce cas de potentiel central, ne dépend ni de t ni de φ.

La dépendance en θ n'est pas à prendre en compte, car le mouvement s'effectuant dans un plan, on peut fixer θ à n'importe quelle valeur et pour simplifier, en général, on pose $\theta = \pi/2$.

Ce qui précède illustre l'intérêt de cette méthode qui fusionne élégamment sur une seule représentation (en intégrant le temps en tant que paramètre affin dans la représentation dans un espace qui n'est plus euclidien) les deux représentations disjointes.

Remarquons que lorsque nous voulons représenter le mouvement géodésique sur une orbite c'est ce que nous faisons naturellement puisque nous nous représentons ce mouvement en faisant circuler, mentalement ou par une animation sur l'orbite plane (représentation spatiale à deux dimensions), un point qui représente le corps en mouvement dont la vitesse varie selon sa position. On peut aussi marquer sur le graphe spatial de l'orbite les points délimitant des intervalles de distance affine parcourus pendant des intervalles de temps constant, dont l'espacement spatial varie selon la position[77], ce que nous avons fait sur la figure *2-1*.

La représentation spatio-temporelle, qui serait plus conforme à l'esprit de la théorie classique, consisterait à ajouter la dimension temps orthogonale au plan de l'orbite, ce qui ferait que, par exemple pour une orbite circulaire, on aurait une hélice dans un espace euclidien à trois dimensions dont deux d'espace et une de temps.

Pour une orbite elliptique ce serait une hélice de base elliptique à pas variable périodique, le pas étant le plus faible pour le périhélie, vitesse maximum donc temps minimum pour parcourir un arc infinitésimal de longueur donnée, et maximum à l'aphélie, vitesse minimum donc maximum de temps pour parcourir un arc infinitésimal de même longueur.

[77]Ce que la géodésique dans la transformation conforme de la métrique spatiale dans la formulation géométrique de la théorie newtonienne de Painlevé réalise.

Ce raisonnement se transpose au cas de la parabole et de l'hyperbole, sauf que la courbe n'est plus fermée.

Mais cette représentation, pourtant plus synthétique, est peu utilisée en mécanique classique alors qu'elle devrait s'imposer.

Painlevé décrit donc, en les unifiant de manière opératoire, les lois de la mécanique classique puisque les équations sur lesquelles il s'appuie sont celles de la mécanique classique, seule la forme, qui de plus est covariante[78], sous laquelle elles s'expriment est différente.

La clé de la formulation géométrique de la mécanique classique, telle qu'il l'a exposée et telle que nous l'avons interprétée, dans le cadre de son intérêt pour la comparaison entre les deux théories, repose sur une identification du temps absolu avec le temps propre, sur la géodésique, conséquence d'une normalisation de la vitesse réalisée en remplaçant l'espace euclidien à trois dimensions par un espace courbe à trois dimensions.

On voit que, à travers la comparaison des équations du mouvement géodésique, c'est bien le mouvement géodésique, auquel nous sommes fondés de conférer un statut physique, qui est au cœur du débat.

Ce qui est apparu fondamental au cours de la discussion qui précède ce n'est pas le temps et l'espace pris séparément mais les géodésiques qui dans la théorie classique et la théorie relativiste, avec des résultats en général différents, caractérisent la phénoménologie du champ gravitationnel crée par la masse sphérique dans ce cas.

Si cela était inhérent à la définition nativement géométrique de la relativité générale cela était moins évident surtout sous la forme qu'a donné Painlevé en mécanique classique.

Autrement dit la connaissance des géodésiques, de leurs caractères de type géométrique, définit totalement le phénomène.

Ceci nous sera utile pour analyser certains phénomènes, qui sont difficiles à interpréter par une approche néo-classique à partir de concepts trop souvent hérités d'une conception implicitement absolue.

[78]Painlevé va développer ce point dans ce qui suit, la solution est covariante par construction.

La géodésique radiale critique est identique en mécanique newtonienne et en relativité générale

On peut calculer, pour les différentes représentations de l'espace-temps, classiques dans la version newtonienne et la version géométrique de Painlevé, et par deux méthodes relativistes, cette géodésique radiale entrante critique, c'est-à-dire avec comme condition initiale une vitesse de chute nulle à l'infini (l'énergie d'une particule y est égale à son énergie de masse).[79]

Ce cas particulier est très simple mais il est important et nous allons retrouver régulièrement dans la suite du document.

La famille de géodésiques radiales (critiques) est décrite par les mêmes équations en théorie newtonienne et en théorie relativiste. Ceci témoigne d'une parenté dont la forme relativiste de Painlevé propose une clé.

Tout se passe comme si cet espace-temps était un espace-temps de Minkowski en effondrement radial newtonien.

Nous aurons l'occasion de nous expliquer sur cette hypothèse.

[79]Ces calculs sont présentés en annexe *3*, chapitre *2*. Ils utilisent l'équation *(2-14)*.

Covariance de cette formulation géométrique

Démonstration par Painlevé de cette covariance

Reprenons maintenant le cours de l'argumentation de Painlevé.

Le ds^2 qu'il propose pour la géodésique est un intervalle d'espace qui mesure la longueur affine d'un arc infinitésimal de cette géodésique. On peut aussi observer que son indépendance des coordonnées, résulte de sa construction, puisque c'est le produit du potentiel gravitationnel $U(x, y, z)$ qui est un scalaire (donc indépendant des coordonnées) et de l'élément métrique de longueur spatiale en géométrie euclidienne qui est également indépendant des coordonnées.

Painlevé argumente en ce sens en poursuivant :

"Substituons maintenant aux coordonnées rectangulaires x, y, z des coordonnées curvilignes quelconques u, v, w.

Le ds^2 *prend la forme*

$ds^2 = [U(u, v, w)+h][Edu^2 +2Fdu.dv + ...] = (U+h)d\sigma^2$

où E, F,...satisfont aux conditions invariantes (équations aux dérivées partielles du deuxième ordre) qui expriment que le $d\sigma^2$ *est euclidien, et où U(u, v, w) satisfait à une équation aux dérivées partielles du deuxième ordre, dont les coefficients dépendent de E, F,....équation linéaire où U ne figure pas explicitement, et qui est également invariante. On a ainsi mis les équations newtoniennes du point de vue gravitant sous une forme invariante dans n'importe quel changement de variables spatiales (où t n'intervient pas)."*

On peut ajouter que compte tenu de l'analyse que nous avons proposée de sa solution qui montre que, implicitement, sa métrique permet d'introduire le temps propre d'un observateur comme paramètre affin de la géodésique telle qu'il l'a définie et comme le paramètre affin temps propre (qui a un caractère physique) est une observable, que l'observateur peut mesurer avec son horloge, il est donc un invariant.

Painlevé poursuit son argumentation en faisant remarquer qu'on pourrait également donner une forme invariante à des lois de gravitation différentes et que le but de la mise sous cette forme des lois de la mécanique newtonienne est de rendre plus explicite la comparaison avec les lois de la relativité générale.

Le truisme de l'exigence de covariance définie par Painlevé

Il a bien noté que l'exigence de covariance résulte du credo cher à Einstein, à savoir : " toute expérience ne fait que constater les coïncidences de phénomènes dans l'espace-temps" et appelle cela principe d'invariance qu'il définit ainsi :

"*Toutes les conséquences positives de la science peuvent recevoir une forme invariante dans un changement arbitraire des quatre variables qui définissent l'espace-temps. Ce principe ne me parait pas contestable, à condition du moins de bien le préciser. Je l'énoncerai pour ma part ainsi :* Il est possible de tirer des lois de la nature des conséquences invariantes dans tout changement de repérage espace-temps, et qui définissent ces lois à un tel changement près."

Il a bien compris le sens de la covariance dans la théorie d'Einstein, ce que les propos qui suivent confirment, et il souligne son caractère totalement improductif :

"*Mais précisément parce que ce principe est un truisme incontestable, il ne peut rien donner à lui tout seul : quelles que soient les lois de la nature qu'il nous plaise d'imaginer on pourra les y plier."*

Sur ce point sa critique est bien fondée[80], mais rappelons qu'il avait déjà été relevé et de façon plus circonstanciée par Kretschmann[81] en 1917.

Kretschmann avait fait observer à Einstein que le principe de relativité tel qu'il l'avait formulé[82] n'était pas relatif au contenu des lois de la nature mais seulement une exigence sur leur formulation mathématique.

Einstein[83] avait admis cet argument, dans sa réponse en 1918, même s'il tente d'en justifier l'intérêt par un souci d'efficacité.

---

[80]On peut écrire la physique de Newton sous une forme covariante.

[81]Kretschmann 1917. cité dans Balibar F., Darrigol O. Eisenstaedt J. Pottier L., Ritter J., Stachel J. (1993), Relativité II, Note 1 p.12

[82]Ce qu'on appelle la covariance générale des équations aujourd'hui, qui n'est pas spécifique à la relativité générale même si Einstein a été sans doute un pionnier dans sa promotion. Par contre le principe d'équivalence est le fondement physique de la théorie. En 1918 Einstein, rajoute le principe de Mach, point sur lequel il a varié.

[83]Einstein 1918 cité dans Balibar F., Darrigol O. Eisenstaedt J. Pottier L., Ritter J., Stachel J. (1993) Relativité II p. 12-14

Painlevé estime que la relativité est une simple retouche de la théorie newtonienne

Painlevé poursuit sa critique :

"Ce qu'a cherché tout d'abord Einstein, c'est de substituer aux équations de la mécanique classique des équations qui leur ressemblent, qui conduisent dans les cas les plus fréquents à des conclusions presque identiques, mais dont la forme naturelle soit invariante dans le changement le plus général des quatre variables d'espace-temps."

Il est vrai qu'Einstein a procédé, au moins en partie, par analogie[84], guidé d'une part par la nécessité de la convergence avec la physique newtonienne en champ faible statique (ou lentement variable) et à faible vitesse qui était pour lui incontournable[85] et d'autre part par le fait que dans la physique les lois de la nature semblaient se suffire d'une description par des équations aux dérivées partielles du second ordre[86], mais sa démarche était avant tout motivée par des arguments épistémologiques.

La relativité générale qui est une théorie géométrique de la gravitation[87], pour répondre à une exigence de conformité au principe d'équivalence par les trajectoires inertielles représentées par des géodésiques, est bien plus qu'une reformulation de la gravitation newtonienne.

En relativité générale, non seulement les effets de la gravitation sont une manifestation de la courbure de l'espace-temps, mais de plus elle inclut, de facto par cette représentation, l'interaction de la matière-énergie à la fois génératrice de la courbure avec elle-même, subissant la courbure, ce qui fait qu'elle est fondamentalement non linéaire à ce niveau à la différence de l'approche newtonienne où quand on considère deux masses distantes la masse active de chacun agit sur la masse passive de l'autre, mais curieusement pas sur sa propre masse passive.

Ce point semblait aller de soi, en mécanique newtonienne mais, à la réflexion, on ne voit pas de raison fondamentale physique, du moins dans cette approche, pour que ce soit le cas.

Tout cela fait que l'équation d'Einstein qui met en correspondance une courbure de l'espace-temps avec la matière énergie est le reflet de choix épistémologiques fondamentalement différents de ceux de la mécanique newtonienne.

Faisant le parallèle avec la formulation lagrangienne,

---

[84]Voir T. Damour et Deser S (1995) Tome 19 p. 742 §3, on reprend plus loin l'argumentaire qui y est développé.
[85]Et qu'il a eu bien du mal à mettre en œuvre.
[86]Einstein, dans une démarche heuristique, a considéré que son équation devait être une généralisation relativiste de l'équation de Poisson, où la densité d'énergie devait être décrite par un tenseur $T^{\mu\nu}$, pour satisfaire au principe d'équivalence et aux exigences de la Relativité Restreinte, qu'il fallait égaler à un tenseur formé à partir du tenseur métrique et de ses dérivées jusqu'à l'ordre deux, soumis à une contrainte de divergence covariante nulle pour satisfaire à l'exigence de conservation locale de l'énergie, ce qui sous certaines conditions aux limites et à un facteur près possède une solution unique.(Adapté de T. Damour et Deser S (1995) Tome 19 p. 742 §3).
[87]Ce que Picard a bien compris comme son article le montre.

"Cette tentative rappelle celle de Lagrange, et en même temps s'en différencie. Lagrange a donné aux équations de la Mécanique une forme invariante dans toute transformation spatiale qui ne touche pas au temps, mais cette forme n'est qu'une autre manière de les écrire. Les einsteiniens font eux une retouche à ces équations, pour étendre l'invariance à la transformation espace-temps"

---

on peut faire observer qu'au terme "*retouche",* on pourrait plutôt préférer le terme *"refondation",* à laquelle la formulation de Lagrange se prête très bien mettant en œuvre un principe de moindre action d'une portée très générale, en considérant les champs comme variables fondamentales du lagrangien définies dans les coordonnées x^{μ} en posant :

$$L = \int dx^4 \mathcal{L} (\Phi^i, \partial_\mu \Phi^i),$$

et en dérivant les équations du mouvement de l'équation de Lagrange :

$$\partial L/\partial \Phi^i - \partial_\mu [\partial L/\partial(\partial_\mu \Phi^i)] = 0.$$

Où $\mathcal{L}$ est la densité de lagrangien, Φ^i les champs, dx^4 l'élément de volume (à quatre dimensions en relativité générale).

"Soit x_1, x_2, x_3, x_4 les quatre variables arbitrairement choisies qui repèrent dans l'espace-temps un élément matériel quelconque P en présence d'un milieu donné. Les einsteiniens admettent que son mouvement est défini par les géodésiques d'un ds^2 à quatre variables, forme quadratique en dx_1, dx_2, dx_3, dx_4, et somme d'un carré positif et de trois carrés négatifs. Dans tout mouvement réel, le ds^2 reste positif ; les mouvements qui correspondent à $ds^2 = 0$ définissent les trajectoires et la vitesse des rayons lumineux"

On constate que sur ce point, Painlevé a bien intégré la démarche qu'il avait anticipée dans son approche newtonienne, mais Painlevé s'attache trop aux détails techniques pour bien voir l'essentiel.

Les deux théories correspondent à des choix épistémologiques différents qui conduisent à des concepts différents même si à la limite newtonienne on peut les mettre en correspondance.

Aussi le commentaire de Painlevé qui considère que la théorie d'Einstein n'est rien d'autre qu'une retouche de la théorie newtonienne, est profondément erroné.

Repères absolus chez Newton et repères privilégiés chez Einstein

Painlevé s'attache ensuite à traiter le cas d'un élément d'épreuve très éloigné de corps massif à symétrie sphérique où le ds^2 de la relativité tend vers celui de la relativité restreinte.

Il compare les descriptions de différentes situations, en particulier lorsque l'observateur est attaché à un corps en rotation, faites par la théorie classique respectant les axiomes de Kepler et Fresnel et par la théorie de la relativité. Cette longue discussion est assez technique ce qui rend son analyse délicate aussi nous n'en retiendrons que la synthèse qu'il en donne :

" *En un mot, parmi tous les repérages possibles, les einsteiniens admettent qu'il en est de privilégiés : ces repérages coïncident avec ceux qualifiés d'absolus par les newtoniens et répondent aux mêmes postulats fondamentaux*[88]*, à cette précision près: dans les deux théories, il existe une infinité d'axes privilégiés absolus; dans la théorie d'Einstein comme dans celle de l'émission, la vitesse de la lumière issue d'une source au repos (*[1]*)* [89] *par rapport aux axes absolus choisis est la même dans tous les sens (et la même pour tous les axes absolus), dans la théorie des ondulations ce n'est vrai que pour les axes absolus fixes relativement à l'éther.*"

Dans cette phrase, qui reflète l'argumentaire qu'elle synthétise, on ne comprend pas ce qu'il veut dire par "*infinité d'axes privilégiés absolus"* qu'il veut appliquer aux deux théories, *a contrario* de ce que revendique la relativité .

En mécanique classique l'existence d'un référentiel absolu qu'on attache à l'existence indispensable d'un éther, non physique, comme l'expérience de Michelson Morley l'a montré, est un axiome incontournable.

En relativité il peut exister des référentiels dans lesquels la forme des équations est plus simple du fait que ces référentiels intègrent les symétries de la solution.

Ce référentiel peut avoir un sens physique, par exemple en cosmologie où le fluide cosmique en expansion fournit un référentiel matériel qu'il est possible de repérer par des mesures physiques comme l'étude de Rayonnement de Fond Cosmologique (RFC) le montre.

---

[88] Serait-ce en raison de ces mêmes symétries également ?

[89] Painlevé ajoute dans une note de bas de page ([1]): " *Des travaux récents semblent prouver que cette vitesse est indépendante du mouvement propre de la source, mais la question mérite d'être approfondie et discutée. Dans la théorie de l'émission, c'est la vitesse du rayon lumineux diminué géométriquement de la vitesse de la source (par rapport à Oxyz) au moment de l'émission, qui est la même pour tous les rayons."*
Cette remarque assez surprenante (en 1921), car la relativité restreinte date de 1905, jette quelques doutes sur son analyse.

Si la relativité dénie tout caractère absolu à un espace-temps immatériel, elle n'exclut pas des référentiels matériels "privilégiés" qui peuvent être identifiés de manière objective par tous les observateurs, ce qui, de plus, est très dans l'esprit du principe de Mach qui a été cher à Einstein lorsqu'il a construit sa théorie.

Dans la solution qui nous intéresse, nous sommes dans le vide à l'extérieur d'une masse à symétrie sphérique, un référentiel qui tient compte de cette symétrie sera à privilégier.

Pourtant nous verrons que certains modèles considèrent que ce vide est en mouvement stationnaire, ce qui élimine le temps du moins de l'évolution du système.

Mais pour constater ce mouvement stationnaire cela ne conduit-il pas à considérer un référentiel "absolu" qu'on pourrait caractériser objectivement par des mesures que des observateurs pourraient faire.[90]

Nous verrons que cela n'est pas nécessaire, car n'importe quel observateur peut constater le mouvement de ses voisins et vice versa. Ce mouvement sera d'ailleurs caractérisé par un champ de vecteurs spatiaux sans référence au temps.

En relativité générale on ne parle pas de référentiel absolu, car d'une part les équations sont valides dans tous les référentiels et d'autre part parce que ce terme est trop connoté "éther".

Ceci dit, ses propos, dans la phrase citée ci-dessus, illustrent une fois de plus comment Painlevé prenant la mécanique newtonienne comme référence essaie d'y rattacher la théorie d'Einstein, ce qui conduit à des confusions et des erreurs.

Mais cela n'est sûrement pas étranger au choix de forme de la métrique qu'il propose. Comme nous le verrons dans la suite du document sa forme de la métrique, qui décrit un espace (vide) en effondrement[91] perpétuel dont le mouvement stationnaire pourrait être marqué par des "observateurs de Painlevé [92]", peut être associée à un référentiel privilégié.

Ceci peut l'avoir (inconsciemment ?) inspiré, ce qui illustre si besoin était, comment une idée géniale peut résulter d'une erreur.

Il poursuit en faisant remarquer que :

"Il importe d'éviter une confusion qui s'est glissée dans beaucoup d'esprits et même chez des physiciens à la lecture superficielle de certaines formules audacieuses et trop ramassées, telles que celle-ci : "l'expression des lois de la nature est indépendante du mode de représentation qu'il nous plaît d'adopter." Ils en ont conclu que, si le globe S, par exemple, tournait par rapport aux étoiles, les observateurs emportés avec lui ainsi que leurs

[90]Nous donnerons un exemple tiré de : Gautreau R & Hoffmann B.(1978).
[91]Et symétriquement en expansion (ce qui figure dans sa forme).
[92]Observateurs "co-mobiles" de l'effondrement de l'espace-temps aussi appelés observateurs de Lemaître.

instruments de mesure, verront encore la lumière se propager en ligne droite, puisque l'expression des lois de la nature devrait rester la même. C'est cette interprétation complètement erronée de la théorie de la relativité qui a provoqué tant de discussion sur des expériences telles que celles de M. Sagnac."

Il donne une explication dans le cas de l'expérience de Sagnac en se référant à l'article de Paul Langevin que nous avons cité.

Mais il aurait pu faire remarquer que de façon générale Einstein considère qu'un phénomène physique obéissant à certaines lois a une existence objective (ce qui paraît difficilement contestable dans le cadre d'une théorie physique) et que si des observateurs différents étudient ce même phénomène ils doivent observer les même lois (intrinsèques) vis-à-vis des paramètres (sans doute différents) qu'ils mesurent sous réserve d'une formulation convenable de ces lois.

La formulation tensorielle réalise cela compte tenu du caractère local des équations décrivant ces lois et des transformations à opérer localement pour relier les coordonnées de ces observateurs.

Dans le développement qui suit Painlevé se livre à une analyse technique et formelle pour justifier l'établissement de formes de la métrique pour le problème du corps central à symétrie sphérique.

Cas d'un élément très petit P en présence d'un corps sphérique S, tous les autres corps étant éloignés

---

"Si le corps S (de centre O) ne tourne pas par rapport aux étoiles, les einsteiniens admettent que, pour les observateurs de S, le mouvement de P répond à tous les axiomes fondamentaux relatifs au cas où S est absolument fixe.

Rapporté à des axes Oxyz de directions fixes relativement aux étoiles, le mouvement de P sera donc plan et ses équations en coordonnées polaires r, θ (de pôle O) seront de la forme ([1])[93], c'est-à-dire ne dépendront explicitement ni de t ni de θ.

Pour aller plus loin, la Mécanique classique admet le principe de Galilée (à savoir que l'accélération de P à un instant t ne dépend que de la position de P) et elle parvient aux équations ([2])[94].

La Mécanique einsteinienne, elle, admet que les équations du mouvement doivent rentrer dans la classe très étendue mais exceptionnelle des systèmes d'équations du deuxième ordre qui définissent les géodésiques d'un ds² à quatre variables.

En vertu des postulats précédents, si on adopte le repérage des observateurs de S, à savoir les coordonnées polaires de l'espace de centre O et le temps ordinaire, ce ds² doit être de la forme :

$$ds^2 = A(r)\,dt^2 - 2B(r)\,dt\,dr - C(r)[r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi)] - D(r)\,dr^2 \quad .[95] \qquad ([3])$$

Pour r = ∞, en vertu du principe de l'inertie et de l'axiome de Fresnel, on doit avoir A =V, B =0, C = D =1, la quantité V désignant la vitesse de la lumière loin de toute matière, vitesse que par un choix convenable d'unité nous supposerons égale à 1"

---

[93] Équation ([1]) : $d^2r/dt^2 = G(r, dr/dt, d\theta/dt)$, $d^2\theta/dt^2 = H(r, dr/dt, d\theta/dt)$, équations données par Painlevé dans la première partie de son article.

[94] Équation ([2]) : $d^2r/dt^2 - r(d\theta/dt)^2 = F(r)$, $r^2 d\theta/dt = constante$, équations données par Painlevé dans la première partie de son article.

[95] Il y a une coquille dans le texte original où on lit : $ds^2 = A(r)dt^2 - 2B(r)dt.dr - C(r).[r^2 d\theta^2 + sin^2\theta d\varphi^2] - D(r)dr^2$.

Painlevé montre qu'il a établi nativement sa forme non singulière sur l'horizon

La forme *([3])* donnée ci-dessus est une forme générique, qui est souvent donnée[96], pour une métrique à symétrie sphérique indépendante du temps.

Painlevé prend bien le problème de façon rigoureuse en partant d'une forme générique qu'il va particulariser par des contraintes spécifiques.

Painlevé la particularise de manière à converger avec le cas de la mécanique newtonienne en appliquant les contraintes de la mécanique classique loin du centre de symétrie comme il l'indique.

Il va maintenant s'attacher à la particulariser en appliquant les contraintes de la relativité générale, il déclare :

"*Quelles que soient d'ailleurs les fonctions A, B, C, D de r que l'expérience nous conduirait à adopter, il serait toujours possible de former des conditions invariantes auxquelles devraient satisfaire les coefficients de ds² quand on y remplace r, θ, φ et t en fonction de 4 variables entièrement quelconques.*

Mais Einstein veut a priori que ces conditions invariantes soient des dérivées partielles du deuxième ordre d'une forme spéciale, qui s'inspirent à la fois des théories de la gravité newtonienne en coordonnées curvilignes, et de la théorie de la courbure des surfaces ordinaires[97].

Ce sont ces restrictions capitales et non le truisme pur et simple de l'invariance, qui parmi les ds² de la forme ([3]) ne laissent subsister que les suivants :

$$ds^2 = \left(1-\frac{2\mu}{f(r)}\right)[dt-\chi(r)\,dr]^2 - f^2(r)\left(d\theta^2+\sin^2\theta\, d\varphi^2\right) - \frac{f'^2(r)\,dr^2}{1-\frac{2\mu}{f(r)}} \qquad ([4])$$

où μ est une constante et où f(r) et χ(r) sont deux fonctions arbitraires de r telles seulement que χ(r) tende vers zéro et f '(r) (toujours positif) tende vers 1 lorsque r tend vers l'infini."

---

[96]Mais il y a des variantes comme nous le verrons Lemaître utilise une coordonnée radiale χ différente de *r*, ce qui fait que *r,* utilisé dans la partie à symétrie sphérique, n'est plus une coordonnée mais une fonction *r(t, χ)*.

[97]Bien qu'il ne le dise pas explicitement Painlevé fait référence à l'équation d'Einstein.

Dans ce qui précède Painlevé rappelle qu'il existe en principe une infinité de formes déduites les unes des autres par un changement de coordonnées et stigmatise la condition d'invariance en la qualifiant de truisme qui ne contraint que formellement les équations.

Par contre, même s'il est assez évasif sur les contraintes que la relativité générale impose, nul doute qu'il fait référence à l'équation d'Einstein qui dans ce cas particulier se réduit à la nullité du tenseur de Ricci, dont les composantes sont sous forme d'équations aux dérivées partielles du deuxième ordre.

En fait, il indique qu'Einstein impose que la forme de la métrique soit une solution de la relativité générale et satisfasse à ce titre à l'équation d'Einstein et converge à l'infini avec la solution newtonienne[98].

Painlevé poursuit bien son analyse méthodique dans la recherche de la solution et aboutit à une forme encore paramétrée qui peut générer les différentes formes bien connues de cette solution.

De ce fait, il arrive à la forme donnée par l'équation *([4])*[99] et on peut observer que si on pose $\chi(r) = 0$ et $f(r) = r$ soit $f'(r) = 1$ on obtient la forme de Schwarzschild et que si on pose $\chi(r) = (2M/r)^{1/2}(1-2M/r)^{-1}$ et $f(r) = r$, (donc la dérivée $f'(r) = 1$) cette forme générique donne la solution que Painlevé avait proposée dans son article du *24/10/1921*, ce qui montre que la forme *([4])* est correcte et génère au moins ces cas particuliers.

Painlevé déduit donc directement de considérations de symétrie et des équations d'Einstein une classe de solutions dont certaines non singulières sur l'horizon et ceci plus de 10 ans avant Lemaître.

C'est un élément totalement méconnu dont il faut rendre justice à Painlevé.

[98]Sous réserve d'interprétation, ce point est plutôt correct. La forme de Schwarzschild est contrainte d'une part par la nullité du tenseur de Ricci (courbure des surfaces ordinaires?) et par une convergence à l'infini avec la mécanique newtonienne.

[99]Il doit utiliser la forme ([3]) pour calculer formellement les composantes du tenseur de Ricci, les égaler à zéro ce qui lui donne des équations différentielles à résoudre et intégrer. Nous ne ferons pas le calcul qui aboutit à l'équation ([4]) pour vérifier son exactitude dans sa généralité, sachant qu'elle est correcte pour les cas cités.

Painlevé remplace la coordonnée r par f(r) dans la forme de Schwarzschild

Motivation de Painlevé pour cette généralisation

On voit que Painlevé a généralisé *(1-1)* en introduisant une fonction *f(r)* à la place de *r* pour la partie spatiale à symétrie sphérique et a introduit une fonction *χ(r)* plus générale pour la partie spatiale radiale et spatio-temporelle. Utiliser une fonction *f(r)*[100], à la place de *r* est licite mais n'est pas de nature à conférer une nature physique à la coordonnée *r*.

En effet, si, sur une géodésique, la coordonnée temporelle d'une forme de métrique peut avoir la même valeur que le temps propre de l'observateur qui est une grandeur physique mesurable directement par une horloge, ce qui est le cas dans la forme de Painlevé pour un observateur en chute libre radiale sans vitesse initiale (à l'infini), ces deux entités ne sont pas de même nature.

Ajoutons que pour une trajectoire de type temps, associée à un observateur physique, seule la coordonnée temporelle serait concernée.

Ceci est intéressant, car sans que cela soit explicitement dit dans le texte, c'est le signe manifeste du problème que lui pose le caractère non physique (qu'Einstein lui avait rappelé) de la coordonnée radiale *r* utilisée dans la forme de la métrique relativiste.

Au lieu de s'interroger sur sa signification épistémologique et les conséquences à tirer il va s'efforcer de relier cette coordonnée à une grandeur physique (mesurable) via une fonction.[101]

Mais la proposition qu'il développe n'est qu'un artifice pour tenter de rétablir le caractère physique de la coordonnée *r* qui serait alors une valeur (directement) mesurable.

Elle interviendrait alors indirectement dans la métrique, en tant que coordonnée, via cette fonction *f(r)* qui jouerait le rôle d'un "facteur correctif".

Il ne va pas jusqu'à en tirer les conclusions qui s'imposent à savoir que la grandeur qui est intrinsèquement physique, comme le rappelle Einstein, c'est le ds^2 et que dans la forme de la métrique changer *r* par *f(r)* ne lui conférera pas de caractère physique pour autant.

---

[100] En effet, par exemple, un segment *AB* de géodésique parcouru par un observateur est déterminé par une intégration du ds^2 sur la trajectoire *AB* ce qui est mesurable par l'horloge de cet observateur. La coordonnée *r* n'intervient dans ces coordonnées que dans l'équation décrivant la trajectoire, et n'est pas mesurable directement.
Becquerel qui avait récusé l'essentiel des arguments développé par Painlevé (sauf le remplacement de *r* par *f(r)*) avait peut-être pressenti cela dans sa déclaration :
" *Il ne faut pas partir* [du caractère physique] *des coordonnées pour établir le* [caractère physique du] ds^2*, il faut au contraire partir du* [caractère physique du] ds^2 *pour chercher la signification des coordonnées*" (Cité dans Eisenstaedt 1982 p. 176). À condition que l'interprétation soit bien celle avec les mots entre crochets en bleu clair que j'ai rajouté dans la phrase de Becquerel. En effet si on ne peut pas mesurer dans le cas général (sauf à l'infini où la coordonnée devient physique) la coordonnée *r*, rien n'interdit de la calculer à partir de mesures utilisant le ds^2.
Mais nonobstant l'avis d'Einstein le débat se poursuivra pour essayer de déterminer le "meilleur système de coordonnées". Mie en fera une étude très circonstanciée qui sera relayée par Becquerel. Voir Eisenstaedt 1982 p. 176-177 pour une étude très complète de cet épisode et p.177- 191 pour les développements qui ont suivis.

[101] En fait, il œuvre pour que ce qui figure dans la forme de Schwarzschild soit une fonction (scalaire) de la coordonnée physique *r*. Un changement de coordonnées ne peut pas conférer de caractère physique à *r*, s'il n'en avait pas. Le ds^2 qui a un caractère physique ne se déduit pas par un simple changement de coordonnées.

Ceci n'empêchant pas, comme nous l'avons déjà dit, que les coordonnées peuvent être accessibles indirectement par des mesures sur des observables lorsqu'on dispose d'un modèle d'espace-temps.

Les coordonnées isotropes, une fonction *f(r)* qu'aurait pu utiliser Painlevé

Par un changement de coordonnée particulier[102] du type $R = f(r)$, ce que Painlevé requiert, on obtient les coordonnées isotropes, qui ne sont explicitement définies qu'à l'extérieur de l'horizon, à la différence de la coordonnée r.

Remarquons que la section spatiale de cette forme isotrope de la métrique décrivant le champ à l'extérieur d'un corps unique à symétrie sphérique est conformément euclidienne ce qui se traduit par la nullité du tenseur de Weyl pour la section spatiale $d\sigma^2$.

$$d\sigma^2 = \left(1+\frac{M}{2R}\right)^4 \left[dR^2 + R^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right)\right]$$

Le tenseur de Weyl, étant un tenseur, n'importe quelle forme (non singulière), obtenue à partir du $d\sigma^2$ ci-dessus résultant, d'un changement de coordonnées, préservera cette nullité.

On peut donc en déduire que, dans la solution extérieure d'un corps unique à symétrie sphérique, l'espace a une structure conformément euclidienne.

Cette propriété est exhibée de la manière la plus explicite qui soit dans la forme proposée par Painlevé dans son premier article, puisque dans ce cas la section spatiale est euclidienne.

Ceci est un argument supplémentaire qui montre que cette forme révèle de manière la plus claire qui soit la phénoménologie très particulière de cette solution et qu'il ne faudra pas s'étonner de toutes les propriétés spécifiques que nous allons trouver dans notre analyse.

Des métriques conformément équivalentes, bien qu'elles ne soient pas égales ont, entre autres, la même structure causale.

La conformité est un critère qui permet de classer des solutions (on construit des classes) qui partagent certaines propriétés importantes et qu'on peut donc apparenter.

Ce critère est utile pour caractériser certaines propriétés de la phénoménologie de la solution géométrique au problème du champ généré par un corps unique à symétrie sphérique.

[102] Voir annexe3 chapitre *2* pour le détail des calculs.

La contrainte de "réversibilité " introduite par Painlevé : Painlevé se renie

Quelle motivation a pu pousser Painlevé à se renier

À ce stade de l'argumentaire Painlevé est toujours en accord avec sa proposition de métrique de sa contribution du 24 octobre 1921.

Painlevé introduit ensuite une contrainte de réversibilité[103] du mouvement déclarant :

"*Admettons en outre que les lois du mouvement ne changent pas lorsqu'on change t en -t "*

Painlevé ne motive pas son hypothèse; il l'admet *a priori* comme une évidence.

Cette hypothèse peut être correcte dans certains cas particuliers comme les géodésiques circulaires à r = *constante* par exemple puisque dans sa forme *(2-1)* le seul terme non quadratique s'annule, car $dr = 0$ et on est ramené à une forme dont tous les termes sont quadratiques.

Elle peut sembler correcte dans d'autres cas particuliers comme le mouvement géodésique radial, par exemple, suivi par un observateur de Painlevé régi par l'équation[104]

$$r = (r_s^{1/3}[(3c/2)(t_0 - t)]^{2/3}$$

où r_s est le rayon de Schwarzschild, lorsque $t_0 = 0$, puisque dans ce cas l'équation qui se réduit à :

$$r = r_s^{1/3}[-3ct/2]^{2/3}$$

Est insensible au changement de signe de t.

Mais on voit clairement qu'elle ne l'est pas si $t_0 \neq 0$.

Et, comme on peut arbitrairement choisir t_0, ceci montre que son hypothèse (qui se veut générale) est fausse.

---

[103]Nous reviendrons sur cette hypothèse qu'il érige en postulat dans l'article suivant (1er mai).

[104]On rappelle que r_s est le rayon de Schwarzschild qui vaut 2GM en posant c =1.

En fait ce dernier cas, où l'équation du mouvement est insensible au changement de signe ($t_0 = 0$), ne traduit pas l'invariance du mouvement par le changement de signe mais révèle l'existence d'une région symétrique en expansion (le "trou blanc"), disjointe de l'autre région (le "trou noir"), de mouvement symétrique par rapport à $r = 0$ soit $t = t_0$ dans l'équation du mouvement ci-dessus, donc par rapport à 0 si $t_0 = 0$.

L'insensibilité au changement de signe telle qu'elle peut se manifester ne reflète pas ce qu'on entend en général par cette terminologie.

L'orientation[105] de la solution a, entre autres, pour conséquence physique que les cônes de lumière issus des points d'une géodésique radiale entrante dont l'ouverture varie en fonction de la valeur de la coordonnée r sont de plus dissymétriques[106] alors que dans une solution où tous les termes sont quadratiques ils restent symétriques.

Son hypothèse de "réversibilité" est donc en contradiction flagrante avec ce qu'il a proposé dans sa contribution initiale.

On se demande donc comment il arrive à ces conclusions sachant que, comme il le montre lui-même, cette hypothèse saborde l'innovante forme de la métrique qu'il avait mis en avant pour s'opposer à Einstein.

Face à la défiance unanime de la communauté scientifique Painlevé doute et renonce

Sa forme de métrique, donnée dans sa première contribution, n'a suscité que critiques et incompréhension de la part des scientifiques les plus éminents, ce qui montre qu'une "orientation" de l'espace était conceptuellement "inconcevable" dans le contexte de l'époque[107] puisque c'est bien la présence de ce terme non quadratique qui confère une orientation à l'espace-temps.

Le doute s'est alors insinué dans son esprit.

Il considère qu'il ne peut pas avoir raison, seul contre un tel consensus.

Mais comme il lui paraît impératif de motiver ce renoncement sur un argument géométrique, il se résigne à invoquer cette condition de "réversibilité" qu'il postule comme étant essentielle et devant s'imposer à toute solution.

[105]Rappelons que Painlevé avait défini la région en expansion (ce que personne n'avait relevé à l'époque), mais nous avons expliqué que considérant cela comme une coquille, nous nous attachons à la structure de sa forme.
[106]Nous démontrerons cela dans un chapitre ultérieur.
[107]Ce qui souligne une fois de plus que la communauté scientifique ne s'était pas totalement libérée des concepts classiques d'espace et de temps.

Ceci montre que si on concevait un mouvement, comme le mouvement radial, manifeste d'un champ de forces dérivant d'un "potentiel central" isotrope mais non homogène, on n'allait pas jusqu'à supposer que la métrique (à quatre dimensions) pouvait changer en fonction de l'orientation soit du temps (exclusivement) ou de la dimension radiale spatiale (exclusivement)[108]. Cette propriété caractérise l'existence (au moins formelle sinon physique) d'un univers qui comporte deux régions déconnectées "symétriques".

Pour tenter de comprendre ce qui a égaré les scientifiques examinons de plus près la phénoménologie en cause.

Commençons par bien préciser le rôle et la signification de la métrique.

Précisions sur le rôle et la signification de la métrique

Dans son article du 14 novembre 1921 que nous étudions, Painlevé propose une démonstration élégante d'établissement d'une métrique de ce type. S'il s'égare en imposant la contrainte de "réversibilité" qui n'a pas lieu d'être, néanmoins sa démarche est rigoureuse et irréprochable.

L'objet fondamental est le ds^2, le tenseur métrique, en fait un champ de tenseurs, objets géométriques dans un fibré, caractérisant un espace-temps physique à quatre dimensions, dont une variété différentiable[109] est la base et la signature (-, +, +, +) imposée par la fibre minkowskienne au nom de la convergence locale avec les lois de la relativité restreinte.

Précisons notre terminologie. Nous désignons par "forme de métrique" une des multiples "représentations", dans un système de coordonnées donné, d'une entité plus générale que nous appellerons "métrique" qui est une structure fondamentale qui détermine un ds^2.

On travaille en géométrie analytique, pour des raisons opératoires. On définit le ds^2 dans un système de coordonnées, ce qui produit une forme de métrique. Le système de coordonnées étant arbitraire, par des transformations de coordonnées définissant les nouvelles par des fonctions des anciennes, on peut en déduire une multitude d'autres définissant le même ds^2.

Une forme quelconque de métrique correspondant au ds^2 de la solution considérée permet de calculer par intégration du "ds" des "lignes d'univers" géodésiques de type temps ou nul [110], seules entités physiques susceptibles de vérification expérimentales.

[108]Évidemment, si on change simultanément temps et orientation spatiale radiale la métrique est identique.

[109]Munie d'une connexion affine, codifiant la courbure pour différencier des champs de vecteurs et de tenseurs en espace courbe. Si on utilise une métrique cette connexion est valorisée par les symboles de Christoffel. On utilise une métrique en général. Peut-on s'en passer pour définir totalement un espace-temps (critères affins) ?

[110]On s'intéresse peu aux lignes d'univers de type espace, leur vérification physique directe n'étant en général pas possible. Pour celles de type temps le $ds^2 = c^2 d\tau^2$ permet de calculer aussi des lignes d'univers non géodésiques.

Cette approche covariante[111] est indépendante de sa structure interne spatio-temporelle, dans le cadre d'une signature donnée, car c'est la forme complète qui intervient dans le calcul.

La métrique, l'observateur, sa ligne d'univers et le rôle essentiel de son paramètre affin

Notons que cette forme géométrique est une structure formelle où l'observateur ne figure pas. En général, on introduit des observateurs dont la présence ne modifie pas les paramètres géométriques de l'univers[112].

La ligne d'univers, géodésique ou non, de type temps, définie dans un espace-temps à quatre dimensions, qui caractérise un observateur, est balisée par un paramètre affin.

On utilise en général le temps propre τ, qui est une observable (physique), de l'observateur sur sa ligne d'univers comme paramètre affin.

Ce paramétrage par le temps propre qui peut être réalisé dans toutes les "formes" d'une même "métrique", correspondant à un même tenseur métrique associé à un certain espace-temps solution de l'équation d'Einstein, est essentiel, car il est le trait d'union entre toutes ces formes .

En effet, en relativité générale, ce qui caractérise que toutes ces "formes de métrique" décrivent bien le même espace-temps (correspondent à la même "métrique") est que, entre deux points A(t_a, x_a, y_a, z_a) et B(t_b, x_b, y_b, z_b) donnés, le temps propre calculé par ces différentes formes sur ce segment de ligne d'univers parcouru par un observateur, aura la même valeur qui est celle constatée par l'observateur avec son horloge (observable physique).

Une forme de métrique correspondant à une autre solution de la relativité générale produira, en général, un résultat différent.

Ceci est épistémologiquement évident puisque cette mesure, résultant de l'utilisation covariante de la forme complète de la métrique ($ds^2 = c^2 d\tau^2$), correspond à une observable (physique) qui donc est objectivement invariante par changement de coordonnées.

On peut le vérifier facilement sur un arc de géodésique radiale parcouru par un observateur par exemple dans les formes de Painlevé et de Schwarzschild, voir équations *(8-3)* et *(9-1)*.

Signalons un point qui n'est pas forcément évident à propos de ce paramétrage.

[111] C'est l'approche fondamentale de la théorie, mais il en existe d'autres non covariantes où ce n'est pas le cas.
[112] Philosophiquement, on peut se poser la question de la validité de cette hypothèse. Mais dans le contexte de la relativité générale qui est une théorie classique nous l'admettrons.

Ce qui se cache derrière ce paramétrage se référant à la métrique, car $c^2d\tau^2 = ds^2$, qu'on retrouve lorsqu'on établit l'équation géodésique dans sa forme la plus simple[113], c'est qu'il est libre quand on utilise la méthode du transport parallèle du vecteur tangent à la géodésique, propriété affine, mais qu'il est contraint au temps propre par la méthode du calcul de l'extremum métrique de chemin.

Ce type de contrainte du paramétrage affin des lignes d'univers va également s'appliquer à des géodésiques nulles, avec des spécificités que nous préciserons au chapitre *20.*

Bien entendu, on peut toujours utiliser un autre paramétrage affin mais cela se traduit par une formulation plus complexe des équations.

La théorie permet, par la géométrie de l'espace-temps et sa métrique, de prédire, connaissant les lignes d'univers, des éléments intervenant dans une expérience et de l'observateur, les résultats de cette expérience ce qui peut alors être confronté aux résultats de l'observateur.

Mais comme la relativité générale est une théorie géométrique de la gravitation, elle ne peut faire que des prédictions géométriques. Les expériences censées la valider doivent, in fine, valider des grandeurs géométriques qui, pour être des observables, ne peuvent concerner que des lignes d'univers[114].

Le référentiel local de l'observateur

De manière opératoire, on attache à chaque observateur un référentiel "minkowskien" local, dans lequel il est "au repos" ce qu'on peut faire, puisque dans une variété, localement, l'espace-temps peut être assimilé à celui de la relativité restreinte.

Ce référentiel qui est défini par une base de quatre vecteurs orthonormés au sens de la métrique de Minkowski "glisse tangentiellement" sur la ligne d'univers qui caractérise cet observateur en épousant sa "courbure" qui peut être complexe.

Le fait qu'on attache à l'observateur un référentiel local minkowskien n'est certainement pas étranger à la contrainte de réversibilité évoquée par Painlevé, car ce référentiel local "physique" est celui dans lequel on fait les expériences et donc celui dans lequel il est naturellement implicite de se situer.

[113] $d^2x^\mu/d\tau^2 + \Gamma^\mu_{\rho\sigma}(dx^\rho/d\tau)(dx^\sigma/d\tau) = 0$. Voir Carroll P .109 pour les commentaires sur le paramétrage.

[114] De type temps ou nul. Nous avons déjà évoqué le problème de la validation expérimentale. Nous reviendrons en détail sur la méthode de validation de la théorie par des observateurs. Cette restriction peut entraîner une certaine frustration de la part de certains scientifiques qui considèrent qu'on ne traite le problème que partiellement. En effet l'étude des propriétés internes de la structure globale représentée par la forme de métrique et de la diversité des formes de métriques est un domaine qui est riche d'enseignements au niveau formel.

Comme il présente tous les attributs d'un espace homogène et isotrope et où la "réversibilité" s'applique localement cela conduit à considérer ces attributs comme s'imposant à l'esprit.

Mais si elle s'applique localement dans le laboratoire pourquoi ne serait-ce pas le cas au niveau de l'espace-temps global ?

Pour cela, il faut se souvenir que les coordonnées, dans lesquelles cette métrique globale est définie, s'appliquent sur une variété et qu'elles ne sont qu'une manière arbitraire de repérer les points de cette variété. Les différences de description des phénomènes physiques peuvent s'apprécier en comparant localement les deux métriques (celle de Minkowski et celle sur la variété courbe) via leurs vecteurs de base supportant leurs coordonnées respectives (tangents aux coordonnées).

La représentation par les tétrades et tétrades inverses permet de représenter les vecteurs de la base générale dans la base locale, et vice versa, donc de comparer localement les deux métriques et de suivre leur évolution le long d'une ligne d'univers par exemple celle de l'observateur et/ou celle impliquée dans l'expérience. Cela indique comment l'espace-temps local de Minkowski est "ballotté" sur sa ligne d'univers dans l'espace-temps global défini par ses coordonnées globales.

Précisons qu'on peut aussi décrire cela par le mouvement relatif[115] intrinsèque du référentiel minkowskien local de l'observateur (sa variation infinitésimale décrite dans son propre référentiel) lorsqu'il épouse la trajectoire de la ligne d'univers sur la variété.

Dans la suite du document, nous produirons de nombreux exemples utilisant cette méthode pour expliciter certaines propriétés qui peuvent paraître paradoxales comme l'existence de ligne d'univers de type temps sous l'horizon dans la forme de Painlevé alors que tous les vecteurs de base de la métrique sont de type espace[116].

Caractères géométriques généraux de la forme de métrique liés à la réversibilité

Pour revenir au problème de "réversibilité" que nous traitons on peut noter que dans la forme de la métrique de Schwarzschild, ne comportant que des termes quadratiques, les vecteurs de base sont tous orthogonaux entre eux, au sens de la relativité restreinte, mais non orthonormés, ce qui fait que les cônes de lumière radiaux sont symétriques en tout point mais non constants[117], l'angle du cône se referme jusqu'à s'annuler sur l'horizon, alors que dans la forme de Painlevé seuls les vecteurs spatiaux sont orthogonaux entre eux, ils sont même orthonormés dans la version en coordonnées cartésiennes, mais pas au vecteur temps qui de plus "tourne" par rapport à la base de vecteurs spatiaux lorsque la coordonnée r varie.

[115]En effet on peut définir l'évolution infinitésimale de la base orthonormée de l'observateur dans cette même base comme nous le montrerons (via les coefficients de rotation de Ricci)

[116]Dans d'autres espaces temps comme celui de Kerr on montre par cette méthode comment dans une région des lignes d'univers de type temps peuvent générer des boucles temporelles et même "remonter" le temps.

[117]Il suffit de poser $ds^2 = 0$ avec θ, φ constant et résoudre on obtient des racines symétriques pour dr/dt. Si on fait la même chose avec la forme de Painlevé on obtient deux racines non symétriques pour dr/dt. Rappelons que si les coordonnées spatiales sont les mêmes entre les deux formes, la coordonnée temporelle est différente.

Manifestation de l'orientation de la solution de Painlevé par l'anisotropie locale

Isotropie locale dans la forme de Schwarzschild

En un point donné de coordonnée $r = r_0$ pour une valeur donnée de *dt* et *dr* si on change de signe soit *dt* soit *dr* cela ne change pas la valeur du ds^2.

Pour la lumière ($ds^2 = 0$), cela s'écrit

$$\frac{dr}{dt} = \pm\left(1 - \frac{2M}{r_0}\right) \quad .$$

Le cône de lumière radial est symétrique en tout point, cela malgré l'anisotropie de l'espace-temps ailleurs qu'en $r = 0$, puisque que la solution n'est à symétrie sphérique (isotrope) que par rapport à un point.

C'est lié au caractère statique[118] des coordonnées de Schwarzschild, associé à cette contrainte de réversibilité, et à la nature de la coordonnée *t* qui en résulte. Notons que pour $r_0 = 2M$, $dr/dt = 0$, ce qui montre que la lumière entrante est piégée sur l'horizon, ne le franchit pas dans cette représentation.

Anisotropie locale de l'espace-temps, révélée par la forme de Painlevé

Alors que dans le même cas ($r = r_0$) pour la forme de Painlevé, si on change soit le signe de *dr* soit celui de *dt,* mais pas les deux évidemment, on obtient deux valeurs égales du ds^2 mais qui correspondent à un ds^2 différent de celui où *dt* et *dr* sont de même signe.

Notons que si ce résultat est celui du trou blanc cela correspond à des phénoménologies différentes, car pour un "trou blanc" on note que *dr* et *dt* sont de même signe, le signe négatif du terme croisé *dr.dt* est inhérent à la forme de la métrique.

En considérant le cône de lumière ($ds^2 = 0$) dans la forme "trou noir" de Painlevé, comme dans le cas de Schwarzschild,

$$\frac{dr}{dt} = -\sqrt{\frac{2M}{r_0}} \pm 1 \quad ,$$

[118] Lorsque la métrique ne dépend pas de la coordonnée *t*, elle est qualifiée de "stationnaire" et quand, de plus, le vecteur ∂_t tangent à la coordonnée *t* est orthogonal aux vecteurs tangents aux coordonnées spatiales elle est "statique" et alors la forme de métrique associée est quadratique pour les termes en *dr* et *dt*.

la dissymétrie manifeste du cône de lumière dans la forme stationnaire, à caractère inertiel, de la métrique de Painlevé révèle l'anisotropie locale de l'espace-temps. Comme pour $r_0 = 2M$, $dr/dt = -2$, dans cette représentation un rayon lumineux entrant traverse l'horizon.[119]

Ceci souligne une propriété pourtant évidente, car comme Lemaître le dénoncera[120], l'attribut d'isotropie locale (attaché au caractère statique) non seulement n'a rien de nécessaire mais est cause de la singularité sur l'horizon.

L'orientation de la solution de Painlevé ne fait que révéler l'anisotropie locale qui est un caractère physique de l'espace-temps.

Nous aurons l'occasion d'y revenir au chapitre *17* où nous expliciterons et montrerons comment cette description intimement liée à la forme de Painlevé éclaire la nature de l'espace-temps de la solution.

Mais sans anticiper sur ce que nous montrerons[121], notons que les relations, en tout point de l'espace-temps, entre la base minkowskienne de vecteurs attachée au référentiel de l'observateur et la base de vecteurs tangents localement aux coordonnées globales dépendent de la localisation spatio-temporelle de l'observateur et de son référentiel. Nous aurons l'occasion d'en donner une représentation graphique dans la suite du document[122].

C'est cette relation entre métrique globale et métrique locale attachée aux observateurs qui permet de "relier" les paramètres des observateurs locaux, dans des référentiels locaux minkowskiens différents, qui sont géométriquement des espaces disjoints et déconnectés[123].

Ainsi, la métrique globale indique le lien entre les mesures d'un même phénomène opérées par différents observateurs dans différents laboratoires associés à des espaces locaux minkowskiens.

À ce titre, elle définit le lien entre ces espaces locaux comme en atteste la connexion métrique, dépendant de la métrique et ses dérivées, qui définit 4 matrices de 16 scalaires permettant de déterminer en un point la relation entre l'espace-temps de Minkowski en ce point et les espaces locaux minkowskiens infiniment voisins.

Une intégration permet d'étendre cette relation au-delà.

---

[119]Nous discuterons de ce "paradoxe" au chapitre *8* et montrerons que c'est bien la forme de Painlevé qui décrit la phénoménologie physique.

[120]Lemaître (1932) p. 200 : " *Nous nous proposons de montrer que la singularité du champ n'est pas réelle et provient simplement de ce qu'on a voulu employer des coordonnées pour lequel le champ est statique."*

[121]Localement on peut définir les vecteurs d'une base dans l'autre, les composantes sont appelées tétrades et tétrades inverses, puisque localement ces vecteurs sont dans le même espace vectoriel et ainsi comparer les coordonnées d'autres vecteurs locaux, comme celles associés au cône de lumière, qui sont constantes dans la base de Minkowski associée à l'observateur mais qui varient, en général, dans la base attachée aux coordonnées. On comprend alors comment le cône de lumière varie en ouverture et inclinaison dans les coordonnées globales.

[122]Voir par exemple figure *12-3* au chapitre *12* du corpus *2* de la deuxième partie.

[123]Rappelons que si les espaces de Minkowski locaux sont des espaces vectoriels, ce n'est pas le cas des variétés et c'est pour cela que parler de vitesse d'un objet distant n'a selon les avis soit aucun sens et sémantiquement incorrecte (Wittgenstein), soit doit conventionnellement être défini (transport parallèle), car sa définition claire dans le cas d'un même espace vectoriel ne peut pas être utilisée. Voir Carroll S. (2003) p. 104.

Ainsi, le décalage spectral d'un rayonnement, que Painlevé évoque dans son premier article est calculable (donc prédictif) entre le référentiel local d'émission où l'observateur local mesure une certaine fréquence d'émission v_e et le référentiel local de réception où l'observateur local mesurera une fréquence v_r de ce même rayonnement qui en général est différente.

Ceci permet une vérification expérimentale de la validité de la métrique si on connaît les caractéristiques du rayonnement, les coordonnées et le référentiel de l'observateur associé à l'émission et celles de l'observateur en réception.

Le cas de la mesure dans un laboratoire terrestre d'un rayonnement connu, émis par le Soleil, évoqué par Painlevé, en est un cas typique.

C'est une application particulièrement importante et simple que permet la métrique et qui pourtant n'a pas été comprise à l'époque comme nous aurons l'occasion de le montrer.

L'abjuration de Painlevé

Sous la pression de la communauté scientifique, il en déduit donc que les tous les termes en *dt* doivent être quadratiques.

En posant $\chi(r)=0$, cela réduit la solution à

$$ds^2=\left(1-\frac{2\mu}{f(r)}\right)dt^2-f^2(r)\left(d\theta^2+\sin^2\theta\, d\varphi^2\right)-\frac{f'^2(r)\,dr^2}{1-\frac{2\mu}{f(r)}} \quad , \qquad ([5])$$

avec les mêmes contraintes sur la fonction *f(r)* que précédemment.

En ne retenant que cette solution comme possible, Painlevé renie sa solution du 24/10/1921 !

Painlevé ajoute :

"Les einsteiniens admettent enfin que la constante μ et la fonction f(r) sont les mêmes quel que soit l'élément P."

Mais cela est inhérent au principe d'équivalence (la géodésique ne dépend pas de la masse de celui-ci, supposée négligeable cependant dans cette solution) et n'a rien de spécifique à cette solution.

Au sujet de la "métrique de Schwarzschild"[124] qui se déduit de l'équation ci-dessus en posant $f(r) = r$, on peut aussi être égaré par le théorème de Birkhoff (1923)[125] qui stipule que c'est

[124]Qui n'est pas due à Schwarzschild mais à Droste, cf. J. Eisenstaedt (1982), p 167.
[125]Postérieur à l'article de Painlevé, mais les idées étaient dans l'air.

l'unique solution dans le vide à symétrie sphérique et qu'en particulier il n'existe pas de solution qui dépend du temps, ce qui semblerait corroborer le choix de Painlevé.

Ce théorème est bien entendu exact, mais il faut l'interpréter correctement, c'est-à-dire considérer le terme "métrique de Schwarzschild" comme générique désignant une classe d'équivalence de solutions, à savoir que toutes les formes de métrique équivalentes (par un changement de coordonnées) à la "métrique de Schwarzschild" jouissent de la même propriété. Pour cela il suffit de montrer qu'on peut retrouver la métrique de Schwarzschild par un certain changement de coordonnées.

Souvent on part de la métrique de Schwarzschild pour en déduire une autre[126] mais il est plus convaincant qu'on fasse l'inverse, en particulier, lorsque la forme de métrique d'origine (comme celle de Painlevé) n'est pas singulière sur l'horizon alors que celle de Schwarzschild l'est. La transformation de coordonnées présente alors nécessairement une singularité sur l'horizon, mais cela démontre alors le caractère fictif de la singularité sur l'horizon.

C'est ce qu'a d'ailleurs fait Painlevé, comme on a pu le constater, mais il a été plutôt avare de détails, à la différence de Lemaître qui, en 1932,[127] déduit également directement des équations de la relativité générale la forme de Painlevé. Il en explicite toute la construction et il montre comment on peut en déduire la "métrique de Schwarzschild", par un changement de coordonnées (singulier sur l'horizon) ce qui montre, selon ses déclarations, que la singularité sur l'horizon dans la forme de Schwarzschild est fictive et simplement due au fait qu'on a voulu imposer à la forme de la métrique d'être statique (sic) !

Cette contrainte (arbitraire) que Painlevé appelle "réversibilité", supposée vraie en tout point de l'espace-temps, le conduit tout droit à la solution "statique"[128] de Schwarzschild, car cette contrainte impose que la solution ne peut pas être orientée (donner des résultats différents pour le ds^2 selon la direction de l'écoulement du temps).

La forme (quadratique) de Schwarzschild est "réputée statique", mais ceci n'est vrai que pour la partie extérieure à l'horizon où effectivement les sections spatiales ne dépendent pas du temps.

C'est faux pour la partie intérieure qui est dynamique, ce qui n'apparaît pas explicitement dans la forme puisque dans ce cas c'est la coordonnée r qui est de type temps alors que t est de type espace, ce que évidemment Painlevé n'a pas envisagé.

---

[126]Ce que nous ferons au chapitre *5*.

[127]Nous développerons sa démarche attestant de sa compréhension du problème dans un chapitre ultérieur.

[128]Précisons la différence entre métrique stationnaire et statique, toutes deux ne dépendant pas du temps. Stationnaire veut dire "qui fait tout le temps la même chose" et statique "qui ne fait rien du tout". Précisons que formellement, un espace-temps est dit statique s'il existe un champ de vecteurs de Killing de type temps ∂_t qui est orthogonal aux hypersurfaces de type espace, il est stationnaire si ce champ de vecteurs ∂_t n'est pas orthogonal à ces hypersurfaces de type espace. Géométriquement, de façon générale, si un champ de vecteurs $\mathbf{V}^\mu$ est orthogonal à un ensemble d'hypersurfaces défini par la relation f = *constante*, f étant une fonction des coordonnées sur la variété, et si h étant une autre fonction, on peut écrire le vecteur $V_\mu = h\partial_\mu f$, l'orthogonalité implique que $V_{[\sigma} V_{\nu ;\mu]} = 0$**.** De façon opérationnelle ceci se traduit simplement par la présence de termes croisés en $dt.dx^i$ dans une métrique stationnaire, et à leur absence dans une métrique statique**.**

En fait la solution de Schwarzschild définit non pas une région mais deux régions de l'espace-temps et la métrique étant singulière sur l'horizon ces deux régions ne peuvent pas être raccordées continûment.

Les groupes de symétrie associés aux deux régions sont d'ailleurs différents.

La région extérieure est isotrope, statique (invariante par translation dans le temps) mais non homogène. La région intérieure est isotrope et homogène mais non statique.

Mais pourquoi exclure des solutions, comme celle qu'il avait proposée qui ne respectent pas ce caractère statique, puisqu'elles peuvent se déduire de celle de Schwarzschild (comme nous le montrerons) par un changement de coordonnées tout à fait valide, même si ce changement est singulier sur "l'horizon", ce qui est requis pour éliminer la singularité.

D'ailleurs la phénoménologie de cette solution nous apprend que l'horizon se comporte comme une membrane unidirectionnelle (peut être traversée de l'extérieur vers le centre mais pas dans l'autre sens) ce qui confère une dissymétrie à cette solution, une orientation (un sens) discriminant physiquement les géodésiques entrantes des géodésiques sortantes.

La forme *(1-1)* que nous avons modernisée en *(1-2)* que Painlevé propose est donc tout à fait pertinente et correspond mieux à la phénoménologie de cet espace-temps[129] qu'elle représente par une seule région[130] pour $0 < r < \infty$. Son orientation permet de se libérer de l'exigence d'une singularité sur l'horizon, car elle est compatible avec le caractère de membrane unidirectionnelle de l'horizon.

Pourquoi Painlevé a tort de renoncer à sa solution donnée dans l'article du 24 octobre

S'il soumet le ds^2 (lié à l'élément infinitésimal de longueur d'une trajectoire) à cette contrainte de réversibilité, c'est qu'elle lui paraît "naturelle" dans le contexte de sa pensée d'espace et de temps newtonien où implicitement il se place, cadre immuable des événements implicitement statique et symétrique dans cette solution dans lequel ce ds^2 est évalué.

Comme la solution de Painlevé décrit un espace stationnaire orienté, qui même s'il ressemble à un espace statique en est fondamentalement différent, ce principe de réversibilité ne s'applique pas.

Painlevé et ses contemporains n'étaient pas préparés à analyser la phénoménologie de cette stationnarité autrement que dans le cadre d'un espace-temps fictif statique alors que l'espace-temps est en fait physiquement primordial et recèle intrinsèquement toutes les informations nécessaires à la description de la solution.

[129]En fait de la moitié puisque l'espace symétrique correspond à l'autre orientation. Par ailleurs ce qui est dit au niveau de l'orientation est lié à l'utilisation de la coordonnée radiale *r* dans la forme de la métrique. Il y a des exemples de formes non orientées (Lemaître par exemple, mais aussi Kruskal ou quelques autres dans des coordonnées n'utilisant pas *r* comme coordonnée spatiale) qui ne sont pas singulières sur l'horizon.
[130]Ce qui était représenté par deux régions dans la forme de Schwarzschild.

Vouloir le décrire dans un espace-temps statique (formel mais fictif) non seulement n'apporte aucune information supplémentaire mais pollue la relation entre l'observateur et l'espace puisque l'observateur, pour ce qui concerne ses expériences et observations, se situe dans cet espace-temps physique.

Le formalisme lié aux espaces courbes, en particulier pseudo-riemanniens ce qui ne simplifie pas la représentation, n'était pas encore bien ancré dans les esprits.

En particulier, dans l'expression du ds^2, les "dx^μ" sont en fait les gradients des fonctions des coordonnées x^μ définies sur la variété courbe.

Le "ds^2" n'est pas une différentielle, ni le carré de quoi que ce soit, mais représente formellement le tenseur métrique (forme bilinéaire) de composantes $g_{\mu\nu}$ sur la base dx^μ.

Son "module" *ds* caractérise un paramètre affin, un nombre réel infinitésimal relatif à un temps propre par exemple, défini sur une courbe de la variété.

Nous avons l'habitude quand nous parlons de surface courbe (la surface d'une sphère est l'exemple générique) de la représenter immergée dans un espace 3D euclidien. Nous savons que la relativité générale n'a pas besoin de cette immersion pour décrire la courbure des espaces et espaces-temps.

Toujours en représentant l'espace en deux dimensions (pour la commodité de l'illustration) nous verrons que dans la solution dans le vide du problème du corps unique à symétrie sphérique, objet du document, l'espace (bien que vide) peut être formalisé par un fluide dont chaque point est en mouvement (par rapport à ses voisins) qui dépend de sa distance au centre et que c'est cela, à l'exclusion de tout autre chose, qui doit être considéré comme l'espace et que les mouvements propres des objets doivent s'apprécier dans ce fluide.

D'ailleurs ce type de mouvement, bien que stationnaire, peut être évalué par des expériences physiques (effet de marée, vitesse relatives, ..)

Comme dans la forme de Painlevé les sections spatiales sont euclidiennes (homogènes et isotropes), cette représentation en deux dimensions (on a supprimé une dimension), est représentative de la phénoménologie.

Ce point peut paraître être un détail accessoire puisqu'on sait qu'on peut utiliser n'importe quel système de coordonnées valide pour traiter le problème. Mais si on veut bien appréhender la physique sous-jacente à la description donnée dans un système de coordonnées particulier, il est vital de bien préciser les choses.

En effet, si le cas de la surface sphérique R^2 que nous utilisons pour montrer le caractère plus ou moins physique des coordonnées est facile à se représenter, la surface est purement spatiale, ceci est moins simple quand on fait intervenir la coordonnée temporelle du fait de sa signature opposée à l'espace qui confère une structure hyperbolique à la géométrie de la variété.

La description de H^2, l'équivalent de R^2 mais à courbure négative est beaucoup moins facile comme la représentation par le demi-plan de Poincaré en atteste[131].

De plus, le fait que l'espace-temps soit stationnaire est une complication complémentaire, si on s'attache à considérer cette stationnarité dans les concepts classiques de temps et d'espace indépendants.

Il faut donc physiquement prendre ce "tissu" espace-temps comme référence si on veut se dégager des concepts newtoniens.

On peut mettre cela en évidence dans les diagrammes de Minkowski d'espace-temps à deux dimensions *(t, r)* [132] malgré le fait qu'ils soient géométriquement faux (le plan représenté est euclidien et non pas minkowskien) et montrer la courbure de l'espace-temps en traçant les cônes de lumière en différents points d'une courbe *r(t),* représentant une géodésique par exemple[133].

La géométrie de ces cônes, leur déformation par rapport à leur forme fondamentale bien connue (pente ± 1) à l'infini où l'espace-temps est asymptotiquement plat dans le diagramme, caractérise la courbure de l'espace-temps localement[134].

L'évolution de cette géométrie montre l'évolution de cette courbure.[135]

Dans la forme de Painlevé, ces cônes basculent de plus en plus vers la gauche sur le diagramme le long de la ligne d'univers radiale en allant vers la singularité centrale. Ceci caractérise la variation de l'entraînement relatif de l'espace-temps entre les points voisins de cet espace-temps, c'est-à-dire par rapport à lui-même, ce qui est la courbure de l'espace-temps dans cette description.

Ces diagrammes montrent que ces cônes de lumières délimitant la région locale où une ligne d'univers est de type temps (l'intérieur[136] de ces cônes) prennent l'espace-temps pour référence, avec sa description implicite de courbure locale dont le cône de lumière est solidaire. C'est ce critère topologique (à l'intérieur du cône) qui détermine que la vitesse est inférieure à la vitesse de la lumière pour un objet physique et non pas la pente de la ligne d'univers sur le diagramme *dr/dt* qui peut y être supérieure.

Ceci corrobore que c'est bien l'espace-temps qu'il faut prendre comme référence physique et non pas un espace-temps formel fictif défini à partir des coordonnées où la vitesse de coordonnées (*dr/dt)* peut être infinie.

---

[131]Voir par exemple Carroll S. (2003) p. 141-143).

[132]Le problème du mouvement radial peut se traiter à deux dimensions.

[133]On trace souvent ces cônes pour mettre en évidence des propriétés physiques comme le type (temporel, spatial, nul selon que la ligne est localement respectivement à l'intérieur, à l'extérieur ou sur le cône) d'une ligne d'univers, l'orthogonalité (symétrie par rapport au cône) entre deux lignes d'univers, etc.., qui n'apparaissent pas sur le diagramme (par exemple, deux lignes d'univers orthogonales en géométrie minkowskienne en un point P du diagramme ne se coupent pas à angle droit en P) du fait de la représentation euclidienne d'un phénomène "minkowskien". Ceci souligne l'importance de ces cônes de lumière pour décrire la physique du phénomène.

[134]Il faut interpréter cette courbure à partir de la déformation du cône le long de la ligne d'univers.

[135]Nous préciserons cela ultérieurement.

[136]Il s'agit d'un caractère topologique que le diagramme préserve.

Ce qui a contribué à entretenir la confusion chez Painlevé et ses contemporains, c'est qu'à l'extérieur de l'horizon on pouvait traiter l'espace-temps comme un espace-temps statique qu'on associait naturellement à un espace-temps physique, description formellement valide bien que ce ne soit pas la meilleure, et qu'on considérait que sous l'horizon ce qui ne passait n'étant pas physique, c'était plutôt un artefact, cela ne méritait pas qu'on s'y intéresse[137].

L'argumentaire qui précède a pour but de soutenir que le mouvement de cet espace-temps est un paramètre inhérent à la solution et doit être considéré comme primordial.

Les 4 coordonnées sont de type espace sous l'horizon : quid de trajectoires temporelles ?

Changement de type des coordonnées sur l'horizon

À la différence de la solution de Schwarzschild la composante du tenseur métrique g_{rr} associée à la coordonnée radiale r ne diverge pas sur l'horizon et reste de type espace[138], pour $r < 2GM$.

Par contre pour la coordonnée t, le comportement est identique au cas de la forme de Schwarzschild, la composante g_{tt} du tenseur s'annule sur l'horizon (t est de type nul sur l'horizon) et t devient de type espace (change de signe) pour $r < 2GM$, ce qui fait que nous avons quatre coordonnées de "type espace".

Lignes d'univers de type temps sous l'horizon

Des lignes d'univers de type temps peuvent-elles exister dans une telle région où toutes les coordonnées sont de type espace ?

Ce point n'a pas été relevé par Painlevé et ses contemporains et nul doute qu'il aurait plutôt alimenté la confusion et la méfiance vis-à-vis de cette solution si cela avait été le cas.

La fonction essentielle du terme non quadratique de la forme de métrique

Pourtant cela aurait peut-être permis de se rendre compte que c'est le terme non quadratique de la forme de la métrique $dt.dr$ qui permet des lignes d'univers de type temps dans cette région.

Ceci aurait pu attirer leur attention sur le rôle structurel nécessaire qu'il jouait pour permettre à une géodésique de type temps de traverser l'horizon et de se prolonger sous l'horizon jusqu'à la singularité centrale.

[137]Il est vrai que le caractère dynamique de la partie sous l'horizon n'est pas familière et en a troublé plus d'un (Einstein en particulier).

[138]Formellement on peut définir le type (espace, nul, temps) du vecteur de base $(\partial_\mu)^\nu$ dérivé de la coordonnée μ en en calculant l'auto-produit scalaire.

Ils auraient pu s'interroger sur le caractère physique de cet horizon du fait que la solution proposée par Painlevé, en vertu de son caractère stationnaire orienté, offrait une description cohérente et complète de géodésiques le traversant sans singularité tout en conservant les attributs de la géodésique, condition nécessaire pour conférer au phénomène, décrit par cette forme, un caractère physique.

L'orientation s'applique à la région intérieure & extérieure à l'horizon du trou noir

Ils auraient pu également se demander si, en l'absence de singularité sur l'horizon, ce caractère physique non statique indéniable sous l'horizon ne devait pas être étendu à tout l'espace-temps y compris à l'extérieur par continuité.

En effet, on ne voit pas pourquoi, alors que les géodésiques sont dans la description donnée par la forme de Painlevé des lignes d'univers continues et non singulières au passage de l'horizon, l'espace-temps dans lequel elles sont définies ne jouirait pas des mêmes propriétés.

L'hypothèse que par "continuité" le caractère non statique orienté doit être valide dans toute la région de l'espace-temps correspondant au "trou noir" (et de façon symétrique au "trou blanc) se serait sans doute imposé à leurs esprits.

Nous verrons dans la suite comment cette orientation de l'espace-temps n'est pas un caractère accessoire et est au cœur des toutes les propriétés que nous évoquerons, en particulier dans le caractère "pseudo-minkowskien" que nous rencontrerons où le préfixe "pseudo" est justifié, entre autres, par le fait que le caractère quasi-minkowskien ne se manifeste dans la forme de Painlevé que pour une orientation particulière des géodésiques de type temps.

Ceci se retrouvera et de façon peut-être encore plus évidente dans une autre forme "cousine" celle de Kerr-Schild[139] (sans rotation) pour des géodésiques non pas de type temps mais de type nul (parcourues par la lumière) point que nous étudierons également et nous verrons quelles en sont les caractéristiques fondamentales communes.

Critère d'existence de lignes d'univers de type temps sous l'horizon.

Pour que des lignes d'univers radiales entrantes (trou noir) soient de type temps, il suffit que dans cette région où $r < 2GM$:

$$(1-\frac{2GM}{r})\,dt^2 - 2\sqrt{\frac{2GM}{r}}\,dr.dt > 0 \quad .$$

[139]Cette solution (R.P Kerr, A.Schild 1964) a été proposée beaucoup plus tard dans le cadre des espaces temps de la solution de Kerr, mais on peut considérer le cas où le paramètre de rotation est nul

Pour $r < 2GM$, le premier terme étant négatif, ceci impose que $dt.dr < 0$.

Ceci montre clairement qu'on ne peut pas être statique ($dr = 0$) sur une ligne d'univers radiale de type temps et indique le sens de mouvement (chute vers la singularité : $dr < 0$ pour $dt > 0$).

Nous examinerons ces solutions plus en détail au chapitre *12* et nous verrons aussi comment interpréter géométriquement la présence de ce terme *dr.dt* non quadratique.

Pour l'autre version de l'équation (sortante) on aurait alors $dr > 0$, ce qui impose un mouvement vers l'extérieur.

Ici le caractère dynamique et les caractéristiques de cette région sont manifestes.

Painlevé aurait pu réaliser qu'en changeant le signe de ce produit *dr.dt* dans la forme *(2-1)*, il aurait obtenu la forme qui correspond à l'autre orientation de la solution[140] et qui conduit à une phénoménologie inversée pour le temps.

C'est donc à tort que Painlevé élimine la solution, qu'il avait exposée dans son article initial, des solutions possibles à ce problème du corps central à symétrie sphérique.

Non seulement la présence du produit *dr.dt* n'était pas un obstacle mais c'était la manifestation directe et explicite de l'orientation temps-espace et des propriétés structurelles essentielles de la solution, propriétés sur lesquelles nous reviendrons.

Il est étonnant que Painlevé ait renoncé aussi rapidement et facilement, comme s'il s'empressait de corriger une erreur regrettable, à la forme qu'il avait pourtant énoncée pour s'opposer ostensiblement à Einstein, d'autant qu'il était très affirmatif sur son équivalence avec celle de Schwarzschild dans sa déclaration.

Peut-être était-il aussi influencé par la position de Becquerel, récusant la solution du ds^2 de Painlevé au motif qu'elle contenait un terme croisé en *dr.dt* incompatible[141], selon lui, avec la symétrie du champ de gravitation à la fois dans l'espace et dans le temps, qui a, certes, publié son opuscule plus tard[142], mais avec qui il en avait peut-être discuté auparavant.

[140]Ce point ne sera vraiment compris que plus tard (Finkelstein pour une forme "nulle"). Notons que l' invariance du ds^2 pour ces univers symétriques (la réversibilité comme l'appelle Painlevé) se rétablit si on considère les deux solutions différant par le signe de *dr.dt* dans la métrique, où on aura *dr.dt* pour l'une et *-[(dr)(-dt)]* pour l'autre.

[141]Becquerel a tort. Il devrait d'ailleurs préciser ce qu'il entend par « symétrie du champ » (caractère statique?). On voit que même les plus grands esprits de l'époque pouvaient être perturbés par cette théorie.

[142]Voir Eisenstaedt (1982) p.176.

La forme de Painlevé est stationnaire et orientée : nature physique de l'espace-temps ?

Orientation et stationnarité

Pour résumer le problème, on peut dire que la présence de ce terme croisé dans la métrique qui implique que la forme de Painlevé n'est pas *statique* mais *stationnaire et orientée*[143] est en fait fondamentalement révélatrice de la nature physique de la solution, point épistémologique fondamental qui n'a pas été relevé à l'époque ni par Painlevé ni par Einstein et ses disciples.

Peut-on attribuer un caractère physique à l'espace-temps ?

Dans ce qui précède, nous attribuons un caractère physique à l'espace-temps qu'on considère, conformément à l'analyse riemannienne, intrinsèquement défini par ses propriétés "internes" de nature relationnelle, libre de toute référence à un espace extérieur fictif.

Si cela est mathématiquement bien défini, lui attribuer un caractère physique, peut prêter à critique tant ce concept paraît formel voire subjectivement lié à notre conscience du monde.

Pourtant cette hypothèse est déjà prégnante en relativité restreinte, dans un espace-temps pourtant vide de toute matière, puisque la description par l'espace-temps de Minkowski, contraignant les phénomènes qui s'y déroulent à respecter ses symétries (groupe de Poincaré) s'est rapidement imposée, par exemple en théorie des champs, montrant qu'il joue un rôle "physique", dans les phénomènes en leur imposant, entre-autres, une vitesse limite finie.

Dans ce cas, c'est le principe de relativité[144] imposant aux lois d'avoir la même forme (la plus simple) dans tous les systèmes inertiels qui conduit à cette formulation.

Cela invoque la notion de référentiel inertiel et par voie de conséquence de l'inertie et du principe de Mach, toutes choses dont l'existence est moins triviale qu'il n'y paraît. Nous en discuterons et soulignerons l'intérêt que présente une vitesse limite finie pour produire un univers fécond.

Comme localement on peut définir un espace-temps de Minkowski, la théorie de la relativité générale incorpore cela. Elle y ajoute une description géométrique de la gravitation. Celle-ci n'est que la manifestation de la courbure de l'espace-temps, transformant les géodésiques de l'espace-temps de Minkowski (droites) en géodésiques courbes d'un espace-temps courbe.

[143]Ce qui est permis par le caractère stationnaire à la différence du caractère statique (symétrique par rapport à t)

[144]L'existence d'une vitesse limite (un invariant) peut s'en déduire. Le choix pour cet invariant se réduit alors à deux possibilités : valeur finie ou infinie. Si elle est infinie c'est la relativité "galiléenne" classique mais si elle est finie c'est la relativité générale et cette valeur est la vitesse de la lumière (ondes électromagnétiques) et autres ondes associées aux "bosons" des interactions à portée infinie (ondes gravitationnelles par exemple). Dans cette approche la valeur finie et constante de la "lumière" n'est pas une propriété de la lumière mais de l'espace-temps. La lumière peut être considérée comme de l'énergie cinétique et la masse de l'énergie potentielle.

Cette interprétation de la courbure d'une géodésique, qui permet nativement d'intégrer l'auto-interaction d'un corps[145], en relativité générale, se fonde sur l'hypothèse que la gravitation dans son action sur les corps[146] ne fait pas intervenir une propriété des corps (leur masse gravitationnelle passive), puisque, principe d'équivalence oblige, tous, dans les mêmes conditions initiales, suivent la même géodésique, mais met en œuvre une propriété de l'espace-temps, contraint par les masses actives des corps, qui les astreint à suivre les géodésiques définies par la géométrie du modèle.

Cela se traduit par une non localité de la gravitation et, bien que la courbure, clé de la représentation relativiste, soit régie par le tenseur de Riemann à 4 indices, l'équation d'Einstein ne le contraint pas totalement puisque les tenseurs y figurant n'en ont que deux.

En particulier la matière locale et la matière distante n'ont pas les mêmes effets géodésiques.

Alors, la géométrie de l'espace-temps étant génératrice d'un phénomène physique, dans cette représentation, on est conduit à conjecturer que l'espace-temps a un caractère physique.

La théorie ainsi définie par la géométrie, a un caractère prédictif et peut alors être confrontée à l'expérience. Ce sont là, les conditions requises pour prétendre être une théorie physique.

Dans les expériences et observations que l'on peut faire, ce n'est pas l'espace-temps lui-même qu'on évalue "directement" mais, comme en théorie newtonienne, son action sur des corps d'épreuve où des rayonnements électromagnétiques, par exemple.

Nous discuterons longuement de la manière dont on peut valider/invalider des hypothèses, en relativité générale, et du rôle respectif du modèle et des observables.

Si on fait un parallèle avec la mécanique quantique, la géométrie de l'espace-temps qui le décrit totalement correspondrait à la fonction d'onde qui décrit le système quantique.

Les observables en relativité générale étant "fonctionnellement" l'équivalent des opérateurs associés aux observables qu'on utilise en mécanique quantique.

[145]Ce qui en fait une théorie physiquement différente de celle de Newton.

[146]Concernant la génération de la géométrie de l'espace-temps, nous verrons qu'elle ne peut pas être attribuée individuellement à chaque corps mais de façon indissociable à l'ensemble de tous les corps.

Autopsie d'un naufrage

Nous avons décrit pour quelles raisons physiques Painlevé se renie à tort.

Pourtant Painlevé était bien parti, puisque, comme le fera Lemaître bien après[147], il avait établi des formes génériques de métrique qui satisfaisaient aux contraintes de symétrie imposées par le problème et à l'équation d'Einstein.

La comparaison avec les formes originales qu'il propose et celles que proposera Lemaître qui explicite toutes les étapes de la construction montre que Painlevé à suivi la même méthode, même s'il n'a pas jugé utile d'en donner tous les détails.

À ce titre Painlevé se hisse au niveau des plus grands relativistes, car n'oublions pas que cela se passe onze ans avant la contribution magistrale de Lemaître.

Cela éclaire aussi comment il a pu proposer sa forme tant critiquée dans son premier article. En effet, s'il a pu être inspiré par des considérations pseudo-newtoniennes, ce qui n'est pas surprenant compte tenu du caractère très particulier de cette configuration où le champ est généré par un corps unique à symétrie sphérique où l'équivalent d'un potentiel "central" scalaire peut être défini, conférant aux équations relativistes une forme quasi-newtonienne[148], il les a justifiées par des considérations formelles très rigoureuses et magistrales, en parfait accord avec la théorie de la relativité générale.

Le Naufrage était-il inéluctable ?

Sur le constat de ce que nous venons de rappeler, tel quel, le "formalisme" construit par Painlevé paraissait solide.

Les mathématiques garantissaient que cette solution était conforme à la géométrie imposée et aux équations de la relativité générale.

Mais nous avons vu à quelle défiance sa forme s'est heurtée.

La communauté scientifique s'est révoltée contre une telle forme de métrique avec un élément non quadratique, allant jusqu'à dénier la symétrie sphérique à cette solution[149], ce qui est assez étonnant de la part de scientifiques avisés, tant elle est évidente dans la forme de Painlevé, l'élément différentiel $d\omega^2$ caractérisant la métrique sur la sphère de rayon r valant :

[147]Nous consacrerons un chapitre complet (chapitre *14*) à l'analyse de l'approche exemplaire de Lemaître qui est plus générale puisqu'il se place dans un contexte cosmologique et qui explicite par le menu toutes les étapes pour construire ces formes.

[148]Il faut évidemment considérer le temps propre en relativité en lieu et place du temps absolu de la mécanique classique, mais la formulation géométrique de Painlevé va dans ce sens.

[149]Becquerel (1923) affirmera encore cela, à tort, dans cet opuscule, cité dans Eisenstaedt (1982) P. 176.

$$d\omega^2 = r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2).$$

À ce titre le choix des coordonnées sphériques peut induire en erreur, car ces coordonnées ont une nature manifestement euclidienne.

Mais elles ne sont que des coordonnées et nous avons répété qu'il ne fallait pas leur attribuer de caractère physique et que la symétrie sphérique ne s'appliquait pas qu'à la géométrie euclidienne.

L'inné et l'appris sont tenaces et les esprits ne s'étaient pas encore dégagés du concept d'un espace implicitement statique, vestige de la conception newtonienne de l'espace et du temps absolu.

Il faut porter au crédit de Painlevé d'avoir tenté de fonder explicitement cette contrainte sur cette exigence de réversibilité, un concept formel "transcendantal[150]", qui lui semble tant s'imposer à l'esprit qu'il préempte même ce que la rationalité des mathématiques impose.

Pour un mécanicien émérite rationaliste fallait-il que ce principe relève de données immédiates primordiales de la conscience pour qu'il en arrive à renier l'omnipotence des mathématiques ! Cependant, même si l'hypothèse est erronée, la démarche est digne d'intérêt, car pour la justifier, il se pose la question de son fondement.

Rappelons qu'Einstein, le concepteur de la théorie, bien plus tard, dans un article en 1939[151] tente encore démontrer l'impossibilité d'un effondrement de matière en trou noir et par conséquence le caractère fictif (non physique) de l'horizon (la sphère de Schwarzschild qui effrayait tant les relativistes à l'époque), en assumant implicitement (sans même envisager une autre hypothèse) le caractère statique de l'espace-temps, ce qui fait que même si les calculs d'Einstein sont corrects, la conclusion finale qu'il en tire est fausse.

Constatant qu'à une distance d'une fois et demi le rayon de Schwarzschild[152] des particules en orbite circulaire atteignent la vitesse de la lumière, il en conclut d'abord que des orbites plus basses ne peuvent pas exister pour des corps matériels, ce qui est exact, car il n'y a pas d'orbite géodésique circulaire en dessous de cette limite, et ensuite qu'il est donc impossible d'avoir de la matière en dessous de cette limite, ce qui est faux.

En effet, rien n'empêche que des particules sur des géodésiques existent en deçà de cette limite, à condition qu'elles soient vouées à percuter la singularité centrale.

Autrement dit, certes il n'existe pas d'orbites géodésiques stables à une distance inférieure à une fois et demi le rayon de Schwarzschild, mais cela ne prouve pas qu'une géodésique ne puisse pas atteindre une distance plus faible simplement dans ce cas elle se trouve dans une

[150]Pour faire référence aux données immédiates de la conscience tel que Kant les décrit, associées à notre perception du temps et de l'espace.
[151]Einstein A. (1939).
[152]Cela correspond à ce qu'on appelle la "sphère des photons" (des photons pourraient orbiter sur cette orbite qui est instable). Notons qu'une ligne d'univers non géodésique peut exister entre cette limite et l'horizon.

région où la singularité est dans le futur de la géodésique[153], car l'espace-temps est en effondrement tel que rien ne peut empêcher de telles particules d'être entraînée vers la singularité centrale (si on est bien dans le cas d'un trou noir).

De nouveau cela illustre comment les génies créateurs les plus inventifs, comme Einstein, peuvent être dépassés par leur création

C'est bien la notion d'orientation de l'espace, de dynamique de l'espace, cette incapacité à concevoir qu'un espace pouvait avoir ces étranges propriétés qui a fait rejeter la solution de Painlevé et face à cela aucun argument, même le plus solide n'a pu s'imposer.

Cela laisse perplexe sur la capacité de l'esprit humain à se dégager des habitudes et schémas de pensée qui semblent gouverner sa nature.

Peut-on tirer des leçons pour que cela ne se reproduise plus ?

Un tel désastre pourrait-il se reproduire aujourd'hui dans le cadre des théories que nous développons? Pouvons-nous tirer des leçons d'un échec comme celui que nous venons de citer pour éviter de tomber dans les mêmes travers ?

Si on ne s'effraie plus autant de propriétés "extravagantes" de l'espace-temps, comme le succès de théories telles que celles des cordes, incluant un nombre de dimensions pas vraiment ordinaire, le montre, nous savons combien il est difficile d'extrapoler le passé pour prédire l'avenir.

Les prédictions faites à une époque font souvent sourire les générations suivantes et, à part certaines prédictions très générales comme la consommation d'énergie qui semble croître avec le degré d'évolution d'une civilisation, ces prédictions même à horizon de 50 ans sont bien imprécises. Qui aurait pu croire en 1960 au développement des moyens de télécommunications et d'internet, tels qu'on les connaît aujourd'hui, dont le rôle sociétal devient essentiel ?

Ceci change également les données du problème, car comme nous le verrons dans l'étude des communications de l'Académie des Sciences, leur diffusion limitée a nuit gravement au progrès de la science. Aujourd'hui ce serait plutôt l'excès contraire, nous sommes noyés sous l'information.

Il convient d'être très circonspect, car un tel naufrage se produit peut-être en ce moment, dans des circonstances sans doute différentes, sans que nous le sachions ou pourra se produire.

[153]Pour une ligne d'univers non géodésique, c'est l'horizon qui est la limite statique.

Un tel naufrage est-il symptomatique d'une rupture ontologique dans la physique ?

Il est indiscutable qu'il y a eu une rupture ontologique majeure dans le cas pour la relativité générale[154]. Il aura fallu que quelqu'un, hors du canal de formation traditionnel des élites scientifiques, guidé principalement par son intuition, vienne bousculer l'édifice de la Science établie pour qu'une révolution se mette en marche désorientant les esprits les plus avisés.

Faute de connaître les critères d'une telle rupture, il est bien difficile d'en décrypter les signes avant-coureurs, d'autant que cela se manifestera d'une manière totalement inattendue[155] et différente, dans un contexte, que les nouveaux moyens de communication comme internet, auront sans doute complètement modifié.

[154]Pour la relativité restreinte, l'idée était dans l'air et le mérite d'Einstein a été de savoir la mettre en forme.

[155]Sinon, cela serait, sans doute, déjà en place. Pour Gell-Mann, dans le "Quark et le Jaguar", les scientifiques doivent "désapprendre" ce qu'ils savent pour pouvoir y parvenir. Il place également de bons espoirs dans l'interdisciplinarité.

Painlevé s'intéresse à l'effet de la rotation dans la solution

Après avoir longuement commenté le point d'achoppement qui a ruiné la contribution de Painlevé, reprenons le cours de son argumentation.

Painlevé envisage le cas de la rotation :

"Enfin si le corps S (de centre O) tournait par rapport aux étoiles, soient Oxyz des axes de rotation de direction fixe par rapport aux étoiles : D'après les Einsteiniens l'influence de la rotation sur les instruments de mesure, pour les observateurs du globe S, est négligeable à moins d'une rotation formidable, en sorte que tout ce qui précède s'applique encore au mouvement de P par rapport à Oxyz."

On peut faire remarquer que s'il y a rotation, il n'y a plus de symétrie sphérique, sauf à la considérer comme négligeable et à la traiter de manière perturbative comme un infiniment petit d'un développement en série.

Cela a été l'approche de Lense et Thirring (1918).

Painlevé n'y fait pas référence bien que ces travaux antérieurs à sa publication auraient pu être portés à sa connaissance.

Par ailleurs nous savons que le cas de "rotation formidable" relève d'une autre métrique, en l'occurrence celle de Kerr, analytiquement exacte dans le cas où la masse est concentrée en une singularité, qui possède des propriétés bien différentes et qui n'a été trouvée que bien plus tard (1963).

Comparaison des postulats des théories de la gravitation d'après Newton et Einstein

En synthèse de son article, Painlevé dresse un état des lieux :

"Les directions des axes Oxyz étant fixes par rapport aux étoiles et les variables r, θ, φ, t désignant les coordonnées polaires ordinaires de centre O (centre de S) et le temps mesuré par les observateurs de S, les deux théories admettent les principes concordants suivants:"

"1- Le mouvement du point P quand il est très éloigné de tous les autres corps est rectiligne et uniforme.

2- Les lois du mouvement autour de O du point gravitant P ne dépendent pas explicitement de t et répondent à la symétrie d'une sphère autour de son centre O.

Par suite, la trajectoire de P est plane, son plan contenant O et en coordonnées polaires planes r, θ, les équations du mouvement sont des équations du deuxième ordre où ni θ, ni t ne figurent explicitement.

3- Les lois du mouvement ne changent pas quand on change t en -t.

4- l'accélération d'un élément de P pour une position et une vitesse, données de cet élément est la même quel que soit cet élément.

5- Dans l'espace interstellaire la lumière se propage en ligne droite avec une vitesse constante pour une direction donnée."

Les items 1, 2, 4 sont corrects par contre pour les items 3 et 5, des précisions s'imposent.

Item 3 : comme déjà indiqué, il y a une confusion vis-à-vis du changement de *t* en *-t.*

Si, pour la loi du mouvement d'un observateur en chute libre radiale, sans vitesse initiale, de la forme particulière

$$r = a.t^{2/3} + b,$$

le fait de changer *t* en *-t* ne change pas la valeur de l'équation, nous avons vu et longuement commenté que la conclusion que Painlevé en tirait, au niveau de la métrique, était erronée.

Comme la forme générale le montre,

$$r = a.(t - t_0)^{2/3} + b,$$

la symétrie existe mais elle ne s'applique pas à l'espace-temps localement. Elle révèle une autre région orientée dans le sens contraire disjointe de la première région également orientée.

Item 5 : il est possible que Painlevé se réfère à une situation très loin de la masse centrale auquel cas son assertion est asymptotiquement exacte, mais la formulation correcte est que la lumière se propage (toujours) selon une géodésique, qui en général n'est pas une droite, en relativité générale.

Postulats divergents

"En employant les équations classiques de la Mécanique sous la forme du principe de moindre action, on peut mettre en parallèle les postulats divergents ainsi :

Ci-dessous le tableau donné par Painlevé dans son article.

Théorie Classique	*Théorie d'Einstein*
1- Si sans changer le temps, on introduit des coordonnées curvilignes quelconques u, v, w au lieu de x, y, z les trajectoires du mouvement sont les géodésiques d'un $d\sigma^2 = (U + h)d\sigma_1^2$ *où $d\sigma_1^2$ est une forme quadratique en du, dv, dw, dont les coefficients satisfont aux conditions invariantes (équations aux dérivées partielles du deuxième ordre) qui expriment que le $d\sigma_1^2$ est euclidien et où U(u, v, w) en dehors du globe S, satisfait à l'équation de Laplace en coordonnées curvilignes, équation invariante du deuxième ordre linéaire et homogène et où U ne figure pas explicitement.*	*1- Les mouvements de P sont définis par les géodésiques d'un ds^2 à quatre dimensions dont les coefficients doivent satisfaire à certaines conditions invariantes dans n'importe quel changement de variables d'espace-temps, conditions aux dérivées partielles du deuxième ordre, de forme spéciale et qui laissent au problème le degré d'indétermination que l'expérience semble indiquer*
2- Dans la théorie des ondulations, la vitesse de la lumière, loin de tout corps matériel, n'est la même dans tous les sens que si S est absolument fixe et non animé d'une translation par rapport à l'éther. *Dans la théorie de l'émission, la vitesse de la lumière est la même dans tous les sens si la source lumineuse est fixe par rapport aux axes Oxyz.*	*2- La vitesse de la lumière loin de tout corps matériel est la même dans tous les sens, et les géodésiques pour lesquelles ds^2 est nul définissent les trajectoires et le mouvement de la lumière.*

A priori les assertions de son tableau synthétisent les arguments développés dans son article et les différences qu'il souligne sont exactes.

Il précisera ces arguments de manière plus synthétique et plus complète dans un article suivant.

Conclusions de tous les postulats (avec l'emploi des variables t, r, θ, φ)

Painlevé rappelle les formes des métriques, associées aux géométries des espaces (temps) des deux théories (en coordonnées sphériques ci-dessous), dont les géodésiques obtenues par le principe variationnel définissent la trajectoire suivie par des corps d'épreuve soumis à la seule gravitation que cette géométrie d'espace modélise.

Nous avons largement commenté l'intérêt de cette approche originale en mécanique classique où, sur un modèle purement spatial, Painlevé injecte le temps comme paramètre affin via un facteur conforme modifiant la métrique, en lieu et place d'un paramètre affin spatial qui mesure la longueur de la trajectoire définie dans la métrique donnée par le $d\sigma^2$ ci-dessous. La méthode permet de retrouver les équations du mouvement de la mécanique classique qui font intervenir les dérivées par rapport au temps.

Notons toutefois que dans cette synthèse il n'est pas très disert au niveau du rôle du temps qu'il laisse toujours absolu et à part (*sans changer le temps*) alors qu'implicitement, comme nous nous sommes attachés à le montrer, il l'intègre comme paramètre affin, dans sa représentation spatiale à trois dimensions.

Il y reviendra dans un article suivant (le dernier de sa série) où il précisera cet aspect de sa méthode.

La méthode qui paraissait assez spéculative est en fait plutôt élégante et de plus elle révèle une propriété qui n'était pas évidente *a priori*.

Alors que le temps est une coordonnée totalement indépendante de l'espace en mécanique classique, une géodésique purement spatiale définie par cette métrique, contient bien toutes les informations permettant de décrire les équations du mouvement. En effet, la contrainte géodésique introduit dans la représentation, de façon surprenante le temps, là où on ne l'attendait pas.

Théorie Classique		**Théorie d'Einstein**
$d\sigma^2 = (\mu_1/r + h)(dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$	|	$ds^2 = [1-2\mu/f(r)]dt^2 - f^2(r)[d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2]$
avec μ_1 = constante	|	$-f'^2(r)dr^2/(1-2\mu/f(r))]$

Pour la théorie d'Einstein, Painlevé s'est résigné à abjurer, à tort, sa solution originale et innovante pour se conformer à l'avis général de ses contemporains.

Il se rallie à la forme générique de la métrique de Schwarzschild, qu'il a énoncée dans le corps de son article où, en lieu et place de *r,* il utilise *f(r)*, dans le but de conférer un caractère physique à cette coordonnée.

Tentative vaine et sans espoir comme nous l'avons largement commenté.

Comparaison avec les observations astronomiques dans le système solaire

L'avance du périhélie de Mercure et la déviation de la lumière par le Soleil

Dans la dernière partie de son article[156], Painlevé développe longuement l'analyse des observations de l'avance bien établie du périhélie de Mercure qui avait été mesurée avec précision par les astronomes, non expliqué par la gravitation classique, mais qu'Einstein dans un article[157] du 4 novembre 1915 suivi d'un complément le 11 novembre retrouve par un calcul à la limite des champs faibles en relativité générale.

Il traite aussi de l'observation de la déviation des rayons lumineux du Soleil, confirmée en 1919, peu avant son article, par les observations au cours d'une éclipse de Soleil à Sobral (Brésil) par une mission dirigée par Eddington.

On sait qu'en fait en raison d'une météo peu favorable les clichés pris étaient peu convaincants mais compte de tenu de la réputation d'Eddington qui avait noté que sur un des clichés on avait observé une déviation compatible avec celle prédite par Einstein, l'expérience fut jugée concluante, mais cette vérification expérimentale était en fait bien moins confirmée (des expériences ultérieures ont confirmé cette déviation sans aucun doute cette fois) à l'époque de Painlevé que l'avance du périhélie de Mercure.

Comme ces observations sont discriminantes entre la théorie de Newton et la relativité Painlevé y attache de l'importance.

Painlevé conteste que ces observations confirment de façon incontestable la relativité

Painlevé cite les équations concernées dans les deux théories et souligne précisément que les équations classiques et relativistes doivent donner des résultats très proches compte tenu de la très petite valeur ($\approx 45''$ arc par siècle) de cet effet et en déduit certaines contraintes sur les termes de ces équations ($\mu/r < 4.10^{-6}$ dans le cas du système solaire) tout en restant attaché à son choix de substituer à la coordonnée *r* une fonction *f(r) d*ans les équations d'Einstein.

Il insiste :

"Einstein admet que f(r)≡ r : Cette identification n'est donc pas une conséquence de la relativité, mais elle est imposée approximativement *par une première confrontation avec les observations astronomiques"*

Cette assertion souligne encore une incompréhension fondamentale dont Painlevé n'arrive pas à se défaire.

Einstein n'a pas choisi la coordonnée *r* dans ces équations de façon *ad hoc* pour retrouver la valeur de l'avance du périhélie de Mercure. En établissant l'équation du mouvement de

[156]Nous en donnons un compte rendu plus détaillé en annexe *3* chapitre *2*.

[157]Traduit et commenté dans Balibar F., Darrigol O. Eisenstaedt J. Pottier L., Ritter J., Stachel J. (1993), tome 2 p. 168-177.

Mercure à partir des équations relativistes il ne pouvait pas savoir (il suffit de lire son calcul pour s'en persuader) à l'avance ce qu'il allait trouver.

Il a été en fait le premier (agréablement) surpris, mais ravi bien entendu[158], quand il a constaté qu'à partir de ses équations[159], déduites de façon cohérente des équations générales de la relativité générale, il retrouvait bien le résultat des observations avec une bonne précision.

Alors que Painlevé veut conserver un caractère physique[160], comme en mécanique classique à la coordonnée radiale, dans les équations relativistes *r* est une coordonnée sans signification physique qui s'impose naturellement comme coordonnée radiale dans des coordonnées sphériques dans l'établissement analytique rigoureux de la forme de la métrique à symétrie sphérique[161].

Il peut y avoir d'autres formes toutes aussi "exactes dans le cadre de la théorie", mais toutes se déduisent les unes des autres par changement de coordonnées, car cela revient à utiliser d'autres coordonnées sur la variété représentant cet espace-temps particulier pour le décrire.

Si Einstein fait un calcul approximatif (en utilisant un développement en série) pour trouver une valeur numérique c'est que l'équation donnant le mouvement des planètes (et de Mercure en particulier) déduite mathématiquement des équations de la relativité générale n'a pas de solution analytique exacte (en tout cas évidente), car ne l'oublions pas les équations de la relativité générale sont non linéaires en général.

Par ces opérations Einstein ne remet pas en cause la théorie de la relativité[162].

Cette démarche (approximative) en champ faible où on construit un tenseur métrique à partir du tenseur de la métrique de Minkowski (à l'ordre zéro), qui en coordonnées sphériques confère un sens physique à *r,* en ajoutant des perturbations très petites est une démarche qu'il trouve peut-être similaire à la sienne également approximative ce qui peut le conforter dans son approche.

Mais il y a une différence fondamentale d'approche qui reste encore implicite à ce stade, car remplacer *r* par *f(r)* ne change rien aux équations, mais ce qui va se révéler dans la suite, c'est que Painlevé va mettre en cause la théorie (ce qui est son droit) en la considérant comme une

[158]Dans une lettre à Ehrenfest (17 janvier 1917) il écrit : "Imagine ma joie quand j'ai compris que la covariance générale était réalisable et en voyant le résultat, à savoir que les équations donnaient exactement (l 'avance) le périhélie de Mercure. Pendant plusieurs jours la joie et l'excitation m'ont fait sortir de mes gonds". Cité dans Balibar F., Darrigol O. Eisenstaedt J. Pottier L., Ritter J., Stachel J. (1993), tome 2 p.168-169

[159]Dans un modèle de champ faible où le tenseur métrique est considéré comme la somme du tenseur de la métrique de Minkowski pour l'ordre zéro plus des perturbations très petites à des ordres supérieurs. Son calcul est décrit dans Balibar F., Darrigol O. Eisenstaedt J. Pottier L., Ritter J., Stachel J. (1993), tome 2 p.169-177.

[160]Notons que c'est à cette époque (Novembre 1915) que Einstein prend vraiment conscience du caractère non physique des coordonnées comme il l'écrit à Ehrenfest le 26 décembre 1915. Cité dans Balibar F., Darrigol O. Eisenstaedt J. Pottier L., Ritter J., Stachel J. (1993), tome 2 p. 178

[161]Rappelons que quand Einstein a fait ce calcul (Novembre 1915) la solution de Schwarzschild n'avait pas été trouvée. Il est parti directement des équations générales du champ.

[162]On peut trouver une démonstration plus moderne et plus simple dans Carroll S. (2003) p.212-216.

approximation intéressante, à l'ordre zéro, des lois de la nature (ce qui n'est pas faux) et il se propose de la rendre plus compatible avec ces lois en insérant dans les équations des éléments pour permettre des ajustements *ad hoc.*

Ce faisant il n'établit pas de nouvelle théorie mais propose un ajustement empirique de la relativité.

Le problème c'est que puisque cet ajustement est empirique, donc ne découle d'aucune loi qui permettrait de le prédire, rien ne prouve qu'il va pouvoir avoir une portée suffisamment générale pour avoir une quelconque utilité et qu'on ne va pas aller vers une inflation de corrections empiriques ne faisant que traduire notre méconnaissance des lois physiques.

Painlevé met en doute la théorie sans l'avoir vraiment testée et en particulier poussée dans ses retranchements où elle pourrait être mise en difficulté.

Painlevé développe longuement différentes alternatives et ajustements destinés à éventuellement corriger empiriquement des défauts de la théorie, mais sans vraiment apporter d'éléments nouveaux, comme l'annexe *3* citée pour mémoire le montre.

Dans la fin de son article, Painlevé décline plusieurs possibilités pour cette fonction *f(r)* dont le seul intérêt est de montrer qu'effectivement on peut proposer de nombreuses formes différentes (mais équivalentes) pour décrire la solution.

Synthèse et évolutions des idées de Painlevé dans ce deuxième article

Ce premier article de fond, très long[163] (*15* pages) comparant les deux théories, publié quelques semaines après celui du 24 octobre pose un certain nombre de jalons qui révèlent comment Painlevé envisage de traiter le problème.

Il précise comment Painlevé a été amené à poser la forme qui a fait scandale dans son article du 24 octobre 1921.

Les deux points majeurs exposés dans cet article sont la formulation géométrique covariante de la mécanique newtonienne et son reniement de la solution innovante qu'il avait proposée trois semaines plus tôt.

Nous avons commenté sa formulation géométrique, en particulier dans quel esprit il la propose. Bien que ce ne soit pas dit explicitement, il y a tout lieu de penser que ce n'est pas pour reformuler la théorie newtonienne de manière géométrique à l'instar de la relativité générale, mais plutôt pour en donner une formulation covariante et une forme similaire à celle de la relativité générale, afin d'en faciliter la comparaison.

La forme géométrique qu'il utilise, tirée du traité de mécanique rationnelle de P. Appell n'a pas été établie dans la finalité d'une géométrisation de la mécanique classique, mais cette forme s'est introduite naturellement quand on a voulu appliquer le principe de moindre action pour calculer les géodésiques des constituants d'un système soumis à des champs de forces stationnaires.

Nous avons démontré que cela permet de proposer une formulation intégrée de la mécanique newtonienne, en considérant, à l'instar de la relativité générale, que le paramètre affin de la géodésique spatiale, qu'il définit dans sa formulation géométrique de la mécanique newtonienne, est le paramètre dynamique.

Nous avons établi le lien de ce paramètre dynamique affin avec le temps absolu, paramètre dynamique de la mécanique newtonienne où le signe "moins", qu'on va associer au temps dans la métrique et qui le différencie de l'espace, s'introduit naturellement par cette méthode, alors qu'en relativité cela avait été fait par Einstein pour définir un invariant.

Concernant le reniement de sa solution, bien que son exposé sur l'établissement de formes de métrique possibles pour cet espace-temps, solutions du problème considéré, soit exemplaire, il montre que son attachement à cette solution n'était guère solide.

Car un mathématicien de sa classe ne se serait pas laisser impressionner en trois semaines par des critiques, même émanant de ses collègues les plus éminents, dans la mesure où cette forme dérivait de celle de Schwarzschild par une transformation de coordonnées, d'autant

[163]Un compte-rendu de l'Académie des Sciences fait en général quelques pages.

qu'il avait été très affirmatif dans son premier article sur son équivalence avec celle de Schwarzschild.

Il faut porter à son crédit qu'il a cherché à motiver, à tort certes, son renoncement par un argument épistémologique. Autrement dit, bien que la solution soit mathématiquement valide, elle ne serait pas physique.

On retrouve là, une manifestation de son attachement au caractère physique des coordonnées, car si on considère que les coordonnées sont arbitraires et ne servent qu'à un repérage des points de la variété, on ne voit pas en quoi un changement de coordonnées pourrait influer sur le caractère physique de la solution.

Ceci nous a permis d'argumenter sur les difficultés conceptuelles de représentation d'un tel espace-temps et les difficultés que cela présentait pour des scientifiques formés à l'école du rationalisme newtonien.

Malgré un effort pour synthétiser son argumentation, il ne va pas au bout de ses réflexions et n'arrive pas à se libérer de sa conception newtonienne du temps et de l'espace qu'il cherche à rendre physique par de vains artifices, comme nous l'avons montré et se perd un peu à développer des aspects techniques en particulier sur des aménagements de la solution de Schwarzschild, alors que sur des aspects importants il est en déficit d'explications.

Il va s'en rendre compte et bien que dans cet article il n'indique pas de suite, il va y en avoir une, mais plus tardive ce qui permettra à Painlevé de prendre un peu de recul, d'autant qu'il va avoir des contacts avec d'autres scientifiques dont Einstein, ce qui lui permettra de clarifier son argumentation.

Nous allons donc analyser sa contribution du 1er mai 1922 qui sera la dernière[164].

[164]Il existe une deuxième note de Painlevé datée du 1/05/1922, mais ce n'est qu'une remarque très courte sur des notes d'autres auteurs.

3- L'article du 1 mai 1922, Painlevé tente de généraliser sa formulation à la relativité générale

---

Painlevé va formaliser et compléter la géométrisation de la mécanique classique en restant dans le cadre restrictif qu'il s'est imposé. Il va proposer la même formalisation pour la relativité générale, ce qui le conduit à tenter d'étendre la méthode utilisée avec succès en mécanique classique à la relativité générale. Nous analyserons pourquoi cela n'est pas possible, étudierons les différences de nature entre les deux théories, en notant toutefois que sa méthode définit un espace conformément équivalent à celui défini par la relativité générale dont nous tirerons des conclusions structurelles importantes sur cet espace-temps.

La conversion de Painlevé ?

En préalable, il faut rappeler qu'Einstein, à l'initiative de Paul Langevin[165], était venu à Paris du 31 mars au 10 avril 1922 et que malgré une hostilité manifeste de certains milieux scientifiques (voir l'épisode de l'annulation de la réception du 3 avril 1922 à l'Académie des sciences[166]) sa popularité était grandissante en France comme en témoigne son accueil triomphal à la séance du 5 avril à Société Astronomique de France (voir compte rendu partiel de séance en annexe *4*).

Au cours de sa visite en France, Einstein a eu l'occasion de discuter de sa théorie avec d'éminents scientifiques français au cours des trois invitations au Collège de France (dont P. Langevin était membre).

Dans la séance du 5 avril, au soir, des discussions sur le caractère infini[167] des potentiels de la solution de Schwarzschild ont été au centre des conversations réunissant autour d'Einstein, J. Bequerel, M. Brillouin, E. Cartan, Th. De Donder, J. Hadamard, P. Langevin, Ch. Nordmann et P. Painlevé, voir documents d'archives (photos, journal, dessin) également en annexe 4.[168]

Alexandre Moatti rapporte dans Moatti. A (2007) p.115 que Painlevé s'est rallié à la relativité à l'issue de cette discussion.

---

[165]Paul Langevin a été un des plus ardents (et compétents) promoteurs en France de la Relativité (restreinte par son fameux "paradoxe") et générale. Malgré l'animosité latente de la communauté scientifique française vis- à-vis de la science "allemande" (la guerre était encore présente dans les esprits), P. Langevin avait pris conscience de l'avance de cette science allemande par rapport à la française et jugeait indispensable de coopérer avec eux.

[166]Relaté par exemple dans Moatti A. (2007) p.111

[167]Sur le douloureux problème de l'horizon dans la solution de Schwarzschild.

[168]Cité dans Eisenstaedt 1982 p. 186, repris dans A. Moatti. Voir également documents d'archives en annexe 4.

Voyons comment cela transparaît dans l'article du 1er mai 1922, postérieur à ces discussions.

Dans le premier de ses deux derniers articles[169] tous deux présentés à la séance du 1er mai 1922, Painlevé, sans doute conscient de l'insatisfaction apportée par son article précédent, va préciser son analyse.

Mais la visite d'Einstein et les discussions qui ont suivies (le *5* avril *1922*) l'ont marqué.

Il va donc conduire son argumentation en s'efforçant de faire preuve d'objectivité et de respect des différentes positions dans l'exposé des deux approches entre lesquelles il ne prend d'ailleurs pas parti. Il commence sa contribution ainsi :

"*Les discussions récentes auxquelles ont donné lieu les doctrines relativistes m'engagent à préciser, sous une forme que je voudrais aussi positive que possible, les corrélations et les divergences qui existent entre la théorie classique et la théorie*[170] *einsteinienne de la gravitation.*

L'exposé qui suit est entièrement différent de ceux qu'adoptent les relativistes ; en particulier il ne suit aucunement le processus d'idées qui ont conduit Einstein et ses disciples à leur audacieuse et grandiose théorie.

Mais est ce peut être le meilleur moyen d'en faire bien comprendre le sens aux adeptes de la mécanique classique, en même temps que de mettre en évidence les postulats sur lesquels repose la nouvelle doctrine."

Painlevé tente donc un effort pédagogique vis-à-vis de ses collègues en utilisant un langage et un formalisme plus conventionnel et donc plus conforme à leurs habitudes que celui d'Einstein qui déroutait bien des scientifiques français mais, malgré tout, cet article qui est une reprise apaisée et complétée de l'article précédent fait un peu figure de testament.

Il reprend, en essayant de les synthétiser et de les compléter, les arguments développés précédemment.

[169]Le deuxième est juste une remarque, sur des articles de ses collègues, qui n'apporte rien au débat.

[170]Painlevé parle maintenant de "théorie" et non plus de "doctrines", ce qui est plus respectueux et met les deux approches sur le même plan .

Les postulats de la mécanique classique posés par Painlevé

Il commence par poser trois postulats dont il commente les implications pour formaliser une axiomatique de la mécanique newtonienne.

Postulat I: *Les solides naturels, maintenus dans des conditions telles que leurs dimensions relatives, comparées en un même lieu, d'ailleurs quelconque, restent constantes, répondent aux propriétés que la géométrie euclidienne attribue aux figures invariables.*

Postulat II: *Un élément matériel très éloigné de tous les autres décrit une droite avec une vitesse constante. En particulier, il reste immobile si la vitesse initiale est nulle, (principe de Kepler).*

Postulat III: *La lumière dans le vide se propage en ligne droite avec la même vitesse en tout point et dans tous les sens. (Postulat de Fresnel)*

Il synthétise les principes de la mécanique qu'il avait détaillés dans son article précédent en explicitant leur signification.[171]

Formalisation géométrique covariante de la gravitation newtonienne

Painlevé revient sur sa proposition précédente dans le § *4* de son article [172]:

---

*"**La gravitation newtonienne** - Soit P ou (x, y, z) un élément matériel de très petite masse en présence d'un certain nombre de masses matérielles immobiles, les autres étant extrêmement éloignées. Les trajectoires de P dans l'espace sont les géodésiques d'un ds² de la forme[173]*

$$ds^2 = (U + h)\,[dx^2 + dy^2 + dz^2] = (U + h)d\sigma^2 \qquad ([1])$$

où h est une constante arbitraire et U est une fonction de x, y, z qui satisfait à l'équation classique de Laplace-Clairaut dans tout l'espace et qui s'annule à l'infini, conditions qui la déterminent. Le temps t est donné par

$$dt = \frac{d\sigma}{\sqrt{2(U+h)}} \qquad ([2])"$$

---

[171]Comme nous avons déjà développé ce point dans l'article précédent et qu'il n'y a pas de remise en cause seulement une présentation plus concrète des explications, nous ne nous étendrons pas là-dessus.

[172]Certains éléments ont déjà été présentés dans l'article précédent, mais pour faciliter la lecture nous les redonnons ici, comme le fait d'ailleurs Painlevé.

[173]Comme précédemment la numérotation locale de l'équation (i) de l'article est du type *([i])* et la portée de la notation est interne à l'article. Il reprend l'équation donnée dans son article précédent. Painlevé traite ici le cas général d'un potentiel (additif) généré par plusieurs masses, avant de s'intéresser au cas de la masse unique que nous considérons.

Painlevé introduit un temps qui dépend du potentiel en gravitation newtonienne

Painlevé redonne la métrique spatiale qu'il avait déjà donnée mais cette fois ci ajoute explicitement la valeur de *dt* correspondant au temps[174]. Rappelons que dans les équations, *([1])* et *([2])* ci-dessus, *dσ* caractérise un espace euclidien.

On peut écrire l'équation *([2])* sous la forme

$$d\sigma - dt\sqrt{2(U+h)} = 0 \quad ,$$

qui, en coordonnées sphériques, dans le cas d'une géodésique radiale, s'écrit :

$$dr - dt\sqrt{2(U+h)} = 0 \quad .$$

Ces relations décrivent l'équation du mouvement[175] pour un potentiel gravitationnel *U(r)*.

Ceci peut aussi s'écrire, en divisant par *dt*, et en élevant au carré :

$$\tfrac{1}{2}\, v^2 = U + h \text{ où } v = dr/dt.$$

On reconnaît $\frac{1}{2}\, v^2$ l'énergie cinétique classique d'une particule de masse unitaire égale au potentiel gravitationnel *U* à une constante d'intégration près.

Le temps ainsi défini est le temps absolu de la mécanique classique, dans une dimension indépendante extérieure et relatif à un mouvement évalué en espace euclidien.

Même si par un paramétrage adéquat on peut le rendre égal en valeur, comme nous l'avons montré au chapitre précédent, il n'est pas formellement et conceptuellement défini comme le temps propre qui est le paramètre affin de la géodésique calculée dans la métrique non euclidienne définie par son équation *([1])* ci-dessus.

---

[174]Nous avons montré au chapitre précédent comment cette valeur du temps se déduit de la démonstration que les géodésiques de l'équation (I) sont celles de la mécanique classique. Cette valeur du temps figure déjà dans l'article de P. Appell (1904).

[175]À partir du lagrangien classique, énergie cinétique moins énergie potentielle d'une masse unité, en espace euclidien ce qui implique que le numérateur *dσ* est l'élément de longueur en espace euclidien, pour respecter les conventions de ce lagrangien qu'on spécifie nul en utilisant la constante *h,* soit :

$L = W - U = \frac{1}{2} d\sigma^2/dt^2 - (U+h) = 0 \quad \rightarrow \quad dt^2 = d\sigma^2/2(U+h)$

Caractère hybride de la solution géométrique proposée par Painlevé

Ceci met en lumière le caractère hybride de sa définition, puisqu'elle nécessite deux types d'espace à trois dimensions : l'espace euclidien à trois dimensions spatiales associé au temps absolu utilisé dans *([1])* et *([2])* et un espace à trois dimensions spatiales non euclidien pour déterminer la géodésique caractérisé par ds^2 *([1])*.

Ceci contraste avec l'approche de la relativité générale où un seul espace pseudo-riemannien à quatre dimensions, dont trois d'espace et une de temps unis dans une métrique spatio-temporelle, est utilisé pour définir les géodésiques spatio-temporelles et qui, à ce titre, est plus synthétique et homogène que l'approche de Painlevé.

La coordonnée temporelle ainsi définie, conduit-elle à la forme relativiste de Painlevé ?

Nous avons pu constater que Painlevé, même si son deuxième article donne les fondements mathématiques de la possibilité d'une telle solution parmi d'autres, est peu disert sur ce qui l'a conduit à proposer précisément la forme qu'il expose dans son premier article du 24 octobre.

On en est réduit aux conjectures.

Une hypothèse est que partant de la forme de Minkowski de la relativité restreinte qui ne semblait pas être contestée à l'Académie des Sciences, il ait substitué à l'élément dr^2 l'expression $(vdt-dr)^2$ qui tenait compte la vitesse radiale de chute libre v (sans vitesse initiale à l'infini) pour désigner le référentiel local "chute libre" de Lorentz.[176]

Cela donne quelque chose de correct mais cette méthode peu orthodoxe s'accommoderait bien de quelques justifications. En effet, même si ce ne serait pas la première fois qu'une équation géniale est établie à partir de considérations plutôt bancales, en général *a posteriori*, on trouve quand même quelques liens logiques qui ont conduit à cette découverte.

Comme nous aurons l'occasion de le décrire au chapitre suivant, M. Sauger, sur le constat d'une "coïncidence remarquable" proposera dans un compte rendu à l'Académie des Sciences en 1922 une méthode d'établissement de la forme de Schwarzschild sur des considérations de relativité restreinte.

Nous serons tentés de rapprocher cette méthode de celle qui a pu inspirer Painlevé pour l'établissement de sa forme.

Covariance de la solution géométrique proposée par Painlevé

[176]Voir le C.R.A.S de Sauger (1922) que nous présenterons au chapitre *4* qui note également une "coïncidence remarquable" dans la forme de Schwarzschild..

Painlevé enchaîne par ses considérations sur la covariance par les transformations des coordonnées cartésiennes *x, y, z* en d'autres coordonnées, curvilignes x^i par exemple, qui conservent le caractère euclidien du $d\sigma^2$ qu'il écrit alors,

$$d\sigma^2 = \sum a_{jk}\, dx^j dx^k \qquad \text{avec} \quad (j, k = 1, 2, 3) \qquad ([3])$$

et les propriétés de *U,* qui est une fonction scalaire.

La forme des équations différentielles partielles garantit la covariance.

Ces remarques sont sensiblement les mêmes que dans l'article précédent du 14 novembre 1921 que nous avons déjà largement commentées.

Il termine cette partie par le cas particulier du corps massif unique à symétrie sphérique qu'il propose en coordonnées sphériques.

"En particulier, supposons que les masses se réduisent à une sphère de centre O formée de courbes concentriques homogènes c'est-à-dire ayant du point de vue mécanique comme point de vue géométrique la symétrie de la sphère : Les trajectoires de P seront les géodésiques du ds^2

$$ds^2 = (\mu/r + h)[dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2]$$

r, θ, φ désignant les coordonnées polaires de l'espace Oxyz"

La gravitation einsteinienne

Painlevé introduit le chapitre ainsi :

"Nous ne pouvons réaliser que difficilement et toujours imparfaitement les mesures théoriques des longueurs et du temps définies plus haut"

On peut faire remarquer que certaines de ces mesures n'ont même pas de sens physique en relativité. On ne pourra les évaluer qu'indirectement.

La covariance de la formulation relativiste

Il rappelle ensuite le fondement de la covariance (une mesure est un constat de coïncidences) auquel on peut ajouter que ceci s'applique à des mesures physiques donc pour les éléments ayant un caractère physique ce qui n'est pas le cas de coordonnées par exemple et en conclut :

"D'où l'idée de modifier les équations de la mécanique, en particulier de la gravitation, de telle façon qu'elles revêtent une forme invariante simple, non pas seulement dans le changement des variables spatiales x, y, z, mais dans le changement des quatre variables d'espace-temps."

Le fait de décrire de façon covariante la gravitation newtonienne ne garantit pas que cela produira la relativité générale qui est une théorie différente.

Il rappelle que loin de toute matière, la métrique de Minkowski[177] s'applique comme limite

$$ds^2 = V^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2, \qquad ([4])$$

où V désigne la vitesse de la lumière qu'on note c aujourd'hui, et illustre sa covariance en définissant une transformation de coordonnées (x, y, y, z, t) vers (x_1, x_2, x_3, x_4) qui donnent un ds^2

$$ds^2 = \Sigma A_{jk}(x_1, x_2, x_3, x_4)dx_j dx_k \qquad ([5])$$

et l'utilisation de cette forme qui montre que les géodésiques sont des droites, pour les corps matériels et pour la lumière.

[177]Minkowski a établi cette métrique en 1907. Poincaré avait introduit le groupe de symétrie de cet espace-temps, préalablement en 1905, dans sa note du 5 juin à l'Académie des Sciences.

Il indique que ces transformations de coordonnées conservent le caractère “euclidien” à quatre variables du ds^2 il faut bien sûr lire minkowskien (tenir compte de la signature).

Il ajoute :

“Ce principe est une conséquence du principe de Kepler et du principe de Fresnel, mais il ne leur est pas équivalent. Il exprime en effet simplement que, par un choix convenable des variables (et qui d’ailleurs est possible d’une infinité de façons) le ds^2 en question est réductible à la forme $V^2(dx^4)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2$. Pour obtenir intégralement les principes de Kepler et Fresnel il faut ajouter que, pour au moins l’un de ces choix des variables privilégiées, x^4 est le temps et $(dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2$ le carré de la distance de deux points de l’espace infiniment voisins mesuré à l’aide du mètre matériel.”

Painlevé sépare le temps de l’espace, considérant des mesures absolues de distance dans l’espace qu’il va lier au référentiel absolu de la mécanique classique.

On sait qu’en relativité restreinte on peut baliser un référentiel galiléen du fait qu’on peut synchroniser les horloges des observateurs du référentiel (on définit un mode opératoire avec des signaux lumineux pour cela).

Mais si un observateur d’un autre référentiel inertiel (donc animé d’une vitesse relative constante et uniforme) mesure la distance entre deux points de ce référentiel il va trouver une longueur différente montrant que cette distance n’est pas un “invariant”.

Seul le ds^2 est invariant entre référentiels inertiels.

Les postulats de la relativité générale posés par Painlevé

Il suppose maintenant que *P* est en présence de masses matérielles (relativité générale).

Il va poser trois postulats pour la "gravitation einsteinienne" pour faire une axiomatique de la relativité générale.

Postulat IV: *Le mouvement matériel d'un point matériel quelconque, en présence de masses données, sous la seule influence de la gravitation, est défini par les géodésiques d'un ds² de la forme (V)* [178]*, où les* A_{jk} *satisfont à un ensemble de conditions invariantes dans tout changement des quatre variables* x_1, x_2, x_3, x_4.
Les trajectoires de la lumière sont définies par les géodésiques qui correspondent à $ds^2 = 0$.
Par analogie avec la Mécanique newtonienne et avec le cas où toutes les masses sont très éloignées de P, on admet en outre :

1° Que ces conditions doivent être des équations aux dérivées partielles du second ordre linéaires par rapport aux dérivées du deuxième ordre ;
2° Quelles doivent laisser aux A_{jk} *l'exacte indétermination nécessaire que comporte la question.*
C'est ainsi qu'on parvient aux conditions einsteiniennes qui astreignent les $A_{jk}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ *dits potentiels de gravitation"*

"Quand les masses sont immobiles[179] *si l'on prend comme paramètre* x_4 *le temps t, on admet encore ces deux postulats*

Postulat V: *Le* ds^2 *ne renferme pas* t *explicitement. (Principe de causalité)*

Postulat VI: *Le* ds^2 *ne change pas quand on change* t *en* -t. *(Principe de réversibilité)*

Le ds^2 *est alors nécessairement de la forme :*

$$ds^2 = \frac{dt^2}{U(x_1, x_2, x_3)} - d\sigma^2 \qquad ([6])$$

Où $d\sigma^2$ *est de la forme ([3]), mais n'est plus euclidien."*

Nous voyons que les postulats IV à VI sont très différents des postulats I à III.

[178] Painlevé se réfère à son équation *(5)* que nous avons noté *(V)*, $ds^2 = \Sigma A_{jk}(x_1, x_2, x_3, x_4)dx_j dx_k$.
[179] En relativité on ne pourrait parler que d'immobilité relative des masses les unes par rapport aux autres, à supposer que cela soit possible vu le caractère attractif de la gravitation. Mais dans le cas de la masse unique le problème ne se pose pas en ces termes. La masse est la référence.

Pourtant Painlevé a cherché à préserver quelques propriétés essentielles même si a priori ils ne sont pas compatibles. D'ailleurs à la fin de son document il va proposer de remplacer son postulat I par un postulat I bis plus général pour rapprocher les deux points de vue mais cela ne suffit pas à les confondre. Nous y reviendrons.

Sur les postulats I à III, pas de commentaires, Painlevé connaît bien la mécanique newtonienne, resterait à savoir si ces postulats définissent totalement la mécanique newtonienne mais ce n'est pas l'objet de ce document.

Sur le postulat IV, ce qu'il dit est correct sous réserve, comme son commentaire le laisse supposer, que les conditions sur les A_{jk} se réfèrent au fait qu'elles doivent :

- D'une part, être les composantes d'un tenseur deux fois covariant, pour satisfaire aux conditions invariantes, car nous savons que les transformations de coordonnées ($x^j \rightarrow x'^j$) pour des tenseurs covariants obéissent à des relations du type

$$A'_{j'k'} = (\partial x^j/\partial x^{j'}) (\partial x^k/\partial x^{k'}) A_{jk}$$

qui caractérisent le caractère tensoriel de A_{jk}.

Ceci garantit l'invariance des lois décrites par les équations (qui sont en général aux dérivées partielles du deuxième ordre) sous condition qu'elles soient écrites sous forme tensorielle. Cette condition s'adressant à la forme des équations.

- D'autre part, dériver d'une forme générique satisfaisant aux symétries *a priori* de l'espace-temps décrit et que ces composantes doivent satisfaire à l'équation d'Einstein, cette condition étant à caractère sémantique.

Dans ce cas où il précise que seule la gravitation est prise en compte, ce qu'il dit est bien correct, car la géométrie donnée par le ds^2 décrit la variété représentant l'espace-temps, en particulier ses géodésiques (qu'on déduit par des calculs purement géométriques de la métrique), qui donnent les équations du mouvement dans ce cas.

L'alinéa noté "*1°*" qui suit rappelle une condition complémentaire sur les équations différentielles du second ordre contenues dans le tenseur d'Einstein, qui contraint la solution, à savoir que ces équations non linéaires doivent être linéaires par rapport aux dérivées du second ordre.

Il n'en justifie pas la raison, mais nous savons que c'est une condition qu'Einstein avait imposée [180] pour que la variété soit "plate à l'ordre 2" (pas d'équations différentielles d'ordre supérieur) lorsqu'il a construit son équation.

L'alinéa noté "2°" est relatif à l'indétermination des équations bien connu en relativité générale liée aux propriétés spécifiques de cette théorie (invariance par difféomorphisme avec ce que cela implique).

De nouveau Painlevé n'explicite pas cet argument mais il est correct.

Sur le Postulat V, en stipulant que le ds^2 ne renferme pas t explicitement au nom "d'un principe de causalité", il se limite ainsi aux solutions stationnaires, mais arbitrairement, car la causalité qu'il invoque en relativité n'a rien à voir avec cela.

On peut penser que son souci est plutôt de ne pas trop s'éloigner des concepts newtoniens qu'il a énoncé en première partie pour le calcul de la partie spatiale où on peut définir des distances fixes.

Mais c'est une restriction qui n'a pas lieu d'être et qui n'appartient pas aux hypothèses de la relativité générale, d'autant que cela ne garantit pas forcément le caractère statique, d'autres coordonnées que t pouvant être de type temps dans la métrique comme nous l'avons vu précédemment.

Sur le Postulat VI où, au nom d'un " principe de réversibilité"[181] il stipule que le ds^2 ne change pas quand on change t en $-t$, il exclut de facto la solution stationnaire *(1-1)* fleuron de sa contribution en octobre 1921.

Il se restreint aux solutions statiques (au sens strict).

Mais cette restriction n'a pas lieu d'être non plus et ne fait pas partie des hypothèses de la relativité générale.

L'équation *([6])* qui résulte de ses postulats n'est pas la plus générale, il existe des formes qui ne satisfont pas à cette équation même dans le problème du potentiel central que nous considérons (Forme de Lemaître par exemple qui se déduit de celle de Painlevé par un changement de coordonnées).

Nous avons indiqué précédemment que la raison probable d'une telle assertion de sa part est lié à sa vision implicitement newtonienne d'un espace immuable cadre des événements.

À la fin de son article, il remplace le postulat I par un postulat I bis :

[180] Voir : http://www.mathpages.com/rr/s5-08/5-08.htm, par exemple.
[181] Nous avons discuté de ce point précédemment.

Postulat I bis: *Lorsque le ds² de la gravitation a reçu la forme ([6])* [182] *où t désigne le temps, dσ mesure la distance de deux points fixes infiniment voisins.*

Painlevé accepte de changer la géométrie spatiale, mais à condition qu'elle soit indépendante du temps.

La forme qu'il impose aux solutions est donnée par son équation *([6])*,

$$ds^2 = \frac{dt^2}{U(x_1, x_2, x_3)} - d\sigma^2 \qquad \textit{([6])}$$

où $d\sigma^2$ est de la forme *([3]),* mais n'est plus euclidien.

Cette forme dérive directement des hypothèses qu'il a faites, trop restrictives à tort, que nous avons critiquées, mais il est cohérent avec lui-même en la circonstance.

La fonction U et le $d\sigma^2$ ne dépendent que des coordonnées spatiales puisque Painlevé a fait l'hypothèse que la forme de la métrique ne dépendait pas de la coordonnée t.

Cette forme disqualifie définitivement celle qu'il avait proposée dans son article du 24 octobre :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{a}{r}\right) dt^2 + 2\sqrt{\frac{a}{r}}\, dr.dt - \left(dr^2 + r^2\left(\sin^2\theta\, d\varphi^2 + d\theta^2\right)\right) \quad .$$

Orthogonalité des hypersurfaces spatiales et de la coordonnée temporelle

Cette forme *([6])* correspond géométriquement au cas particulier où les hypersurfaces spatiales, non euclidiennes dans le cas qui nous intéresse, sont orthogonales à la coordonnée temporelle, ce qui permet de faire simplement un feuilletage temps espace, qui va se révéler important dans le développement de la solution qu'il propose dans cet article.

Le fait qu'elle ne soit qu'un cas particulier va par contre réduire la portée et l'intérêt de sa solution.

---

[182] Il a déduit la forme *(6)* des postulats IV à VI. Elle s'écrit : $ds^2 = \frac{dt^2}{U(x_1, x_2, x_3)} - d\sigma^2$, ($x_1$, x_2, x_3 sont les coordonnées spatiales).

Bilan des postulats relativistes de Painlevé

Faisons le bilan pour la relativité générale (postulats IV à VI).

Le postulat IV, quoique d'expression alambiquée, est pertinent.

À noter que Painlevé ne fait pas référence explicitement à l'équation d'Einstein qui, il est vrai, ne fait pas partie des postulats de la relativité générale mais permet à partir d'une métrique paramétrée *a priori*, fondée sur des symétries *a priori* du problème, et du tenseur énergie-impulsion (et aussi de conditions aux limites) de proposer une solution d'espace-temps.

Il écarte (arbitrairement et sans fondement) dans le postulat V les solutions dynamiques. Dans le postulat VI il restreint encore (toujours sans fondement) le champ d'application de la théorie.

Painlevé se limite manifestement au problème de Schwarzschild, ce qui fait que la contribution la plus positive de Painlevé à la relativité générale se réduit donc au postulat IV.

Rappelons à cet effet qu'Einstein avait posé deux postulats pour la relativité restreinte[183] et deux supplémentaires pour la relativité générale[184].

Mais à la décharge de Painlevé, en 1921, les solutions cosmologiques dynamiques n'ont pas encore vu le jour[185], aussi on peut difficilement lui reprocher [186] cette vision restrictive liée au fait qu'il voulait axiomatiser " de façon académique" la relativité pour ne pas trop s'éloigner de la description newtonienne.

À cette époque, personne ne s'était aventuré aussi loin, ce qui lui a coûté cher d'ailleurs, et il faudra attendre presque quarante ans pour que Finkelstein s'intéresse aux deux formes correspondantes de la métrique (de signe opposé pour le produit *dt.dr* dans la forme de la métrique[187]) qui comme les équations de Lemaître le montraient[188] (ce qu'il n'a pas relevé) correspondent pour l'une à la partie en effondrement de l'espace et pour l'autre à la partie en expansion symétrique de la solution complète.

[183]En fait, le principe de relativité implique une vitesse limite et confère à la théorie la structure de groupe de Poincaré. Mais elle ne donne pas la valeur de la vitesse limite

[184]Nous avons vu que la covariance (principe de relativité générale) est relative à la forme dans laquelle est exprimée la théorie et n'est pas spécifique à la relativité, contrairement au principe d'équivalence qui est relatif au fond et est spécifique à une classe de théorie.

[185]Le manuscrit de la contribution de Friedmann (Friedmann 1922) sera déposée en juin 1922.

[186]Pour un converti de fraîche date .

[187]Mais avec une coordonnée *r* nulle (traite préférentiellement de géodésiques radiales nulles).

[188]Ceci sera développé au chapitre *14* (équation *10* et figure *14-1*).

Différences physiques, structurelles et phénoménologiques entre la relativité et la mécanique classique

La relativité générale et la mécanique classique sont des théories physiques différentes

Cas général

Painlevé a proposé une comparaison axiomatique entre les deux théories que nous avons commenté. Implicitement, comme sa comparaison l'indique, il montre que, sans le dire explicitement, *a contrario* de ce qu'il déclare dans sa première contribution, même si elles peuvent converger sous certaines conditions particulières, la relativité générale ne se fondra pas dans la mécanique classique parce que c'est une théorie différente de la gravitation.

La raison physique fondamentale est que le champ gravitationnel d'un corps se couple avec lui-même en relativité générale à la différence de ce que stipule la mécanique classique.

H. Bondi[189] précise que la "masse" d'un corps se décline en trois qualités, à savoir :

- La masse inerte m_i (celle de la seconde loi de Newton : $F = m_i\gamma$).[190]
- La masse gravitationnelle active m_a. C'est elle qui génère le champ gravitationnel et qui, donc, intervient dans la loi de Poisson).
- La masse gravitationnelle passive m_p qui "subit" le champ. C'est celle qui se couple avec le champ généré par les masses actives.

En mécanique newtonienne la loi de l'action et de la réaction implique que les masses, gravitationnelles actives et passives d'un corps, sont égales ($m_a = m_p$), mais leur égalité avec la masse inerte est un constat empirique distinct mis en évidence par l'universalité de la loi de la chute des corps par exemple (appelée principe d'équivalence faible).

Le vecteur force gravitationnelle $\boldsymbol{F}$ entre deux masses ponctuelles $m(j)$ et $m(k)$ séparées par une distance r portée par les vecteurs tels que $\boldsymbol{r_{kj}} = -\boldsymbol{r_{jk}}$ s'écrit en mécanique newtonienne :

$$\boldsymbol{F_1}(j\rightarrow k) = G.m_a(j).m_p(k).\boldsymbol{r_{kj}}\, r^{-3} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{F_2}(k\rightarrow j) = G.m_a(k).m_p(j).\boldsymbol{r_{jk}}\, r^{-3} \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{F_1} = -\boldsymbol{F_2}.$$

[189] Bondi (1957), au début du premier chapitre.

[190] La masse inerte régit le mouvement de systèmes inertiels comme le pendule de Foucault par exemple dont le plan contenant le mouvement, insensible à la présence des astres locaux et proches comme la Terre, le Soleil la galaxie et à leurs mouvements, ne semble déterminé que par les conditions initiales, ce qui a avait surpris les scientifiques à l'époque et qui a sans doute inspiré le principe de Mach en supposant que l'inertie est une propriété qui implique l'univers dans son ensemble. Einstein a utilisé cet argument dans son exposé de la fondation de sa théorie.

Ceci se généralise simplement au cas de *N* masses en mécanique newtonienne, chaque masse passive subissant le champ des autres *N-1* masses actives.

En relativité générale, compte tenu de l'auto-interaction gravitationnelle d'un corps, cette expression n'est pas valide puisque, en relativité, la masse passive d'un corps se couplant avec toutes les masses actives des corps, y compris la sienne à la différence de la mécanique classique[191], sa masse active contribue au champ gravitationnel auquel elle se couple.

Cela est manifeste d'une différence ontologique fondamentale entre les deux théories.

C'est aussi la source du caractère non linéaire des équations de la relativité générale qui complique la résolution des équations de la gravitation pourtant déjà pas très simple en mécanique classique.

Notons aussi qu'en relativité générale, le principe d'équivalence implique l'égalité[192] de la masse inerte et de la masse gravitationnelle passive mais que l'égalité de cette dernière avec la masse gravitationnelle active est un problème plus délicat, dont Bondi discute dans son article.

[191]À la réflexion, cette exception pourtant généralement admise en mécanique classique, semble plutôt anormale .

[192]Il est plus rigoureux de dire que le rapport entre ces masses est constant, l'égalité résulte d'un choix d'unité adéquat qui ne s'impose pas *a priori*, car rien n'indique que sous un même vocable on ne désigne pas des concepts de natures physiques différentes. Ceci vaut aussi pour l'égalité des masses gravitationnelles actives et passive précédemment citée. À noter qu'en relativité générale cette égalité des masses actives et passives est sujette à débat dans cet article de Bondi.

Cas particulier de la solution au problème du corps unique à symétrie sphérique

Dans ce cas, on considère que seule la masse gravitationnelle (active) d'un corps à symétrie sphérique contribue au champ, les autres étant supposés de masses actives négligeables par rapport à ce corps, ils ne font que le subir via leurs masses passives (jouent le rôle de masses de test).

Nous venons de revendiquer que la masse passive du corps unique se couple avec toutes les masses actives des autres corps pour générer le champ gravitationnel avec lequel cette masse passive se couple.

Mais comme dans ce cas il n'y a pas d'autres masses actives (on les néglige) que celle du corps unique, on conçoit que le cas soit particulier puisque ne subsiste que l'auto-couplage masse passive-masse active du corps unique et comme on s'intéresse au champ à l'extérieur de la masse du corps, il n'est pas l'objet de l'étude.

Finalement on ne sait pas, mais est-ce utile, comment la masse passive du corps unique se couple avec sa propre masse active, ce qui nous intéresse c'est de savoir si par rapport à la théorie newtonienne, à l'extérieur du corps sphérique cet auto-couplage génère une différence.

Par raison de symétrie, on induit que l'auto-couplage masse gravitationnelle active-masse gravitationnelle passive de la masse unique à symétrie sphérique va générer un champ également à symétrie sphérique, ce couplage induisant éventuellement une différence sur la valeur du paramètre *M* de masse active et sur la loi de gravitation en relativité générale par rapport aux mêmes paramètres en mécanique classique[193].

Par construction de la métrique de Schwarzschild, ce paramètre *M* qui valorise une constante de la solution formelle est défini par les lois de Kepler[194], en convergence à l'infini avec la mécanique newtonienne (hypothèse obligée de convergence entre les théories pour ces conditions).

On pose ces masses, correspondant à des phénoménologies a priori différentes puisque l'une met en œuvre un auto-couplage et pas l'autre, égales à l'infini et comme c'est un paramètre constant la différence de phénoménologie ne peut se manifester qu'à travers la différence des équations décrivant la gravitation.

Lorsqu'on étudie la forme métrique en y incluant ses constantes du mouvement, on peut la présenter sous une forme quasi-classique avec une énergie cinétique et un potentiel.

[193]Ce mécanisme rappelle celui qui conduit à la différence entre la masse de l'électron nu et la masse de l'électron "habillé" (avec les "écrantages") qui est celui qui doit être pris en considération dans les interactions physiques. C'est pour illustrer le phénomène, car dans le cas de l'électron, particule chargée d'autres phénomènes entrent en considération.

[194]La masse *M* est définie pour les orbites de corps très éloignés comme celle qui correspond aux paramètres observés (période, grand axe de l'orbite et excentricité) correspondant aux lois de Kepler.

La différence se manifeste dans le potentiel qui comporte un terme supplémentaire inversement proportionnel au cube de la coordonnée *r* (donc petit par rapport aux termes généraux en inverse carré de *r*) lorsque $r >> 2GM/c^2$.

Ce terme est lié au facteur de courbure de la métrique qui se manifeste par le terme $(1-2GM/c^2)$ au lieu de *1* pour une métrique plate qui affecte la coordonnée *t* (en produit) et la coordonnée *r* (en quotient).

C'est le terme correctif $-2GM/c^2$, nul à l'infini qui en traduit la cause.

À noter que, de manière surprenante, ce terme n'intervient pas pour des géodésiques radiales. Nous reviendrons sur ce point important lorsque nous étudierons cette forme.

Pour vérifier son égalité parfaite avec sa masse "inerte", ce que la mécanique classique suppose[195], dans le système solaire il faudrait pouvoir déterminer indépendamment la masse inerte du Soleil, par exemple par ses paramètres géométriques (volume) et physiques (matière) ou inertiels, et sa masse gravitationnelle active qui elle est déterminée par les orbites képlériennes, ce qui n'a pas été possible jusqu'à présent.

S'il existe toute une classe de phénomènes qui indépendamment de la convergence à l'infini, conduisent à la même phénoménologie dans ce cas très spécifique, les géodésiques radiales entrantes par exemple où la masse active *M* est bien la même dans les deux cas, il existe également des différences phénoménologiques flagrantes qui vont s'exprimer dans les cas où les équations différentes des deux théories (même si la masse *M* est posée identique) donnent des résultats (très) différents.

On peut citer l'existence, de l'horizon avec ses implications, de l'avance du périhélie des orbites non circulaires, de la déviation des rayons lumineux, etc.., qui montrent que même dans ce cas particulier, si les théories peuvent converger partiellement, on ne peut pas généraliser et les déclarer identiques.

Cette difficulté conceptuelle de comparaison physique des deux théories n'a pas été de nature à clarifier le débat.

[195]En vertu du principe d'égalité de l'action et de la réaction en mécanique classique mais en relativité le principe d'équivalence stipule l'égalité de la masse inerte et de la masse passive, mais ne dit rien de la masse active : voir Bondi (1957)

Comparaison phénoménologique, axiomatique et structurelle des espaces-temps associés

Dans certains ouvrages on rappelle qu'on peut aussi définir le concept de trou noir en mécanique classique. Commençons par montrer que cette comparaison des trous noirs "classiques" et relativistes est un bon exemple qui témoigne de la différence phénoménologique entre les théories.

Rappel historique : astres obscurs et trous noirs, différence phénoménologique.

Michell[196] en 1784 puis Laplace[197] en 1791 (reprenant les travaux de Michell) avaient fait remarquer qu'en théorie Newtonienne, pour des corps très denses, la gravitation pouvait être si intense à la surface que la vitesse de libération pouvait être égale ou supérieure à la vitesse de la lumière.

Ces corps avaient été qualifiés d'astres obscurs ou d'astres occlus.

Un calcul simple de la vitesse de libération montre qu'elle vaut c si $r = 2GM/c^2$. C'est la même valeur que celle correspondant à l'horizon du trou noir en relativité générale.

Malgré le parallèle évident, car c'est bien la gravitation qui est à l'origine du phénomène, il ne faudrait pas pour autant en déduire que la mécanique newtonienne décrit correctement les trous noirs de la relativité générale.

En effet cette analogie a ses limites et elle est quelquefois mal interprétée.

Commençons par remarquer qu'à la différence de la relativité générale où la vitesse constante de la lumière témoigne d'un aspect structurel[198], celle-ci ne joue aucun rôle privilégié dans la théorie de la gravitation de Newton.

Rappelons que la vitesse de libération, c, est la vitesse initiale minimum que doit avoir un corpuscule (photon) tiré radialement vers l'extérieur depuis la surface, sur une trajectoire inertielle, pour juste échapper (aller jusqu'à l'infini) à l'attraction de l'astre obscur de masse M et de rayon $r = 2GM/c^2$.

Ceci correspond phénoménologiquement à un "horizon" situé à l'infini.

[196]Eisenstaedt J.(2003).
[197]Ibid
[198]C'est un rôle essentiel, dont les caractéristiques et implications ne sont pas sans doute pas toutes comprises. Nous en donnerons quelques-unes, sans prétendre à l'exhaustivité dans ce qui suit. Une meilleure compréhension de ce que révèle la lumière dans l'espace-temps permettrait de mieux en comprendre la structure.

Pour un trou noir relativiste "équivalent" de masse ponctuelle *M*, si on tire un photon radialement vers l'extérieur depuis un point situé à la distance $r = 2GM/c^2$, il "fait du surplace", il ne s'échappe pas.

L'horizon n'est pas situé à l'infini mais à $r = 2GM/c^2$ dans ce cas : la différence est de taille.

Explicitons un peu cela. Lorsqu'on considère la forme moderne de Schwarzschild (celle de Droste), en champ faible, et qu'on la rapproche de la métrique générique de la relativité générale en limite post Newtonienne de la solution aux équations d'Einstein (équation linéarisée), on trouve que cette forme s'y ramène en posant $r = R+GM/c^2$.[199]

Ceci montre que dans le parallèle avec la théorie Newtonienne de trou noir classique, contrairement à ce qui est généralement admis, ce n'est pas un rayon $r = 2GM/c^2$, qui correspond à la vitesse de libération en mécanique Newtonienne, qui est équivalent au rayon de Schwarzschild de la RG, mais $r = GM/c^2$ (qui correspond à la satellisation au niveau de la surface), ce qui est d'ailleurs plus conforme du point de vue phénoménologique (la lumière ne s'échappe pas de la surface du corps générant le champ, $r = GM/c^2$ est bien un horizon).[200]

Un autre argument indépendant conforte la différence de phénoménologie. En effet, rien ne nous empêche de considérer des trajectoires non inertielles (trajectoires de type temps, avec accélération finie par exemple).

À la surface d'un corps de masse *M* et de rayon $r < 2GM/c^2$ (condition encore plus sévère que pour l'astre obscur), une fusée peut très bien s'arracher à l'attraction de l'astre, et accélérer de façon à rester à vitesse constante, même très inférieure à $\boldsymbol{c}$, ce qui fait qu'à une certaine distance de l'astre cette vitesse sera supérieure à la vitesse de libération locale permettant d'atteindre l'infini en mécanique Newtonienne avec une vitesse bien inférieure à c.

Par ailleurs un photon émis vers l'avant dans cette fusée à une vitesse supérieure à c (additivité des vitesses en mécanique classique).

Ceci est impossible pour un trou noir de la Relativité Générale, car à une distance inférieure à l'horizon toute trajectoire "réelle" de type temps ou de type lumière ne peut pas s'échapper.

Tous ces arguments montrent que la phénoménologie du trou noir de la relativité générale est différente de celle du corps obscur de la mécanique newtonienne ce qui corrobore le fait que ces théories sont fondamentalement différentes[201].

Mais il était utile de rappeler que l'histoire nous apprend que, par contre, l'idée d'un tel phénomène sous l'action de la gravitation n'est pas totalement nouvelle.

[199]Voir par exemple le cours de relativité générale (2000) de L. Blanchet (IAP) p 81.
[200]On peut y voir l'effet de l'auto-interaction de la masse passive et de la masse active du corps central en relativité qui conduit à des valeurs de M différentes dans les 2 théories pour cette phénoménologie.
[201]En particulier la non linéarité de la relativité générale découle de l'auto-interaction de la gravitation

Symétries comparées de l'espace-temps en mécanique classique et relativiste

Indépendamment de la différence de caractère physique des théories, Painlevé ne s'est pas non plus intéressé à la différence structurelle fondamentale concernant les concepts d'espace et de temps, pourtant déjà présente dans la relativité restreinte.

En mécanique classique l'espace isotrope et homogène a un groupe d'invariance formé respectivement de trois rotations (isotropie) et trois translations (homogénéité) spatiales. Le temps indépendant et unidimensionnel est supposé homogène et a pour groupe d'invariance celui des translations.

La topologie de l'espace – temps est isomorphe[202] à $\boldsymbol{R^3}$ x $\boldsymbol{R}$.

En relativité restreinte[203] le groupe d'invariance de l'espace-temps de Minkowski associé comporte six rotations dont trois spatiales et trois spatio-temporelles et quatre translations (spatio-temporelles).

On peut donc dire que l'espace-temps, malgré la signature différente de l'espace et du temps, est globalement homogène et isotrope. L'isotropie peut paraître surprenante pour le temps si on le considère isolément. Mais en relativité restreinte espace et temps ne sont pas indépendants, car ils sont interdépendants à travers la forme de métrique de Minkowski.

En effet, indépendamment des rotations purement spatiales[204] qu'on peut caractériser par des matrices faisant intervenir des fonctions trigonométriques, il existe des rotations spatio-temporelles (communément appelées boosts), et les outils mathématiques associés sont alors des fonctions trigonométriques hyperboliques au lieu des fonctions trigonométriques usuelles.

Les boosts sont les vitesses relatives constantes entre les systèmes galiléens.

Formellement, il est plus judicieux de les représenter comme des rotations spatio-temporelles, comme en témoigne la fameuse loi "compliquée" d'additivité des vitesses (boosts) en relativité restreinte qui prend la forme simple d'additivité "d'angles hyperboliques" (arguments) de rotation dans cette formulation.[205]

---

[202] $\boldsymbol{R}$ est l'ensemble des réels.

[203] Pour les concepts d'espace et de temps, pour simplifier, en relativité nous nous référerons à l'occasion à la relativité restreinte qui a été la première théorie à remettre en cause les concepts newtoniens. La relativité générale en ajoute d'autres que nous signalerons quand nécessaire.

[204] Les mêmes que celles de l'espace euclidien à trois dimensions caractérisées par le groupe SO(3) dont le recouvrement universel de même algèbre de Lie est SU(2)

[205] La relation (en posant $c = 1$) entre la vitesse relative v_i (boost) et l'angle (argument) de rotation φ_i est $v_i = tanh(\varphi_i)$, soit : $\varphi_i = argtanh(v_i)$. La vitesse V résultant de la combinaison de 2 boosts $V(v_i, v_j)$ est telle que : $V = tanh(\varphi_i + \varphi_j)$. Cette forme montre que V tend vers 1, lorsque φ tend vers l'infini.

En résumé, le groupe d'invariance de l'espace-temps de Minkowski comporte dix éléments, les quatre translations et six rotations dont trois échangeant entre eux les axes supportant les coordonnées d'espace (rotations spatiales) et trois échangeant chacun un axe d'espace avec l'axe de temps (rotations spatio-temporelles : les boosts).

Comme le synthétise E. Gourgoulhon[206] :

---

*"Toute la description mathématique de l'espace-temps relativiste est contenue dans le couple (**E, g**), où **E** est une variété différentiable de dimension **4** et **g** un champ tensoriel de type (0,2) sur **E**, représentant une forme bilinéaire symétrique non dégénérée et de signature (-, +, +, +), (on trouve également l'opposé, le choix étant conventionnel) appelée tenseur métrique.*

*La différence fondamentale entre la relativité restreinte (qui décrit les interactions autres que gravitationnelles) et la relativité générale (qui incorpore la gravitation) est que en relativité restreinte, à la fois **E** et **g** sont fixés a priori : **E = R**^{4} et **g** est la métrique de Minkowski alors qu'en relativité générale, ni **E** ni **g** ne sont fixés a priori, en particulier **g** doit être calculé en résolvant l'équation d'Einstein.*

*Notons cependant que pour une grande classe de problèmes (espace-temps asymptotiquement plat et ne contenant pas de trous noirs), on a **E = R**^{4}, tout comme en relativité restreinte.*

*Par contre, il reste toujours à résoudre l'équation d'Einstein pour déterminer **g**."*

---

[206]Gourgoulhon E. (2005) § 2-3-8, ***R*** est l'ensemble de réels, donc ***R***^{4}, l'ensemble des quadruplets de réels, un champ tensoriel de type (0, 2) est un tenseur "covariant" à deux indices (une forme linéaire à deux indices).

Le rôle structurel d'une vitesse limite

Cas de la relativité restreinte

Le principe de relativité[207] impose à lui seul un invariant de type "vitesse" [208] qui se présente comme une limite supérieure de vitesse relative entre référentiels galiléens ce qui a également pour conséquence qu'un phénomène invoquant cette vitesse limite dans un référentiel l'invoquera dans tous.

Ce principe définit donc des classes de théories. Choisir la vitesse de la lumière pour valoriser cet invariant, spécifie la classe, à savoir la relativité restreinte[209].

Cependant, l'existence même de référentiels galiléens (inertiels) où les lois de la physique prennent la forme la plus simple est de nature mystérieuse et non élucidée comme le souligne T. Damour lorsqu'il présente le principe de relativité[210].

"*Il convient d'abord de distinguer le principe de relativité, qui est commun à Galilée et à Einstein, des théories de la relativité.*

Le principe de relativité stipule l'existence d'une classe particulière de systèmes de référence par rapport auxquels les lois de la physique locale (c'est-à-dire les lois d'évolution des phénomènes expérimentaux dont on contrôle les conditions initiales et les conditions aux limites dans un laboratoire de taille finie) prennent exactement la même forme.

Rappelons que par système de référence (ou référentiel, ou repère, ou système de coordonnées) on entend une procédure expérimentale, utilisant des corps solides et des horloges "de référence", qui permet d'attribuer univoquement à tout événement une date t et une position spatiale $(x, y, z) = (x_1, x_2, x_3)$.

Parmi les lois de la physique locale, on admet la géométrie euclidienne pour décrire la juxtaposition des corps solides, ainsi que le principe d'inertie.

On admet aussi que la classe particulière des référentiels où est valable le principe d'inertie (dits encore référentiels inertiels) est décrite par dix paramètres, correspondant à des changements d'origine du temps et de l'espace, à des rotations euclidiennes constantes et à des déplacements relatifs à vitesse constante.

---

[207]Rappelons le caractère épistémologique de ce principe qui stipule que toutes les lois physiques doivent être identiques dans tous les référentiels galiléens. Ceci est explicité dans la citation de T. Damour qui suit.

[208]Bien entendu, on parle de vitesse de la lumière comme représentant des ondes électromagnétiques et on peut ajouter que ce qui est important est l'existence d'une vitesse limite que tous les phénomènes doivent respecter (ondes gravitationnelles par exemple). Ajoutons qu'on peut démontrer que le principe de relativité seul implique un invariant, de "vitesse relative maximum" mais n'en donne pas la valeur. S'il est infini, on obtient la relativité galiléenne, s'il est fini et égal à *c,* la relativité restreinte. Ceci est démontré dans l'annexe de l'article de Marchal C.(1994) reproduite en annexe *3*, chapitre *3*.

[209]Par exemple, la lumière se déplaçant à cette vitesse limite dans un référentiel galiléen elle se déplacera à cette vitesse limite dans tous les référentiels galiléens. Notons que ceci est le deuxième postulat posé par Einstein, mais on voit que le postulat de relativité et celui d'invariance de la vitesse de la lumière ne sont pas indépendants. Le deuxième ne fait que valoriser un paramètre invariant imposé par le premier

[210]Damour T., Deser S. (1995), Chapitre.1 § Principe de relativité. Nous citons l'intégralité du § pour bien situer les propos dans leur contexte.

Notons que le principe de relativité constate, sans l'expliquer, l'existence de repères privilégiés où les lois de la physique revêtent une forme simplifiée.

Le fait empirique que ces repères sont, avec une bonne approximation, non accélérés par rapport aux étoiles fixes reste incompris.

Une détermination théorique satisfaisante des repères inertiels eux-mêmes, en fonction, par exemple, de la distribution de la matière dans l'univers (principe de Mach), n'existe pas actuellement.

La relativité générale améliore cette situation théorique sans cependant apporter une réponse définitive. Beaucoup d'expériences appuient le principe de relativité, depuis la pratique journalière – on ne sent aucun effet de la vitesse dans un train ou dans un avion en mouvement rectiligne uniforme – jusqu'aux répétitions modernes des expériences de Michelson-Morley ou de Hughes-Drever, qui vérifient l'isotropie des lois de la physique locale avec une précision inouïe."

Notons que l'espace-temps[211] de Minkowski, dont les symétries induisent l'invariance des lois dans les différents référentiels galiléens, donne une description d'un espace-temps statique[212].

En mécanique classique, le temps étant indépendant de l'espace, lui-même absolu, la datation et la position d'un événement peut être universelle[213] ce qui est très pratique.

En relativité restreinte ceci ne peut se faire que dans chaque référentiel galiléen par un procédé conventionnel de synchronisation des horloges réalisant ce que faisait la mécanique classique[214] mais pour un seul référentiel, ce qui fait qu'on a une infinité d'espaces absolus superposés, au sens de la mécanique classique, et que la relation à travers les transformations de Lorentz entre ces espaces absolus montre que, quelles que soient les conventions qu'on adopte, il est impossible de synchroniser globalement ces référentiels galiléens entre eux.

Le paramètre de vitesse relative définit une infinité de référentiels galiléens, dans un espace-temps affin, tous désynchronisés et disjoints qui constituent l'espace-temps de Minkowski.

S'il existe des géodésiques nulles reliant ces espaces temps disjoints, cela n'est pas le cas pour les lignes d'univers inertielles de type temps confinées dans leur espace-temps. Rappelons que comme on ne peut pas attribuer de référentiel à la lumière (géodésique nulles) cela leur permet d'échapper à la règle énoncée pour les référentiels, implicitement de type temps.

---

[211]En effet, bien que les calculs sur les transformations de Lorentz soient simples, la structure de l'espace de Minkowski n'est pas simple du tout, en plus des 10 invariants continus il y a des invariants discrets (parité). Le groupe de symétrie, l'algèbre de Lie associée et les implications de cette structure dans la mécanique quantique sont décrits par exemple dans Delamotte B. (1997) p. 68-105. Ils témoignent de cette complexité.

[212]On décrit les référentiels inertiels les uns par rapport aux autres de façon statique. Cet espace ne permet pas de décrire comment un objet dans un référentiel peut passer à un autre.

[213]Pour cela il faut juste adopter des dispositions purement conventionnelles.

[214]On tient compte de la vitesse finie de la lumière pour la compenser et définir pour ce référentiel galiléen, un temps universel comme en mécanique classique.

Mais, dans le cadre de cette description strictement statique, tout ceci peut simplement présenter un caractère purement “conventionnel” puisque, un observateur avec ses instruments de mesure, confiné dans son espace galiléen, n’ayant pas la possibilité de passer d’un référentiel à un autre pour vérifier le caractère “physique” de ces “contractions” temporelles et spatiales qu’il mesure dans les autres référentiels, on pourrait attribuer toutes ces différences à un “effet de perspective”.

Les observateurs dans différents référentiels galiléens ne seront d’accord ni sur la datation, ni sur la position et ni sur la simultanéité d’événements, mais ils s’accorderont sur le lien de causalité éventuel entre deux événements quelconques, du fait qu’une structure causale est par contre parfaitement définie par la structure conforme de cet espace-temps de Minkowski.

L'inertie en relativité restreinte

Notons qu'il y a un débat sur l'assimilation à la relativité restreinte de phénomènes mettant en jeu des accélérations "dans cet espace vide de géométrie fixe" en l'absence de gravitation.

Mais, si rien n'interdit de décrire une cinématique traitant d'accélérations dans "l'espace-temps de Minkowski", son groupe de symétrie "global" ne contraint pas ces phénomènes non inertiels qui seront alors décrits dans un espace affin muni de certaines lois[215].

Comme nous ne traitons pas de la gravitation cela ne relève pas de la théorie de la relativité générale, même si certains outils et formalismes peuvent être communs.

Aussi au-delà de la querelle des appellations restreignons le vocable "relativité restreinte, (RR)", à la théorie contrainte par le groupe de symétrie de l'espace-temps de Minkowski.

La relativité restreinte telle que Einstein l'a introduite, dont l'espace-temps de Minkowski associé donne une représentation géométrique, permet la description de phénomènes dans n'importe quel référentiel inertiel tels qu'observés dans n'importe quel référentiel inertiel (même ou autre).

Mais elle ne dit rien de l'existence physique de ces référentiels qui ont toujours existé et existeront toujours[216], c'est ce qui fait qu'on qualifie cette description de statique[217]. L'espace Minkowski est formel et supposé vide de toute matière-énergie comme nous l'avons signalé[218]. Il décrit des référentiels inertiels disjoints.

Mais si on se réfère au principe de Mach, comme c'est la matière qui génère l'inertie, un objet attaché à un de ces référentiels inertiels, quel que soit cet objet, en particulier quelle que soit sa nature et la quantité de matière dont il est fait, n'a pas d'inertie puisque cet univers est vide de toute matière énergie. Physiquement, c'est une approximation qui revient à négliger toutes les masses et les interactions éventuelles des objets décrivant des géodésiques.

---

[215]Une description formelle est présentée dans la conférence IMCCE-SYRTE de Gourgoulhon E. (2010).

[216]Notons qu'une cosmologie comme celle de Milne (fondée sur la RR) propose une solution à cette existence par une création de tous les référentiels galiléens possibles à l'origine de l'univers. Par ailleurs on peut analyser la phénoménologie associée à la création tous les référentiels inertiels à partir d'un unique référentiel inertiel. C'est un processus que j'avais étudié dans un document consacré au paradoxe des fusées de Bell.

[217]Dans une large classe de problèmes (pas seulement physique puisque ce type d'analyse est utilisé depuis longtemps en informatique par exemple), on distingue l'analyse statique qui consiste à recenser formellement les objets, les identifier, en définir les attributs avec les états possibles associés et leurs relations structurelles ou événementielles de l'analyse dynamique qui indique les règles, lois ou algorithmes qui régissent la chaîne des changements de l'état de ses objets à travers des interactions mutuelles suite à des changements d'état d'objets qui possèdent des degrés de liberté propres indépendants.

[218]Physiquement, ceci ne semblerait envisageable que comme une approximation dans un univers où on serait dans une configuration où le champ gravitationnel tendrait vers zéro et où on suppose négligeable la masse et l'énergie des objets qu'on y étudie (sinon il faudrait introduire leur tenseur énergie-impulsion et faire appel à la relativité générale). Le cas de la solution de la masse unique avec un corps d'épreuve, loin de cette masse unique, répond à ce critère et avait chagriné Einstein puisque précisément le principe de Mach impose alors une inertie nulle à l'infini. Cela montre que certaines solutions de la relativité générale ne satisfont pas au principe de Mach.

Par contre ceci met en évidence que la masse inerte de l'objet décrivant la géodésique n'intervient pas dans cette phénoménologie, donc qu'effectivement le principe de Mach n'est pas violé du fait qu'il n'est pas invoqué.

Mais alors, quelle est la nature du concept de référentiel inertiel dans ce contexte puisque la phénoménologie n'invoque pas le principe de Mach. Il a un caractère mystérieux, sauf à supposer qu'il résulte de conditions initiales qui confèrent alors à ces référentiels un caractère inertiel fossile. On peut montrer que si, tous ces référentiels inertiels sont issus, dans un passé très lointain (au-delà de l'horizon actuel des événements, par exemple), d'un même référentiel, cela explicite la phénoménologie relative de ces référentiels, décrite par les relations de Lorentz.

Dans cette configuration il ne faut donc pas s'attendre à recueillir plus d'information sur la nature de l'inertie qu'on en recueille sur les espèces animales disparues en examinant leurs fossiles, car comme l'espace-temps de Minkowski ne traite pas du passage d'un référentiel inertiel à un autre, car ceci nécessite une interaction qui n'existe pas dans sa structure très contrainte, il ne dit rien sur la nature dynamique associée, en particulier comment elle intervient lorsqu'un objet passe d'un référentiel inertiel à un autre[219].

Soulignons que nous parlions de dynamique du fait que nous invoquions l'inertie. Mais si aucune interaction n'existe entre les constituants du système, nous nous restreignons à la cinématique et alors, comme nous l'avons dit, le principe de Mach n'est pas invoqué et l'inertie pas concernée.

En mécanique classique, on considère que le caractère dynamique du principe de Mach se manifeste à travers la deuxième loi de Newton, invoquant la masse inerte.

Son fondement épistémologique est que tout corps livré à lui-même, libre de toute interaction doit avoir un mouvement inertiel qu'on caractérisait par une vitesse absolue uniforme et constante, qui peut être nulle, en mécanique classique[220].

Cette loi de Newton implique une cause, pour perturber cet état naturel, qui en particulier s'il s'agit d'un corps libre se manifeste par une sortie de son état inertiel (vitesse constante), donc se traduit nécessairement par une accélération. C'est dans cette situation que la masse inerte va se manifester.

Autrement dit la masse inerte, qu'on considère pourtant comme un attribut permanent des corps, ne se manifeste lors d'une interaction faisant sortir un corps de son mouvement « géodésique » et va intervenir dans le résultat, la nouvelle trajectoire, pendant et après l'interaction, conférant un caractère fini à la modification.

Cette propriété relative aux géodésiques se retrouve en relativité générale (où les géodésiques ne sont plus des droites) et même en théorie quantique des champs où les masses nécessairement nulles pour satisfaire aux contraintes de jauge de la théorie vont invoquer un couplage avec un champ de Higgs pour conférer à certaines « particules » (quanta des champs) la masse qu'on constate expérimentalement.

[219]Nous verrons plus loin comment Bergström L. & Goobar A. (1999) dans le chapitre *2* traitant de la cinématique 2 → 2 en RR définissent des quantités conservées par ces interactions (scalaires de Lorentz *s* et *t*).

[220]Cela n'a pas été toujours le cas puisque dans la physique d'Aristote qui distinguait les mouvements violents des mouvements naturels (du haut vers le bas,..) on considérait qu'un corps non soumis à ceux-là, devait être au repos (vitesse nulle) par rapport à un espace absolu (constat lié au frottement). En relativité restreinte les référentiels inertiels sont individuellement synchronisables et ont des vitesses relatives constantes, uniformes.

Le fondement de cette deuxième loi de Newton étant empirique on conçoit que cette notion de force doit être reliée à celle d'effort très concrète (pousser, tirer, soulever, etc.) qu'on doit faire pour bouger les objets et il paraît naturel de considérer que l'accélération qui traduit l'écart à la situation initiale soit pour un même corps proportionnelle à la force, mais pour un même effort soit inversement proportionnelle à la masse de l'objet, constat empirique principalement inspiré par les forces de contact (ce qu'Aristote appelait les mouvements violents).

Le coefficient de proportionnalité est appelé masse inerte.

Cette loi définit en fait le concept de force, dont le caractère est malaisé à spécifier tant il se présente dans des phénomènes très divers et sous des formes variées (de contact, à distance,..), par rapport aux observables très concrètes que sont l'accélération et la masse, masse qu'on pouvait alors estimer proportionnelle à la quantité de matière d'une nature donnée, qui dépendait de sa nature, qu'on reliait probablement à son poids[221].

En effet, on pouvait comparer les phénomènes en les étudiant pour un objet donné et un ensemble de plusieurs de ces objets identiques.

Le concept s'est épuré et a été formalisé par la suite pour incorporer les forces qui n'étaient pas de contact (gravitation, électromagnétisme par exemple), mais nul doute que l'origine du concept est bien empiriquement issu de la notion d'effort à fournir pour modifier le mouvement des corps.

La métrique de Minkowski, représentation géométrique de la relativité restreinte, ne peut pas rendre compte du caractère dynamique de l'inertie, car elle n'en possède que des attributs fossiles.

Il convient de noter que le même Aristote qualifiait aussi de mouvement naturel, la chute des corps, mouvement sans contact qui lui paraissait être inhérent aux corps et donc de nature différente.

Si on intègre la gravitation de la Terre qui nous immerge en tant que phénomène naturel auquel on ne peut pas échapper, ce qui était le cas à l'époque d'Aristote, l'approche relativiste lui donnerait raison puisque dans ce cas le mouvement géodésique, qu'on peut qualifier de naturel lorsqu'un champ gravitationnel existe, est une ligne courbe extension du concept de géodésique de la relativité restreinte, ce qui a inspiré Einstein, et que dans ce cas il faut une cause autre que ce champ gravitationnel pour en dévier.

[221]Ce qui particularise une "force" d'une nature particulière (gravitation).

Extension de la relativité restreinte

Le caractère physique des effets cinématiques de la relativité restreinte peuvent être étudiés à travers une extension de la relativité restreinte autorisant une cinématique décrivant des mouvements non inertiels.

Celle-ci va-t-elle permettre d'introduire l'inertie ?

En principe la cinématique est purement formelle et n'inclut pas ce type de concept physique.

Mais nous verrons qu'on qualifie certaines descriptions de "cinématique" alors qu'on pourrait les considérer comme "dynamique" cependant comme elles se déroulent dans un espace-temps où le tenseur de Riemann est nul, en suivant Einstein, on utilise le terme cinématique par convention, mais ne nous laissons pas abuser par la terminologie.

Cette étude formelle qui conduit à définir un référentiel local de Lorentz[222] en tout point de la ligne d'univers de l'observateur qui n'est plus une géodésique, du fait de l'accélération, permet d'étudier la cinématique[223] et de calculer le temps propre, paramètre affin de cette ligne d'univers de type temps, par exemple.

On peut montrer qu'il n'existe pas de référentiel galiléen globalement accéléré[224], que la notion de solide indéformable, en relativité, implique une vitesse infinie en contradiction avec ses hypothèses.

Cette approche qui, *a contrario* de ce que nous avons déclaré pour la relativité restreinte, permet des lignes d'univers de type temps entre les espaces-temps inertiels met en lumière un certain nombre de phénomènes qualifiés de paradoxes comme celui de Langevin[225] où deux observateurs conjoints qui séparent leurs lignes d'univers puis les rejoignent constatent, comme un calcul intégral simple le montre, des temps propres écoulés en général différents.

Ceci peut s'interpréter comme un saut du voyageur dans le futur de l'observateur resté inertiel ou l'inverse sans pour autant violer la causalité du fait de la vitesse finie de la lumière et de la configuration des lignes d'univers.

---

[222]Comme le référentiel tangent à la variété en un point en relativité générale. L'espace global est différent.

[223]Cinématique (le tenseur de Riemann de l'espace affin dans lequel ces phénomènes se déroulent est nul) et non pas dynamique, car nous ne définissons pas de champs de forces.

[224]Bell J. S. (1987). Comme le montre le paradoxe des fusées de Bell où deux fusées en deux points A et B d'un même référentiel galiléen, à qui on applique une même accélération propre au même instant (dans le référentiel de départ) voient (en l'absence de contrainte) leur distance propre varier et de manière différente selon la fusée, (défaut de synchronisation). Il impose que les fusées soient reliées par un câble et il s'interroge sur sa rupture.

[225]Langevin P. (1911). Le temps propre sur les lignes d'univers (non géodésiques) est calculé comme en relativité générale. Voir annexe *3*, chapitre *3*.

L'interprétation physique de ce phénomène qui impose de conférer une réalité physique aux temps propres différents sur des lignes d'univers différentes reliant deux événements de l'espace-temps, en l'absence de tout champ, interpelle sur la structure affine de l'espace-temps global associé qui n'est pas celui de Minkowski.

Une tentative de justification, qualitative, repose sur le fait que, par exemple dans le paradoxe de Langevin, pour l'observateur qui se détache de la ligne d'univers qu'il partage avec son alter ego et qui s'y rattache plus tard il faut lui transférer de l'énergie à plusieurs étapes du voyage (il n'est pas toujours inertiel).

Ceci est pris en compte par le calcul de ces lignes d'univers dans cet espace-temps affin.

Comme on sait que l'énergie est la grandeur associée au temps, cela peut conférer un caractère physique à la différence des temps propres. On sait que, par exemple, la valeur mesurée de la constante de structure fine en physique est sensible à l'énergie à laquelle on la mesure.[226]

Ce phénomène implique des accélérations.

C'est un critère objectif, et en vertu du principe d'équivalence on pourrait les associer à un champ gravitationnel, mais cela ne suffit pas à décrire le phénomène qui dépend également du temps (coordonnée) passé en régime inertiel et cela du fait de la structure "statique" de l'espace-temps de Minkowski et des lois de la relativité restreinte qui imposent que la désynchronisation temporelle des horloges entre deux référentiels galiléens différents dépend de la distance et est d'autant plus grande qu'on est éloigné du point de synchronisation de départ, voir annexe *3* chapitre *3*.

[226]La théorie des champs est construite dans un espace de Minkowski. Étant une théorie perturbative, rappelons que cette énergie est une grandeur relative entre niveaux d'énergie différents.

La masse inerte définie par la quadri-impulsion

La construction formelle de cette extension de la relativité restreinte ne pose pas de problème mathématique si ce n'est une complexité accrue mais son fondement physique est plus problématique, car en l'absence de champs générant une dynamique, la cause de ces mouvements non inertiels semble extérieure au formalisme.

Afin de relier phénoménologiquement cette extension à la relativité restreinte, on considère que celle-ci va fournir le cadre statique (liste de tous les états possibles inertiels galiléens du système qui ne se différencient que par leur vitesse uniforme relative) dans laquelle cette extension, qui va en décrire certains aspects dynamiques (les transitions entre ces états inertiels), va s'exécuter.

Dans ces conditions les états de début du processus dynamique et de sa fin sont des états inertiels galiléens généralement différents relevant de la relativité restreinte.

Ce qu'on appelle la cinématique mais qu'on devrait appeler la dynamique relativiste 2→2 qui traite des collisions élastiques entre deux particules supposées chacune en mouvement inertiel l'une par rapport à l'autre ayant des quadri-impulsions p_1 et p_2 avant l'interaction et p_3 et p_4 après, ne nécessitant pas de champs, s'inscrit dans ce cadre.

Conformément à ce que nous avons déclaré avant, la masse inerte peut se manifester dans cette phénoménologie puisqu'il y a une interaction.

La contrainte de changement de référentiel inertiel est satisfaite, car l'état initial et l'état final sont des référentiels inertiels, la collision étant idéalisée par une matrice de transfert.

Avec six scalaires de Lorentz invariants formés par le produit $p_i.p_j$ avec $i \neq j$, et quatre relations, on forme les deux scalaires indépendants s et t [227] qui seront conservés :

$$s = (p_1 + p_2)^2 \qquad \text{et} \qquad t = (p_1 - p_3)^2.$$

On peut enchaîner ces collisions de deux particules pour décrire une cascade de collisions qui permet des transferts de particules dans des référentiels inertiels produisant des configurations différentes de "peuplement" de ces référentiels.

Si on considère une des particules intervenant dans le processus il va y avoir une variation d'énergie[228], qui n'est pas orientée ce qui est compatible avec les lois de la relativité restreinte, entre l'état initial et final.

[227] Voir par exemple Bergström L. & Goobar A.(1999) § 2.4, les quatre relations sont : $\boldsymbol{p_1}+\boldsymbol{p_2} = \boldsymbol{p_3} + \boldsymbol{p_4}$.

[228] La mécanique quantique est une théorie perturbative. Seules les variations de paramètres sont physiques.

Ces phénomènes, invoquant des transferts de quadri-impulsion entre particules au cours des collisions respectant des lois locales de conservation énoncées ci-dessus, peuvent-ils nous apporter des informations sur la nature cinématique de l'inertie ?

Comme le vecteur quadri-impulsion ***p*** fait intervenir la masse (inerte) puisque elle se définit par

$$\boldsymbol{p} = mc\boldsymbol{u},$$

où, *c*, est la constante donnant la vitesse de la lumière, *m* le scalaire de Lorentz (invariant) de masse (inerte) et ***u*** le quadrivecteur vitesse de la particule, défini par[229] :

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{dx}^{\mu}/c.d\tau.$$

Nous constatons que la masse inerte d'une particule, associée à son énergie de masse, intervient dans la phénoménologie de transfert d'impulsion en tant que coefficient de proportionnalité de l'impulsion et va donc être le paramètre qui, du fait de la conservation des scalaires *s* et *t* par le processus de collision (conservation de l'impulsion), va régir la variation de quantité de mouvement et donc d'énergie relative (par rapport au centre de masse du système formé par les deux particules en interaction) de chacune des particules dans le processus.

C'est ce coefficient d'inertie qui fait que l'état final de chaque constituant de l'interaction va être parfaitement déterminé.

Si ce coefficient d'inertie n'existait pas, les lois seraient bien différentes. On décrit l'inertie comme quelque chose qui s'oppose au changement de mouvement lorsqu'on veut transférer de l'impulsion à un objet massif, car c'est ainsi qu'elle est empiriquement perçue, mais en fait elle ne fait que d'en assurer la répartition et les limites pour que chaque élément de l'interaction reçoive sa propre part de cette interaction en fonction de son importance caractérisé par cette masse dans ce processus.

De ce fait elle est nécessaire pour déterminer l'état final de chacun de ses constituants lors de leur interaction. Comment peut-on relier cela à la deuxième loi de Newton ?

Par souci de simplification les interactions de collisions sont supposées instantanées, ce qu'elles ne sont pas évidemment mais on peut relier la variation de quadri-impulsion $\Delta\boldsymbol{p}$ au cours d'une collision à l'accélération par l'équation suivante

$$\Delta \vec{p} = \int_{td}^{tf} m\gamma(t)\,dt \quad ,$$

[229]La masse est un invariant, cela résulte de la définition de la quadri-vitesse dont la norme vaut *-1*.

les bornes de l'intégrale étant *td* le début de l'interaction et *tf* la fin de l'interaction de collision.

Ceci permet de faire un lien formel entre la masse inerte définie par deuxième loi de Newton $F = m\gamma$ et la masse inerte définie par les lois de conservation lors d'un transfert d'impulsion.

En mécanique classique, bien qu'on se réfère en général à la définition de la masse inerte par la seconde loi de Newton parce que cette définition paraît plus intuitive, on peut aussi définir la masse inerte par la méthode du transfert d'impulsion qui est alors la quantité de mouvement purement spatiale associée à un vecteur tridimensionnel avec les lois associées de conservation qui donne un résultat équivalent en mécanique classique à celle définie par la seconde loi de Newton.

Notons qu'en relativité c'est la quadri-impulsion associée à un vecteur spatio-temporel à quatre dimensions avec d'autres lois de conservation qui intervient.

Il apparaît, qu'en relativité en tout cas, la définition par le transfert d'impulsion, qui est un quadrivecteur, caractéristique de la particule, parfaitement défini, de la masse inerte est plus générale que celle par l'accélération[230], qui dépend du référentiel dans lequel on se place et qui dans certains cas comme celui des collisions n'est pas évidente à définir.

Elle est donc préférable.[231]

On retrouve bien le concept de paramètre traduisant l'inertie de la matière, car dans une interaction plus ce coefficient de masse est important moins son mouvement est perturbé.

[230]On s'intéresse en général à l'accélération "ressentie" celle qu'on peut mesurer par un accéléromètre inertiel dans son référentiel propre qui satisfait localement à la loi $F = m.\ \gamma$ mais qui en cas d'accélération ne peut être que local (change tout le temps). Bien entendu par rapport à un référentiel fixe, par exemple celui d'origine, si on veut utiliser cette même loi $F = m\gamma$ cela conduit a définir un coefficient d'inertie m qui n'est plus fixe mais dépend de la vitesse relative dans ce référentiel fixe, ce qui est source de confusion en relativité, la masse étant un invariant, car définie par ***p.p*** la norme du quadrivecteur impulsion (auto-produit scalaire).

[231]Nous ne nous étendrons pas sur le sujet, mais l'établissement de la célèbre équation $E = m.c^2$ est une illustration particulièrement significative de l'intérêt d'utiliser la masse inerte dans le contexte du transfert d'impulsion pour la démontrer correctement. La première démonstration d'Einstein en 1905 (cf. Einstein 1905) qui utilisait une autre méthode avait été critiquée et qualifiée de tautologique. Voir : Bizouard (SYRTE)

Vitesse limite, localité, équilibre local, global, stabilité des lois physiques et inertie

Le problème de localité qui a fait l'objet de nombreux débats en mécanique quantique et traité entre autres par Bell dans ses inégalités est certainement à rapprocher de l'existence d'une vitesse limite[232], qui implique que l'effet éventuel d'un événement se propage à une vitesse inférieure ou égale à *c* et n'est pas instantanément "connu" de tout l'univers.

A contrario, un système dont l'action d'un de ses membres serait instantanément en contact causal avec tout l'univers, comme la mécanique classique l'autorise, permet de définir un temps universel, donc de disposer d'un référentiel synchronisé dans lequel l'état "présent" de l'univers entier est défini et observable.

Un équilibre local dans l'univers pourrait-il être atteint, indépendamment de l'équilibre global ? L'équilibre global implique-t-il l'équilibre local en tout point ?

L'exemple de systèmes autogravitants semble montrer qu'un équilibre, qu'on peut caractériser par un état stationnaire, n'implique pas nécessairement un équilibre indépendant, à une échelle locale.

Nous savons que les lois physiques dérivent d'un "principe de moindre action", correspondant à un état d'équilibre à l'échelle considérée, qui leur confèrent une stabilité, au moins pour des perturbations du premier ordre, à cette échelle.

Avec une interaction instantanée à l'infini, ce qui ne peut se concevoir que pour des interactions à portée "infinie"[233], tout l'univers serait concerné par cet équilibre, ce qui rend problématique des équilibres locaux déterminés par le seul voisinage.

On perdrait ainsi en diversité dans les équilibres, puisqu'ils ne concerneraient qu'un seul objet[234], et corrélativement en richesse phénoménologique, un phénomène se manifestant en général par un passage d'un équilibre local d'un objet ou d'un système à un autre.

Avec une interaction instantanée l'univers entier devrait passer instantanément d'un équilibre global à un autre.

[232]Ne pas confondre avec le caractère "instantané" des résultats d'une mesure sur un des constituants "intriqués" d'un système quantique qui fixe l'état de l'autre.
[233]Les interactions forte et faible à courte portée échapperaient à cette phénoménologie. Ne seraient concernées que l'électromagnétisme et la gravitation. En fait compte tenu de la "neutralité électrique à grande échelle, seule la phénoménologie de la gravitation semble impliquée.
[234]L'univers serait l'entité "suprême" ?

Ceci pose alors le problème de l'identité des objets locaux, puisque seul l'univers devrait être alors considéré comme un objet physique à part entière puisque lui seul serait soumis au principe de moindre action.

Ceci montre le rôle structurel de l'existence d'une vitesse limite dans la physique.

Le fait que la propagation des interactions liées à des phénomènes locaux ne soit pas instantanée joue donc un rôle essentiel dans l'existence et le caractère physique même des objets, supposés localisés dans l'espace et le temps, puisque c'est leur caractère local et leurs degrés de liberté (leur indépendance relative à une échelle spatio-temporelle donnée, condition de leur existence) qui sont mis en cause.

Mais cela ne limite-t-il pas les équilibres locaux à des équilibres précaires et limités dans la durée, le temps que le système se "relaxe", temps de relaxation qui dépend de la taille de l'ensemble considéré.

Cette vitesse limite ne joue elle pas un rôle similaire à celui qu'on attribue à "l'inertie" dans les phénomènes d'interactions sur les corps massifs ?

Ce qui est certain, c'est que même si on n'en cerne pas tous les attributs et attendus, l'existence d'une vitesse de propagation finie, inférieure à une limite, de l'information liée aux phénomènes physiques joue un rôle structurel essentiel dans toutes les lois physiques.

Cas de la relativité générale

Les propriétés énoncées pour la relativité restreinte restent en vigueur au moins localement en relativité générale puisque dans cette théorie géométrique de la gravitation modélisée par une variété, par construction, l'espace-temps local en un point (espace tangent à la variété) dont le référentiel est appelé référentiel de Lorentz, est celui de la relativité restreinte.

Mais il y a des différences, comme la localisation spatio-temporelle des objets avec leurs paramètres associés (vitesse relative par exemple) en relativité restreinte[235] qui peut se faire, bien que relativement, dans une structure d'espace-temps fixe qui est un espace vectoriel.

Cela est physiquement problématique[236] en relativité générale où l'espace-temps est d'une part une variété courbe qui n'est pas un espace vectoriel et d'autre part une structure dynamique et où les objets sont partie intégrante et constituante d'une géométrie globale [237] qu'ils contribuent tous à définir[238].

Ceci a pour conséquence que si on modifie ou si on perturbe les attributs d'un seul objet, la chrono-géométrie globale s'en trouve affectée.

La relativité générale étant une théorie de la gravitation qui ne prend en compte que l'interaction gravitationnelle à l'exclusion de toutes les autres, on ne peut pas parler "d'évolution [239]" du système puisque la variété quadridimensionnelle décrit exhaustivement l'espace-temps dans toute son étendue spatiale et temporelle et ceci indépendamment de toute référence extérieure (nul besoin de structure prédéterminée d'espace-temps pour être définie).

Autrement dit tout ce qui peut se produire (sous l'effet de la seule gravitation) est totalement déterminé et décrit par la modélisation par la variété.

Cette "évolution" peut-elle être perturbée et par quelles sources ?

Il faut les chercher dans les autres différentes interactions possibles entre les objets.

Rappelons que la gravitation est une interaction à portée "infinie", comme l'interaction électromagnétique, ce qui signifie que leurs bosons médiateurs sont de masse nulle et se

[235]Même s'il n'existe pas d'espace-temps absolu physique qui serait matérialisé par un éther.

[236]Même si on repère les objets par des coordonnées sur la variété modélisant l'espace-temps il faut se rappeler que ces coordonnées n'ont aucun caractère physique.

[237]Les difféomorphismes par exemple, produisent des univers qui sont les mêmes. Ce qui pose problème quand on veut comptabiliser les configurations différentes en relativité générale, dans des théories comme la gravitation quantique. Voir par exemple Rovelli (1997) chapitre *5-3*.

[238]Comme chaque corps se couple avec le champ généré par tous, les variables "physiques" sont globales.

[239]Le terme "évolution" s'entend dans une vision hamiltonienne, mais la variété étant quadridimensionnelle, la coordonnée temporelle considérée est partie intégrante de la métrique, vraie variable en relativité générale, définie sur la variété. C'est le parcours d'observateurs sur des lignes d'univers de type temps sur la variété qui révèle l'évolution de cette métrique le long de cette ligne d'univers.

propagent à la vitesse de la lumière alors que les interactions faibles et fortes sont à portée finies (en général très courtes) avec des bosons médiateurs massifs.

L'intensité de l'interaction gravitationnelle est extraordinairement faible par rapport à l'interaction électromagnétique (environ 10^{41} fois).[240]

Son domaine de dominance qui va déterminer la dynamique de l'univers va se produire à grande échelle astronomique et cosmologique où le fait que la gravitation soit toujours attractive va préempter les interactions électromagnétiques attractives et répulsives qui se neutralisent en général à cette échelle[241] alors qu'elles sont ultra-dominantes à l'échelle humaine, assurant la cohésion des corps solides par exemple[242].

Il convient quand même de vérifier qu'on n'est pas dans des circonstances exceptionnelles qui feraient que cette hypothèse ne serait pas valide (cas au voisinage des singularités par exemple en relativité où les densités de matière sont telles qu'on ne peut pas ignorer les autres interactions), d'autant que dans ces cas-là, la théorie à utiliser reste à construire.[243]

En tout état de cause, la théorie de la relativité générale définissant un univers décrit par un modèle à l'équilibre, il est utile d'étudier sa sensibilité aux perturbations.

[240]On déduit cette valeur par exemple en comparant la répulsion électrique mutuelle de deux électrons par rapport à leur attraction gravitationnelle. Certains (Dirac avait émis cette hypothèse) y voient un lien, en ordre de grandeur, avec le rapport entre la taille d'un électron (10^{-15} m) et celle de l'univers (10^{26} m) et en tirent des conclusions sur le rapport des valeurs des constantes physiques (gravitationnelles et électromagnétiques).

[241]L'univers est supposé neutre, à grande échelle. En général on néglige à cette échelle l'action des charges électriques que pourraient posséder les astres, car s'ils en ont à un moment donné ils seront neutralisés par les plasmas interstellaires eux-mêmes neutres au-delà de la distance de Debye.

[242]Les interactions fortes et faibles concernant le noyau atomique dominent à l'échelle microscopique.

[243]C'est l'objet de théories comme celle des cordes, de la gravitation quantique qui sont encore en chantier.

Localité et relativité générale

Les solutions de la relativité générale sont des univers dynamiques, établis par minimisation de l'action de Hilbert, qui doivent prendre en compte tous ses constituants. Dans un langage newtonien, nous serions tentés de dire : "Dans son état à un instant donné et dans son évolution".

Mais la présentation formelle et rigoureuse du problème, comme nous le verrons, entre autres, quand nous présenterons et discuterons les débats à l'Académie des Sciences, a profondément désorienté les scientifiques.

En effet, la variété à quatre dimensions définie par le calcul variationnel, garantissant un équilibre (extremum) via le principe de moindre action, représente l'espace-temps en totalité et est donc globale. Cela ne va il pas à l'encontre de la localité que nous avions sacralisée auparavant ?

Rappelons qu'en langage newtonien ceci indique que la variété décrit l'espace-temps dans son extension spatio-temporelle intégrale décrivant tout l'espace dans toute son évolution passée et future, offrant en quelque sorte une vision "divine" de l'univers, car tout ce qui s'est passé et qui va se passer en tout lieu de cet univers est décrit par la variété.

Tout est déterminé. Il semblerait donc n'y avoir aucune liberté possible !

Une modération s'impose, car cet état n'est dicté que par l'interaction gravitationnelle, alors que d'autres interactions existantes ne sont pas prises en compte. Pour que cela s'applique, il ne faut pas que des régions spatio-temporelles, où la gravitation ne serait pas dominante, existent. En pratique, cela s'applique à l'échelle de l'univers, pas trop près des singularités et cela concerne les très grandes structures. Heureusement, tout un espace-temps de liberté, sans effet notable sur la dynamique de l'univers, reste ouvert, où les autres interactions vont jouer un rôle important, en particulier pour nous autres les humains.

Regarder comment un système évolue en fonction du temps physique n'a pas la même signification en relativité générale qu'en mécanique classique où il existe un seul temps (absolu et physique) et où cela a un sens universel et objectif.

En relativité il y a autant de temps physiques possibles[244] que d'observateurs, donc chacun a une perception, en général différente de celle du voisin, de l'évolution de l'univers[245]. Plus précisément plutôt que de parler d'évolution de l'univers, il en explore le paysage spatio-temporel en empruntant un sentier particulier : sa ligne d'univers.

Ce qu'on appelle "les conditions initiales" sont déterminées par les coordonnées spatio-temporelles de l'observateur, elles précisent ses coordonnées initiales correspondant à un point de sa ligne d'univers arbitrairement choisi.

[244]Le cas des solutions cosmologiques où l'évolution de l'univers peut être décrite comme une expansion des coordonnées spatiales en fonction de la coordonnée temporelle correspond à un autre concept. Pour l'équivalent il faut considérer des observateurs avec leur temps propre qui peut, comme dans la forme de Painlevé y être égal.
[245]La conséquence de cette assertion est que différents observateurs vont observer des évolutions différentes, certains pouvant cependant être plus représentatif des caractéristiques de l'espace-temps.

Soulignons que le caractère déterministe de la mécanique classique réalise quelque chose de semblable puisque la connaissance des positions de toutes les masses des corps et de leurs vitesses à un instant (absolu) donné permet de prédire le futur et calculer le passé du système, en fonction du paramètre temps dans un espace euclidien (absolu), de structure non dynamique[246], avec un temps indépendant absolu (ce qui rend non ambigu le concept "d'instantané" du système).

Ceci permet par assemblage temporel de ces "instantanés" (feuilles) de construire un univers dans son extension spatio-temporelle, à l'image d'une variété, mais à l'inverse de la relativité générale où on procède par découpe d'une variété spatio-temporelle en feuilles spatiales.

En mécanique classique, l'équilibre donné par le principe variationnel s'applique à chaque instant pour chaque section spatiale à la différence de la relativité générale où, de façon moins contrainte, il n'est réalisé que globalement et indissociablement pour l'espace-temps.

La représentation "absolue" de la mécanique newtonienne présente un caractère d'objectivité qui s'impose à tous les observateurs qui peuvent (en principe) s'accorder sur des valeurs spatiales de distance et de temps séparément et indépendamment entre deux événements.

A contrario, comme nous l'avons signalé, la formulation en relativité générale ne sépare pas naturellement espace et temps, car ils sont intégrés dans une structure métrique et l'espace-temps a une structure dynamique précisément dépendante de la matière et si une possibilité d'accord sur les phénomènes de l'univers et l'univers lui-même entre les observateurs est possible elle ne peut s'opérer qu'à travers un accord sur un modèle d'univers parmi un grand nombre d'univers possibles qu'il convient de déterminer par des tests d'hypothèses.

Il est possible de feuilleter une variété pseudo-riemannienne, comme celle décrivant l'univers en relativité générale, en sous variété spatiales (sections spatiale à t = *constante*), ce qui est utilisé sous certaines conditions, au détriment de la covariance, dans le formalisme ADM.

L'assemblage des feuilles[247] en fonction de la coordonnée temporelle, compte tenu de l'intégration de la coordonnée temporelle dans une structure spatio-temporelle pas forcément séparable, n'est pas aussi naturelle et systématique que dans le cas de la mécanique classique.

La formulation géométrique de la mécanique classique de Painlevé fait un pas dans la direction de la relativité générale mais sans la rejoindre, car le temps reste toujours non intégré à la métrique strictement spatiale, réduisant à trois le nombre de degrés de liberté.

Comme les théories de gravitation relativiste et classique sont physiquement différentes il ne faut pas s'étonner de ces différences.

[246]Cela correspond à la formulation hamiltonienne ADM en relativité générale.

[247]On ne peut pas garantir, *a priori*, que les paramètres de la feuille vont correspondre à un "équilibre" de l'état comme en mécanique classique.

L'auto-couplage masse active-passive induit une représentation globale de la gravitation

En relativité générale, compte tenu de l'auto-interaction entre la masse gravitationnelle active et passive d'un corps, on ne peut traiter le problème des *N* corps que globalement, comme en atteste l'équation d'Einstein qui va en décrire la géométrie (courbure spatio-temporelle en tout point) qui résulte d'un principe de moindre action[248] concernant l'univers, que toutes les masses contribuent à définir en vertu d'une même loi, dans sa globalité.

En effet, si la masse passive se couplait à la masse active en vertu d'une loi qui imposerait une localité à la masse active, nous aurions un problème d'infini pour l'auto-couplage alors que cela ne se produirait pas pour l'action vers les autres corps, à moins de définir deux lois différentes, une pour l'auto-couplage et une autre pour l'inter-couplage, ce qui serait assez surprenant et contraire à l'universalité de la définition de ces concepts.

On peut noter que conceptuellement cette approche où tous les corps sont traités de la même manière dans l'équation en générant un "champ global" (en fait une courbure définissant des géodésiques) auquel chaque corps est soumis, ce qui lui fait décrire une géodésique, est plus "symétrique et démocratique" que celle de la gravitation newtonienne où, dans le problème à N corps, on devait séparer le corps étudié subissant l'action des N-1 autres corps générant le champ auquel il est soumis.

La théorie de la relativité propose une solution élégante pour résoudre ce problème, car le principe même de courbure n'est pas local, un point isolé ne permettant pas de la définir puisque qu'au minimum un ouvert infinitésimal contenant ce point doit exister.

Comme cette courbure résulte de la configuration de toute la matière énergie de l'univers, ceci montre que les "vrais" paramètres physiques concernant la gravitation ne sont pas locaux mais globaux, comme en atteste le fait qu'on ne peut pas définir localement un tenseur de gravitation mais seulement un pseudo-tenseur.

Nous développerons ce point en détail au chapitre *16.*

C'est une difficulté conceptuelle majeure qui été une source de difficultés de compréhension pour beaucoup de scientifiques, formés à la discipline newtonienne à l'époque, comme le débat à l'Académie des Sciences que nous décrirons et commenterons ultérieurement au chapitre *4 e*n témoigne.

S'il n'y avait que la gravitation qui agissait localement sur les corps et masses nous n'aurions pas notre place dans cet univers totalement déterminé et stérile.

[248]Souvent appelé principe "variationnel" du fait qu'on cherche un extremum.

D'autres interactions (électromagnétiques, nucléaires, collisions, éjection de matière, etc.) vont-elles perturber ce bel équilibre modifiant les données de la gravitation puisque certaines masses vont être déplacées suivant d'autres lois que celle de la gravitation, ce qui va conduire à définir des couplages entre ces éléments "extérieurs" et la gravitation et va en modifier, au moins pour ces objets, la dynamique et en conséquence l'espace-temps pour prendre en compte cette nouvelle disposition de masses.

Concernant l'électromagnétisme, elle peut être intégrée, au moins théoriquement, et en pratique dans certains cas particuliers comme la solution de Reissner-Nordström des trous noirs chargés statiques à symétrie sphérique et de Kerr-Newmann (trous noirs de Kerr chargés[249]) en couplant l'équation d'Einstein avec celle de Maxwell.

La solution obtenue prend "nativement" en compte la matière énergie (tenseur symétrique énergie-impulsion correspondant à la matière et à la charge électrique) dans l'équation d'Einstein et via l'équation de Maxwell, qui lui est couplée, l'interaction électromagnétique (tenseur antisymétrique électromagnétique).

B. Carter a proposé une solution générale analytique (exacte)[250] pour les géodésiques suivies par des particules chargées (ou non) dans le cas générique du trou noir de Kerr-Newmann qui recouvre tous les autres (Schwarzschild, Reissner-Nordström, Kerr).

Bien entendu, il y a d'autres possibilités pour modifier le "cours naturel" de la phénoménologie liée à la gravitation éventuellement couplée à l'électromagnétisme, mais on peut donc se demander si ces sources externes à la gravitation modifient significativement la dynamique macroscopique de l'espace-temps. Par exemple dans le cas d'une fusée fonctionnant par réaction utilisant le principe de conservation de la quantité de mouvement, on peut noter que si la fusée (accélérée) ne suit pas de ligne d'univers géodésique (sous l'action de la seule gravitation), le centre de masse de la fusée et de la matière éjectée en suit une, ainsi que la matière éjectée d'ailleurs.

Comme les interactions fortes et faibles sont à très courte portée, elles n'interviennent pas, sauf cas extrême, dans la dynamique de la gravitation. Concernant l'électromagnétisme, régie par le tenseur électromagnétique antisymétrique, des interactions locales provoquant des mouvements de matière chargée peuvent être importants. Mais l'univers étant supposé électriquement neutre, les charges opposées se neutralisant à grande échelle on peut aussi négliger son effet à cette échelle. Par contre, via son tenseur énergie-impulsion symétrique, la charge électrique, comme la matière, génère et se couple avec un champ gravitationnel. [251].

Autrement dit lorsque des événements, qui modifient l'état local du système en respectant les lois de conservation locales, surviennent cela n'est qu'un changement de configuration, de modalité, d'incidence en général très circonscrite sur les variables fondamentales qui régissent la dynamique de l'univers.

La phénoménologie du pendule de Foucault plaide en faveur de cette hypothèse.

De la masse qui se transforme localement en énergie cinétique ou un rayonnement, ne change pas le bilan énergétique local au niveau gravitationnel du fait du principe d'équivalence fort, mais pourrait, par contre, influer sur la dynamique locale des objets concernés, sans influer sur la dynamique globale, du fait de la forme différente du tenseur énergie-impulsion entre la

[249]Ces solutions sont assez théoriques, puisqu'on considère que de tels objets ne sont pas chargés.
[250]B. Carter (1968). La solution proposée traite le cas général dont se déduisent les cas particuliers.
[251]Il faut toutefois être prudent avec le concept d'énergie en relativité générale, car il n'est pas toujours clairement défini. Mais dans des espaces temps stationnaires comme celui que nous étudions, sa définition n'est pas ambiguë. Pour des corps chargés électriquement, seul le tenseur énergie-impulsion symétrique est pris en compte.

matière et l'énergie comme le rayonnement[252], ce qui se traduit localement par des équations d'état différentes et conduit à des phénoménologies différentes, car la matière est de l'énergie condensée localisée alors que sa conversion en énergie est du rayonnement qui se propage. Il faudra aussi tenir compte qu'en relativité générale, pour déterminer les masses gravitationnelles actives, souvent on est amené à considérer des flux traversant des surfaces.

Les lois de conservation locales garantissent une stabilité vis-à-vis de phénomènes globaux, même si les configurations locales du système peuvent être différentes, cela pourrait conduire à des configurations globales équivalentes du fait que même si de la matière se change en énergie, cela est pris en compte dans le bilan global que la relativité prend en charge.

Il pourrait en résulter simplement une autre configuration de répartition matière énergie et impulsion énergie parmi toutes celles qui sont possibles correspondant à une autre représentation du même univers.

Ces considérations, spéculatives pour certaines, étant faites soulignons que dans les cas qu'on traite généralement les systèmes que la relativité générale décrit mettent en jeu des masses considérables neutres et que l'effet éventuel de ces transformations "locales" serait en général négligeable, à l'échelle à laquelle on se place, en particulier à grande distance.

Ainsi en cosmologie, au vu des approximations plutôt énormes d'homogénéité et d'isotropie que l'on fait, le fait même qu'une étoile au cours du temps transforme une partie notable de sa matière en énergie, en éjecte dans l'espace peut sans doute complètement être négligé.

Mais au niveau du principe, l'analyse du phénomène reste intéressante.

Vitesse finie des ondes gravitationnelles et principe de Mach

Si dans beaucoup de solutions, en particulier celle que nous considérons, le champ est statique ou stationnaire, il faut rappeler que ce champ est fossile, la solution étant "éternelle".

Dans le cas plus général où des corps sont en mouvement, la théorie prédit une génération d'ondes gravitationnelles[253] de vitesse de propagation finie et égale à celle de la lumière.

À l'instar de l'électromagnétisme, et des théories de jauge en général, ce champ d'ondes, dont le graviton est censé être le boson médiateur dans une théorie quantique, est une propriété qui caractérise la symétrie de jauge.[254]

Plus prosaïquement, on l'interprète comme un phénomène de réaction à un changement de configuration. Ajoutons que la perte d'énergie, associée à l'émission de ces ondes, conduit par exemple un système binaire à fusionner ce qui montre qu'aucun système de masses en interaction de ce type n'est stable et qu'à terme tout devrait fusionner en trous noirs. Ceci rejoint les théorèmes de singularités de Penrose et Hawking[255] (voir annexe *3*) qui les déclarent incontournables en relativité générale. Ces singularités structurent la variété puisqu'elles matérialisent des points particuliers de "convergences" de la variété où aboutissent des faisceaux de géodésiques incomplètes.[256]

La vitesse finie des ondes gravitationnelles semblerait donc plaider vers une réhabilitation de la localité puisqu'un changement, à supposer qu'il ait une influence gravitationnelle, n'est pas

[252]Le tenseur énergie-impulsion du rayonnement est à trace nulle.
[253]Dont le "graviton" serait l'hypothétique médiateur en théorie des champs quantique.
[254]La dérivée covariante en relativité générale qui a une même forme similaire à la dérivée de jauge en théorie quantique des champs, qui pour conserver les équations, suite à une symétrie locale, inclut un couplage avec ce champ de jauge qui apparaît ainsi. Beaulieu L. montre comment la relativité générale est une théorie de jauge.
[255]Voir références Hawking et Penrose, en particulier : Hawking S.W. & Penrose R. (1997). La nature de l'espace et du temps.
[256]Dans certains espaces-temps, on peut aussi avoir des boucles temporelles.

connu instantanément de l'univers, même si on doit considérer que leur description est intégrée à la variété puisqu'elle intègre également le temps.

Cela n'est pas sans suggérer le principe de Mach[257] tel qu'Einstein l'avait introduit dans sa théorie stipulant que l'inertie (la masse inerte) prenait sa source dans l'interaction d'un corps avec l'ensemble des masses de l'univers comme une réaction à une tentative de changement de l'état du système formé par l'univers et qui étant de nature gravitationnelle induisait la proportionnalité de la masse inerte avec la masse passive.

Einstein s'en explique longuement dans l'introduction de son article de synthèse de 1916 [258] et nul doute que cela a été une source d'inspiration majeure dans son élaboration de la relativité générale.

Il persiste dans son attachement à ce principe dans la cosmologie qu'il élabore en 1918 en posant comme hypothèse que l'univers devait être isotrope et homogène (principe copernicien), statique (ce qui correspondait à l'état connu de l'univers à l'époque et qui l'a conduit à introduire la constante cosmologique) et être clos (géométrie spatiale hyper sphérique), cette dernière contrainte pour précisément satisfaire à ce principe de Mach (l'inertie naît de l'interaction avec toutes les masses de l'univers).

En effet, des solutions comme celles de Schwarzschild lui posaient des problèmes, car le champ s'annulant à l'infini, les corps ne devaient plus y avoir d'inertie. Celle d'univers de De Sitter, sans matière, paraissait[259] encore plus problématique.

En fait la relativité générale ne satisfait que très partiellement au principe de Mach. Certaines solutions y satisfont (cosmologie d'un univers de poussière par exemple) mais beaucoup d'autres n'y satisfont pas. Einstein a d'ailleurs fini par renier ce principe au bénéfice d'une interprétation plus physique fondée sur des considérations en théorie des champs.

Le principe de Mach ne se laisse pas facilement mettre en équation, les tentatives pour construire des théories relativistes[260] conformes à ce principe, au prix du renoncement à d'autres principes (comme le principe d'équivalence fort par exemple), n'ont pas permis d'atteindre totalement l'objectif et n'ont pas apporté de contributions décisives.

À la lumière de la physique moderne cette interprétation par le principe de Mach de l'inertie peut paraître naïve, mais dans le contexte de la relativité générale où l'ensemble de la matière-

[257]Einstein avait une grande admiration pour Mach, qui ne la lui rendait pas.

[258]Einstein (1916), introduction.

[259]L'espace-temps de De Sitter de dimension $n = 4$, métrique de signature (-, +, +, +) est à symétrie maximum. Sa courbure spatio-temporelle (caractérisée par le scalaire de Ricci $R > 0$) est égale en tout point (t, x, y, z) de la variété. Cette solution peut être établie directement à partir des propriétés du tenseur de Riemann qui vaut $R_{\rho\sigma\mu\nu} = K(g_{\rho\mu}g_{\sigma\nu} - g_{\rho\nu}g_{\sigma\mu})$ avec $K = R/(n(n-1))$ dans ce cas de symétrie maximum, sans utiliser l'équation d'Einstein, critère qui caractérise les solutions de la relativité générale. Cependant, elle satisfait à son équation comme les 2 autres espace- temps à symétrie maximum établis de la même manière (Minkowski où $R = 0$ et anti-De Sitter $R < 0$),. Voir Carroll (2003) p 323-329 pour une démonstration. M. Mizony fait observer que la variété De Sitter peut être munie d'une infinité de métriques paramétrées par la "constante cosmologique" $\lambda > 0$. Il établit une distinction épistémologique entre la variété différentiable unique associée à l'espace-temps de De Sitter et les variétés métriques pseudo-riemanniennes qu'on peut y construire qui sont multiples. C'est cohérent avec la revendication de la relativité générale de ne considérer comme physique que des entités indépendantes des coordonnées. Des travaux tentent d'évacuer le caractère arbitraire de la métrique en ne retenant que des critères "conformes" (rapport, angles, et un critère de comparaison sans métrique).

[260]Brans et Dicke (1961) ont élaboré une théorie scalo-tensorielle dans cet esprit, qui a été suivie d'autres. À noter que la théorie est conformément invariante par rapport à la "constante gravitationnelle" G, qui n'est plus une constante mais dépend des coordonnées et joue le rôle d'un facteur conforme.

énergie n'est que le tissu d'une seule entité[261], à défaut d'être exacte, elle n'est pas incohérente.

L'inertie naîtrait d'une réaction (avec généralement émission d'ondes gravitationnelles) au changement dans une configuration globale des masses en interaction gravitationnelle à l'équilibre, condition nécessaire pour arriver à un nouvel équilibre à "distance et temps" finis[262] de la précédente. La variété doit rendre compte de ces "ondes", phénomène inhérent à la description de la dynamique des corps, puisqu'elle décrit l'univers dans toute sa dynamique. La perception de l'univers par l'observateur n'y échappe pas.

Concernant ces ondes, il faut quand même préciser que l'étude des ondes gravitationnelles émises et reçues (dans un cadre perturbatif pour les ondes faibles par exemple) mettent en jeu des mécanismes assez complexes qui rendent leur interprétation délicate dans le cadre de la théorie covariante rigoureuse.

Lumière et structure de l'espace-temps

La lumière témoigne de la structure conforme de l'espace-temps

On attribue à la lumière un rôle profond qu'on suspecte d'être fondamental dans l'espace-temps. Si la lumière possède des propriétés différentes de la matière, elles ne sont pas nécessairement intrinsèques, elles peuvent n'être, au-delà d'un aspect formel, que le révélateur de certains éléments de la structure de l'espace-temps, la matière en révélant d'autres.

Par "lumière" il faut entendre au sens général tout phénomène physique qui se propage à cette vitesse limite commune dans tous les référentiels et comme les ondes électromagnétiques sont d'un usage pratique on s'y réfère de façon générique.

La propriété géométrique de la lumière est que ses lignes d'univers sont telles que le tenseur métrique (ds^2) est nul.

E. Cartan montre d'ailleurs dans un article[263] en 1922, que nous commenterons au chapitre suivant, qu'annuler une forme de métrique conduit à définir ce qu'il appelle un univers "optique" où, à défaut d'une métrique, ne subsistent que des relations conformes dont il définit les propriétés (à défaut de pouvoir définir une longueur spatio-temporelle on sait malgré tout en faire le rapport, car l'homothétie est définie et subsistent les angles invariants par toute transformation conforme).

Par ailleurs les lignes d'univers de type nul sont toutes géodésiques mais si la vitesse de la lumière n'est pas affectée par un "boost" du référentiel d'émission par rapport à un référentiel de réception sa fréquence (donc son énergie) l'est.

[261]La géométrie globale résulte de toutes les masses, ce qui est cohérent, à défaut de l'expliquer totalement, avec le fait que le pendule de Foucault ou le gyroscope soit insensible (ou très peu sensible) aux masses proches.
[262]La variété décrivant l'espace-temps est-elle globalement modifiée, autrement dit les phénomènes générateurs de cette modification sont-ils externes à la variété ou est-ce une observation en parcourant une ligne d'univers ?
[263]E. Cartan (1922 c)

C'est une phénoménologie différente de celle de la matière vis-à-vis de ce boost qu'il sera intéressant d'analyser.

L'étude des géodésiques de type nul renseigne sur la nature conforme de l'univers (en quelque sorte son squelette) et elle révèle l'existence de familles structurantes de géodésiques nulles principales dont la description permet de classifier ces espaces[264].

Nous verrons que les équations, que nous avons analysées, de géométrisation en coordonnées purement spatiales de la mécanique classique qu'a établies Painlevé, ne peuvent pas être étendues à relativité générale contrairement à ce que Painlevé propose, mais rendent tout de même compte correctement de la structure conforme de l'espace-temps de "Schwarzschild". Ceci n'est ni fortuit ni banal, car dans ce type d'espace "vide" où le tenseur de Riemann se réduit au tenseur conforme de Weyl, la structure conforme joue un rôle essentiel.

Concernant cette structure conforme, E. Cartan indique que s'il existe quatre directions nulles principales dans les espaces temps définis par la relativité générale elles se réduisent à deux doubles[265] dans le cas de l'univers à symétrie sphérique que nous étudions.

On sait qu'on peut "décomposer" le tenseur de Riemann à quatre indices (20 composantes indépendantes au maximum) par une combinaison utilisant la métrique et deux tenseurs, le tenseur de Ricci à deux indices (10 composantes indépendantes au maximum) qui en est la trace et le tenseur de Weyl à quatre indices (10 composantes indépendantes au maximum) qui est le tenseur de Riemann expurgé de toutes ses traces.

C'est ce tenseur de Weyl, invariant par transformation conforme, qui témoigne de la structure conforme de l'espace-temps et sa structure (ses symétries évidentes ou non) permet la classification des espaces temps.

Cette structure conforme définit également la causalité, sur laquelle repose fondamentalement toute la physique[266], puisque c'est la lumière, en fait la valeur nulle de la forme, en délimitant topologiquement les régions de passé et futur causal d'un point de l'espace-temps, via la représentation du cône de lumière qui en définit les critères.

Ces propriétés exclusives de la "lumière" témoignent de son rôle particulier dans la théorie.

On peut donc être surpris par le fait que, alors que la métrique est la variable fondamentale en relativité générale, une structure de type conforme, qui n'y fait pas référence, régit la causalité à laquelle la physique doit impérativement se soumettre.

La métrique s'adresse, elle, à la matière et à ses observateurs en permettant de déterminer des intervalles d'espaces temps, non nuls, de type temps en particulier sur des lignes d'univers.

[264]Cela fera l'objet d'une étude plus systématique plus tard, classification de Petrov (1954) et Pirani (1957) qui sera d'une grande utilité pour définir des espaces-temps comme celui de Kerr également de type D, mais l'article de E. Cartan, plutôt méconnu, contient quasiment toute l'information à ce sujet.
[265]De type D mais E .Cartan n'utilise pas cette terminologie introduite plus tard.
[266]S'il n'y avait qu'une chose à garder en physique c'est sans doute celle-là.

Fréquence et distance

La lumière se propage toujours à la même vitesse dans tous les référentiels galiléens (locaux ou globaux) mais sa fréquence observée dépend du référentiel.

Ceci montre le caractère différent de la matière condensée et du rayonnement qui se traduit formellement au niveau du vecteur quadri-impulsion (nul pour le rayonnement, non nul pour la matière) et du tenseur énergie-impulsion (trace nulle pour le rayonnement, non nulle pour la matière) et par une phénoménologie distincte vis-à-vis d'un transfert d'énergie.

Mais on ne peut pas s'empêcher de penser qu'il doit y avoir quelque part un niveau de convergence qu'il ne semble pas aisé à cerner.

Le débat sur le décalage spectral est instructif à cet égard, car on voit que ce messager qu'est la lumière est sensible (par la variation de sa fréquence qui caractérise son énergie) à la structure de l'espace-temps dans lequel il se propage et peut en être considéré comme un marqueur pour des classes d'observateurs spécifiés comme ceux de Painlevé et ceci sans préjuger de la manière dont on mesure cette fréquence et sa variation (en pratique par spectroscopie).

Notons qu'aujourd'hui l'unité de distance est définie à partir de la définition précise d'une fréquence (l'inverse d'un temps) d'un rayonnement en postulant que la vitesse de la lumière est constante ce qui a été vérifié expérimentalement avec une excellente précision.

D'ailleurs la télémétrie de précision à laser utilise cette propriété, car pour mesurer des distances on mesure des temps d'aller-retour d'éclairs de lumière.

Notons le côté paradoxal de la chose où pour mesurer un élément métrique (une distance) on utilise un phénomène qui ne contient pas en lui-même cette notion de métrique.

Mais concernant l'espace-temps géométrique ne peut-on pas alternativement étudier le problème en considérant la variation d'une fréquence d'un rayonnement sur sa géodésique comme le changement d'une échelle de longueur physique ?

La fréquence, associée au temps, déterminant donc l'énergie n'est pas un paramètre sans effet en physique puisqu'on sait, en théorie quantique des champs par exemple, que beaucoup de paramètres sont sensibles à l'énergie à laquelle on les mesure et il est connu que la résolution spatiale dépend de l'énergie de la lumière utilisée dans l'instrument.

Cet aspect que nous ne faisons qu'évoquer a bien entendu un caractère spéculatif, mais sachant que l'essentiel des informations que nous recueillons sur l'univers viennent de la lumière émise par ses objets, cela pourrait en donner une autre interprétation nécessairement cohérente avec l'actuelle qui pourrait être utile dans certains cas.

Vitesse finie et passé

Soulignons également que le fait que la vitesse de la lumière soit finie permet de "voir" les objets distants tels qu'ils étaient dans le passé (ce qui corrobore le lien entre espace et temps).

Cette (longue) parenthèse étant faite retournons au corps de l'article de Painlevé.

Painlevé propose d'étendre sa méthode géométrique à la relativité générale

Forme de métrique relativiste et méthode proposée par Painlevé pour les géodésiques

Ayant proposé une formulation géométrique spatiale de la gravitation newtonienne, Painlevé poursuivant son idée, va l'appliquer à la relativité générale. Dans le postulat VI, à la suite de ce que nous déjà cité lorsque nous avons examiné ses postulats, il déclare :

" *…..Le ds² est alors nécessairement de la forme*

$$ds^2 = \frac{dt^2}{U(x_1, x_2, x_3)} - d\sigma^2 \qquad ([6])$$

où dσ² est de la forme (3), mais n'est plus euclidien.

On sait (de par la corrélation entre le principe d'Hamilton et le principe de moindre action) que les trajectoires de P sont alors données par les géodésiques du ds_1^2 à trois variables $ds_1^2 = (U+h)d\sigma^2$, h constante arbitraire, et par $dt = U.d\sigma/(U+h)^{1/2}$. Les trajectoires de la lumière s'obtiennent en faisant h = 0, d'où alors $dt = (U)^{1/2}.d\sigma$.

Remarquons que le postulat III (Principe de Fresnel) est modifié ; il n'est plus vrai que loin de toute matière ; et ainsi modifié il rentre dans le postulat IV. Mais nous gardons tous les autres postulats et notamment le postulat I."

Il rappelle qu'il avait déclaré, que pour le problème du corps unique à symétrie sphérique, la métrique dans le vide devait être impérativement de la forme donnée par l'équation (*6*) :

Ceci se déduit de ses hypothèses, (métrique qui ne dépend pas de la coordonnée *t*), que nous adopterons provisoirement pour interpréter et tenter de comprendre sa démarche. Dans le premier paragraphe de la citation ci-dessus il ajoute deux conditions essentielles :

La métrique spatiale de référence pour définir les géodésiques en relativité générale

1- Les trajectoires de *P* sont données par les géodésiques d'un ds^2 purement spatial

$$ds_1^2 = (U+h)d\sigma^2, \qquad ([6\text{-}bis])$$

avec *h* constante arbitraire et où $d\sigma^2$ est l'élément différentiel spatial de l'équation ([6]) qui n'est plus euclidien dans ce cas.

Cette proposition importante, puisqu'elle tente de généraliser un procédé qui avait été efficace pour la mécanique newtonienne, est-elle valide en relativité générale ?

Ceci mérite une analyse détaillée que nous allons conduire par étapes.

Tout d'abord, comme la relativité générale est une théorie géométrique de la gravitation caractérisée par les propriétés de l'espace-temps à quatre dimensions, est-il possible de caractériser ses géodésiques par des équations ne faisant intervenir que la partie spatiale de cet espace-temps, autrement dit :

Existe-t-il des conditions permettant de séparer temps et espace en relativité générale ?

Exposé du problème

Ici, il tente de généraliser la méthode qu'il avait développée pour la gravitation newtonienne en affectant un facteur conforme à la section spatiale de la métrique (non euclidienne cette fois).

Il semble rester fidèle à l'idée qu'on peut totalement caractériser la géodésique seulement par une description conformément spatiale prenant en compte le potentiel gravitationnel.

En relativité générale la covariance exige que, pour garantir qu'on satisfait au cas général, la métrique complète spatio-temporelle, sans séparation, *a priori*, de l'espace et du temps, doit être utilisée pour en dériver des équations valides.

Toutefois, ici nous sommes dans un cas statique à haut degré de symétrie d'une masse unique à symétrie sphérique et peut-être que nous pouvons nous permettre de séparer temps et espace pour simplifier la résolution des équations mais nous devrons vérifier que cela ne viole pas le principe général qui dans ce cas doit pouvoir permettre cela.

Comme la définition de la géodésique n'est contrainte que par la partie spatiale de la métrique dans l'hypothèse de Painlevé, cela implique que le temps est implicitement contraint par l'espace en jouant le rôle de paramètre affin de la courbe spatiale et n'intervient pas indépendamment, et au même niveau vis-à-vis des degrés de liberté que l'espace, ce que la relativité générale revendique, dans la définition générale d'une géodésique.

Une géodésique contraint des relations spatio-temporelles, mais en relativité générale c'est à travers une forme qui en général ne permet pas (sauf cas d'espèce ou conditions très spécifiques très symétriques) de séparer les coordonnées temporelles et spatiales, comme le montre les équations générales aux dérivées partielles de l'équation géodésique qui ne permettent pas de séparer *a priori* les variables, ce qui rend d'ailleurs leur résolution analytique délicate.

Bien que les solutions les plus générales des équations d'Einstein n'impliquent nullement cela, les seuls problèmes de la relativité générale qui ont une solution analytique possèdent un haut degré de symétrie. Cette résolution s'appuie sur le fait qu'associées à ces symétries il existe des "constantes du mouvement" permettant de construire une action dont les parties se séparent.

Les équations aux différentielles partielles se ramènent alors à des équations différentielles simples, ne concernant chacune qu'une coordonnée, ce qui va permettre l'intégration indépendante des équations différentielles, par rapport au temps propre sur la géodésique pour des géodésiques de type temps.

En annexe *3*, chapitre *3*, nous rappelons quelques points essentiels de l'approche Hamiltonienne, d'autant, que sans donner de détails, Painlevé y fait référence pour justifier ses propositions.

Painlevé définit la coordonnée temporelle associée à la forme spatiale pour la géodésique

2 – Painlevé, non seulement donne la forme de la métrique dans son texte mais il indique que la valeur de *dt*, élément différentiel de la coordonnée *t* qui figure dans l'équation *([6])* vaut :

$$dt = \frac{U\, d\, \sigma}{\sqrt{U + h}} \,. \qquad \textit{([6ter])}$$

Painlevé indique simplement qu'elle dérive de la corrélation entre le principe de Hamilton et le principe de moindre action, sans plus de détails.

Comme la coordonnée *t* n'est citée que dans son équation *([6])* nous supposerons qu'il la déduit de la conservation de l'énergie mais c'est alors sans rapport avec sa méthode s'appuyant sur l'équation *([6bis])* qui implique qu'on déduit tous les paramètres de la seule géodésique spatiale et d'une fonction scalaire *U* associée à une constante *h.*

En effet ce qui est à démontrer c'est :

a) Que l'équation *([6ter])* se déduit bien des équations de la relativité au moins pour le cas particulier qu'il considère (forme statique purement quadratique) ce qui est assez simple.

b) Que le caractère géodésique de l'équation *([6bis]*) purement spatiale (avec son paramètre affin temps) permet de déduire les paramètres géodésiques de l'équation spatio-temporelle géodésique.

La généralisation de Painlevé est correcte dans le cas des géodésiques nulles.

Établissement de l'équation pour la lumière.

Painlevé fait remarquer que, avec ces hypothèses, pour la lumière avec $h = 0$, on déduit immédiatement de l'équation *([6])* avec $ds^2 = 0$, l'équation

$$dt = (U)^{1/2}.d\sigma \quad \rightarrow \quad dt^2 = Ud\sigma^2.$$

Si nous comparons cette équation avec l'équation *([6bis]),* avec $h = 0$,

$$ds_1^2 = Ud\sigma^2 \rightarrow \quad ds_1^2 = dt^2,$$

nous constatons que $dt = ds_1$, car, ces deux équations, ci-dessus, sont identiques.

Ceci signifie que dans ce cas de géodésique nulle la coordonnée t (de la forme de Schwarzschild) est le paramètre affin de l'équation *([6-bis]).*

Notons que :

$$dt^2 = U.d\sigma^2 \rightarrow \quad 0 = -dt^2+Ud\sigma^2 \rightarrow 0 = -dt^2/U + d\sigma^2 \rightarrow 0 = -(1-2M/r)\, dt^2+d\sigma^2.$$

Le dernier terme obtenu en remplaçant U par sa valeur déduite de l'équation de Schwarzschild et de la forme de l'équation *([6])* n'est autre que la métrique de Schwarzschild pour les géodésiques nulles.

Dans ce cas la proposition de Painlevé d'utiliser l'équation spatiale *([6bis])* pour traiter le problème donne une solution de paramètre affin s_1 qui est bien équivalente à celle de la relativité générale où s_1 est égal à la coordonnée temporelle t de la métrique de Schwarzschild représentée par l'équation *([6])*.

Une géodésique nulle ne comporte que trois degrés de liberté.

Une équation spatiale à trois degrés de liberté peut suffire pour la déterminer.

La structure conforme de l'espace-temps défini par Painlevé est donc correcte

Rien qu'avec cette propriété[267] nous constatons que la structure conforme de l'espace-temps, caractérisée par les géodésiques de type nul[268] (parcourues par la lumière) définie par son équation spatiale *([6bis])* est bien la même que celle définie par la forme de Schwarzschild.

Cette propriété, spatialement covariante par construction, conformément riemannienne, caractérise la structure conforme de cet espace-temps, sans faire intervenir explicitement la forme spatio-temporelle de la relativité générale.

Nous verrons que cette compatibilité ne s'étend pas aux géodésiques de type temps, limitant la portée de sa proposition mais, que malgré tout, cet échec se révèle productif.[269]

[267]Les géodésiques nulles ont un statut particulier en relativité générale.
[268]Voir E. Cartan (1922c)
[269]L'importance de cette structure conforme est au cœur des recherches actuelles (théories invariante de jauge).

Vérification de la validité de l'expression de la coordonnée t proposée par Painlevé

Dans ce qui précède nous avions montré que les conditions de séparation des variables temporelles et spatiales étaient remplies dans le cas que nous considérons et indiqué une méthode pour résoudre le problème.

Pour les géodésiques nulles, la solution étant immédiate, il n'était pas nécessaire de démontrer l'équation *([6ter]).*

Pour les géodésiques de type temps, ce n'est pas évident.

Le calcul fait dans l'annexe *3*, chapitre *3*, montre que cette relation se déduit simplement de la constante du mouvement, liée à la conservation de l'énergie sur une géodésique, dans toute métrique indépendante du temps.

Ce calcul permet de donner la relation entre le paramètre formel *h* que Painlevé utilise dans ses équations et qu'il présente (à juste titre) comme une constante d'intégration et les constantes du mouvement qu'on peut associer à des grandeurs physiques.

Relation entre le paramètre *h* et l'énergie *E*

Dans le calcul de l'annexe *3*, chapitre *3,* nous avons obtenu l'équation suivante :

$$dt = \frac{U\, d\,\sigma}{\sqrt{U - \frac{1}{E^2}}} \quad , \qquad \textit{([6quater])}$$

qu'on peut identifier à son équation *([6ter])* en posant

$$h = -1/E^2.$$

Ceci démontre que la relation entre temps et espace, qui s'appuie sur la conservation géodésique de l'énergie d'une particule de masse unitaire (pour une particule de masse *m* et d'énergie *e*, *E = e/m)*[270] dans cette métrique que donne Painlevé, est bien fondée.

[270]Avec c =1. Pour la lumière, de masse nulle et d'énergie non nulle, cette convention conduit à E = ∞→ *h = 0,* comme Painlevé l'a posé.

Cohérence et signification des équations de Painlevé pour la relativité générale

Cohérence

Painlevé propose trois équations : l'équation *([6])* qui est la métrique de Schwarzschild, *([6bis]* qui est une équation spatiale dont il prétend qu'elle permet de déterminer la géodésique*, ([6ter])* que nous venons de démontrer.

La première chose à faire est de vérifier leur cohérence.

Donc, avant de s'intéresser à l'équation *([6bis])* qu'il propose comme fondement de sa méthode, attachons-nous à ce qu'on peut déduire des équations *([6])* et *([6ter])* qu'il a définies.

Lorsqu'on reporte l'équation *([6ter])* que nous venons de démontrer dans l'équation *([6])* on peut exprimer, pour une géodésique, le ds^2 de l'équation *([6])* soit uniquement en fonction de dt^2

$$d\tau^2=\frac{-h\,dt^2}{U^2}\rightarrow\rightarrow\frac{dt}{d\tau}=\frac{U}{\sqrt{-h}}\quad , \qquad ([6\text{-}4])$$

soit uniquement en fonction de $d\sigma^2$

$$ds^2=-d\tau^2=\frac{-h\,d\sigma^2}{U+h}\ \rightarrow\ \frac{d\sigma}{d\tau}=\sqrt{\frac{U+h}{h}}\quad . \qquad ([6\text{-}5])$$

Ces deux équations, sous forme paramétrique qui définissent les composantes temporelles et spatiales de la quadri-vitesse d'un observateur, fournissent les équations différentielles du mouvement géodésique dans l'espace-temps dont la solution est sous forme paramétrique.

Comme U ne dépend que des coordonnées spatiales, l'équation *([6-5])* va se présenter sous une forme plus facilement intégrable que *([6-4])*.

Le paramètre affin τ étant le temps propre de l'observateur géodésique (paramètre physique), cette solution devrait nous satisfaire. Bien que r ne soit pas un paramètre physique, mais comme on représente souvent ce type de mouvement dans un diagramme de Minkowski, en particulier pour le mouvement radial où un diagramme à deux dimensions suffit, bien que la

coordonnée *t* n'ait aucun caractère physique, peut-être en raison de réminiscences newtoniennes, nous nous intéressons également à la fonction du type *r(t).*

Pour ce faire il faudra utiliser l'autre équation *([6-4])* et résoudre le système des deux équations pour en déduire *t(τ)* et en conséquence la fonction *r(t)*.[271]

Signification de l'expression purement spatiale des géodésiques spatio-temporelles

En relativité générale, une géodésique est une courbe définie sur une variété pseudo-riemannienne à quatre dimensions sur laquelle on a défini des coordonnées, par exemple des coordonnées sphériques, (*t, r, θ, φ).*

Considérons l'équation "spatiale" *([6-5])* définissant la variation de la métrique spatiale à trois dimensions, en coordonnées sphériques spatiales, le long de la géodésique en fonction du temps propre dans la variété pseudo-riemannienne.

Il ne faut pas se méprendre, séparation n'est pas indépendance.

Cette expression de la métrique spatiale ne décrit pas une forme géodésique spatiale dans une feuille spatiale à trois dimensions, dont τ serait le paramètre affin, ce que la formulation de Painlevé *([6bis])* suggère, mais avec ds_1 comme paramètre affin qui est différent de τ.

Cette équation décrit comment la section spatiale évolue lorsqu'on parcourt la ligne géodésique dans l'espace-temps dont τ est le paramètre affin.

Sauf si une relation, $\tau = a.ds_1 + b$, où a et b sont des constantes, existe, cette différence essentielle invalide la proposition s'appuyant sur *([6bis])* de Painlevé. La géodésique spatio-temporelle ne peut généralement pas être définie sur des critères strictement spatiaux en relativité.

En effet, cette expression doit être combinée à celle définissant la coordonnée temporelle *([6quater]),* elle-même dérivée de *([6ter])* en utilisant la conservation de l'énergie sur une géodésique pour définir la géodésique spatio-temporelle dont τ est le paramètre affin.

Des compléments, montrant comment on peut utiliser les équations *([6-4])* et *([6-5])* pour retrouver les résultats qu'on obtient à partir de la forme de Schwarzschild, ce qui atteste de leur cohérence, avec quelques développements associés, sont donnés en annexe *3*, chapitre *3*. Ils nécessitent l'utilisation de nouvelles équations notées *([6-6]) à ([6-18])*. Ceci explique le saut dans la numérotation des équations utilisées dans cette partie.

[271] Dans le cas que nous traitons c'est simple, mais il ne faut pas généraliser.

Forme géodésique dans le cas de forme complète de la métrique de Schwarzschild

Dans l'esprit (mais pas dans la lettre) de la méthode suggérée par Painlevé nous avons établi l'équation géodésique, séparément, à partir d'équations résultant, compte tenu des symétries de cette solution, de sa décomposition entre équations de temps et d'espace.

Il est facile de vérifier que ces équations, dont on utilise la combinaison des éléments séparés pour caractériser l'équation géodésique physique donnent le même résultat (et pour cause) que celui qu'on obtient directement de la métrique complète.

La métrique complète permet d'obtenir une forme géodésique synthétique très utile que nous reproduisons ci-dessous.

À partir de la forme relativiste de Schwarzschild par exemple[272] :

$$ds^2 = -\left(1-\frac{2M}{r}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{1-\frac{2M}{r}} + r^2\left(\sin^2\theta\, d\varphi^2 + d\theta^2\right)$$

Où le rapprochement avec l'équation *([6])* montre que ici, $U = (1 - 2M/r)^{-1}$.

Nous pouvons en déduire (voir détail du calcul en annexe *3* chapitre *3*)

$$-E^2 + \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \left(1-\frac{2M}{r}\right)\left(\frac{L^2}{r^2}+\epsilon\right) = 0 \quad , \qquad ([6\text{-}19])$$

avec $\epsilon = 0$ ou 1 selon que la géodésique est de type nulle ou temps.

Cette équation "géodésique", très utile, résulte de l'insertion des constantes du mouvement.

Elle se présente alors comme une équation différentielle du premier ordre, homogène vis-a-vis de la coordonnée *r*, ne comportant que des fonctions de *r* et des termes $dr/d\tau$.

[272]Nous adoptons la convention moderne pour la signature de la métrique, les signes d'équations écrites avec la convention (opposée) de Painlevé doivent être ajustés en conséquence.

Elle permet d'obtenir des résultats pour les géodésiques radiales et orbitales circulaires, de déterminer les limites de stabilité des orbites[273] et de poser l'équation *f[r(φ), dr/dφ]* des orbitales elliptiques ou hyperboliques en éliminant le temps propre par utilisation de la constante du mouvement *L*.

Pour compléter ce chapitre ajoutons que si on écrit cette équation sous une forme "pseudo- newtonienne" (énergie cinétique + énergie potentielle = énergie totale)

$$½(dr/dτ)^2 + V(r) = ε,$$

où $$ε = (½)E^2.$$

Ceci conduit à définir un potentiel *V(r)* qui ne dépend que de la coordonnée *r* :

$$V(r) = (½)ϵ– ϵ(GM/r) + L^2/2r^2 – GML^2/r^3.$$

Par rapport au potentiel newtonien, il y a un terme supplémentaire en r^{-3}.

Si le moment angulaire *L* est nul, (géodésiques radiales) les potentiels sont similaires, mais en relativité les dérivées sont par rapport au temps propre, ce qui ne correspond pas généralement au temps de la mécanique classique.

Comme nous l'avions signalé, lorsque nous avons discuté du cas particulier du corps unique à symétrie sphérique, le terme supplémentaire GML^2/r^3 dans le potentiel résulte de la courbure (*2M/r)* de la forme donnée par *([6-19])* par le terme *(1 -2M/r),* traduisant la courbure des coordonnées *t* et *r* dans la métrique, qui est en facteur avec le dernier terme.

C'est par cette courbure que la phénoménologie différente, liée à l'auto-couplage masse active masse passive en relativité générale, se manifeste.

[273]En dérivant le potentiel *V(r)* par rapport à *r,* on obtient les extremums d'une orbite par les racines réelles d'une équation du deuxième degré. Ceci montre que les orbites stables des objets physiques ont un périgée supérieur à $6GM/c^2$, la condition de stabilité étant fournie par la dérivée seconde de *V(r)*. Des orbites instables sont possibles pour un périgée supérieur à $3GM/c^2$. Il existe une orbite circulaire instable pour la lumière à $r = 3GM/c^2$ appelée "sphère des photons". Tout ceci est manifeste de différences phénoménologiques avec la mécanique classique.

La géodésique temporelle définie par Painlevé est-elle identique à celle de la relativité ?

Nous avons vu que pour des géodésiques nulles la réponse est oui.

Qu'en est-il pour des géodésiques de type temps associées aux objets matériels ?

Prenons la géodésique définie par la relativité générale comme référence, car compte tenu de son caractère physique, elle est géométriquement indépendante des coordonnées qui la décrivent et de la méthode suivie pour l'établir, en particulier son paramètre affin (temps propre) est bien défini, à une relation linéaire près. Commençons par ce critère simple.

Comme on utilise les mêmes coordonnées spatiales et qu'on se réfère à une même géométrie spatiale (avec un facteur conforme dans un cas), la comparaison des résultats donnés par l'équation *([6bis])* avec celle relativiste *([6-5])* que nous venons d'établir est simple.

En particulier, pour une géodésique d'un type donné, si la méthode définie par Painlevé définit bien la géodésique de la relativité générale, il faut que son paramètre affin s_1 et celui de la solution de la relativité générale s (ou τ), soient liés par une relation du type $s_1 = as+b$, ce qui implique que :

$$\frac{ds_1}{ds} = a = constante \quad .$$

Comparons les paramètres affins.

Le facteur conforme $(U+h)$ appliqué à la métrique spatiale $d\sigma^2$ conformément à *([6bis])*

$$ds_1^2 = (U+h)\, d\sigma^2 \quad , \qquad ([6]bis)$$

est censé, comme précédemment, modifier l'échelle du paramètre affin de la géodésique spatiale pour qu'il puisse représenter le temps.

Bien que cela ne soit pas représentatif de la solution générale en relativité, étudions, dans le contexte spécifique de la forme *[(6)]* comment cette équation s'applique et son résultat.

Nous avons montré que *([6])* pour une géodésique peut s'écrire sous la forme.

$$ds^2 = \frac{h\, d\,\sigma^2}{U+h} \qquad \textit{([6-5])}$$

En éliminant $d\sigma^2$ en combinant avec l'équation *([6bis])* on obtient :

$$ds^2 = d\,\tau^2 = \frac{-h\, ds_1^2}{(U+h)^2} \quad .$$

Les paramètres affins des deux expressions auraient la même forme si :

$$\frac{ds^2}{ds_1^2} = \frac{-h}{(U+h)^2} = constante \quad .$$

Ce qui n'est pas le cas donc, *a contrario* de la solution pour les géodésiques nulles, la méthode proposée par Painlevé ne s'applique pas aux géodésiques de type temps.

On ne peut pas généraliser la solution géométrique validée en mécanique classique

Les paramètres affins n'ont pas de relation linéaires entre eux

Cette relation ne conduit pas à une relation linéaire entre les paramètres affins *s* et s_1, sauf à prouver que $h/(U+h)^2$ est constant, ce qui n'est pas le cas en général.

La forme *([6bis])* que Painlevé propose n'est pas compatible avec les autres hypothèses qu'il a formulées données par les équations *([6])* et *([6ter]).*

Il n'est donc pas fondé à généraliser directement, en remplaçant la métrique euclidienne par la métrique non euclidienne, l'équation qu'il avait établie à juste titre pour la mécanique classique. Sa solution décrite par l'équation *([6bis])* n'est que conformément équivalente à la solution qu'on peut établir à partir de ses autres équations.

Nous avons vu que la proposition de Painlevé échouait à déterminer la géodésique telle qu'elle est déterminée par les équations de la relativité générale.

Nous pouvons nous intéresser à des conditions plus faibles et examiner si la proposition de Painlevé présente, pour ces conditions, des convergences avec la relativité générale.

La coordonnée *t* est-elle le paramètre affin de la forme proposée par Painlevé ?

On pourrait imaginer que Painlevé ait envisagé pour le paramètre affin, la coordonnée *t* telle qu'elle est définie par *([6ter]). C*ela ne convient pas non plus, car en tenant compte de l'équation de conservation de l'énergie qui a conduit à poser $h = -E^{-2}$, il faudrait alors :

$$\frac{dt^2}{ds_{1^2}} = \left(\frac{dt^2}{d\tau^2}\right)\left(\frac{d\tau^2}{ds_{1^2}}\right) = -\left(\frac{h}{(U+h)^2}\right)\left(\frac{U^2}{-h}\right) = \frac{U^2}{(U+h)^2} = constante \quad .$$

Où un échec peut cacher une découverte majeure

Ceci n'est pas réalisé sauf, bien entendu, pour $h = 0$ (lumière) comme nous l'avons montré et pour $U = 0$, ce qui correspond au cas à l'infini ou à une masse nulle (métrique de Minkowski).

L'importance de cette propriété a échappé à tous à l'époque.

Aujourd'hui dans les recherches destinées à établir une théorie de gravitation quantique certaines propositions, pour satisfaire au principe de Mach, s'appuient sur des représentations utilisant une géométrie conforme pour définir une gravitation invariante d'échelle.[274]

Incidemment, la proposition de Painlevé va dans le sens de cette approche.

[274] Julian Barbour (2003)

Les fonctions *r(φ)* de la géodésique en coordonnées polaires sont-elles identiques ?

La relation entre r et φ pour les géodésiques, définies par les équations géodésiques dans la forme de métrique *([6])* et *([6bis])* d'une part et les équations de la relativité générale d'autre part, décrite par exemple par la fonction *r(φ),* est-elle la même ?

Nous savons que ces orbites sont des courbes spatialement planes.

Compte tenu de la symétrie sphérique, on est libre de choisir arbitrairement la coordonnée angulaire θ.

On pose en général $\theta = \pi/2,$ ce qui permet de simplifier la forme des équations.

La relation *r(φ)* permet alors de définir la courbe spatiale dans le plan défini par ces conditions.

L'annexe *3*, chapitre *3* montre, par un calcul détaillé, que ces fonctions *r(φ)* sont également différentes.

Il faut donc se rendre à l'évidence, pour les géodésiques de type temps, la solution proposée par Painlevé n'a pas non plus ce type de caractère commun avec celle définie par la relativité générale.

Painlevé a généralisé à tort sa formulation géométrique de la gravitation classique

Nous avons démontré par le calcul que Painlevé a généralisé trop hâtivement la solution qu'il avait proposée avec succès[275] pour la formulation géométrique de la gravitation newtonienne.

En effet, si sa proposition convient pour les géodésiques nulles, elle ne convient pas pour les géodésiques de type temps puisque le ds^2 non nul (tenseur métrique) qu'il propose d'utiliser pour définir les géodésiques, défini par l'équation *([6-bis]),* est différent du ds^2 non nul (tenseur métrique) qu'il définit pour la forme de Schwarzschild, donné par l'équation *([6])*.

Pour que deux formes de métrique correspondent au même espace-temps en relativité générale, comme nous l'avons déjà indiqué, il faut et il suffit que les tenseurs métriques ds^2 (non nuls) soient identiques.

Si c'était compatible pour les géodésiques nulles c'est que pour la lumière, comme le ds^2 est nul par définition dans les deux cas, cette contrainte ne s'appliquait pas.

Commentons les raisons structurelles qui impliquent cette différence.

Rappelons qu'en relativité générale, contrairement à la mécanique classique, la coordonnée temporelle n'est pas le paramètre dynamique mais une coordonnée indépendante de celles d'espace et que l'équation géodésique résulte du principe variationnel appliqué sur une courbe dans l'espace-temps, utilisant les quatre coordonnées de la métrique complète à quatre dimensions, ce qui garantit sa covariance, son caractère géométrique objectif et physique.

Établir l'équation géodésique en appliquant le principe variationnel sur la seule métrique spatiale, dans une section spatiale, même en l'affectant d'un facteur conforme pour normaliser le paramètre affin a pour conséquence que la coordonnée temporelle, degré de liberté en relativité générale est absente, réduisant le nombre de degrés de liberté à trois.

On peut objecter que la stationnarité[276] imposait une contrainte qui réduisait à trois le nombre de degrés de liberté dans cette solution.

Mais, comme notre analyse l'a montré, cette contrainte ne s'introduit pas, en relativité générale, sous forme d'un facteur conforme sur la section spatiale (ce qui est une contrainte supplémentaire d'un autre type), comme c'est décrit dans la forme relativiste spatiale *([6bis])* proposée par Painlevé.

Le formalisme défini par Painlevé, plus contraint que celui de la relativité générale, à symétries équivalentes, ne peut pas avoir de solution générale, pour toutes les géodésiques de type temps, identique à celle de la relativité générale, car il est relativement plus restrictif.

[275]Voir Chapitre 2, § "Interprétation épistémologique et physique de la solution géométrique de Painlevé".

[276]Cette contrainte est nécessaire (condition pour établir la forme que Painlevé propose), mais il peut y en avoir d'autres symétries accessoires, comme la symétrie sphérique dans le cas que nous étudions.

Illustrons cela, dans le cas où toutes les symétries de la solution relativiste ont été prises en compte et où a remplacé des éléments ($dx^\mu/d\tau$) par les constantes du mouvement E et L associées. Painlevé s'est appuyé sur la forme de Schwarzschild pour sa proposition, mais avec ces constantes intégrées, sa forme relativiste de son premier article donnerait le même résultat.

Dans ce cas, on obtient une équation différentielle géodésique du premier ordre homogène en r, du type $f(r, (dr/d\tau)^2, E, L)= 0,$ avec $\theta = \pi/2$.

Si seule la coordonnée radiale r figure explicitement, les ($dx^\mu/d\tau$) des autres coordonnées sont implicitement présentes, dans le cadre de la structure de la forme de métrique, via leurs constantes du mouvement associées.

Ce n'est pas parce qu'on a remplacé des éléments ($dx^\mu/d\tau$) par des constantes que les règles structurelles de la forme de métrique disparaissent. Ces constantes ont été introduites à des positions bien déterminées par rapport aux autres termes de l'équation avec lesquels elles se combinent éventuellement pour caractériser cette équation. Les mêmes constantes du mouvement, insérées dans une autre structure de métrique, ne donneront pas le même résultat, à savoir la même équation $f(r, (dr/d\tau)^2, E, L)= 0,$ où $\theta = \pi/2$.

On peut se demander, pourquoi la méthode proposée par Painlevé a été pertinente dans le cas de la mécanique newtonienne, théorie fort estimable de la gravitation qui donne d'excellents résultats dans la quasi-majorité des cas, et pourquoi elle ne l'est pas en relativité.

C'est dans la différence des structures des géométries, représentatives de la différence de nature des deux théories, que se trouve la réponse.

La relativité inclut l'auto-couplage de la masse active avec masse passive, à la différence de la théorie newtonienne, ce qui a pour effet que les phénoménologies sont différentes.

En relativité générale, toutes les masses actives des objets, ayant une masse-énergie, contribuent à définir (via le tenseur énergie-impulsion et les symétries) l'intégralité de l'espace-temps auquel les masses passives de ces mêmes objets se couplent, ce qui n'est pas le cas de la mécanique newtonienne ou la masse passive d'un objet se couple avec le champ généré par les autres masses actives.

On peut objecter que la forme proposée par Painlevé incluant une métrique spatiale non euclidienne n'est plus newtonienne, ce qui est vrai, mais l'extrapolation de la méthode, qu'il avait utilisée avec succès pour la mécanique newtonienne, qui permet simplement de modifier le paramètre affine d'une géodésique spatiale, ne change pas fondamentalement la phénoménologie et ne permet pas d'obtenir la forme relativiste.

Même si dans le cas d'une masse unique à symétrie sphérique la phénoménologie est partiellement occultée, elle ne l'est pas totalement, comme nous l'avons vu, et la méthode proposée par Painlevé y est sensible.

Existe- t-il un formalisme qui permet de dériver l'équation géodésique relativiste à partir de l'espace seulement ?

Dans le cas général, les considérations sur les degrés de libertés que nous avons tenues semblent l'exclure, mais dans ce cas particulier très symétrique, si la méthode proposée par Painlevé a échouée, d'autres formalismes peuvent y parvenir comme nous le montrerons.

Painlevé, avec quelques aménagements, adhère à la forme de Schwarzschild

Nous nous sommes longuement attachés à analyser la proposition de Painlevé relative à sa proposition décrite par l'équation *([6bis])* et montré qu'elle était en contradiction avec d'autres équations (valides) qu'il avait formulé *([6])* et *([6ter])* pour montrer qu'on ne peut pas généraliser automatiquement ce qui est valide en théorie newtonienne à la relativité générale.

Ces théories sont différentes dans leur fondement et dans leurs prédictions.

Painlevé ne s'est pas arrêté là dans son article. Reprenons le cours de son argumentation à l'endroit où nous l'avions laissé en faisant remarquer que malgré tout, même si les équations *([6])* et *([6ter])* sont correctes, Painlevé régresse puisque du coup, en imposant la forme *([6])* à la métrique, il élimine de fait la forme qu'il avait proposée dans son article du 24/10/1921.

De ses postulats il conclut: §8 p.1142 :

"Insistons sur le cas particulier où les masses se réduisent à une masse unique ayant la symétrie d'une sphère de centre O, et soit toujours r, θ, φ les coordonnées polaires de l'espace Oxyz. La symétrie et les conditions einsteiniennes montrent que le ds² *est nécessairement de la forme trouvée par Schwarzschild (les unités étant choisies de façon à ce que V =1).*[277]

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2\mu}{\rho}\right) dt^2 - \rho^2 \left(\sin(\theta)^2 d\varphi^2 + d\theta^2\right) - \frac{dr^2}{1 - \frac{2\mu}{\rho}} \qquad ([7])$$

μ *désignant une constante et* ρ *une certaine fonction de* r*, fonction inconnue dont nous savons seulement qu'elle devient infinie avec* r.

La comparaison avec les lois de Kepler et de Newton montrent aussitôt que μ *est positif et diffère très peu de la constante de d'attraction newtonienne*[278] *et que* ρ *diffère très peu de* r *du moins dans les limites de notre système solaire....."*

---

[277] V dénote la vitesse de la lumière (convention à l'époque).

[278] La masse centrale est supposée égale à l'unité ?

Painlevé propose une théorie semi- einsteinienne

Le problème de la mesure des grandeurs définies par la théorie

Bien qu'il ait déclaré p.1139-1140 au début du chapitre *5*, "La gravitation einsteinienne" :

"Nous ne pouvons réaliser que difficilement et toujours imparfaitement les mesures théoriques des longueurs et du temps définis plus haut. D'autre part, nos expériences (quand on les analyse à fond) ne font jamais que constater les coïncidences de deux faits, au même instant au même point de l'espace. Or cette coïncidence subsiste quel que soit le changement (biunivoque) qu'on effectue sur les quatre variables x, y, z, t. D'où l'idée de modifier les équations de la Mécanique en particulier de la gravitation, de telle façon qu'elles revêtent une forme invariante simple, non pas seulement dans le changement des variables spatiales x, y, z mais dans le changement des quatre variables de l'espace-temps."

Ce qui montre qu'il a pris note du caractère formel de simple repère des coordonnées (non physique) mais il reste, malgré tout, très troublé par l'explication par la relativité générale de l'avance du périhélie de Mercure en utilisant la forme de Schwarzschild dont l'interprétation de la coordonnée radiale lui pose toujours problème.

Il élabore une variante qu'il va alors qualifier de semi-einsteinienne (sic) en apportant une petite correction à la coordonnée radiale ρ[279] pour suggérer que même si la forme de Schwarzschild ne correspondait pas aux résultats expérimentaux[280] on pourrait y remédier par cette correction.

Cela n'est qu'une autre manière de remplacer de *r* par *f(r)* même si elle n'est pas faite exactement dans le même esprit.

D'une part cette petite correction peut se comprendre comme un terme d'un ordre supérieur à 1, d'un développement en série qui approximerait une loi (à partir de paramètres physiques) qui ne pourrait pas s'exprimer analytiquement à partir des coordonnées[281] et d'autre part il y a eu une évolution dans son approche.

Il accepte l'idée que la relativité générale donne une représentation plus exacte que la mécanique classique de la gravitation mais non parfaitement "exacte" et la considère comme une base qu'on pourrait amender empiriquement sans pour autant la renier.

---

[279]Le caractère "ad hoc" de cette hypothèse non fondée épistémologiquement contraste avec le caractère de la forme de Schwarzschild bâtie sur les équations d'Einstein.

[280]Bien que "converti", on voit que sa foi dans la théorie de la relativité n'est pas inébranlable.

[281]Comme nous le verrons au chapitre *16,* ce type de méthode est utilisé pour déterminer la forme de la métrique localement minkowskienne de l'espace tangent en un point de la variété.

Une méthode empirique pour remédier aux imperfections de la théorie

Ce qui le conduit à déclarer :

"*Si par la suite, le progrès des observations faisait ressortir des divergences appréciables entre la réalité et les conséquences de la formule de Schwarzschild, la théorie telle que nous l'avons exposée permettrait d'y parer en posant*

$$\rho = r[1 + \varepsilon(r)]$$

ε *étant une fonction de* r *très petite, pour r variant dans les limites du système solaire. Cette correction n'entraînerait qu'une modification relative très faible de l'avance du périhélie et la déviation des rayons lumineux* "

Mais comme nous l'avons suggéré, malgré tout, sa contribution est assez ambiguë, car s'il ne semble pas vraiment totalement convaincu que la solution exacte que donnent les équations utilisant la forme de Schwarzschild est physiquement exacte il admet malgré tout qu'elle peut servir de base à une approche perturbative comme cela se fait pour traiter par exemple le problème à *n* corps en mécanique classique.

Les discussions qui vont suivre, et que nous allons évoquer, permettront de comprendre une telle attitude, puisque nous verrons que le plus farouche des détracteurs de la relativité générale (J. Le Roux) va s'appuyer sur cette "souplesse" de la gravitation newtonienne qu'il dénie à la relativité générale.

Mais comme nous l'avons déjà indiqué il faut distinguer deux choses : la validité des équations de la théorie et la méthode pour résoudre ces équations qui peut faire appel à des méthodes approchées (développements en série, méthodes numériques, simulations..) du fait de la complexité de ces équations.

De même, si le problème à *n* corps n'a pas, en général, de solution exacte en mécanique newtonienne, pour autant physiquement il y a une solution qui ne dépend que de la configuration incluant les conditions initiales solution qui se traduit par un phénomène spécifique déterministe.

Mais on retrouvera ce type de confusion dans d'autres articles[282] des membres de l'académie que nous aurons l'occasion de commenter dans la suite du document.

En effet par cet argument Painlevé suggère que la prédiction "correcte", à la précision des mesures du moment[283], faite par la forme de Schwarzschild ne prouve pas vraiment que la théorie est correcte et que le cas échéant si une petite différence se manifestait, on pourrait (de façon empirique) y remédier par sa méthode.

---

[282]Par exemple J. Le Roux (C.R .A.S du 26 décembre 1922).

[283]Ce qui est de nature à faire "bondir" Einstein, si confiant dans sa théorie. On peut quand même faire observer qu'une théorie n'est jamais parfaitement exacte, simplement dans le cas qui nous concerne, la précision donnée par la solution de Schwarzschild (qui est à ma connaissance traitée dans le formalisme post-newtonien) a été confirmée par des mesures plus précises, donc la relativité générale est au moins une théorie (très)"efficace" ("effective").

Painlevé doute toujours de "l'interprétation physique" des coordonnées en relativité

Le trouble de Painlevé n'est pourtant pas sans fondement, car une interprétation physique purement relativiste, comme nous l'avons définie précédemment[284], n'est pas évidente.

Prenons l'exemple de l'avance du périhélie de Mercure dont l'explication par la relativité générale avait frappé les esprits et qui comme on le verra dans l'examen des contributions à l'Académie des Sciences dans la période 1921-1922 donnera lieu à une polémique farouche en particulier entre J. Le Roux et M. Brillouin. On traite ce problème en général dans le cadre du formalisme[285] "post-newtonien" le résultat étant :

$$\Delta\Phi = \frac{6\pi G M}{c^2(1-e^2)a} \quad .$$

Dans cette équation, certaines grandeurs comme le demi grand axe de l'ellipse *a*, l'excentricité *e*, ont manifestement été calculées dans le cadre de la théorie newtonienne dans un espace euclidien, en attribuant un caractère physique aux coordonnées.

Différentes méthodes ont sans doute été utilisées[286] pour calculer ces paramètres à partir d'observables par les astronomes mais en toute rigueur une analyse détaillée de l'élaboration de ces paramètres serait nécessaire pour estimer s'il y a un biais et si oui de quelle ampleur.

Quant à la masse *M* du corps central elle résulte des lois de Kepler, à partir de la période orbitale et des autres paramètres (*a, e)*.

L'angle de précession $\Delta\Phi$, est bien une observable, mais d'une part supposé être dans un espace euclidien ce qui n'est pas exactement le cas, et d'autre part ce qu'on observe, en fait, c'est une valeur beaucoup plus grande (5601" par siècle) dont on soustrait tous les effets connus en mécanique newtonienne (5025" dû à la précession des équinoxes dans notre système de coordonnées géocentrique auquel s'ajoute 532" lié à la perturbation des planètes) dont $\Delta\Phi$ (43" environ) en est le résidu très petit, ce qui nuit à la précision du résultat.

Pour la précession des équinoxes comme c'est purement géométrique lié à un changement de référentiel cela ne pose pas de problème, mais pour la perturbation par les planètes on fait implicitement l'hypothèse qu'en relativité générale on obtient le même résultat qu'en

[284]S'appuyant sur la sélection du modèle en meilleure adéquation avec sa prédiction de la valeur des observables.
[285]On parle aujourd'hui de formalisme post-newtonien (qui définit un certain nombre de paramètres permettant de discriminer différentes théories), mais lorsque Einstein a fait son calcul cela n'était pas aussi formalisé. Ce formalisme permet des calculs approchés, au prix de l'abandon du caractère dynamique de la théorie, par un développement en série de l'équation d'Einstein linéarisée (ce qui réintroduit un espace de fond minkowskien).
[286]On a pu mesurer ces valeurs par des méthodes trigonométriques en mesurant des angles sur une base connue (on suppose connu les paramètres géométriques du système Terre Soleil). D'autres observables possibles sont le diamètre angulaire de Mercure, sa luminosité et sa variation de luminosité en tenant compte des phases bien entendu, des effets Doppler liés à la vitesse de Mercure sur son orbite, des temps par rapport à des occultations que la mécanique céleste prédit, etc..).

mécanique classique à mieux que 1 % (1 % correspond à 5"), ce qui n'est pas évident *a priori*, puisqu'on se sert du résultat établi en mécanique classique[287] pour cette précession alors que par contre on suppose un résultat totalement différent pour un autre phénomène gravitationnel.

On voit que l'interprétation est sujette à quelques hypothèses qui peuvent sembler antinomiques ce qui a pu troubler, à juste titre, les esprits.

Comme nous l'avions indiqué, la méthode correcte consiste à calculer, dans les modèles relativistes concurrents, toutes les observables et à procéder par ajustement des valeurs mesurées des observables par rapport aux valeurs prédites par ces modèles. Ici on peut avoir un doute, car pour valider cette précession Einstein est parti des données observables astronomiques disponibles pour $\Delta\Phi$, a, e, et M, résultats de mesures et de calculs réalisés dans un contexte strictement newtonien[288].

Malgré cela, il a trouvé un résultat en bon accord avec les observations que la mécanique newtonienne (sous réserve de bien préciser les hypothèses prises dans l'interprétation du résultat) ne prédisait pas et ce qui la mettait en défaut[289] et a qui permis de "discriminer" les deux théories.

Il est vrai que d'abord on a utilisé le formalisme post-newtonien qui est un formalisme conceptuellement différent de celui de la relativité, mais tout de même censé donner une bonne approximation de ce que donnerait la relativité générale dans les conditions où il s'applique (champ faible, statique ou lentement variable, faible vitesse des corps) et ensuite l'avance du périhélie de Mercure est un effet du second ordre très petit qui ne se révèle mesurable que parce qu'il est cumulatif (on observe cet effet cumulé sur un siècle).

Cela tend à prouver que pour cet effet très petit, assimiler les coordonnées relativistes aux grandeurs newtoniennes n'induit qu'une erreur très petite (d'un ordre supérieur à l'effet observé) qui ne pollue que très peu le résultat du calcul, lui-même, approximatif de la relativité générale.

Ceci est manifeste de la stabilité des lois de la relativité générale (et du formalisme post-newtonien) peu sensibles à des petites perturbations et résulte de la nature de la théorie dont les lois obtenues par le principe variationnel (de moindre action) conduisent à des extremums.

Mais cela peut chagriner un esprit rigoureux comme celui de Painlevé et n'est peut-être pas étranger à ses états d'âme sur ce problème de coordonnées.

---

[287]Nous verrons dans la suite du document que M. Brillouin donne un argument pour le justifier.

[288]Une démarche relativiste rigoureuse se devrait de déduire la valeur des coordonnées (t, r, θ, φ) à introduire dans les équations "rigoureuses" utilisées en relativité à partir des résultats de mesure d'observables caractéristiques en utilisant le modèle (le ds^2 par exemple). Ceci prédirait un résultat, qui permettrait de prédire des valeurs d'observables qu'on pourrait vérifier par des mesures sur ces observables. La démarche est indirecte.

[289]Point contesté "énergiquement" par J. Le Roux à l'époque. Voir la discussion des articles de l'Académie qui va suivre.

Synthèse et évolution des idées de Painlevé dans cet article.

Comme il le déclare au début, l'objet de cet article est, selon lui, de dresser un état, aussi objectif que possible dans un formalisme aussi proche que possible que celui utilisé dans les instances académiques, des théories newtoniennes et relativistes.

À ce titre il va formaliser sous forme axiomatique les deux théories complétant ainsi sa première contribution sur la mécanique classique et ajoutant une contribution nouvelle pour la relativité générale qui est l'apport essentiel de cet article.

Il commence donc par préciser les équations de son formalisme géométrique de la mécanique newtonienne en donnant explicitement la valeur du temps newtonien.

Nous avons souligné le caractère hybride de cette formulation puisque comme dans la formulation classique, ce n'est pas une équation unique qui définit l'équation géodésique comme en relativité générale, mais un système de deux équations où le lien se fait par la métrique spatiale non euclidienne.

Nous avions montré à propos du deuxième article comment il était conceptuellement possible d'unifier la présentation de la solution. Painlevé ne s'est pas attaché à cet aspect du problème.

Painlevé synthétise ensuite sous forme axiomatique les deux théories ce qui lui permet de procéder à une comparaison, comme il l'avait annoncé.

Son axiomatique de la relativité générale est entachée de contraintes qui n'ont pas lieu d'être, comme la restriction aux solutions indépendantes explicitement de la coordonnée temporelle t et celles concernant la réversibilité, conditions qui lui avaient fait renoncer à sa solution innovante, ce qui restreint les solutions à des formes strictement quadratiques.

Ainsi, diminuée par ces restrictions, la relativité générale qu'il propose n'est qu'un pâle reflet de la théorie.

La contribution majeure consistant à proposer une solution formellement similaire à celle de la mécanique newtonienne avec comme principale adaptation le remplacement de la section spatiale euclidienne par une section spatiale non euclidienne est une extrapolation trop rudimentaire qui se révèle insuffisante pour décrire les équations de la relativité générale.

Au-delà du formalisme, cela montre que Painlevé n'avait pas intégré que, en relativité, la coordonnée temporelle est un quatrième degré de liberté, indépendant du paramètre dynamique.

Autrement Painlevé aurait réalisé que conceptuellement on ne pouvait pas définir un objet, intrinsèquement à quatre dimensions avec quatre degrés de liberté, avec des équations qui n'en contraignent que trois.

Les contraintes associées aux constantes du mouvement de cette solution très symétrique, si elles réduisent le nombre de degrés de liberté, ce qui pourrait sembler plaider vers une

convergence des théories, ne s'appliquent pas, dans le formalisme proposé par Painlevé, sur des formes structurellement compatibles et ne permettent pas, malgré le nombre de degrés de liberté réduit de rendre équivalente les deux formalismes.

L'échec de sa proposition n'est pas total, car sa solution convient malgré tout pour les géodésiques de type nul, qui sont celles que la lumière parcourt.

Ce résultat montre que la solution d'espace-temps, définie par ses équations, même si elle est différente de celle que les équations de la relativité générale définissent, a cependant la même structure conforme qu'elle. Ceci est un résultat inattendu et intéressant puisque cela signifie que ces espaces-temps ont la même structure causale, une relation non triviale qui traduit certaines affinités structurelles entre les théories.

En fait, cela va même plus loin, car dans un autre formalisme, utilisant des bases locales minkowskiennes définies, par des tétrades inverses, dans les coordonnées globales de son équation relativiste dont il avait précisément donnée la forme dans son premier article, on montre que l'équation géodésique[290] est totalement définie par les coordonnées spatiales de cette forme relativiste et par des gradients spatiaux de fonctions de ces coordonnées spatiales.

Ceci montre, que formellement, l'espace seul peut suffire à définir l'équation du mouvement.

Est-ce une intuition ou un hasard, mais Painlevé avait donné, d'une part les seules coordonnées adaptées à ce formalisme, et d'autre part, il avait imaginé que, pour cet espace-temps, l'équation du mouvement pouvait ne dépendre que de l'espace.

Seule sa mise en œuvre de ces idées a été défaillante.

À ce titre on ne peut pas considérer sa contribution principale comme complètement sans intérêt, même si comme nous l'avons montré, il y a un défaut de compréhension manifeste de la relativité générale dans la contribution de Painlevé sur cette théorie.

Mais, quand on voit comment ce qu'il y avait d'intéressant dans ses contributions a été ignoré voire rejeté par ses contemporains, il convient d'exprimer cette critique avec retenue.

Il termine son article par une reprise synthétique de ce qu'il avait plus largement développé dans son article précédent qu'il qualifie de "théorie semi-einsteinienne" à propos du problème du corps unique à symétrie sphérique où le malaise qu'il éprouve vis-à-vis du caractère non physique des coordonnées resurgit.

Comme précédemment, sa démarche est une tentative de réintroduction de grandeurs spatiales ayant un caractère physique par des aménagements de coordonnées, tentative vouée, par principe, inéluctablement à l'échec comme nous l'avions déjà indiqué à propos de son article précédent.

[290]Équation géodésique, exprimée dans cette base locale où on utilise les coefficients de rotation de Ricci en lieu et place des symboles de Christoffel. Voir chapitre 17, équations (17-16) à (17-19). Ceci est aussi vrai pour la solution de Kerr, autre espace-temps où la source du champ est unique.

Painlevé se retire en douceur du débat

Quoi qu'il en soit, Painlevé, confronté à son incapacité à faire rentrer la relativité dans le moule de la mécanique classique ce qui était malgré tout son objectif premier s'est résolu à faire un état des lieux en toute neutralité, assorti toutefois de contributions personnelles, ce qui lui permet de se retirer honorablement, d'un débat dont il pressent qu'il devient improductif.

Il indique bien une communication à venir "faisant la comparaison avec la doctrine intégrale d'Einstein", mais cette communication ne verra jamais le jour (à ma connaissance).

Il faut rappeler qu'à la même époque il est très pris par son action politique (il avait été réélu député en 1919) puisqu'il anime la ligue de la République en 1921-22 et participe au Cartel des gauches qui sera victorieux, ce qui le conduira à la présidence de la Chambre du 9 juin 1924 au 17 avril 1925, jusqu'au moment de sa candidature à la présidence de la République, après la démission d'Alexandre Millerand, on comprend qu'il ait délaissé ses investigations sur la relativité générale.

Au vu de sa contribution très originale, bien que fugace, on ne peut que regretter qu'il n'ait pas persévéré[291] et qu'un dialogue constructif ne se soit pas instauré avec ses contemporains ce qui aurait permis à la science de faire un grand bond en avant.

Pour autant, comme nous allons le montrer, le débat était lancé. Des contributions, dont certaines très brillantes, mais aussi les controverses vont se succéder pendant plusieurs années à l'Académie de Sciences.

Nous commencerons par considérer la position de l'Académie des Sciences vis-à-vis de la théorie d'Einstein jusqu'à la contribution de Painlevé, ce qui va être rapide vu qu'elle ne s'y était pratiquement pas intéressée.

Ensuite nous évoquerons le déferlement de communications qui a suivi la communication (en fait les communications) de Painlevé comme en attestent les références citées à la fin du document, que nous avons tirées des références globales et regroupées pour mieux en montrer l'ampleur.

[291]Pour une contribution qui s'est déroulée sur un intervalle de temps de six mois environ (21/10/21 – 1/05/22), sachant que Painlevé était un néophyte en relativité générale, on peut imaginer ce qu'il aurait pu apporter s'il avait persévéré.

4- Le débat à l'Académie des Sciences avant, pendant et après la contribution de Painlevé

1915-1920 : l'Académie des Sciences ignore superbement la théorie d'Einstein

La relativité générale, même si elle a été finalisée en plein cœur du premier conflit mondial, ce qui n'a pas favorisé sa diffusion, a suscité rapidement un nombre de travaux et d'échanges importants entre scientifiques au niveau international.

Les historiens des sciences[292] se sont naturellement intéressés à cette période de mutation profonde de la conception d'une théorie aussi fondamentale que la gravitation aussi nous n'aborderons pas cet aspect qui a été traité de manière très circonstanciée et synthétique.

Par contre, l'Académie des Sciences est restée en retrait pendant une période assez longue, guerre de 1914-1918 oblige, puisque bon nombre de scientifiques étaient impliqués dans la défense des intérêts nationaux, comme Painlevé lui-même qui a été, rappelons, le ministre de la Guerre en 1917 puis Président du Conseil pendant une courte période la même année.

Son discours [293]aux accents guerriers, inaugurant sa présidence de l'Académie des Sciences en 1918, atteste de l'importance qu'il accorde à l'implication de l'Académie et de ses membres dans la défense de la nation.

La fin du conflit, sur champ de ruines, compte tenu du désastre humain qu'il a laissé, n'a pas permis de panser les plaies rapidement et on conçoit que l'Académie n'ait pas été très motivée à prendre en considération une théorie élaborée, par un scientifique en poste à Berlin[294].

En effet, alors que la publication de la relativité générale date de fin 1915, et son admirable article de synthèse de 1916[295], examinons ce qui y fait référence dans les comptes rendus de l'Académie des Sciences.

1915 : rien.

1916 : rien.

1917 : rien.

1918 : 30 décembre : Un seul article de **E. Vessiot** (classé en mathématique physique, assez technique, traitant de la modélisation des fluides par le tenseur énergie-impulsion en relativité générale) traitant d'un invariant intégral de l'hydrodynamique, se réfère à la relativité générale.

1919 : rien, en relativité générale.

Pour mémoire signalons quatre articles de **G. Sagnac** (8 septembre, 13 octobre, 3 novembre, 1er décembre qui tous se réfèrent à la relativité restreinte : émission, propagation et réception de la lumière dans un espace euclidien lorsque les sources et récepteurs sont en mouvement, en particulier sur un plateau en rotation.

[292]Voir en particulier, Eisenstaedt (1986) et Eisenstaedt (1987)

[293]Voir compte rendu de l'Académie des Sciences du 7 janvier 1918, p.17-19. Extrait du discours "Votre mission est la recherche de la vérité scientifique, sur laquelle n'ont de prise ni le temps, ni la mort, ni les passions humaines. Au plus fort des orages, votre raison ne saurait se départir de ces règles inflexibles. Mais, dans Syracuse assiégée, Archimède appliquait la rigoureuse justesse de la géométrie à la construction de catapultes géantes. Quel est donc le savant dont l'esprit resterait sourd à l'appel de la patrie en danger ?"

[294]Einstein était alors de nationalité suisse mais avait accepté en 1914 un poste de Professeur à Berlin, il était aussi membre de l'Académie des Sciences à Berlin.

[295]Einstein (1916)

1920 : premières contributions relativistes à l'Académie des sciences

1920 : deux articles connexes de la relativité générale à caractère mathématique de **A. Buhl** sur la formule de Stockes dans l'espace-temps et ses conséquences, (20 septembre et 26 octobre).

26 juillet 1920 : A. Perot : "Comparaison des longueurs d'onde d'une raie de bande du cyanogène dans la lumière du soleil et dans celle d'une source terrestre"

Cet article très intéressant, rappelle la prédiction de la théorie de la relativité générale : le rapport des longueurs d'onde d'une raie spectrale donnée issue de la lumière reçue du Soleil et de celle issue d'un dispositif générant cette raie dans un laboratoire terrestre, mesurée sur Terre, doit valoir $1+2.10^{-6}$.

Il décrit donc son expérience, consistant à mesurer une raie spectrale donnée générée d'une part en laboratoire sur Terre (par un arc électrique) et observée d'autre part dans la lumière émise par le Soleil.

Tout en faisant remarquer que la pression qui influe sur la longueur d'onde de la raie n'est pas connue à la surface du Soleil (sur Terre la raie est générée à la pression atmosphérique), ce qui rend les résultats, de l'expérience, assez incertains, il donne les résultats qu'il a obtenus qui montrent que la longueur d'onde de la raie émise par le Soleil est plus longue, la différence relative valant $(2,22 \pm 0,1)10^{-6}$ en valeur brute et $(1,6\pm0,3).10^{-6}$ en valeur corrigée, en tenant compte du mouvement de la Terre et constate que la valeur prédite par Einstein est bien dans cette fourchette.

Ce résultat "remarquable"[296] ne passera pas à la postérité, car la vérification expérimentale de cet effet de "rougissement gravitationnel" est en fait très délicate, et ne sera considéré comme acquise que beaucoup plus tard[297].

Il faudrait reprendre en détail l'expérience d'A. Perot pour comprendre si son résultat est le fruit d'une heureuse coïncidence ou s'il a négligé l'importance de l'erreur de mesure mais ceci montre qu'il est toujours délicat de faire une expérience objective quand on connaît le résultat qu'on doit trouver.

[296]Il semble que ce soit la première expérience de ce type en France. Mais dans une lettre adressée à Ehrenfest le 10 avril 1914, Einstein signale que Freundlich avait "montré avec une précision stupéfiante le décalage vers le rouge du centre des raies du Soleil, grâce au matériel d'observation nouveau, très précis, d'un Américain". Cité dans : Balibar F., Darrigol O. Eisenstaedt J. Pottier L., Ritter J., Stachel J. (1993) "Albert Einstein oeuvres choisies, Relativités I, p.168, note 33.

[297]Il a d'abord été vérifié en laboratoire en 1960 (Harvard), puis observé sur des naines blanches et enfin sur le Soleil en 1991 (précision de 2 %), la turbulence de sa photosphère rendant la mesure délicate. Merci à Nathalie Deruelle pour cette précision.

> De toute façon l'expérience doit pouvoir être reproduite et de préférence par d'autres dispositifs expérimentaux différents pour éviter les "biais" expérimentaux.[298]
>
> Pour mémoire citons plusieurs articles traitant de la relativité restreinte dans la classification "Ether lumineux" : **A. Righi** (1er mars, 28 juin et 5 juillet), sur l'expérience de Michelson, de **Villey** (2 août) sur les travaux de A. Righi, de **G. Sagnac** (29 mars, 25 mai, 12 juillet) toujours sur la propagation de la lumière dans des systèmes constitués de dispositifs mobiles, **L. Bloch** (20 décembre 1920) sur la comparaison des théories de Lorentz et de Mie.

On voit que l'Académie ne s'est guère intéressée au sujet durant les quatre ans qui ont suivi la publication de la théorie d'Einstein. L'avis général qui prévaut dans les premières réactions qui vont suivre (y compris chez Painlevé au début) est que c'était un phénomène de mode vouée à tomber rapidement dans l'oubli.

[298]Ceci rappelle la confirmation (plus ou moins discutable) de la déviation des rayons lumineux au cours de l'éclipse de Sobral en 1919. Mais cela a été confirmé par des expériences ultérieures, tout comme le rougissement gravitationnel.

1921 : l'article de Painlevé symptomatique de la défiance de l'Académie vis-à-vis d'Einstein

L'Académie des Sciences commence à réagir vers le milieu de l'année 1921 au succès que rencontre la théorie d'Einstein dans la communauté scientifique internationale[299]. Ceci va être l'objet d'un débat soutenu et parfois tendu entre deux courants de pensée.

Certains membres de l'Académie sont très sceptiques voire hostiles à la théorie de la relativité générale. Ce courant dont J. Le Roux, auteur d'une multitude de notes visant à disqualifier la théorie d'Einstein, est le membre le plus actif est majoritaire surtout au début. Mais on verra apparaître rapidement un courant minoritaire de scientifiques séduits par cette approche nouvelle et constructive de la gravitation permettant d'explorer autrement l'univers.

Il faut signaler que la théorie de la relativité générale n'avait pas fait l'objet d'ouvrages de référence en français. Il faudra attendre les ouvrages de H. Weyl (Zeit, Raum, Materie, ed. 3, 1919, puis sa traduction de l'édition 4, Temps Espace Matière en 1922) et de A. Eddington (1921-Espace, temps, gravitation) pour que le sujet soit vraiment considéré comme sérieux.

Ces ouvrages qui arrivent à point nommé, vont permettre de nourrir le débat.

Paradoxalement J. Le Roux s'acharne à dénoncer (en tentant de vider de sens cette prédiction de la relativité) la concordance entre la prédiction de l'avance du périhélie de Mercure par la théorie d'Einstein et les résultats des observations dont la valeur semble bien établie et pas la déviation des rayons lumineux par le Soleil, alors que la confirmation expérimentale réalisée lors de l'éclipse de Sobral en 1919 prêterait plus à critique, au vu de l'imprécision des mesures.

Nous verrons d'ailleurs qu'une partie significative des articles va traiter de cette avance du périhélie de Mercure et que certains proposeront des hypothèses différentes de celles de la relativité générale pour tenter de le justifier.

1921-T172 : deux articles, de J. Le Roux, contestent les preuves de la théorie d'Einstein

Commençons par rappeler que c'est en 1921 qu'Einstein obtient le prix Nobel de physique, qui ne lui sera d'ailleurs remis qu'en 1922, certes pas pour la relativité générale mais cela lui confère une notoriété qui peut expliquer que l'Académie des Sciences commence à s'intéresser à sa théorie.

[299] Voir Eisenstaedt 1982, 1986, 1987 par exemple.

17 mai 1921 : J. Le Roux : "Sur la théorie de la relativité et le mouvement séculaire du périhélie de Mercure"

Il commence son article en déclarant :

"On a considéré comme une confirmation éclatante de la théorie de la relativité la découverte d'une loi de la gravitation susceptible d'expliquer le mouvement du périhélie de Mercure.

Une critique judicieuse constate que ce résultat a bien été obtenu à propos de la théorie de la relativité, mais qu'il n'en est pas une conséquence et ne constitue même pas un argument en sa faveur. ..."

Au-delà d'un certain parti pris évident, la "critique judicieuse" qui suit, à laquelle on peut se rapporter par curiosité, montre que J. Le Roux fonde son argumentation sur l'utilisation d'un "pseudo-temps" par Einstein (la coordonnée *t*) qui ferait perdre tout sens physique aux résultats et sur la multiplicité des formes possibles, malgré "une unicité apparente (sic)" pour décrire le ds^2 qui montrerait qu'on pourrait trouver n'importe quoi, tout ceci vidant définitivement de tout sens l'interprétation du résultat.

Ce qui est stupéfiant dans ses propos, c'est qu'il propose, dans le corps de l'article, une démonstration de la forme de Schwarzschild qu'il qualifie "de plus simple et plus rapide que celle de Schwarzschild[300]" qui partant d'une forme déjà très contrainte[301] utilise les équations d'Einstein pour obtenir la solution, en prenant en compte les conditions aux limites, et déclare de façon péremptoire dans sa conclusion que cela n'a rien à voir avec la relativité alors qu'il utilise les équations d'Einstein pour l'établir.

Il conclut son article en déclarant:

"*Quoi qu'il en soit, le résultat est très intéressant. Il montre l'utilité de l'introduction du pseudo-temps, dont il resterait à déterminer la signification physique.*

Quant à la relativité elle-même, elle n'intervient nullement dans la question."

L'article illustre comment le caractère passionnel du débat peut altérer le jugement et amener un membre de l'Académie, apprécié de ses pairs[302], à développer une argumentation partisane.

[300]Laquelle est due à Droste, rappelons-le.
[301]Sa méthode est plus rudimentaire que celle que proposera Painlevé dans son article du 14 novembre 1921.
[302]Nous verrons que J. Le Roux sera honoré par l'Académie fin 1923 par un prix.

13 juin 1921 : J. Le Roux : "La loi de gravitation et ses conséquences"

C'est une autre tentative pour disqualifier la relativité générale en prétendant relever une contradiction dans la mesure d'une distance radiale.

L'erreur est liée à la confusion entre coordonnée et grandeur physique, problème que nous avons largement eu le temps de commenter à propos de Painlevé.

Mais il n'y a rien de vraiment nouveau dans l'argumentaire, c'est le prolongement de l'article précédent.

27 juin 1921: G. Juvet : " Les formules de Frenet pour un espace de Weyl"

G. Juvet qui a traduit avec R. Leroy [303]"Raum, Zeit, Materie", édition 4, de Herman Weyl propose un article très formel s'appuyant sur l'ouvrage de H. Weyl.

L'ouvrage de H. Weyl, que sa traduction en français va rendre plus facile d'accès, est à cette époque l'ouvrage de référence concernant les notions et concepts mathématiques liés aux espaces temps comme celui qu'on rencontre en relativité, à laquelle il consacre une partie de son livre, bien que lui-même ait proposé une théorie différente.

Pour souligner dans quel esprit cette traduction a été faite, citons la fin de la préface de la traduction de l'ouvrage :

"Ce n'est pas une adaptation que nous donnons, mais une traduction fidèle ; nous avons constamment respecté la pensée enthousiaste et profonde de l'Auteur ; nous espérons en avoir rendu les nuances et notre but sera atteint si l'ouvrage français éveille des admirations nouvelles pour l'œuvre de M. Einstein, et suscite des recherches fécondes sur les questions qu'elle laisse encore en suspens."

Difficile de rendre un plus vibrant hommage au travail d'Einstein !

Il va inspirer de nombreuses communications importantes à caractère mathématique aux membres de l'académie.

Les choses vont commencer à bouger sérieusement au deuxième semestre.

1921-T173 : la critique devient plus constructive

[303]Temps espace Matière :1922, Librairie scientifique A. Blanchard.

25 juillet 1921 : E. Borel : "Sur les hypothèses fondamentales de la physique et de la géométrie"

E. Borel, ami de Painlevé, dont la notoriété mathématique est déjà grande à cette époque, s'intéresse à la théorie d'Einstein qui a fait l'objet de travaux fondamentaux par des mathématiciens réputés comme Hermann Weyl dont l'ouvrage monumental "Temps Espace Matière" traduit en français (à partir de l'édition 4 en allemand) constitue une référence dans l'approche formelle des espaces temps, en particulier métriques et riemanniens.

Il se réfère également aux travaux d'Eddington dont la renommée avait été consacrée par son implication dans l'interprétation de l'éclipse de Soleil de Sobral qui avait "confirmé" une des prédictions de la théorie de la relativité.

Ces références prestigieuses, commencent à convaincre certains membres de l'Académie que la théorie d'Einstein n'est pas qu'une "passade".

Pourtant comme il le déclare au début de son article :

"Les récents travaux sur la théorie de la relativité, et notamment ceux de MM. Weyl[304] *et Eddington*[305] *ont montré l'importance qu'ont pour les physiciens les recherches sur les principes de la Géométrie, regardées parfois comme relevant plutôt de la Philosophie que de la Science. Il ne me paraît donc pas inutile de chercher à préciser quelles sont les hypothèses fondamentales de nature physique, qui sont impliquées dans toutes les théories par lesquelles on a tenté une synthèse de la Géométrie et de la Physique ; les idées essentielles ont été émises par Riemann et par Poincaré ; il y a seulement lieu de les adapter aux suggestions qui nous ont fait envisager comme possibles et même comme probables des faits physico-géométriques qui, au XIX ième siècle, eussent paru invraisemblables."*

On perçoit une certaine méfiance vis-à-vis de l'approche d'Einstein, qui a fondé sa théorie sur des considérations épistémologiques, comme cela transparaît avec éclat dans la longue introduction de son article de synthèse de 1916[306]. E. Borel se propose de se débarrasser de ces habits philosophiques qui, selon lui, brouillent l'approche formelle du problème pour "recadrer" l'approche sous un angle physico-mathématique qui lui paraît plus objectif.

En réduisant, pour simplifier, son analyse à l'espace à trois dimensions à un instant donné, "une section arbitraire sous de larges conditions de l'univers à quatre dimensions", il va s'intéresser à l'espace physique pour définir de quelles propriétés structurelles il doit jouir pour qu'une théorie comme celle de la relativité soit possible.

[304]H. Weyl, Raum, Zeit, Materie, édition 3. 1919.
[305]A.S. Eddington espace-temps, gravitation (traduction Rossignol) et Proceedings of the Royal Society of London (A, vol. 99, mai 1921).
[306]Einstein A. 1916.

À cet effet il va dégager quatre hypothèses : trois pour l'espace physique (continuité des coordonnées, au moins par morceaux, existence d'une forme locale d'un "ds^2", continuité des coefficients de cette forme) la quatrième étant la définition d'un $d\sigma^2$ pour l'espace géométrique[307]. Ces hypothèses, selon lui, permettent de fonder une relation mathématique entre l'espace physique caractérisé par son ds^2 et l'espace géométrique caractérisé par son $d\sigma^2$. Il se place dans un contexte d'espace à trois dimensions mais son approche est généralisable.

En appelant *u, v, w* les coordonnées générales, il arrive à la relation suivante :

$$\frac{ds^2}{d\sigma^2} = \frac{\lambda^2 \varphi(du, dv, dw)}{\psi(du, dv, dw)}$$

L'espace physique est défini par :

$$ds^2 = \lambda^2 \varphi(du, dv, dw)$$

Où φ est une forme quadratique à coefficients variables et λ un facteur arbitraire caractérisant la longueur variable de la jauge aux divers points de l'espace.

E. Borel suppose (hypothèse 3) qu'on impose à la jauge de permettre la continuité de λ et des coefficients de φ.

L'espace géométrique étant défini par :

$$d\sigma^2 = \psi(du, dv, dw)$$

Où ψ est une forme quadratique quelconque (à coefficients continus) ; si la forme est à courbure nulle l'espace géométrique sera euclidien. Le choix de cette fonction peut sembler inutile mais pourrait servir à rendre la description plus simple selon lui.

29 août 1921 : G. Bertrand : "La loi de Newton et la formule d'Einstein pour le périhélie des planètes"

Partant de l'équation donnée par Einstein pour l'avance du périhélie des planètes (formule obtenue par une approximation) l'auteur propose de retrouver le même résultat en modifiant de façon **"**ad hoc**"** la loi de Newton.

[307]La distinction entre espace géométrique et physique est inspirée par l'ouvrage de H. Weyl, (Zeit-Raum-Materie) comme sa référence à la jauge, offrant un degré de liberté local pour la mesure, dans la suite de l'article le confirme.

24 octobre 1921 : premier article de Painlevé "La Mécanique classique et la théorie de la relativité". Cet article que nous avons analysé en détail, au chapitre *1*, va mettre le feu aux poudres puisque comme l'annexe *4* le montre on relève, sur le sujet, pas moins de 10 communications en 2 mois en 1921, 18 communications en 1922 et 11 en 1923.

24 octobre 1921 : E. Picard "Quelques remarques sur la théorie de la relativité", que nous avons commenté.

7 novembre 1921 : A. Buhl : "Sur le rôle des symétries analytiques dans les théories relativistes". Article mathématique très formel, non analysé.

7 novembre1921 : P. Langevin "Sur la théorie de la relativité et l'expérience de M. Sagnac". Nous avons commenté cet article qui répond à P. Painlevé et E. Picard.

14 novembre 1921 : Deuxième article de Painlevé "La gravitation dans la mécanique de Newton et dans la mécanique d'Einstein", que nous avons étudié en détail.

14 novembre 1921 : J. Chazy "Sur les fonctions arbitraires figurant dans le ds² de la gravitation einsteinienne", (présenté par Painlevé) en réaction au premier article de Painlevé.

> Après avoir indiqué que dans la forme de Schwarzschild, *r* n'était pas la distance "physique" qu'il appelle *OM* (il a sans doute une conception euclidienne de cette distance) mais en était une fonction "arbitraire" *f(OM)* qu'on soumet à certaines conditions comme Painlevé l'a fait, l'auteur fait remarquer que dans la forme de Schwarzschild, pour expliquer le résultat (approximatif en formalisme post-newtonien) de la déviation des rayons par le Soleil, le passage à la limite newtonienne ($r >> 2M$) montre qu'il faut que le terme *a* donné, dans l'équation (1) de l'article de Painlevé, vaille le double du coefficient d'attraction newtonien soit *2M*.
>
> Par ailleurs il déclare *a contrario* de ce que Painlevé revendiquait[308] :

> *"Considérons deux autres conclusions tirées par les einsteiniens de la formule (1) [309] dont M. Painlevé conteste la légitimité. Si la fonction f(OM) est croissante, on peut conclure en raisonnant comme quand cette fonction se réduit à la distance OM, que les vibrations des atomes ont une durée plus longue au voisinage du Soleil qu'à la surface de la Terre."*

> C'est la confusion que nous avons signalé à maintes reprises qui vient de ce que implicitement on suppose un référentiel absolu "euclidien" en chaque point qui servirait de référence. En fait c'est l'espace tangent qui est physique et dans cet espace

[308] Cette contestation, qui ne porte que sur les conclusions du ds², a-t'-elle incité Painlevé à renoncer à sa forme ?
[309] Dans l'article de Painlevé du 24 octobre 1921.

la fréquence d'une raie caractéristique émise (et mesurée dans cet espace tangent) est toujours la même.

Par contre, mesurée dans un autre référentiel, elle dépend de la relation entre référentiels.

Il faut bien définir ce qu'on appelle décalage spectral entre un référentiel d'émission et un référentiel de réception, ce qui est pourtant simple mais ne semble pas aller de soi à cette époque et qui a été une source de malentendu constant.

Il conclut par des propositions (qui s'inscrivent dans le cadre d'un développement en série, valide sous certaines hypothèses).

28 novembre1921 : J. Le Roux "Le temps dans la mécanique classique et dans la théorie de la relativité"

J. Le Roux continue de fustiger la théorie d'Einstein cette fois ci en s'appuyant sur le fait que :

"Les résultats les plus contestables de la théorie de la relativité se déduisent, pour la plupart, de la définition de l'isochronisme, d'après Einstein. On est ainsi conduit à la notion d'un certain paramètre t qui diffère en réalité du temps vulgaire. On n'a pas le droit d'appliquer à l'un ce qui se rapporte à l'autre. Les mots n'ont par eux-mêmes aucun sens transmissible, et le seul moyen que nous ayons pour reconnaître si deux personnes attachent la même signification aux termes du langage, c'est de remonter à l'expérience commune et d'examiner si les mêmes mots sont appliqués aux même faits observables. …."

Pourtant à l'époque, Einstein avait clairement expliqué depuis longtemps (fin 1915) que les coordonnées n'avaient pas de sens physique et avait par ailleurs bien défini le temps propre d'un observateur.

Mais comme ce temps propre n'est pas universel puisqu'il est associé à chaque observateur et que la coordonnée *t* qui est générale n'est pas physique, on conçoit le trouble de certains fidèles du temps absolu universel (s'appliquant à tous les observateurs) de la mécanique classique (appelé ici "temps vulgaire").

Pour mémoire, signalons aussi quelques articles connexes de **E. Esclangon** sur la relativité du temps (relativité restreinte) , **Majorana** sur une théorie de l'absorption de la gravitation par les milieux pondérables et **K. Ogura** (présenté par E. Borel) sur la courbure des rayons lumineux dans un champ de gravitation (selon une théorie différente de la relativité générale) , sur l'extension du théorème de Liouville au champ de gravitation et sur la théorie de la gravitation dans un espace à deux dimensions (exemple des orbites planes), dans cette période.

1922 Le débat va s'animer et se structurer : un courant favorable à la théorie d'Einstein émerge, dont trois contributions capitales tombées dans l'oubli

1922-T174 : le débat prend de la hauteur, il en résulte quelques articles remarquables

7 janvier 1922 : E. Picard, "Le principe de relativité et ses applications à l'astronomie"

L'auteur présente une brochure exposant un article plus historique que critique sur la relativité qu'il a réalisée suite à son article du 24 octobre 1921. Il ne prend pas parti sur la validité de la théorie en particulier sur le temps qui à défaut de recevoir une définition universelle doit être considéré comme ce qu'on mesure par une horloge.

6 février 1922 : L. Lecornu : "Quelques remarques sur la relativité"

L'auteur commence par contester le principe de relativité en ces termes :

"Le principe de relativité est parfois énoncé en ces termes: Les lois de la nature sont les mêmes pour des observateurs qui sont en mouvement de translation uniforme l'un par rapport à l'autre.

C'est là une formule inexacte, comme le montre l'exemple simple que voici....."

L'exemple qui suit fait intervenir un système de deux référentiels galiléens différents à deux dimensions coplanaires et fait subir une rotation uniforme de ce système de deux référentiels (dans l'espace à trois dimensions) autour d'un axe perpendiculaire passant par l'origine d'un des deux référentiels. Ceci ne correspond pas aux hypothèses de la relativité restreinte "native" (ou les transformations globales de Lorentz s'appliquent) et l'espace-temps dans lequel on peut décrire un tel dispositif n'est pas celui de Minkowski. Le traitement d'un tel problème peut être fait en "relativité restreinte"[310] mais dans un espace-temps moins contraint. Dans une telle situation on ne peut pas considérer que les deux référentiels sont galiléens.

La remarque de l'auteur est donc juste, mais est "hors sujet" d'où la nécessité, qui a fait défaut, de bien définir dans quel contexte (restrictif) le principe de relativité est énoncé.

Il s'intéresse ensuite au mouvement du périhélie de Mercure et après discussion de la valeur de l'avance séculaire (qui semble controversée) suggère que l'avance du périhélie pourrait être due à une force supplémentaire Φ de type "magnétique" perpendiculaire au plan de l'orbite et discute de la forme des équations à associer.

[310]Certains contestent ce point, et considèrent que cela relève de la relativité générale du fait qu'on utilise des outils utilisés également par la relativité générale. Mais si on définit la relativité générale comme théorie de la gravitation, ce qu'elle est dans la théorie développée par Einstein alors cette appellation ne se justifie pas. Ce n'est pas non plus la relativité restreinte telle que définie originellement par la définition du principe de relativité, c'est de la cinématique dans un espace affin.

On pense à un effet "gravito-magnétique qui serait lié à la rotation[311] du Soleil, hypothèse, qui sera envisagée en son temps, mais abandonnée suite à des observations incompatibles avec les valeurs de l'avance du périhélie.

Il termine en indiquant que :

"On sait que d'après Hertz, il n'existe pas d'actions à distance et la mécanique se ramène entièrement à des mouvements de masses, visibles ou cachées, assujetties à des liaisons de contact, visibles ou cachées, mouvements qui vérifient le principe de moindre action établi par Gauss.

Sans doute dans sa pensée, les masses cachées et les liaisons cachées concerneraient l'éther, envisagé dans ses relations avec la matière. Si on adoptait ce point de vue, les forces Φ devraient au même titre que les forces de gravitation, être regardées comme des manifestations de la présence de l'éther, grâce auxquelles les phénomènes astronomiques s'expliqueraient par le principe de moindre contrainte, sans obliger l'intelligence humaine à sacrifier ses notions intuitives d'espace et du temps."

Il nous a paru intéressant de commenter cet article qui montre qu'on commence à se poser de bonnes questions, même si les réponses qu'on propose ne font qu'évoquer des pistes possibles. La conclusion, qui peut nous paraître étrange, peut nous éclairer sur la conception encore mécaniste qu'on pouvait avoir de la mécanique à l'époque et permet de comprendre pourquoi la relativité, dans son abstraction, posait problème à bon nombre de scientifiques.

13 février 1922 : E. Cartan :" Sur une définition géométrique du tenseur d'énergie d'Einstein"

E. Cartan s'attache à donner une interprétation géométrique au tenseur énergie-impulsion d'Einstein.

13 mars 1922 : E. Cartan "Sur les espaces généralisés de la théorie de la relativité"

E. Cartan traite du cas plus général des espaces où la torsion n'est pas nulle.

13 mars 1922 : E. Bompiani : "La géométrie des espaces courbes et le tenseur d'énergie d'Einstein"

En commentaire et prolongement à l'article d'E. Cartan du 13 février.

Ces trois articles mathématiques sont très formels et ne prêtent pas à polémique.

[311]Qui détruit alors la symétrie sphérique sur laquelle la forme de Schwarzschild est construite. On a tenté ultérieurement de mesurer un "aplatissement" du Soleil pour justifier cette avance du périhélie de Mercure mais sans trouver de résultat significatif.

27 mars 1922 : E. Cartan : "Sur les espaces conformes généralisés et l'Univers optique"

Cet article très important préfigure la classification de Petrov (1954), Pirani (1957) qui sera proposée bien plus tard. Après avoir rappelé les propriétés d'un espace conforme :

"D'après une définition générale donnée dans une Note précédente[312] *un espace conforme généralisé est un espace qui jouit, au voisinage de chaque point, de toutes les propriétés de l'espace conforme et pour lequel on a une loi de repérage mutuel de deux systèmes de référence attachés à deux points infiniment voisins. Je rappelle que dans un espace conforme les seules propriétés intrinsèques des figures sont celles qui se conservent par une transformation conforme (déplacement, similitude, inversion ou combinaison de ces transformations) ; la notion de distance n'existe pas*[313] *(tandis que celle d'angle subsiste) ; néanmoins on peut parler du rapport des longueurs de deux vecteurs infiniment petits issus d'un même point. Analytiquement les transformations conformes sont les transformations les plus générales qui conservent l'équation obtenue en annulant une forme quadratique de différentielles à coefficients constants (l'équation* $dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0$ *pour l'espace conforme ordinaire) ...."*.

Après avoir décrit quelques propriétés mathématiques associées aux espaces conformes, E. Cartan s'intéresse aux directions nulles principales :

"l'équation obtenue en annulant le ds^2 *de l'Univers d'Einstein définit une infinité d'espaces conformes généralisés. Les rayons lumineux seront les droites isotropes généralisées d'un de ces espaces si celui-ci est dénué de torsion.*[314] */...../*

Parmi tous ces espaces on peut en trouver un et un seul satisfaisant aux conditions supplémentaires suivantes :

- *1- Il n'y a pas de courbure d'homothétie ;*
- *2- Le tenseur de Ricci est identiquement nul.*

Il est évident que les propriétés géométriques de cet espace, qu'on pourrait appeler normal, sont liées d'une manière invariante à l'équation $ds^2 = 0$ *donnée./...../.*

Le cas n = 4 est particulièrement important. Nous pouvons convenir d'appeler Univers optique d'Einstein l'espace conforme généralisé normal défini en annulant le ds^2 *de l'Univers d'Einstein. C'est conformément aux propriétés géométriques de cet Univers optique que se fait la propagation de la lumière. La courbure de rotation de cet Univers est définie en chaque point par dix quantités scalaires*[315]*, ou encore par*

[312]Celle du 13 mars 1922 T174 p. 734-736 citée ci-dessus.
[313]Pour la lumière comme $ds^2 = 0$, on voit qu'elles vont pouvoir être décrites de cette manière. "En relativité restreinte, les rayons lumineux jouent le même rôle que les droites isotropes de l'espace conforme ordinaire"
[314]Ce qu'on suppose en relativité générale.
[315]Les composantes indépendantes du tenseur de Weyl.

une forme quadratique ternaire à coefficients complexes, qu'un changement du système de référence transforme par une substitution orthogonale. Au point de vue géométrique la propriété suivante mérite d'être signalée. Il existe en chaque point A quatre directions optiques (c'est-à-dire annulant le ds²) privilégiées. Elles sont caractérisées par la propriété que si AA' est l'une d'elle, elle se conserve par le déplacement associé à un parallélogramme élémentaire admettant comme côté AA' et une autre direction optique quelconque issue de A. Dans le cas d'une seule masse attirante (ds² de Schwarzschild), ces quatre directions optiques privilégiées se réduisent à deux (doubles)[316] : Les deux rayons lumineux qui leur correspondent iraient au centre d'attraction ou en viendrait.

Une autre remarque intéressante est fondée sur la relation entre le tenseur de Ricci et le tenseur d'énergie. Elle peut se formuler de la manière suivante : Dans toute région vide de matière, la courbure de l'univers matériel d'Einstein est de même nature géométrique que la courbure de rotation d'un espace conforme généralisé. C'est là un énoncé assez curieux de la loi de la gravitation d'Einstein."

Ce dernier article d'Élie Cartan, très profond, est l'aboutissement des articles précédents[317] qui traitent des espaces conformes. Sans entrer dans les détails techniques, on mesure son importance tant on connaît le rôle essentiel joué par le concept de conformité dans la causalité par exemple.

On trouve quelques remarques importantes et fondamentales dans cet article, dont l'importance semble être passée totalement inaperçue à l'époque, qui préfigurent des travaux qui aboutiront beaucoup plus tard à la classification de Petrov-Pirani, en particulier :

Rôle structurel joué par la lumière[318] pour les espaces dans le vide (ce qui conditionne la causalité). La représentation conforme étant adaptée pour la lumière (où les lignes d'univers étant de longueur nulle, la métrique n'est pas utilisée pour les caractériser), car la causalité s'exprime à l'aide des cônes de lumière (caractérisé par des angles) :

Une ligne d'univers localement causale est à l'intérieur (critère topologique) du cône de lumière local et on doit évaluer ce critère de proche en proche le long d'une ligne d'univers pour déterminer s'il y a un lien causal entre deux points événements de cette ligne d'univers.

Existences de directions principales nulles et nombre de directions indépendantes selon la symétrie de l'espace.

Ceci souligne le rôle essentiel que joue la structure conforme de l'espace-temps dans la description de la phénoménologie.

---

[316]Ceci sera également vrai pour la solution plus générale de Kerr-Newmann (donc celles qu'elle recouvre) qui est issu d'une seule masse attirante (Classification de Petrov-Pirani l'espace-temps est de Type D).

[317] À noter que E. Cartan avait déjà publié de nombreux articles sur la structure des espaces dans les C.R.A.S. du 2/09/1918 "Sur les variétés à 3 dimensions", du 16/09/1918("Sur les variétés développables à trois dimensions", du 30/09/1918 "Sur les variétés de Beltrami à trois dimensions", du 14/10/1918 "Sur les variétés de Riemann à trois dimensions", du 14/06/1920 "Sur la déformation projective des surfaces", 5/07/1920 "Sur l'applicabilité projective des surfaces", mais cela ne concernait pas spécifiquement la relativité générale.

[318]Sans doute qu'il est plus correct de dire que la lumière est le révélateur de propriétés structurelles de l'espace.

10 avril 1922 : Sauger : "Sur une coïncidence remarquable dans la théorie de la relativité"

Cet article est intéressant à plusieurs titres :

D'une part il peut permettre de comprendre ce qui a inspiré Painlevé dans l'élaboration de sa forme originale, même si ici Sauger se réfère à la forme de Schwarzschild.

D'autre part il permet de comprendre les liens entre cette solution et l'espace-temps de Minkowski et donne une interprétation claire de la phénoménologie des décalages spectraux tels qu'on les établit formellement dont certains résultats peuvent paraître paradoxaux.

L'auteur construit très simplement la forme de Schwarzschild à partir de la relativité restreinte et de la mécanique newtonienne seulement en notant que la vitesse v d'un corps tombant en chute libre depuis l'infini vaut $v = -(2GM/r)^{1/2}$, par rapport à un observateur à l'infini.

La mesure, en relativité restreinte, de l'élément de coordonnée radiale dr à l'infini, réalisée par un observateur quelconque dans son référentiel local avec des règles subissant la contraction de Lorentz, par rapport aux règles dans le référentiel de Minkowski à l'infini, liée à sa vitesse relative v fait qu'il va mesurer une longueur dR plus grande, par rapport à celle mesurée par l'observateur à l'infini.

$$dR = dr(1-v^2/c^2)^{-1/2} = dr(1-2GM/r)^{-1/2} \qquad \text{avec } c = 1,$$

Les dimensions transversales du corps ne sont pas affectées par cette vitesse.

Le ralentissement des horloges est donné par :

$$dT = dt(1-2GM/r)^{1/2}.$$

La forme de la métrique associée à l'objet en chute libre de vitesse v (dans les coordonnées minkowskiennes t, r valides à l'infini pour $r = \infty$), en signature (-,+, + , +), s'obtient en remplaçant dans la forme de Minkowski dt et dr par leurs expressions données dR et dT qui en donnent la mesure dans un référentiel quelconque tenant compte de la vitesse locale. Il est immédiat de vérifier qu'on obtient la forme de Schwarzschild.

$$ds^2 = -dt^2 (1- 2GM/r) + dr^2(1- 2GM/r)^{-1} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi)$$

Sauger conclut son article en s'étonnant que cette méthode très simple donne ce résultat[319]:

"Mais il y a lieu d'observer notamment que :

a. Les formules de Lorentz sur lesquelles nous nous appuyons ne font état que de l'influence d'une translation à vitesse uniforme en non d'un mouvement accéléré ;

[319]Ce genre d'approche pourrait bien avoir inspiré à Painlevé sa forme de métrique de son premier article.

b. Que la loi de Newton que nous avons admise pour l'expression du potentiel diffère spécifiquement de la loi d'Einstein, de laquelle est déduite l'équation de Schwarzschild ainsi retrouvée.

Tout porte à croire, en conséquence, que ces approximations fournissent des écarts opposés qui, finalement, se compensent d'où la coïncidence observée."

Il ne s'agit ni "d'approximation", ni de "coïncidence". Sauger s'étonne que des relations faisant intervenir les formules de Lorentz de la relativité restreinte et la géométrie newtonienne (toutes deux à géométrie plane) produisent une solution de la relativité générale à géométrie courbe.

Mais il ne remarque pas que ces formules de Lorentz s'appliquent sur des éléments différentiels, ce qui caractérise des référentiels locaux et que ces relations entre éléments différentiels de coordonnées ne permettent pas d'obtenir des relations analytiques entre les coordonnées plates et courbes[320].

En fait, Sauger préfigure la méthode formalisée bien plus tard par les tétrades donnant les relations entre les éléments différentiels *dR* et *dT* des coordonnées co-mobiles *R* et *T* définissant un espace-temps de Minkowski local et les différentielles *dr, dt* des coordonnées d'une métrique générale[321].

C'est une méthode, qui a été bien formalisée, utilisée aujourd'hui (90 ans après). Mais en général on part d'une forme de métrique courbe comme la forme de Schwarzschild, par exemple, avec ses éléments différentiels de coordonnées *dt, dr* en définissant des éléments différentiels *dT, dR* d'un espace de Minkowski tangent de coordonnées *T, R* qu'on insère dans la forme de Schwarzschild par les relations

$$dT = dt - \beta\gamma^2 dr,$$
$$dR = \gamma^2 dr - \beta dt,$$

où $\beta = -(2GM/r)^{1/2}$ et $\gamma = (1- \beta^2)^{-1}$,

ce qui produit une forme minkowskienne du type :

$$-dT^2 + dR^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2).$$

Comme on peut le vérifier par les relations "tétradiques" ci-dessus qui ne sont autres, dans ce cas, que des relations de Lorentz entre référentiels inertiels.

Si on n'insère que l'élément *dT* en conservant *dr* de la forme de Schwarzschild, on peut vérifier qu'on obtient alors la forme de Painlevé :

---

[320]Ce qui n'est pas possible, car le critère de courbure non nul d'un espace ne dépend pas des coordonnées.
[321]Nous développerons la méthode au chapitre *16*.

$$-dT^2(1-\beta^2) - 2\beta dTdr + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2).$$

Le caractère très particulier et ses liens avec la relativité restreinte et la mécanique newtonienne de cet espace-temps réalisé par un assemblage non linéaire d'espace-temps de Minkowski est révélé par la forme de Painlevé.

24 avril 1922 : E. Cartan : "Sur les équations de structure des espaces généralisés et l'expression analytique du tenseur d'Einstein"

Article mathématique très technique qui complète les articles précédents.

1 mai 1922 : troisième article de P. Painlevé : "la théorie classique et la théorie einsteinienne de la gravitation"

Nous avons analysé cet article en détail**.**

1 mai 1922 : J. Chazy : "Sur les vérifications astronomiques de la théorie de la relativité"

L'auteur est le premier à établir la forme de la métrique de Schwarzschild avec constante cosmologique en partant de l'équation d'Einstein avec constante cosmologique au lieu de celle sans constante cosmologique.

C'est une contribution très originale, totalement oubliée, exposant une solution qui sera retrouvée par G. Lemaître dix ans plus tard.

Il ne donne pas le détail des calculs mais indique la méthode.

Il déclare :

"*Abandonnant la conception d'un espace infini, Einstein a proposé de remplacer les dix équations*

(1) $G_{\mu\nu} = 0$

pour déterminer la loi de gravitation dans le vide, par les dix équations :

(2) $G_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu} = 0.$

Où λ, désigne une constante très petite. La constante λ est d'ailleurs égale à U^{-2} *dans l'univers cylindrique d'Einstein, et à* $3.U^{-2}$ *dans l'univers sphérique de De Sitter, U désignant dans les deux le rayon de l'univers. Si on se propose de déterminer le champ de gravitation statique et sphérique d'un centre matériel à l'aide des équations (1) on obtient le ds² très célèbre de Schwarzschild. Si l'on se pose le même problème à partir des équations (2), l'intégration exacte du système différentiel obtenu est presque aussi facile, et donne la formule*

$$ds^2 = \left(V^2 - \frac{2\mu}{r} - \frac{\lambda V^2 r^2}{3}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2\mu}{V^2 r} - \frac{\lambda r^2}{3}} - r^2\left(d\theta^2 + \cos^2\theta\, d\varphi^2\right)$$

où V et μ désignent deux constantes d'intégration.

Cherchons comment les conséquences de la formule du ds², prêtant à des vérifications astronomiques, sont modifiées par l'introduction des deux termes en λ, en conservant aux autres quantités la même signification que dans la formule de Schwarzschild."

Cette contribution qui propose pour la première fois la solution de Schwarzschild avec constante cosmologique est complètement passée inaperçue.
À noter que Lemaître établira indépendamment la même forme[322] de son article de 1932, soit 10 ans après, qui s'écrit :

$$ds^2 = dt^2\left[1 - \frac{2m}{r} - \frac{\lambda r^2}{3}\right] - \frac{dr^2}{\left[1 - \frac{2m}{r} - \frac{\lambda r^2}{3}\right]} - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right) \cdot$$

On voit que *V* désigne *c* qu'on pose égal à *1* et qu'on a un cosinus à la place d'un sinus ce qui doit s'expliquer par une convention différente sur l'origine de l'angle θ.

L'auteur étudie les conséquences de cette constante cosmologique au niveau des prédictions astronomiques de la théorie. De l'étude des équations qu'il établit, il déduit que :

- Cette constante cosmologique est sans influence sur la déviation des rayons lumineux par le Soleil.

- Pour l'avance du périhélie de Mercure, il faut ajouter un second terme, au terme correspondant au cas sans constante cosmologique $6\pi\mu/[c^2a(1-e^2)]$[323] qui, quand l'excentricité est faible vaut sensiblement $\lambda c^2T^2/4\pi$. On voit que ce terme, à la différence du premier, dépend de la période de la planète et est proportionnel à λ.

La valeur de la constante cosmologique était très spéculative à cette époque, mais l'auteur indique que pour que cet effet soit de l'ordre de grandeur de celui du terme principal il faudrait que le rayon de courbure correspondant à λ[324] soit de l'ordre de *1000* années de lumière ce qui, déjà à l'époque, paraissait exclu.

Il en conclut que l'effet ne serait pas mesurable.

1er mai 1922 : J. Trousset : "Les lois de Kepler et les orbites relativistes"

En suivant Painlevé dans sa proposition de remplacer *r* par une fonction de *r* dans la forme de Schwarzschild, il indique qu'il convient d'abord de rechercher si, dans le système solaire, il y a des différences mesurables qui justifient qu'on s'y intéresse, ce qu'il fait par une étude comparative des orbites dans les deux théories.

Sa conclusion après étude est que :

"Tant que nous ne saurons pas observer avec cette précision (un millième de seconde d'arc), le mouvement de périhélie de Mercure sera le seul argument en faveur de la loi

[322]Lemaître G. : « L'univers en expansion » (1932) chapitre *11*.
[323]Le paramètre μ est la masse du corps central.
[324]La constante cosmologique a les dimensions de l'inverse d'une courbure.

d'Einstein comparée à celle de Newton. Elles conserveront ou perdront ensemble leur belle simplicité."

Notons que l'auteur ne prend pas en compte la déviation de la lumière par le Soleil.

1er mai 1922 : P. Painlevé : "Note sur les deux communications précédentes"

Dans cette courte note, Painlevé relève des contradictions entre deux notes précédentes, en particulier pour le mouvement de Saturne, et invite à une étude plus approfondie.

29 mai 1922 : S. Zaramba "Sur la conception relativiste de l'espace"

L'auteur se pose la question de l'objectivité de la mesure de la distance (spatiale) entre deux points en relativité générale. Prenant J. Le Roux a témoin, il en conteste le caractère physique.

"Ne pourrait-on pas, en profitant de cette remarque, attribuer un sens aux assertions de la relativité, relatives à la nature de l'espace et discutées par M. Le Roux ?

Cette question comporte une réponse franchement négative....."

L'article présente ensuite un ensemble de calculs et la conclusion est :

"Il résulte de ce qui précède qu'un système de points physiques de la nature considérée, même s'il existait ne pourrait pas servir d'étalon de longueur. Par conséquent, le procédé que nous venons de discuter ne permet pas d'attribuer un sens aux assertions de la théorie de la relativité, relatives à la nature de l'espace ; …."

Notons que Einstein a toujours précisé que ce qui était physique c'était le ds^2. Comme un ds^2 de type espace ne peut pas, en général, être mesuré directement avec un mètre "étalon"[325], comme un ds^2 de type temps l'est par une horloge, la mesure d'une "distance" spatiale nécessite les mécanismes de synchronisation particuliers pas

[325]Mètre "infiniment rigide ?" On connaît tous les paradoxes liés à la définition et mesure des longueurs en relativité qui résultent du caractère conventionnel et non universel de la notion de simultanéité.

toujours possible à mettre en œuvre. Sur ce point on peut donner crédit à l'auteur, mais pas sur le fait que cela disqualifie la relativité puisque elle ne revendique rien de tel.

19 juin 1922 : M. Brillouin : "Champ isotrope, sphère de fluide hétérogène"

L'auteur traite le cas de la solution extérieure et intérieure au problème d'une sphère formée de couches sphériques homogènes dont la densité varie en fonction du rayon, d'abord distinctes puis variant continûment.

Il fait référence aux articles de Schwarzschild sur le sujet[326].

1922-T175 : les articles se diversifient sur fond de vive controverse pro/anti-relativistes.

10 juillet 1922 : E. M. Lémeray : "La relativité générale et la voie lactée"

Considérant la voie lactée comme l'univers entier, bien que comme il l'indique certains auteurs supposent que les nébuleuses sont étrangères à la voie lactée, prenant en considération le fait que la matière courbe la lumière, il examine les conséquences de cette courbure. Il considère le cas où la lumière est captive de l'amas d'étoiles que constitue la voie lactée et décrit de ellipses, avec comme conséquence une multitude d'images fantômes et évoque également l'hypothèse de l'entretien de la chaleur des étoiles par ce mécanisme.

Dans le contexte non pas d'une géométrie de la relativité générale homogène et isotrope mais dans le cas d'un espace de fond dans lequel se situe l'amas, il considère alors la vision d'un amas sphérique (donc avec un centre dans son hypothèse) par un observateur en fonction de sa position dans l'amas d'étoiles. Il indique que l'observateur, compte tenu des mirages liés à la courbure, par un effet d'optique, observera une condensation autour du plan diamétral. Il compare par rapport aux observations et constate que l'accord avec les prédictions du modèle n'est vraiment convainquant.

Le centre du monde stellaire serait sur la ligne des pôles galactiques sans qu'il soit possible d'indiquer de quel côté il se trouve.

31 juillet 1922 : E. M Lémeray : "La structure de l'univers et la relativité générale"

Cet article complète l'article précédent. Citons le résumé:

"En résumé, on peut considérer la Voie Lactée et l'univers entier, soit comme un amas de forme lenticulaire, le Soleil étant très voisin du centre ; soit suivant l'hypothèse exposée ici[327]. Cette dernière nous paraît présenter un avantage : il faut un paramètre de moins pour définir la structure générale ; car si l'univers est approximativement un

[326]Schwarzschild K. 1916a, et 1916b.
[327]Un univers sphérique (repris de l'article précédent).

ellipsoïde de révolution aplati, il faut donner un rayon équatorial et l'axe de révolution ; ici le rayon de la sphère suffit. Pour définir la région des nébuleuses, il faut au moins un paramètre dans chacune des deux hypothèses.

D'autre part, l'existence d'un univers aplati paraît se lier à une rotation d'ensemble et nous retrouvons l'énigme d'une rotation absolue. Avec un univers sphérique, cette difficulté disparaît.

Si la Terre n'est plus depuis longtemps le centre du monde, le Soleil est encore considéré comme près du centre. La structure envisagée nous dispense encore de lui attribuer une position spéciale."

Cet article, qui ne fera pas date, illustre comment on commence à prendre en compte les "mirages gravitationnels" dans l'interprétation de ce qu'on observe.

6 novembre 1922 : J. Le Roux "Sur la gravitation dans la mécanique classique et dans la théorie d'Einstein"

Poursuivant sa dénégation de la théorie de la relativité l'auteur déclare :

"Les résultats fournis par la théorie de la gravitation d'Einstein ont semblé, au premier abord, concorder remarquablement avec l'observation particulièrement dans le cas du mouvement séculaire du périhélie de Mercure.

Cependant, pour arriver à cette conclusion, on est obligé d'admettre que les perturbations dues aux actions mutuelles des planètes conservent dans la théorie d'Einstein les mêmes valeurs que dans la mécanique classique. Si l'on supprime les perturbations, la concordance disparaît.

Or il arrive que l'hypothèse fondamentale d'Einstein est incompatible avec l'existence des actions mutuelles et des perturbations telles qu'on les considère dans la mécanique classique. ..."

Remarquons que dans le calcul d'Einstein, les perturbations des planètes ne sont absolument pas prises en compte puisqu'on s'appuie sur la métrique de Schwarzschild qui ne considère qu'un corps central (de plus, en version approchée pour des raisons opératoires).

Ce que montre la relativité c'est que les orbites elliptiques ne se referment pas contrairement à la mécanique classique et le calcul fait par Einstein ne rend compte que de l'effet du Soleil, les effets des perturbations autres étant supposées égales par ailleurs à celles prédites par la théorie newtonienne.

Dans ce qui suit, J. Le Roux développe un argument selon lequel dans le problème des $n+1$ points (masses), dans la mécanique classique, le mouvement géodésique d'un point dépendant des n autres points, dans les équations les coordonnées de tous les points interviennent ce qui est manifeste de la "solidarité" entre les points (ce qu'on est en droit d'attendre) alors que, selon lui, en relativité la géodésique étant définie par

des équations locales elle serait indépendante des autres, ce qui lui paraît prouver l'incohérence de la théorie.

Il oublie que la géométrie globale de l'espace-temps en relativité générale est déterminée par l'ensemble des masses et de leur position relative et qui si une masse ponctuelle décrit une géodésique sans se "préoccuper" de celle des autres c'est que l'information associée à la distribution des masses qui conditionne toutes les géodésiques (puisqu'elles sont de nature purement géométrique) est contenue dans la géométrie globale.

Il est vrai que pour un newtonien cela peut le troubler puisque cette information qui décrit la géométrie de l'espace-temps est globale.

On fait souvent remarquer que concernant la gravitation les "bonnes" variables (celles qui ont un caractère physique) ne sont pas locales, mais globales ce qui est attesté par le fait que la gravitation ne peut pas être représentée localement par un tenseur mais par un pseudo-tenseur.

D'ailleurs sur ce point les réponses de Brillouin et de Buhl que nous allons citer vont souligner le caractère erroné de cet argument.

La conclusion de l'article est sans nuances :

"Ces remarques paraissent importantes au point de vue théorique. La confrontation avec l'expérience dans le cas particulier du mouvement de Mercure donne lieu aux constatations suivantes.

L'avance séculaire constatée est de 574". La théorie de Newton qui entraîne les perturbations, fournit une explication satisfaisante jusqu'à une limite maxima de 536", avec un résidu minimum inexpliqué de 38".

Dans la théorie d'Einstein, le mouvement déduit du ds^2 calculé par Schwarzschild donnerait pour Mercure une avance séculaire de 42"9.

Mais, comme cette théorie exclut les perturbations dues aux actions mutuelles, il subsiste un résidu inexpliqué de 531".

Tel est le résultat brutal.....

En attendant, on doit constater que la théorie d'Einstein, dans son état actuel, ne permet ni d'expliquer ni de prévoir, même avec l'approximation la plus grossière, le mouvement séculaire de Mercure."

J. Le Roux se laisse égarer par son aversion pour la théorie d'Einstein. Ses propos n'ont aucun sens, car Einstein a calculé l'influence du Soleil seul puisque les autres influences avaient été déjà prises en compte.

Ces déclarations péremptoires appelleront une réponse argumentée et circonstanciée de la part de M. Brillouin et A. Buhl.

20 novembre 1922 : M. Brillouin "Gravitation einsteinienne et gravitation, newtonienne à propos d'une récente note de M. Le Roux" ([1]) [328]

L'article de J. Le Roux du 6 novembre a suscité quelques réactions, commençons par celle de Brillouin. Nous citons ci-dessous l'intégrale de son court article.

"Tout monde sait que la théorie de la gravitation d'Einstein comprend comme première approximation celle de Newton. La Note de M. Le Roux montre qu'il est néanmoins utile de le rappeler.

Les dix potentiels d'Einstein $g_{\mu\nu}$ contiennent non seulement les coordonnées x_μ [329]du point de l'espace autour duquel ils définissent le ds^2, mais aussi contrairement à la singulière affirmation de M. Le Roux (P. 810, lignes 21-27), les coordonnées ξ de tous les points singuliers de l'espace, c'est-à-dire de tous les points où se trouve une masse attirante, fixe ou mobile, ainsi que la grandeur de chacune de ces masses. Lorsque ces masses sont mobiles, sous leurs seules influences mutuelles, on est obligé d'étudier à la fois les mouvements de toutes ces masses, c'est-à-dire de traiter le problème des n corps soit sous sa forme rigoureuse, lorsqu'on saura former exactement les $g_{\mu\nu}$ d'un espace contenant n corps mobiles, en fonction des quatre coordonnées ξ de chacun de ces corps, soit approximativement à la façon du problème des perturbations.

Au premier ordre, à cause de la grandeur de la vitesse de la lumière, le seul potentiel qui diffère de celui d'un espace euclidien est le coefficient de dt^2, g_{44}, [330]qui à cet ordre d'approximation, obéit à l'équation de Poisson, se forme comme en théorie newtonienne et fournit toutes les perturbations classiques ([331]).

Les critiques, de M. Le Roux, sont dépourvues de tout fondement."

Notons qu'au-delà d'un certain agacement perceptible dans le ton, M. Brillouin répond clairement sur le fond à J. Le Roux sur le ds^2 dont les coefficients qui y figurent rendent compte de toutes les sources de gravitation. Il aurait pu être plus précis sur sa nature formelle mais comme ce point va être repris en l'affinant par J. Le Roux nous y reviendrons.

Par ailleurs il aurait pu ajouter que pour les perturbations liées aux planètes qui, comme il le dit, se forment comme en théorie newtonienne elles sont un effet au premier ordre, alors que l'avance du périhélie de Mercure est un effet du second ordre où la différence entre les théories peut se révéler importante du fait que le potentiel central en relativité ne diffère précisément du potentiel newtonien que par un terme en r^{-3}.[332]

---

[328]Note (1) référence de l'article de J. Le Roux du 6/11/1922.

[329]Noter la position de l'indice à l'époque, aujourd'hui on écrirait x^μ.

[330]Notation de l'époque.

[331]Note (2) de l'article de Brillouin : références traitant du problème : (Einstein, 1916 §21, p.57, J. A. Barth mai 1921, Wieweg 1922, leçon 4, p.51-70, Eddington (1921) Sections III et IV § 41, 42, 43, J.Becquerel (1921) Chap. XIV, Sect. II et III § 86, 87, 88., De Donder (1921), La gravifique, Marcolongo R. (1921), Relativita, Whitehead (1922) p. 132-136. Voir références détaillées à la fin du document..

[332]Voir par exemple : S. Carroll : 2003, p.209-210.

27 novembre 1922 : A. Buhl : "Sur le mouvement séculaire de du périhélie de Mercure"

A. Buhl complète la remarque de M. Brillouin. Nous citons ci-après l'intégrale de son court article.

"Je demande à présenter quelques remarques qui me sont suggérées par la Note de M. Le Roux, publiée récemment ici. Le problème des n corps, en général, ne se sépare pas en problèmes particuliers à chaque trajectoire. Mais c'est là l'aspect théorique de la question. En pratique on étudie souvent une trajectoire troublée en se débarrassant de la variation des éléments troublants.

Il n'y a plus alors dans le problème, comme coordonnées, que celles du corps troublé. Le problème du champ gravifique à symétrie sphérique (Einstein et Schwarzschild) fut d'abord l'analogue du problème des deux corps de la Mécanique newtonienne. Comment peut-on reprocher au premier de ne pas être d'accord avec un ensemble de perturbations alors que personne ne songe à reprocher cela au second ?

Dans la Mécanique céleste générale conforme à la théorie d'Einstein, chaque planète devra avoir son espace-temps par l'ensemble des autres espaces-temps planétaires et, comme dans la mécanique newtonienne, on continuera à discerner les influences séparées des espaces-temps troublants. En particulier, pour Mercure, la perturbation périhélique d'Einstein tenant uniquement au champ solaire doit pouvoir être discernée des variations venant des champs planétaires. Puisqu'il est conforme à toutes les habitudes de la Mécanique céleste de simplifier autant que possible, la théorie des actions troublantes, il ne doit pas être absurde, dans une théorie einsteinienne de Mercure, d'adopter provisoirement une théorie newtonienne (plus simple et d'accord avec l'autre comme cas limite) pour les perturbations provenant de planètes plus éloignées du Soleil. Je remarque enfin que deux géodésiques différentes d'une même surface ont un certain mode de corrélation, qui se révèle dès qu'on tente de déformer la surface d'une manière quelconque".

On remarque combien l'argumentation d'A. Buhl, tranche avec les affirmations péremptoires de J. Je Le Roux.

27 novembre 1922 : M. Brillouin : "Gravitation einsteinienne. Statique ; Points singuliers. Le point matériel. Remarques diverses".

L'auteur fait observer que jusqu'à présent, on a considéré le problème du corps central à symétrie sphérique que dans le cas où la sphère était homogène où hétérogène mais par rapport au rayon ce qui préservait la symétrie.

Il envisage ici le cas d'une masse ponctuelle et de la singularité qu'elle engendre. Indépendamment de la singularité centrale, il évoque l'horizon, possible dans le cas de

corps sphériques de densité finie, qualifié de "sphère catastrophique", qu'il considère constituée de points singuliers sans toutefois faire de distinction avec le cas où la masse est ponctuelle (singularité centrale) où la densité est infinie.

Il est dommage qu'il n'ait pas noté que dans la forme proposée par Painlevé dans son article du 24 octobre 1921, une telle sphère catastrophique n'existait pas.

4 décembre 1922 : J. Le Roux : *"*Sur la gravitation des systèmes*"*

L'auteur réagit à la réponse de M. Brillouin, donnons la conclusion qui résume sa position :

"Ce qui sépare le point de vue de M. Brillouin du mien se ramène à la différence suivante. M. Brillouin accepte pour les coefficients $g_{\mu\nu}$ les solutions les plus générales des équations aux dérivées partielles d'Einstein. Je ne prends au contraire que celles qui peuvent fournir un véritable ds^2 à quatre dimensions, conformément au point de départ initial."

J. Le Roux veut imposer au ds^2 d'être ce qu'il appelle un "élément linéaire à quatre dimensions", un "véritable ds^2", autrement dit, bien qu'il ne le dise pas explicitement, on peut supposer qu'il veut imposer que ce soit une différentielle totale, condition nécessaire selon lui pour que les mouvements des particules soient définies par les géodésiques d'univers.

Il y a une incompréhension sur la nature du ds^2 mais J. Le Roux fait tout de même une remarque pertinente de mathématicien et on comprend mieux ce qui peut le chagriner dans l'approche relativiste. Ce point aurait mérité donc d'être mieux explicité pour bien comprendre ce qui sépare les deux points de vue. Cependant en théorie de la relativité, le ds^2 n'a pas cette signification.

En effet, le ds^2 ne se réfère pas à une différentielle (totale) de quoi que ce soit, d'ailleurs sa valeur intégrée sur une courbe reliant deux points de l'espace-temps dépend de la courbe qui relie ces deux points, et n'est pas le carré de quelque chose comme J. Le Roux semble le supposer c'est juste un raccourci pour désigner le tenseur métrique, une application multilinéaire de deux vecteurs vers les nombres réels.

La notation "dx^μ" figurant dans le ds^2 est ambiguë, car elle est souvent utilisée pour désigner un déplacement infinitésimal, alors que dans le ds^2 de la relativité générale il désigne une base d'une forme linéaire qui est donnée par le gradient de la fonction associée à la coordonnée. Mais il faut reconnaître qu'à cette époque, malgré la quantité importante d'articles de qualité publiés dans cette période à l'Académie par E. Borel, E. Cartan, A. Buhl sur la structure de l'espace-temps en relativité et l'ouvrage fondamental de H. Weyl, les choses n'étaient pas aussi bien formalisées qu'aujourd'hui et d'ailleurs Einstein dans son article de 1916 considère les quantités dx^μ comme jouant le rôle d'un vecteur contravariant.[333], ce qui ne l'a pas gêné pour

[333]Einstein (1916) au début du § 8 sous la définition du ds². Cité dans Balibar F., Darrigol O. Eisenstaedt J. Pottier L., Ritter J., Stachel J. (1993) "Albert Einstein oeuvres choisies, Relativités I", p. 194.

établir ses équations (mais Einstein n'était pas un pur mathématicien et cet aspect formel ne l'a pas perturbé).

26 décembre 1922: J. Le Roux : "La mécanique de Newton n'est pas une approximation de celle d'Einstein"

J. Le Roux commence par faire observer :

"La mécanique de Newton n'est pas une approximation de celle d'Einstein. Les deux théories reposent sur des principes différents. Elles donnent des résultats presque semblables dans le cas d'un mobile unique, mais on n'a pas le droit d'en conclure que leurs conséquences sont toujours très voisines pour les systèmes."

On ne peut qu'être d'accord avec cette déclaration.

Ce qui était recherché par Einstein c'était la convergence des résultats dans certaines conditions (vitesses faibles par rapport à lumière, champ faible et statique ou lentement variable) puisque comme on le constatait la mécanique classique avait produit des résultats d'une précision remarquable.

Dans la suite du document, fidèle à ses convictions en particulier sur le ds^2, il souligne en plus la difficulté de calculer (de façon exacte) un ds^2 tel que M. Brillouin le définit, ce qui n'est plus un argument de fond mais un problème technique, (réel par ailleurs, mais qu'on retrouve dans la solution exacte du problème des $n+1$ corps en mécanique classique puisque s'il faut comparer des solutions il faut le faire à attribut semblable soit comparer les solutions exactes soit comparer les solutions approchées).

Nonobstant les vérifications expérimentales de la théorie d'Einstein, il persiste dans sa contestation.

"Il est vraiment surprenant qu'au lieu de multiplier les affirmations vagues, on n'ait pas encore fourni cette preuve efficace de la validité de la théorie."

De nouveau on voit qu'Einstein est accusé de se répandre en considérations oiseuses qui ne serviraient, selon J. Le Roux, que de leurre destiné à égarer l'homme de science.

Cependant on sent que l'assurance J. Le Roux commence à se fissurer dans ses dénégations et que le débat ne peut pas s'éterniser.

1923 : développement et radicalisation du débat

1923-T176 : débat sur le problème à N corps en relativité. Rappel à l'ordre de E. Picard

15 janvier 1923 : G. Sagnac : "Sur le spectre variable périodique des étoiles doubles : incompatibilité des phénomènes observés par la théorie de la relativité générale"

Malgré le titre, il s'agit d'un problème de relativité restreinte sur les effets Doppler mesurés à 6 mois d'intervalle depuis la Terre des étoiles doubles. G. Sagnac y verrait une incompatibilité avec la relativité restreinte et cela confirmerait selon lui l'existence de l'éther. La confusion repose sur une mauvaise interprétation de la notion d'isotropie de la lumière en relativité restreinte.

15 janvier 1923 : J. Haag : "Le problème des n corps dans la théorie de la relativité"

J. Haag réagit aux articles de J. Le Roux, il commence par rappeler quelques principes généraux :

"M. Le Roux a récemment fait ressortir certaines difficultés de principe, que soulève l'application de la théorie d'Einstein au problème des n corps. Je ne reviendrai pas sur la question des perturbations planétaires classiques, à laquelle ont répondu MM. Brillouin et Buhl (2)[334]*. La véritable objection présentée par M. Le Roux et sur laquelle il a d'ailleurs lui-même insisté est la suivante :*

Comment peut-on établir la correspondance entre les lignes d'Univers des différents corps, sinon d'une manière tout à fait arbitraire ? Cette question me paraît tout à fait justifiée ; mais elle me paraît contenir elle-même sa réponse.

Si on adopte les idées relativistes, il est impossible de définir, d'une manière absolue, la position et la forme d'un système à un instant donné, pour cette raison bien simple que l'expression "à un moment donné" n'a aucun sens. Si l'on peut parler du temps propre d'un point, le temps propre d'un système n'existe pas. Il y a des points événements, mais il n'y a pas de système événements. Un système de n points est simplement défini par n lignes d'univers, entre les points desquels n'existe a priori aucune correspondance. On ne peut donc parler du mouvement d'un système (et même de sa forme) qu'à la condition de choisir au préalable un système de coordonnées et, comme ce choix est arbitraire, il en est de même pour la correspondance établie entre les lignes d'univers par leur intersection avec les surfaces t = constante. C'est bien ce que dit M. Le Roux.

Mais il ne s'ensuit pas que la théorie de la relativité soit impuissante à étudier le problème des n corps. Voici une esquisse de la méthode qui, me semble-t-il, pourrait être suivie....."

---

[334] Comme nous venons de le voir.

J. Haag fait remarquer que la notion de temps propre d'un système est quelque chose, qui, sauf cas très particulier comme on le rencontre en cosmologie[335] dans le modèle standard, en général n'existe pas.

On peut ajouter que quand cela existe chaque observateur, même inertiel, peut avoir un temps propre indépendant de celui des autres (géodésiques avec boost) mais qu'il y a dans ce cas une classe particulière d'observateurs co-mobiles du système.

Mais ce cas est très rare.

Il propose ensuite une esquisse de méthode approchée pour aborder le problème que nous ne commenterons pas.

On voit, à travers cet article que les idées progressent dans la compréhension de la théorie.

24 janvier 1923 : H.C Levinson : "Sur la gravitation einsteinienne des systèmes"

L'auteur réagit également aux articles de J. Le Roux.

Il introduit son exposé ainsi :

"Dans plusieurs Notes, M. Le Roux a essayé de démontrer que dans la théorie de la relativité, il ne peut pas exister de perturbations analogues à celles que l'on rencontre dans le mécanique classique. Il dit, en résumé, que dans un ds^2 à quatre dimensions, il ne peut figurer que quatre variables.

Il est facile de démontrer, comme M. Brillouin l'a indiqué dans une Note récente, que le mouvement d'un point matériel est presque le même dans les deux théories, pourvu que les vitesses des corps du champ soient assez petites par rapport à celui de la lumière. Ces considérations sont suffisantes pour le cas des planètes, par exemple. Mais les fondements des deux théories sont distincts, et il serait possible que la théorie einsteinienne ne donne pas de solution au problème.

Dans sa dernière Note ([1]) M. Le Roux se demande quelle sera la méthode rigoureuse suivant laquelle on obtiendra le ds^2 du champ de n corps. Je voudrais démontrer qu'il n'y a pas de difficulté logique à trouver un ds^2 à quatre variables seulement, qui représente le champ de n points matériels libres. Pour trouver ce ds^2 il faut résoudre les dix équations de champ gravitationnel $G_{\mu\nu} = 0$, avec les conditions aux frontières. Cela n'a été fait que pour le cas d'un corps au repos."

Ceci est suivi d'un développement où il propose différentes formes *(1)* à *(3)* de ds^2 adaptées aux données du problème, et pour le problème à *n* corps il indique que :

[335]En constatant que le temps propre des observateurs co-mobiles est égal au temps cosmologique (système).

"Dans le cas de n points matériels, il faut tout d'abord résoudre les équations du champ avec des conditions aux frontières représentant le cas de n-1 points matériels en mouvement arbitraire. Nous avons alors au lieu de (2) et (3)[336], n formes différentes du ds², chacune contenant quatre variables indépendantes et 4(n-1) variables dépendantes. Celles-ci conduisent à 4n équations du mouvement entre les 4n variables et s. De même que pour le cas précédent, il existe un ds² ne contenant que 4 variables indépendantes."

La méthode évoquée est une méthode "approchée" mais c'est bien entendu pour montrer qu'une telle méthode peut exister en relativité générale et peut être comparée à la méthode du même type en mécanique classique.

24 janvier 1923 : E. Picard : Observation à l'occasion de cette communication"

E. Picard semble s'émouvoir de la contestation des arguments de J. Le Roux à travers un nombre grandissant de communications émanant d'auteurs différents comme en témoigne le court article qu'il publie.

"Je tiens à dire que M.H.C Levinson m'a remis, il y a dix jours, la Note qu'on vient de lire. On a vu dans le dernier numéro des Comptes rendus que M. Haag s'est aussi occupé du problème des n corps dans la théorie de la relativité. Ces travaux sont donc indépendants ; les deux auteurs se placent d'ailleurs à des points de vue différents.

M. Le Roux avait déjà appelé l'attention sur la position même du problème. Tant qu'on se borne au mouvement d'un seul point, il est clair qu'une mécanique générale de la relativité n'est pas fondée. Or, quand on veut essayer de constituer une mécanique relativiste des systèmes, on se heurte à beaucoup d'arbitraire, et l'on peut se demander si la confrontation de l'expérience ou de l'observation avec les résultats d'une théorie présentant une telle indétermination offrira un bien grand intérêt. On sait à quelles discussions a donné lieu l'examen de quelques cas très particuliers relatifs à un seul point. Que sera ce pour un système ? Tout en applaudissant donc à des recherches, comme celles de M. Haag et de M.H. Levison, d'un grand intérêt mathématique, il est permis de rester quelque peu sceptique sur la valeur, quant à l'importance de la théorie de la relativité, des comparaisons qui pourront être faites avec la réalité."

Nonobstant les prédictions correctes de l'avance du périhélie de Mercure et de la déviation de la lumière par la théorie de la relativité générale E. Picard s'ingénie à contester l'intérêt pour la physique d'une telle théorie lui concédant seulement un intérêt purement spéculatif.

[336]Il s'agit d'équations citées dans son article.

Son article résonne comme une mise en garde, un coup de semonce, contre la contestation grandissante des autorités scientifiques et mathématiques représentées sans doute par J. Le Roux.

L'attribution du Grand prix des mathématiques à J. Le Roux fin 1923 atteste du crédit que l'académie apporte à ses déclarations.

À cette époque E. Picard qui jouit d'un poste important[337] fait autorité à l'Académie des Sciences.

29 janvier 1923 : J. Chazy : "Sur l'expression de la loi d'Einstein en coordonnées cartésiennes"

Il s'agit d'un article qui, sur l'exemple de l'avance du périhélie de Mercure, met en garde contre des approximations qui peuvent être hasardeuses qui négligent des termes qui en fait sont du même ordre de grandeur que les termes conservés

5 mars 1923 : J. Chazy : "Sur la correction apportée par la théorie de la relativité à la durée de révolution newtonienne des planètes"

Comme le titre l'indique, l'auteur rappelant que la correction relativiste peut aussi être empiriquement retrouvée de façon approchée en modifiant de façon ad hoc les lois de Newton, comme certains auteurs le proposent (cf. contribution de G. Bertrand), propose de comparer les résultats et se demande si des expériences précises seraient discriminatoires. Il conclut positivement son article.

5 mars 1923 : G. Darmois : "sur l'intégration locale des équations d'Einstein"

Dans le contexte de la solution à l'extérieur des sources, G. Darmois étudie une méthode d'intégration fondée sur le feuilletage de l'espace-temps en temps et espace. Dans un domaine local au voisinage d'une feuille spatiale, les points extérieurs proches à la feuille ont leur quatrième coordonnée sur une géodésique normale à la surface en utilisant les coordonnées de Riemann. Il étudie les conditions qui permettent à cette méthode de résoudre, de manière approchée par un développement en série polynomiale des composantes de la métrique, un problème de relativité générale spatio-temporel. Cet article est très intéressant. Encore une contribution remarquable qui n'a pas eu la résonance qu'elle méritait.

[337]Il était, entre autres, à cette époque, membre de la commission chargée de présenter une liste de candidats à la place d'associé étranger vacante, délégué pour représenter l'Académie à la commission des beaux-arts de l'institut, fait partie des commissions des prix de mathématiques, de mécanique, d'astronomie, de navigation, de physique, du prix Montyon de statistique, du prix Binoux d'histoire et philosophie des sciences, des médailles Arago, Lavoisier et Berthelot, des prix Gustave Roux, Thorlet, des fondations Lannelongue, Trémont, Gegner, Hira, Henri Becquerel, du prix d'Ormoy des sciences mathématiques, du prix Estrade-Delcros, du prix Saintour, du prix Henri de Parville (ouvrages de Sciences), du prix Henri Wilde, est désigné pour faire partie du Conseil de l'Office national des recherches scientifiques et industrielles et des inventions, délégué aux fêtes du tricentenaire de Pascal qui seront célébrées à Clermont-Ferrand le 8 juillet 1923.

12 mars 1923 : G. Darmois : "Intégration locale des équations d'Einstein (problème intérieur)"

Dans cette contribution qui reste assez générale, G. Darmois évoque le problème "intérieur" où le tenseur énergie-impulsion n'est pas nul.

28 mai 1923 : J. Chazy : "Sur les effets séculaires de la théorie de la relativité dans les mouvements planétaires"

J. Chazy revient sur sa communication précédente, suite à des remarques de M. Trousset et est amené à reconsidérer la possibilité de discriminer les différentes théories pour expliquer l'avance du périhélie de Mercure compte tenu de l'imprécision des données observationnelles.

28 mai 1923 : J. Le Roux : "Sur le champ de gravitation"

J. Le Roux réagit aux à l'approche de G. Darmois cités ci-dessus :

"M. G. Darmois a récemment exposé dans d'intéressantes communications les difficultés que présente l'intégration des équations aux dérivées partielles d'Einstein dans le cas d'une distribution donnée de matière.

Cette intégration pourrait être utile pour la confrontation, au point de vue numérique, des résultats de la théorie avec ceux de l'observation. Mais pour la critique générale des théories de la relativité elle n'est pas nécessaire."

On pourrait faire remarquer à J. Le Roux que pour vérifier une théorie il est utile de pouvoir calculer ses prédictions. Car c'est tout de même l'adéquation des prédictions faites par une théorie avec les résultats des observations qui en font l'intérêt. D'autant qu'il venait de déclarer dans son article précédent :

"Il est vraiment surprenant qu'au lieu de multiplier les affirmations vagues, on n'ait pas encore fourni cette preuve efficace de la validité de la théorie."

Il devrait donc être satisfait que certaines solutions aux équations de la relativité soient proposées, ce qui permet de comparer leurs prédictions à l'observation.

Pour le reste de l'argumentation c'est à peu près la même que dans son article précédent en particulier il conteste qu'un ds^2 puisse rendre compte des interactions mutuelles des corps sources et objets du champ gravitationnel, et comme si cela ne suffisait pas, dans une fuite en avant, il en arrive à dénier tout caractère géométrique à la courbure de l'espace remettant en cause la géométrie de Riemann.

"Il est d'ailleurs utile d'observer que l'idée de la courbure de l'espace ou de l'univers n'est pas une notion géométrique ; elle relève de la métaphysique et est entièrement dépourvue de toute signification concrète. On peut même admettre qu'elle dérive d'une analyse incomplète de la notion d'élément linéaire et d'une généralisation incorrecte de la théorie de Gauss."

Sans commentaire !

1924 : dernières communications de J . Le Roux contre Einstein à l'Académie

14 janvier 1924 : J. Le Roux "La coordination des mouvements et la notion de temps"

Il y traite de la formulation "canonique" de la mécanique newtonienne en s'appuyant sur le livre de P. Appell "traité de mécanique édition 2, Tome 2 p. 425-428".

Il déclare :

"L'étude du mouvement d'un système entraîne nécessairement l'introduction d'une variable auxiliaire[338] dont le rôle est analogue à celui du temps en mécanique classique, indépendamment d'ailleurs de la signification physique qui pourrait lui être attribuée.

En partant de cette considération il est intéressant de montrer comment la notion ordinaire du temps se rattache au fait général de la gravitation...."

"Le lieu des positions du système est défini par l'expression des diverses coordonnées q_i en fonction de la variable indépendante que nous appellerons la variable de coordination[339]."

Suivent des considérations sur le fait que la pratique qui, selon lui, a devancé la théorie a conduit à choisir le temps sidéral comme variable de coordination dans le référentiel de Copernic qui donne lieu à la représentation canonique, pour le système solaire.

"La position étant supposée rapportée au système de référence de Copernic, la trajectoire du système mobile s'obtient en cherchant les conditions de minimum d'une intégrale de la forme

$$\int \sqrt{(U+h)\,\Sigma\, m\, ds^2} \quad .$$

Les équations différentielles prennent la forme canonique de Lagrange à condition de choisir une variable indépendante t définie par la formule :([340])

$$dt = \sqrt{\frac{\Sigma\, m\, ds}{2(U+h)}} \quad .$$

[338]Ce qu'on appelle le paramètre affin en général.
[339]Et fait intervenir les dérivées par rapport à cette variable (ce que J. Le Roux ne dit pas)
[340]J. Le Roux fait référence à "Appell Paul, 1904, Traité de mécanique, édition 2, Tome 2, P. 405".

- *Il appartient à l'expérience de confirmer que cette variable, définie par simples considérations analytiques, coïncide avec le temps sidéral avec une approximation suffisante./..../.La portée de ces considérations, au point de vue théorique, me paraît digne d'attention. Elles montrent nettement comment la considération du système privilégié et le choix du temps canonique sont imposés par l'étude du phénomène de gravitation."*

Comme on le sait, la méthode s'applique à une large catégorie de représentations des phénomènes physiques, y compris en relativité générale et c'est d'ailleurs ce type de formulation que Painlevé reprend dans ses articles du 14 novembre 1921 et du 1er mai 1922 mais sans indiquer s'il se réfère à cet ouvrage. La démonstration que nous avons donnée avait un objectif différent qui était de comparer le paramètre affin spatial avec le temps newtonien, les conclusions tirées ne sont pas les mêmes mais cela repose sur le même principe.

J. Le Roux conclut son article par :

"La théorie de Newton n'a pas la prétention d'être complète ni définitive. Ce n'est sans doute qu'un schéma, mais c'est un schéma admirable. Fondée uniquement sur l'analyse et la comparaison des faits observés, elle admet tous les perfectionnements que peuvent suggérer les observations plus précises ou les calculs plus exacts[341].

Il ne semble pas cependant que ces perfectionnements puissent être recherchés dans la voie des théories d'Einstein, dont l'impuissance radicale ne saurait plus être contestée."

Alors que le corps de l'article qui reprend les travaux de P. Appell était plutôt intéressant, bien que la prudence et la réserve des propos traduit que J. Le Roux n'est pas très à l'aise avec cette approche, sa phobie de la relativité, manifeste dans sa conclusion, l'égare une fois de plus.

À travers ces propos, il est perceptible que J. Le Roux livre un combat d'arrière-garde, mais tout ceci fait qu'on comprend qu'Einstein, ne se soit pas risqué à être reçu en avril 1922 à l'Académie des Sciences puisque comme on le voit, bon nombre de membres influents ne cachaient pas leur hostilité à sa théorie.

Quelques autres communications suivront mais, comme le débat s'étiole, nous en resterons là.

[341]Ce point est à rapprocher de la proposition de théorie semi-einsteinienne proposée par Painlevé qui permettrait ce type de "perfectionnement". On voit que le caractère empirique (cher aux anglo-saxons) est parfaitement intégrés dans une théorie définie ainsi, ce qui est étonnant en France ; patrie du rationalisme.

Synthèse des idées et conclusions qu'on peut tirer de ce débat (1921-1924)

Après une longue période de silence sur la théorie d'Einstein, dans les articles que nous avons résumés nous avons vu qu'on peut dégager différents courants.

Une campagne franchement hostile à la relativité générale, emmenée par J. Le Roux

À propos de J. Le Roux, il faut signaler qu'il a obtenu, le 18 décembre 1922, le "Grand Prix des Sciences Mathématiques" décerné par l'Académie des Sciences (Commissaires : MM Appel, Painlevé, Hadamard, Gourst, Borel, Lebesque, Boussinesq, Emile Picard, Lecornu, G. Koenig, rapporteur) pour l'ensemble de ses travaux.

Manifestement J. Le Roux était un mathématicien reconnu et apprécié. Même si sa position vis-à-vis de la théorie d'Einstein n'est pas citée dans les travaux primés, ceci est quand même significatif de la position de l'Académie des Sciences vis-à-vis de la théorie de la relativité dont il a été un adversaire déterminé, car on ne peut pas dire que sur ce point la critique de J. Le Roux ait été circonstanciée.

N'écartons pas la possibilité que cette distinction ait eu aussi un caractère "diplomatique" pour marquer en quelque sorte la fin d'une époque, pour permettre de tourner la page, ce qui serait corroboré par la baisse significative des interventions de J. Le Roux après obtention son prix.

J. Le Roux témoin de la position de l'Académie vis-à-vis de la théorie d'Einstein

J. Le Roux restera un témoin des temps qui reflète bien l'état d'esprit dominant de l''Académie", à cette époque, soutenu fin 1922 et début 1923 par E. Picard qui jouait un rôle important à l'Académie des sciences et qui après une première attitude prudente et plutôt objective en 1921 avait "rappelé à l'ordre" certains auteurs de communication qui contestaient un peu trop vivement l'autorité et l'argumentation de J. Le Roux.

Rappelons que quand Einstein est venu en France début avril 1922, à la demande de P. Langevin, il s'est abstenu d'aller à l'Académie des Sciences par crainte d'essuyer un camouflet dont P. Langevin avait eu vent.

Une polémique qui a abouti sur une dialectique constructive et de brillantes analyses

Cette contestation, avec son caractère polémique, a confirmé l'intérêt de la méthode dialectique dont il a résulté des réponses très argumentées, d'une grande clarté sur un problème pourtant difficile, de M. Brillouin, A. Bulh, J. Haag, Levinson et G. Darmois montrant qu'à cette époque, contrairement à la plaisanterie habituelle il n'y avait pas que "deux" personnes qui comprenaient quelque chose à la théorie d'Einstein.

Des interrogations fondées sur la théorie d'Einstein

Le problème de l'existence d'un ds^2 capable de rendre compte d'une situation générale de N corps en interaction a divisé de nombreux scientifiques, pourtant très compétents par ailleurs.

Ce qui a troublé bon nombre de scientifiques c'est que, autant cela paraissait conceptuellement simple en gravitation newtonienne, linéaire vis-à-vis des potentiels qui sont donc additifs, chaque corps étant soumis au potentiel qui est la somme des potentiels des $N-1$ autres corps et dont la variation est "instantanée" ce qui permet de considérer l'évolution du système à N corps dans un espace fixe euclidien (même si la solution exacte des équations pose problème, mais c'est un problème technique), autant le ds^2 ne pouvait être pensé que globalement en relativité générale, sachant que de plus (mais cela n'a pas été relevé par les auteurs) la variation de la configuration n'est pas "perçue" instantanément du fait d'une vitesse limite, des ondes gravitationnelles émises dans le processus.

On comprend que cela ait été de nature à troubler des esprits aussi avisés et cela nous incite à nous interroger avec modestie sur la manière dont toute nouvelle approche est perçue.

À cet effet, nous avons vu que le cas de l'avance du périhélie de Mercure, confirmation éclatante de la relativité générale, a été un sujet récurrent et édifiant à cet endroit, car il a stigmatisé les énergies de part et d'autre, et a permis aussi de comprendre la nature des interrogations, puisque l'interprétation du résultat est hybride.

Rappelons que la valeur de 43" d'arc est un reliquat calculé en mécanique classique à partir d'observations en déduisant l'effet des perturbations connues. En Relativité on suppose que pour les perturbations le calcul de la mécanique classique est égal au premier ordre à celui de la relativité. On constate que ce reliquat est sensiblement égal à la prédiction du modèle où seul le Soleil est pris en compte.

Pour être rigoureux, il faudrait regarder ce que donnent les perturbations en relativité pour s'assurer que cela ne diffère pas beaucoup de celui calculé en mécanique classique.

M. Brillouin répond bien à l'interrogation de J. Le Roux en indiquant que, compte tenu que seul le potentiel associé à dt^2 était significatif au premier ordre lorsque $v << c$, la loi de Poisson était alors applicable. La réponse de M. Brillouin est satisfaisante sur le plan épistémologique mais elle n'a pas convaincu Le Roux qui se place au niveau formel.

Un déficit d'information sur les concepts de la théorie générant une confusion certaine

Nous avons constaté un déficit d'information manifeste, en particulier sur la définition de concepts comme le décalage spectral, ce qui était pourtant facile à décrire mais aussi sur ce qu'est le ds^2 beaucoup plus délicat à expliciter.

La difficile émergence de toute nouvelle théorie

Comme nous l'avons mentionné, Einstein dans son article de synthèse de 1916 n'est pas très rigoureux sur la définition du ds^2 prêtant le flanc à des critiques comme celles de J. Le Roux. Mais il faut rappeler que le point fort d'Einstein c'est sa démarche épistémologique et que même s'il a appris à maîtriser les outils mathématiques nécessaires à la construction de sa théorie, il n'est pas un pur mathématicien de la stature de Hilbert ou Weyl par exemple.

C'est d'ailleurs un aspect qui peut difficilement échapper lorsqu'on étudie ces débats. Face à l'élite scientifique représentée à l'Académie des Sciences en France et son équivalent à l'étranger, Einstein fait figure d'autodidacte voire d'amateur[342].

Pourtant c'est lui qui va apporter l'innovation essentielle dans l'analyse de la gravitation.

Mais c'est aussi souvent ainsi que progresse la science, certains tracent les grandes lignes[343] des découvertes, la rigueur et une compréhension plus profonde vient (éventuellement) après.

Quelquefois des connaissances très précises dans un domaine, peuvent être un handicap pour admettre de nouvelles idées dans ce domaine.

La théorie a permis de produire de brillantes contributions

Un autre courant, en marge des polémiques, plus technique s'est investi dans des travaux importants de formalisation des éléments de la théorie d'Einstein, en particulier d'étude de la structure de l'espace-temps associé à la théorie par des mathématiciens.

Nous avons noté deux articles qui n'ont pas eu le retentissement qu'ils auraient dû avoir, celui de Cartan du 27 mars 1922 sur les espaces conformes et celui de Chazy du 1er mai 1922 qui étaient très en avance sur leur temps.

Concernant E. Cartan on sait le rôle considérable qu'il a joué dans la formalisation mathématique de la relativité générale, préfigurées dans les communications qu'il a faites dans cette période.

Citons aussi, l'article de Sauger du 10 avril 1922 "sur une coïncidence remarquable dans la théorie de la relativité" qui peut permettre de comprendre comment Painlevé a pu proposer sa solution et montre le caractère très particulier du problème du corps unique à symétrie sphérique.

---

[342]Amateur génial, même s'il a échoué à l'examen d'entrée à l'école polytechnique de Zurich, un stage préparatoire lui permit d'y entrer postérieurement. A l'issue de ses études après quelques emplois temporaires, il obtient un simple poste d'employé de bureau des brevets de Zurich. Son cursus scientifique paraît bien modeste par rapport à ceux des scientifiques qu'il a été amené à fréquenter. Mais comme nous le revendiquerons, ceci n'a pas été un obstacle dans son apport considérable à la science, au contraire une révolution ontologique de cette ampleur ne pouvait sans doute venir que d'un profil aussi atypique que le sien.

[343]Rappelons qu'Einstein n'a jamais vraiment accepté certaines conséquences de sa théorie, comme les trous noirs, la théorie du big-bang. C'est sans doute un des attributs irrationnels caractéristique du génie.

Une querelle des anciens et des modernes à l'Académie des Sciences

On peut observer que ses détracteurs, (J. Le Roux, E. Picard, ..), étaient en moyenne plus âgés que ses soutiens (P. Langevin, M. Brillouin, ..) pour ne citer que les plus actifs.

Cela procède d'un besoin, bien naturel et général, pour les générations montantes d'explorer d'autres voies que celles tracées par leurs prédécesseurs pour faire progresser le savoir. Bien que cela n'ait rien d'original, il était utile de le mentionner.

Comment positionner Painlevé sur ce critère, lui qui était entre deux âges (mais plus près du second). Nous avons noté son évolution au cours du débat, donc ceci serait plutôt à verser au crédit d'une ouverture d'esprit qui, au moins sur ce critère, s'est révélée bénéfique.

Un manque de communication entre les membres de la communauté scientifique

Tous ces débats ont montré la qualité de bon nombre d'intervenants. Il n'est pas douteux qu'ils avaient la compétence et la capacité de résoudre une bonne partie des problèmes que posait la nouvelle théorie. A l'époque la communication entre scientifiques n'était pas aussi facile qu'aujourd'hui, ceci étant aggravé par le contexte de l'époque.

Cela peut expliquer que autant d'intelligences n'aient pas abouti à une synthèse qui aurait permis de contribuer à l'essor de la science à la mesure de la somme des connaissances qui étaient contenues dans leurs publications.

En particulier, on ne peut que regretter que la mine de connaissances contenues dans les comptes rendus de l'Académie des Sciences n'ait pas été mieux valorisée à l'époque.

La cosmologie relativiste ignorée

Il est surprenant que la cosmologie relativiste qu'Einstein avait élaborée vers 1918 ait été autant ignorée. Bien que ce soit une solution également à symétrie sphérique elle incorporait (homogénéité, isotropie, tenseur énergie-impulsion non nul) des éléments complémentaires qui aurait peut-être permis d'ouvrir d'autres perspectives, alors que la solution de Schwarzschild, trop proche des solutions newtoniennes, était de nature à brouiller le débat.

Une grande absente du débat : la forme de la métrique de Painlevé

Mais surtout, on peut regretter l'absence de référence et même de discussion sur la forme de la métrique qu'avait proposé Painlevé dans son premier article, découverte pourtant capitale qu'il avait certes reniée, mais que d'autres auraient pu exhumer.

On voit que les esprits n'étaient pas vraiment prêts dans cette approche physique du problème considéré.

On peut aussi noter, mais cela est sans doute corrélé, que la singularité sur l'horizon n'a pas ému grand monde et n'a pas été opposée à la théorie pour mettre en doute son caractère physique, point d'autant plus surprenant qu'on sait combien cela a traumatisé les relativistes

Au sujet de l'autre contribution de Painlevé concernant la formulation géométrique de la mécanique classique le seul écho qu'on en trouve, c'est dans l'article tardif de J . Le Roux (1924) où il présente cela (en se référant à P. Appell) comme un avantage de la mécanique classique par rapport à la relativité.

Et Painlevé dans ce débat ?

L'évolution de la position de Painlevé vis-à-vis de la théorie d'Einstein

Nous avons vu sa position évoluer d'une attitude très critique et plutôt désagréable vis-à-vis d'Einstein dans sa première communication du 24 octobre 1921 à une attitude neutre plutôt respectueuse dans le dernier article du 1er mai 1922.

Même s'il n'a pas tout compris dans la relativité, il a essayé et même s'il a été critique il a été constructif, proposant une forme originale et tentant de rebondir sur d'autres contributions intéressantes lorsqu'on l'a incité et poussé à renoncer (à tort) à sa proposition initiale.

On peut regretter que ces discussions ne se soient pas déroulées dans un contexte suffisamment serein pour permettre de mettre en lumière ce qui était vraiment original dans la première contribution de Painlevé, alors que les scientifiques en présence avaient toutes les capacités requises pour la comprendre.

Mais nous avons vu que d'une part la relativité n'a pas été accueillie à bras ouverts par l'élite scientifique et que d'autre part les relativistes étaient sur la défensive avec les problèmes de singularité associés à la solution de Schwarzschild, ce qui n'a pas facilité le dialogue chacun craignant de se mettre "en faute".

Ceci conclura cette première partie[344] destinée à éclairer le contexte houleux et la nature des débats à cette époque et à comprendre la réticence et la confusion des milieux scientifiques "autorisés" à l'égard de cette nouvelle théorie, plus sensibilisés aux aspects techniques des théories qu'à leur contenu épistémologique comme nous l'avons vu.

La forme de Painlevé à redécouvrir aujourd'hui

Pour approfondir l'analyse et apprécier ce que Painlevé a apporté à la relativité générale nous devons nous intéresser aux conséquences de son article du 24/10/1921. La forme originale de la métrique qui y figure apporte un éclairage très original et innovant à cette solution de la relativité générale qui a pourtant été très largement commentée et critiquée comme nous l'avons vu. Mais faute d'en avoir reconnu le caractère physique, (ce qui lui a été dénié), les commentateurs ont glissé sur la compréhension du problème sans y pénétrer.

Pour ce faire, nous allons devoir mettre en œuvre quelques aspects techniques, simples en général que nous illustrerons autant que possible, par des diagrammes. Lorsque nous utiliserons des résultats connus, nous les rappellerons avec des références en les commentant éventuellement.

Pour des résultats originaux ou méconnus, spécifiques en général à cette forme de Painlevé, nous pourrons être amenés à faire certains calculs simples en général mais nous nous efforcerons de les illustrer également par des diagrammes ce qui permet d'en tirer plus aisément les aspects phénoménologiques ou épistémologique. Pour ne pas léser ceux qui ne sont pas familiers avec les équations, nous avons divisé la deuxième partie en deux corpus complémentaires dont le deuxième traite essentiellement des aspects épistémologiques.

Nous allons tenter de réparer le déni scientifique qui a conduit au rejet de la proposition de Painlevé en montrant comment son approche révèle, avec une simplicité surprenante, les propriétés physiques et la phénoménologie de cette solution.

[344]Et qui n'est pourtant qu'un résumé très condensé et partiel des différentes communications.

Deuxième partie : l'apport scientifique de la solution proposée par Painlevé

Cette partie est composée de deux corpus. Le corpus qui suit, composé des chapitres 5 à 19 expose, équations à l'appui, l'apport scientifique de Painlevé. Il invoque quelques connaissances en relativité générale. On peut le sauter (quitte à s'y référer le cas échéant) et aller directement au deuxième corpus, à la fin, qui traite de ces points en s'attachant aux concepts invoqués, à leur caractère épistémologique et à la phénoménologie de la solution.

Corpus 1 : analyse scientifique de la forme de Painlevé

5- Forme de Painlevé déduite de celle Schwarzschild et phénoménologie

---

Nous montrons comment une nouvelle coordonnée temps, qui peut être dérivée naturellement de la forme de Schwarzschild, permet de définir la forme de Painlevé. Cela résulte d'une propriété géométrique de cet espace-temps que la forme de Painlevé révèle. Nous discuterons de la nature et des relations entre les coordonnées des formes de métriques. Nous montrerons comment le caractère pseudo-newtonien est imbriqué au cœur de la forme de Painlevé.

Construction de la forme de Painlevé à partir de celle de Schwarzschild

Bien que Painlevé ait construit sa solution, sans la dériver de la forme de Schwarzschild, il est instructif de la faire.[345] Considérons, dans ces coordonnées de Schwarzschild, l'équation **géodésique radiale de type temps** sans vitesse initiale à l'infini, associée à un observateur[346] (dit de Painlevé) de quadri-vitesse (contravariante) que nous noterons U^{μ}.

Cette équation géodésique détermine à partir de deux invariants, (l'énergie conservée sur la géodésique, car la métrique ne dépend pas du temps et l'invariant métrique $ds^2/d\tau^2 = -1$), les deux composantes non nulles, $t' = dt/d\tau$ et $r' = dr/d\tau$, de $U^{\mu} = dx^{\mu}/d\tau$ pour cette géodésique.

Dans leur forme covariante $U_t = U_0 = g_{0\mu}U^{\mu}$ et $U_r = U_1 = g_{1\mu}U^{\mu}$, ces composantes vont se révéler être celles du gradient d'une fonction scalaire $T(t, r)$, nouvelle coordonnée temporelle, dont la valeur va correspondre au temps propre de l'observateur de Painlevé défini ci-dessus.[347]

Calcul de la quadri-vitesse dans la forme de métrique de Schwarzschild

En normalisant l'énergie [348]($E = e/m = 1$), pour un trou noir de masse M, avec c =1, on obtient :

$$t' = \frac{1}{1-\frac{2GM}{r}} \quad \rightarrow r'^2 + 1 - \frac{2GM}{r} = 1 \quad \rightarrow r' = \pm\sqrt{1-\left(1-\frac{2GM}{r}\right)} = \pm\sqrt{\frac{2GM}{r}} \quad .$$

---

[345]La forme de la solution de Schwarzschild s'écrit: $ds^2 = -(1 - r_s/r)\,dt^2 + dr^2/(1 - r_s/r) + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta.d\varphi^2)]$**.** La démonstration qui suit est adaptée de Martel K. & Poisson E.(2000)

[346]En fait une classe d'observateurs"virtuels" dont la seule vertu est de faire des mesures dans leurs référentiels. Un "observateur" est caractérisé son paramètre affin sur une ligne d'univers de type temps dans la variété.

[347]Les "variables se séparent" permettant leur intégration, U_t est constant et $U_r = f(r)$ ne dépend que de r.

[348]La particule de test de masse unitaire ($m = 1$) étant au repos à l'infini son énergie (en posant $c = 1$), est son énergie de masse $e = mc^2 = 1$.

Soit : $$U^{\mu} = (t', r', 0, 0) = \{ \frac{r}{r-2GM} , - \sqrt{\frac{2GM}{r}} , 0, 0\}. \qquad (5\text{-}1)$$

La valeur de *t',* dans *(5-1),* résulte de la conservation de l'énergie sur une géodésique, ce qui définit un vecteur de Killing temps $K^{\mu} = (\partial_t)^{\mu} = \{1, 0, 0, 0\}$:

$$E = -K_{\mu}\frac{dt}{d\tau} \overset{349}{=} -K_{\mu}t' \text{ avec } K_{\mu} = g_{\mu\nu}K^{\nu} = g_{00}K^{0} = g_{00}.$$

La valeur de *r',* dans *(5-1)*, résulte de celle de *t'* et de l'invariant métrique : $(U_{\mu}U^{\mu} = -1)$.[350]
Sélectionnons $-(r_s/r)^{1/2}$ correspondant à la géodésique radiale entrante (orientée vers $r = 0$).

La quadri-vitesse covariante dans la forme de Schwarzschild est le gradient d'une fonction

À partir de la quadri-vitesse contravariante, on peut calculer la quadri-vitesse covariante :[351]

$$U_{\mu} = g_{\mu\nu}U^{\nu} \rightarrow \{ g_{00}U^{0}, g_{11}U^{1}, 0, 0)\} = \left[-1, -\frac{\sqrt{2GMr}}{r-2GM}, 0, 0\right]$$

On peut la considérer comme le gradient de la fonction scalaire de $T(r, t)$ définie par :

$$-\partial_{\mu}T(t,r) = U_{\mu} = \left[1, \frac{\sqrt{2GMr}}{r-2GM}, 0, 0\right] \rightarrow\rightarrow dT = dt + \frac{\sqrt{2GM}}{r-2GM}dr \quad . \qquad (5\text{-}2)$$

En intégrant on obtient les fonctions scalaires $T(t, r)$ suivantes :

$$T = t + \int \left(\frac{\sqrt{2GMr}}{r-2GM}\right)dr = t + 2GM\left(\sqrt{\frac{2r}{GM}} + \ln\left(\frac{\sqrt{r}-\sqrt{2GM}}{\sqrt{r}+\sqrt{2GM}}\right)\right) \qquad (5-3-1) \quad si \quad r > 2GM$$

$$T = t + \int \left(\frac{\sqrt{2GMr}}{r-2GM}\right)dr = t + 2GM\left(\sqrt{\frac{2r}{GM}} + \ln\left(\frac{\sqrt{2GM}-\sqrt{r}}{\sqrt{r}+\sqrt{2GM}}\right)\right) \qquad (5-3-2) \quad si \quad r < 2GM$$

[349] Le signe "-" résulte du fait que, par convention, l'énergie est positive à l'infini.
[350] Qui se réduit ici sur la géodésique radiale à : $U_t U^t + U_r U^r = -1$, avec $U_{\mu} = g_{\mu\nu}U^{\nu}$.
[351] Les composantes θ, φ de la vitesse radiale sont évidemment nulles, on peut vérifier que $U^{\mu}U_{\mu} = -1$.

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)dt^2 + 2\sqrt{\frac{2GM}{r}}\,dr.dt + dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\ d\varphi^2\right) \quad . \quad (5\text{-}4)$$

Le changement de coordonnées est donné par *(5-3-1)* ou *(5-3-2)* selon que $r > 2GM$ ou $r < 2GM$ dans la forme de Schwarzschild. Cela donne la forme **"entrante"** [352]*(5-4)* ci-dessus.

Notons que les fonctions *(5-3-x)* sont singulières pour $r = 2GM = r_s$ (elles valent - ∞, et leur dérivée en ce point est discontinue) et que nous avons besoin de deux fonctions pour cette transformation.

C'est le prix à payer pour éliminer la singularité sur l'horizon[353].

Comme la forme de Painlevé *(5-4)* est définie sans singularité dans l'intervalle]0, ∞], nonobstant sa valeur singulière en $r = 2GM$ dans *(5-3-x),* nous pourrons étendre les géodésiques radiales entrantes pour $r \leq 2GM$ alors que la forme de Schwarzschild étant singulière en $r = 2GM$, ceci pose problème pour étendre la géodésique entrante dans cette forme pour $r \leq 2GM$. [354]

Ces opérations appellent toutefois à une certaine circonspection.

En effet nous ne pouvons éliminer une singularité qu'en en introduisant une autre et on pourrait objecter que la méthode ne résout pas le problème mais ne fait que le reporter.

Mais nous verrons qu'il existe des méthodes[355] qui s'affranchissent de ces pratiques discutables et qui les valident *a posteriori*.

Les coordonnées r, θ, φ restent les mêmes que dans la forme de Schwarzschild, mais nous avons une nouvelle coordonnée de temps T qui va se révéler avoir la même valeur, bien qu'étant de nature différente, que le temps propre τ (paramètre affin mesurable par une horloge) d'un observateur que nous appellerons observateur de Painlevé, en chute libre radiale vers la singularité centrale partant de l'infini à vitesse nulle.

Cette propriété explique tout l'intérêt que cette forme peut présenter, ce que nous allons nous attacher à montrer dans la suite du document.

Notre démonstration précédente nous ayant montré que c'est en considérant l'observateur de Painlevé qu'on construit une coordonnée T qui produit cette forme, ceci nous conduit à l'associer de façon privilégiée cet observateur[356].

Nous verrons que sa quadri-vitesse covariante prend une forme très simple, ceci résultant du lien entre une forme de la métrique et l'équation géodésique déduite du Lagrangien puisque celui-ci vaut $L = \frac{1}{2} g_{\mu\nu}\,(dx^\mu/d\lambda)(dx^\nu/d\lambda)$.

[352]Bien que Painlevé ait défini la forme sortante, nous nous intéressons à la forme entrante, gardant à l'esprit l'existence de cette forme sortante spatio-temporelle symétrique. L'équation *(5-4)* où T est noté t montre qu'on passe à la forme sortante, où seul le signe de $dr.dt$ change, en inversant le signe du deuxième terme du membre de droite des équations *(5-3-1* et *(5-3-2)*. Ceci suggère que la solution complète inclut les deux formes. Finkelstein (1958) sur sa solution similaire se demandait sur quel critère s'opérait la sélection d'une des formes.

[353]Une fonction non continûment dérivable aux ordres 1 et 2, ne peut être rendue continûment dérivable à ces ordres que par une transformation qui est elle-même non continûment dérivable à ces ordres et vice versa.

[354]On est amené à considérer une tétrade locale pour prouver que la singularité ne concerne que des grandeurs non physiques. Avec la forme de Painlevé de telles circonvolutions sont inutiles.

[355]Nous verrons comment Lemaître [Lemaître G. (1932)] a également établi nativement la forme de Painlevé.

[356]On utilise parfois le raccourci "forme de Painlevé" pour invoquer l'observateur de Painlevé. On associe souvent un observateur à la forme de métrique où sa ligne d'univers est orthogonale à la section spatiale (i.e Painlevé, Schwarzschild) ce qui est arbitraire, car elle peut être définie dans n'importe quelle forme de métrique. Le contexte permet de lever l'ambiguïté, car s'il s'agit de mesures, cela ne peut concerner qu'un observateur.

Remarque sur l'expression de la courbure de la forme de Painlevé

La forme complète de Painlevé peut aussi s'écrire de façon équivalente[357]:

$$ds^2 = -dt^2 + \left(dr + \sqrt{\frac{2GM}{r}}\,dt\right)^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2(\theta)\,d\varphi^2\right) \quad . \qquad (5\text{-}4bis)$$

La "courbure" de la géométrie est alors encodée dans le terme : $(dr + (2GM/r)^{1/2}dt)^2$.

La forme est la somme de la métrique de Minkowski (sans le terme dr^2) et du produit tensoriel (dans l'espace-temps de Minkowski) du vecteur covariant radial entrant $\boldsymbol{V}$ de composantes

$$V_\mu = \{(2GM/r)^{1/2},\ 1,\ 0,\ 0\}$$

par lui-même.

Nous retrouverons cette forme particulière $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + V_\mu V_\nu$, mais avec un vecteur radial entrant $\boldsymbol{V}$ nul dans une autre forme (Kerr-Schild), décrivant la même solution, mais où ce seront les géodésiques radiales entrantes nulles qui vont présenter des caractères minkowskiens.

Ces deux formes sont les variantes temporelles et nulles associées à un vecteur $\boldsymbol{V}$ principal.

Il s'ensuit que pour un observateur de ligne d'univers radiale telle que $dr/dt = -(2GM/r)^{1/2}$, la métrique (à deux dimensions) décrite est minkowskienne et comme pour un mouvement radial ($d\theta = d\varphi = 0$), l'expression se réduit à $ds^2 = -dt^2$, la coordonnée t est alors égale au temps propre, ce qui montre que cette ligne d'univers est une géodésique.

La phénoménologie de l'observateur de Painlevé a des caractères newtoniens

Ce qui précède montre que pour l'équation géodésique radiale, la solution est évidente sous cette forme et l'intégration de $dr/dt = -(2GM/r)^{1/2}$ est immédiate, cela donne :

$$r^{1/2}\,dr = -(2GM)^{1/2}\,dt \rightarrow t = -(2/3)(2GM)^{-1/2}\,r^{3/2} \rightarrow r = -\{[(3/2)(2GM)^{1/2}]\,t\}^{2/3}.$$

On a posé la constante d'intégration égale à zéro pour simplifier (dans un cas concret elle est déterminée par les conditions aux limites). On retrouve bien, directement et naturellement cette fois, à partir de la forme, les caractéristiques de l'observateur de "Painlevé".

Notons que la valeur de la vitesse radiale ($dr/dt = -(2GM/r)^{1/2}$) qui confère un mouvement géodésique à cet observateur est exactement celle qu'on obtient en mécanique newtonienne

[357]La forme est la somme de la métrique de Minkowski (sans le terme dr^2) et du produit tensoriel d'un vecteur par lui-même. Nous retrouverons cette structure (avec dr^2) dans la forme de Kerr-Schild (sans rotation) qui a des liens structurels avec celle de Painlevé. La raison de cette différence sera explicitée au chapitre *13* (il faut que le déterminant cartésien soit unitaire).

dans un champ gravitationnel à symétrie sphérique généré par une masse *M.*[358] L'égalité en valeur de la coordonnée temporelle avec le temps propre permet de substituer $dr/d\tau$ à dr/dt et ainsi comparer la solution relativiste covariante avec la solution newtonienne.

Forme cartésienne de Painlevé

En coordonnées cartésiennes $x^\mu = (t, x, y, z)$ nous verrons, au chapitre *16*, qu'elle s'écrit

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu}(dx^\mu - \beta^\mu dx^0)(dx^\nu - \beta^\nu dx^0),$$

où

$$\beta^\mu = -(2GM)^{1/2}(x^2+y^2+z^2)^{-3/4}\{0, x, y, z\}.$$

Ceci montre que cette métrique ne dépend que de ce vecteur spatial $\beta^\mu = \partial_\mu \Phi$, gradient de la fonction scalaire $\Phi = -2(2GM)^{1/2}(x^2+y^2+z^2)^{1/4}$ qui ne comporte que des composantes spatiales.

Nous verrons tout l'intérêt de cette forme cartésienne dans la suite du document.

La métrique inverse dans la forme de Painlevé

Pour la solution "trou noir", elle s'écrit :

$$\partial_s^2 = -\partial_t^2 + 2\sqrt{\frac{2GM}{r}}\partial_t\partial_r + \left(1-\frac{2GM}{r}\right)\partial_r^2 + \frac{\partial_\theta^2}{r^2} + \frac{\partial_\varphi^2}{r^2(\sin(\theta))^2} \quad . \qquad (5\text{-}4ter)$$

Les formes de Painlevé et Eddington-Finkelstein sont de la même famille

Des travaux plus récents ont montré que cette forme fait partie d'une classe plus générale à un paramètre *p* de formes de coordonnées.[359]

En effet, considérant toujours une géodésique radiale entrante, si à la différence du cas de l'observateur de Painlevé on autorise un "boost" à l'infini, c'est-à-dire une vitesse non nulle à l'infini $v_\infty \neq 0$ (en unité de *c*, $v_\infty = 1$ pour $v_\infty = c$), et qu'on pose[360] :

[358]Le potentiel vaut (pour une masse unitaire par exemple) $V = -GM/r$ et l'énergie cinétique $\frac{1}{2}v^2$. Les lagrangiens relativistes et classiques dont on dérive le mouvement géodésique radial sont identiques. Nous verrons au chapitre *10* que le potentiel qu'on peut définir pour la solution relativiste est identique au potentiel newtonien si le moment angulaire (conservé) est nul, ce qui est le cas pour une géodésique radiale.

[359]Lake K (1994), discuté préalablement par Gautreau et Hoffmann repris dans Martel K. et Poisson E. (2000)

[360]Remarquons que comme c =1, le facteur $(1 - v_\infty^2)^{-1}$ est le facteur de Lorentz (au carré) associé au "boost" v_∞. L'article de Martel et Poisson ne traite qu'un cas particulier de boost entrant, mais la méthode permet de généraliser au cas d'un boost sortant, plus complexe, car il n'est pas forcément défini à l'infini. Gautreau et Hoffmann (voir annexe 3 au chapitre *21*) traitent le cas d'une géodésique incomplète. M. Mizony (2011) a proposé une solution pour les boosts sortants en définissant la vitesse $v_0 = dr/dt$ à une distance r_0. (Non publié).

$$p = E^{-2} = 1 - v_\infty^2.$$

En définissant [361]une fonction T par :

$$U_\mu = - p^{-1/2} \partial_\mu T,$$

où U_μ est la quadri-vitesse covariante alors la fonction T prend la forme :

$$T = t + \int \left(\frac{\sqrt{1 - p\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)}}{1 - \frac{2GM}{r}} \right) dr \quad . \qquad (5\text{-}5)$$

Cette fonction est intégrable, en posant $f = 1\text{-}2M/r$, elle donne :

$$T = t + 2\mathrm{M}\left(\frac{1-pf}{1-f} + \ln\left| \frac{1-\sqrt{1-pf}}{1+\sqrt{1-pf}} \right| - \frac{1-p/2}{\sqrt{1-p}} \ln\left| \left[\frac{\sqrt{1-pf}-\sqrt{1-p}}{\sqrt{1-pf}+\sqrt{1-p}} \right] \right| \right) \quad .$$

Avec cette nouvelle coordonnée T on obtient alors une famille de formes dont le ds^2 s'écrit :

$$ds^2 = -\left(\frac{1}{p}\right) dT^2 + p\left(dr + \frac{1}{p}\sqrt{1 - p\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}\, dT \right)^2 + r^2\, d\Omega^2 \quad , \qquad (5\text{-}6)$$

ou également :

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dT^2 + 2 * \sqrt{1 - p\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}\, dr.dT + p\, dr^2 + r^2\, d\Omega^2 \quad .$$

On remarque immédiatement que les sections spatiales ($dT = 0$)

$$ds^2 = \quad p.dr^2 \quad + [r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta.d\varphi^2)] \qquad (5\text{-}7)$$

Toutes ces contributions traitent différents aspects du même problème : géodésique radiale avec boost. La comparaison et la synthèse de ces propositions de métrique avec boost est analysée en détail au chapitre *5* de l'annexe *3*.

[361]Par une méthode similaire à celle que nous avons utilisé au chapitre *3,* mais ici c'est le gradient de T multiplié par une constante (qui ne vaut pas 1) qui intervient.

ne sont plus plates dans le cadre de cette extension, ce qui se vérifie en calculant le tenseur de Riemann des sections spatiales, qui se réduit à :

$$R^{\varphi}{}_{\theta\varphi\theta} = -(1- p)/p.$$

Le scalaire de Kretchmann vaut :

$$R^{abcd}R_{abcd} = 4(1-p)^2/(pr^2)^2.$$

On vérifie que cette forme se réduit bien à la forme *(5-4)* pour $p = 1$ ($v_\infty = 0$).

Cette forme décrit l'infinité de géodésiques qu'on peut déduire de celle suivie par l'observateur de Painlevé en ajoutant un "boost", qui ne change pas le caractère inertiel de la ligne d'univers mais modifie les paramètres de la géodésique.

Ceci souligne le caractère très spécifique (non covariant) de la forme de Painlevé, exhibant un caractère minkowskien dans un espace-temps qui ne l'est pas. Ce caractère minkowskien s'évanouit dès qu'on opère la moindre transformation (non triviale), y compris une transformation linéaire, comme un boost (transformation de Lorentz dans l'espace tangent), l'espace-temps recouvrant alors son caractère (physique) courbe.[362]

Et qu'en est-il lorsque $p = 0$ soit $v_\infty = 1$, c'est-à-dire dans le cas d'une géodésique lumière radiale entrante, cas limite du cas général précédent ?

En prenant la limite de la fonction *T* pour cette valeur on obtient :

$$Lim\ T\ (p \rightarrow 0) = t + r^* \text{ Avec } r^* = r + r_s\, ln|1-r/r_s|.$$

C'est le changement de coordonnées *T(t, r)* qui donne la forme d'Eddington-Finkelstein.

Ce qui montre que la forme de Painlevé et celle de d'Eddington-Finkelstein appartiennent à une même famille de formes dont la coordonnée temporelle ne diffère que par des considérations sur les conditions initiales à l'infini de vitesse géodésique radiale et que cette unification du formalisme permet de décrire aussi bien des géodésiques de type temps que de type lumière.[363]

Forme de la métrique inverse de la forme de Painlevé généralisée

Elle vaut :

[362]Rappelons que dans un espace physiquement minkowskien, le caractère non courbé de l'espace-temps est insensible à cette transformation.

[363]Par ailleurs on peut construire des coordonnées de ce type pour décrire un espace-temps de Kerr non sphérique voir C. Doran (2000).

$$\partial_s^2 = -p\,\partial_t^2 + 2\left(1 - p\left(1 - \sqrt{\frac{2GM}{r}}\right)\right)\partial_t\partial_r + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)\partial_r^2 + \frac{\partial_\theta^2}{r^2} + \frac{\partial_\varphi^2}{r^2\left(\sin(\theta)\right)^2} \quad .$$

Le trou noir est la forme générique de ce type de solution

Nous nous référons, dans le texte, aux formes de métrique comme décrivant un trou noir (ou blanc), mais, bien entendu, les formes que nous évoquerons ici ne traitent pas que du seul cas où la matière est effondrée en trou noir.

Elles sont valables à l'extérieur (dans le vide) d'un corps unique à symétrie sphérique dans tous les cas, ce qui, en général, correspond à une situation beaucoup plus commune.

Ce choix est dicté par le fait que le trou noir est la solution générique, contenant toute la phénoménologie de la solution physiquement pertinente alors qu'à l'extérieur d'un corps massif à symétrie sphérique seule une partie de l'espace-temps est concernée, et aussi de façon plus prosaïque parce que cela évite l'emploi d'une expression un peu longue.

Nous ne considérerons pas dans ce document la phénoménologie globale incluant la région spatio-temporelle de phénoménologie symétrique par parité vis-à-vis de la coordonnée *t* ou *r* (trou blanc) et l'architecture globale (trous de ver entre les deux régions, par exemple).

La nature de la coordonnée temporelle de la forme de Painlevé clarifie la structure de l'espace-temps

---

Nous examinons la signification physique (en fait géométrique) du fait (non trivial) que dans cette solution, la quadri-vitesse covariante U_μ est le gradient d'une fonction scalaire *T(t, r),* [364]ce qui nous a permis de construire la forme de Painlevé à partir de celle de Schwarzschild.

Courbe sur une hypersurface définie par une valeur constante d'une fonction

Définissons une hypersurface par $T(t, r) = constante$ et une courbe $\Gamma(x^\mu)$ quelconque dans cette hypersurface.

Évaluons la fonction $T(t, r)$ sur cette courbe.

Nous avons :

$$\frac{dT}{d\lambda} = \frac{\partial T}{\partial x^\mu}\frac{dx^\mu}{d\lambda} = 0.$$

Ceci est le produit scalaire du vecteur $V^\mu = dx^\mu/d\lambda$, tangent à la courbe, avec le vecteur U^μ, car $\partial T/\partial x^\mu = U_\mu$ est le gradient de la fonction T.

Ce produit scalaire étant nul ils sont orthogonaux.

La ligne d'univers géodésique d'un tel observateur est donc orthogonale en tout point à cette hypersurface (puisque orthogonale à toute courbe appartenant à cette hypersurface), comme dans les solutions cosmologiques fondées sur la métrique de Robertson-Walker.

Nous verrons, lors de l'analyse faite par Lemaître chapitre *14*, que ceci n'est pas fortuit et que ces solutions font partie d'une même famille. [365]

Pour que la quadri-vitesse covariante puisse s'exprimer sous forme d'un gradient d'une fonction scalaire, il faut que la quadri-vitesse satisfasse à un certain nombre de propriétés.

---

[364]Tiré de Martel K. & Poisson E. (2000).

[365]On peut aussi définir une forme similaire à celle de Painlevé (avec un produit *dr.dt*) qui a les mêmes propriétés, dérivée de celle de Robertson-Walker : voir Mizony M. & Lachièze Rey M. (2004).

Condition pour qu'une quadri-vitesse covariante soit le gradient d'une fonction

Un théorème de géométrie différentielle[366] stipule que U_μ est le gradient d'une fonction scalaire, s'il satisfait les équations :

$$U^{\mu}{}_{;\nu}\, U^{\nu} = 0, \qquad (5\text{-}8)$$

$$U_{[\mu ;\nu}\, U_{\lambda]} = 0. \qquad (5\text{-}9)$$

L'équation (*5-9*) [367]signifie que les lignes d'univers sont partout orthogonales à une famille d'hypersurfaces de type espace caractérisées par $T = constante$.

Ceci garantit que la quadri-vitesse U_μ peut s'exprimer par $U_\mu = f.\partial_\mu T$ pour une certaine fonction $f(x^\mu)$.

En général, cette fonction n'est pas constante et cela n'est pas suffisant pour définir un gradient.

Nous devons, en plus, imposer que le mouvement soit géodésique, conformément à *(5-8)*.

Imposer que la solution satisfasse à ces deux équations implique que la quadri-vitesse est alors le gradient d'une fonction scalaire :

$$U_\mu = -K.\partial_\mu T.$$

Dans le cas de la forme de Painlevé $K = 1$, car $p = 1 - v_\infty^2 = 1$ ce qui se déduit de $v_\infty = 0$ et dans ce cas seulement les sections spatiales sont de plus euclidiennes.

Dans le cas de la famille associée à la forme de Painlevé que nous avons étudiée, K est une constante qui vaut $p^{-1/2}$.

Comme nous l'avons indiqué au chapitre précédent, la famille de formes de métrique où la coordonnée temporelle T satisfait aux équations ci-dessus s'obtient à partir de la forme de Painlevé en ajoutant tous les "boosts" possibles (vitesses initiales non nulles à l'infini), satisfaisant à $0 \leq p \leq 1$ et que si cette vitesse à l'infini est celle de la lumière $v_\infty = 1$ soit $p = 0$, la forme obtenue est celle d'Eddington-Finkelstein.

Cette généralisation qui en élimine certains attributs permet de souligner le caractère très spécifique de la forme de Painlevé.

---

[366]Wald R.M (1984) Annex B.

[367]Conformément aux conventions, le point-virgule désigne la dérivation covariante et les crochets l'anti-symétrisation.

La coordonnée T est égale au temps propre de l'observateur de Painlevé

Nous montrons comment le temps propre de l'observateur de Painlevé est égal (en valeur) de façon non triviale à la coordonnée temporelle de la forme de la métrique. Nous étendons l'analyse à la généralisation de la forme de Painlevé, quand la vitesse à l'infini n'est pas nulle.

Cas de la forme de Painlevé

À partir de considérations générales, lorsque nous avions établi la forme de Painlevé, nous avions indiqué que la coordonnée temporelle T était égale, en valeur, car elles sont de natures différentes, au temps propre de l'observateur de Painlevé. Montrons-le formellement.

La normalisation de la quadri-vitesse, $U^\mu U_\mu = U^0 U_0 + U^1 U_1 = -1$ sur la géodésique radiale, peut s'écrire :

$$U^\mu U_\mu = -\frac{\partial T}{\partial t}\frac{dt}{d\tau} - \frac{\partial T}{\partial r}\frac{dr}{d\tau} = -1 \quad \rightarrow \quad -\frac{\partial T}{\partial t}dt - \frac{\partial T}{\partial r}dr = -d\tau = -dT$$

À gauche de la flèche, c'est la normalisation de la quadri-vitesse d'un observateur en chute libre radiale sans vitesse initiale en coordonnées de Schwarzschild et on utilise le fait que les composantes de la quadri-vitesse covariante sont le gradient $U_\mu = -\partial_\mu T$ de la fonction T.

À droite de la flèche, on remarque que l'équation de la partie à gauche multipliée par $d\tau$ vaut $-d\tau$, mais qu'elle est aussi l'expression de $-dT$, qui est l'opposé de la différentielle totale de la fonction $T(t, r)$.

Ceci montre que : $dT = d\tau$.

Cas de la forme de Painlevé généralisée (avec boost)

Nous avons vu ce que cela donnait pour la forme de Painlevé, qu'advient-il de cette relation lorsque la vitesse de l'observateur à l'infini n'est plus nulle ?

Avec la coordonnée temporelle *T* associée, la relation donnant le gradient est alors :

$$U_\mu = -p^{-1/2}\, \partial_\mu T.$$

En tenant compte de cette différence, la relation "d'invariant métrique"[368] peut s'écrire :

$$U^\mu U_\mu = -p^{-1/2}.\frac{\partial T}{\partial t}\frac{dt}{d\tau} - p^{-1/2}\frac{\partial T}{\partial r}\frac{dr}{d\tau} = -1 \quad \rightarrow \quad -\frac{\partial T}{\partial t}dt - \frac{\partial T}{\partial r}dr = -p^{1/2}d\tau = -dT \rightarrow dT/d\tau = p^{1/2}.$$

Nous reviendrons sur les éclaircissements que cette forme peut nous apporter sur les différentes occurrences du concept de temps en relativité générale.

A l'évidence, comme déjà mentionné, la coordonnée temporelle est de nature différente du temps propre des observateurs qui, entre deux points d'une ligne d'univers donnée, ne dépend pas de la forme de la métrique, donc de la coordonnée temporelle de la forme (arbitraire) de la métrique.

De son côté le temps propre, sur des lignes d'univers différentes entre des extrémités spatio-temporelles identiques, est en général différent, ceci se constatant par comparaison des horloges associées à chacun des observateurs sur leur ligne d'univers.[369]

[368]Qu'on appelle aussi normalisation de la quadri-vitesse qui résulte directement de l'expression du ds^2 (en posant c =1) : $ds^2 = -c^2d\tau^2 = -d\tau^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu$. En divisant par $d\tau^2$, on obtient : $-1 = [g_{\mu\nu}\,(dx^\nu/d\tau)](dx^\mu/d\tau) = [U_\mu]U^\mu$, par définition de la quadri-vitesse contravariante $U^\mu = dx^\mu/d\tau$ et covariante $U_\mu = g_{\mu\nu}\,(dx^\nu/d\tau) = g_{\mu\nu}\,U^\nu$.

[369]Le ds n'est pas la différentielle totale d'une hypothétique fonction $s(x^\mu)$ dont ds^2 serait le carré, d'ailleurs ce n'est pas une différentielle, ds^2 désigne le tenseur métrique de variance 2.

6- La quadri-vitesse covariante de l'observateur de Painlevé dans cette forme est constante et égale à l'unité

Nous montrons une autre propriété caractéristique et fondamentale de cette forme concernant la quadri-vitesse covariante de l'observateur de Painlevé. Elle est constante et réduite à sa plus simple expression. Comme elle régit le décalage spectral observé elle permettra de comprendre ce qui a pu motiver ses propos contestés.

Calcul de la quadri-vitesse radiale entrante contravariante

La coordonnée temporelle T , notée ici t, étant égale, en valeur dans cette forme de la métrique, au temps propre de l'observateur de Painlevé, on a alors $U^0 = U^t = dt/d\tau = 1$.

La normalisation de la quadri-vitesse, $U_\mu U^\mu = -1$ où $U_\mu = g_{\mu\nu} U^\nu$, va nous permettre de calculer simplement U^r l'autre coordonnée non nulle de la quadri-vitesse radiale[370] (entrante)[371]:

$$U^\mu = (1, -\sqrt{\frac{r_s}{r}}, 0, 0) \quad . \qquad (6\text{-}1)$$

Démonstration :

$U_t = g_{tt}U^t + g_{tr}U^r = -[1-(r_s/r)](1) + (r_s/r)^{1/2} U^r = -(1-r_s/r) + (r_s/r)^{1/2} U^r$
$U_r = g_{rr}U^r + g_{rt}U^t = (1)U^r + (r_s/r)^{1/2}(1) = (r_s/r)^{1/2} + U^r$

$U_\mu U^\mu = U_t U^t + U_r U^r = -1 = (1)[-[1-(r_s/r)] + (r_s/r)^{1/2} U^r] + U^r[(r_s/r)^{1/2} + U^r] \rightarrow$
$(U^r)^2 + 2(r_s/r)^{1/2} U^r + (r_s/r) = 0 = [(U^r) + (r_s/r)^{1/2}]^2 = 0$

On obtient une équation du second degré en U^r avec une racine double $:(U^r) = -(r_s/r)^{1/2}$.

Quadri-vitesse covariante entrante en forme de Painlevé

$U_0 = g_{tt}U^t + g_{tr}U^r = -(1-r_s/r)(1) + (r_s/r)^{1/2}(-r_s/r)^{1/2} = -1$
$U_r = g_{rr}U^r + g_{rt}U^t = (1)(-r_s/r)^{1/2} + (1)(r_s/r)^{1/2} = 0$

---

[370] La quadri-vitesse radiale de l'observateur de Painlevé en coordonnées sphériques (t, r, θ, φ) est le quadrivecteur défini par $U^\mu = [dt/d\tau, dr/d\tau, 0, 0]$ dans la forme de Painlevé. Cette quadri-vitesse définit un champ de vecteurs tangent à la géodésique suivie par l'observateur. La géodésique est la courbe intégrale de ce champ de vecteurs.

[371] La vitesse sortante aurait le signe + pour la composante r' et $t' = (r+2M)/(r-2M)$. Ceci a des conséquences aussi pour la vitesse sortante covariante dont la composante r est différente du cas entrant. Nous nous intéressons en général aux géodésiques entrantes mais il existe aussi des géodésiques sortantes de même paramètre d'énergie totale avec des paramètres de quadri-vitesse contra et covariantes différents de ceux de la géodésique entrante.

Le vecteur quadri-vitesse de l'observateur de Painlevé en coordonnées covariantes prend la forme non triviale :

$$U_\mu = U^\nu g_{\mu\nu} = (-1,0,0,0). \qquad (6\text{-}2)$$

Cette forme n'a qu'une composante qui est constante (indépendante des coordonnées) à la différence, comme (6-1) le montre, de la quadri-vitesse contravariante de composantes U^μ.

Mais rappelons que ceci résulte de la courbure de l'espace-temps puisque U^μ sont les composantes d'un vecteur défini localement dans l'espace-temps tangent dont les vecteurs de base $\partial_\mu = dx^\mu/d\lambda$ sont localement tangent aux coordonnées x^μ définies sur la variété alors que $U_\mu = g_{\mu\nu} U^\mu$ est une forme linéaire (vecteur covariant), s'appliquant localement sur les composantes U^μ , forme linéaire qui est définie sur la variété elle-même[372] (espace cotangent).

La valeur constante de U_μ signifie géométriquement que la géodésique de l'observateur de Painlevé de paramètre affin τ est la coordonnée T (courbe) sur la variété, donc que $T = \tau$.

Notons que dans la forme de Schwarzschild, il n'existe pas d'observateur ayant cette propriété.

Cette relation qui est satisfaite pour la forme de Painlevé est donc restrictive.[373]

En effet, si cette propriété est trivialement vérifiée dans le référentiel co-mobile inertiel de cet observateur, donné par la forme nativement géodésique et diagonale de Lemaître[374], laquelle dépend du temps, où U^μ a une seule composante constante égale à 1[375], elle n'est pas triviale dans une forme stationnaire globale comme celle de Painlevé (ne dépendant pas du temps), où U^μ n'a pas cette propriété.

Le lien avec la forme géodésique de Lemaître résulte du fait que la forme de Lemaître et celle de Painlevé utilisent la même coordonnée temps, ce qui implique que le feuilletage temps-espace définit le même espace physique, mais dans des coordonnées différentes.

[372]En effet on peut définir des fonctions sur la variété, entre autres des formes linéaires.

[373]On retrouve cette valeur de U_μ, de façon triviale, dans la forme de Lemaître (non stationnaire) puisqu'elle est attachée au référentiel de l'observateur de Painlevé. Mais bien sûr notre remarque s'applique à cet espace-temps. Dans la métrique de Robertson-Walker on trouve aussi une vitesse covariante de ce type.

[374]Nous décrirons cette forme au chapitre *14*. Dans cette forme géodésique ce qu'on désigne par la coordonnée t est en fait le temps propre τ, par construction puisque l'observateur au repos dans cette forme est géodésique.

[375]Tout ceci se retrouve également dans la solution cosmologique décrit par la métrique de Robertson-Walker qui jouit des mêmes propriétés géométriques : elle dépend du temps et $U^\mu = \{1, 0, 0, 0\}$, $U_\mu = \{-1, 0, 0, 0\}$.

Quadri-vitesse covariante entrante en forme de Painlevé avec boost

Calcul de la quadri-vitesse contravariante

Calculons[376] U^μ et U_μ dans l'extension de la forme de Painlevé, avec $f = 1-2M/r$, donnée par :

$$ds^2 = -f\,dT^2 + 2\sqrt{1-pf}\,dT\,dr + p\,dr^2 = r^2 d\,\Omega^2 \quad .$$

On obtient :

$$U^\mu = \{p^{1/2},\ -[p^{-1}-1+2M/r]^{1/2}, 0,\ 0\}, \qquad (6\text{-}1bis)$$

$$U_\mu = \{\,[-p^{-1/2}, 0,\ 0,\ 0\}. \qquad (6\text{-}2bis)$$

Pour le calcul de U^μ, on utilise la relation $dT/d\tau = p^{1/2} = U^t = U^0$, par définition dans ces coordonnées, que nous avons démontrée [377] au chapitre *5* et la relation $U^\mu U_\mu = -1$ qui permet de calculer $U^r = U^1$ l'autre composante non nulle, car la géodésique est radiale.

Démonstration :

$U_t = g_{tt}U^t + g_{tr}U^r = -[1-(2M/r)](p^{1/2}) + (1-p(1-2M/r))^{1/2}\,U^r.$
$U_r = g_{rr}U^r + g_{rt}U^t = pU^r + (1-p(1-2M/r))^{1/2}(p)^{1/2}.$

$U_\mu U^\mu = -1 = (p)^{1/2}(-[1-(2M/r)](p^{1/2}) + (1-p(1-2M/r))^{1/2}\,U^r) + U^r[pU^r + (1-p(1-2M/r))^{1/2}(p)^{1/2}] \rightarrow$
$p(U^r)^2 + 2(1-p(1-2M/r))^{1/2}(p)^{1/2}.U^r + 1 - p[1-(2M/r)] = 0 \rightarrow [(U^r) + ((1/p)-1+2M/r)^{1/2}]^2 = 0.$

On obtient une équation du second degré en U^r avec une racine double :

$$(U^r) = -((1/p)-1+2M/r)^{1/2}.$$

Quadri-vitesse Covariante

Le calcul de U_μ se fait simplement à partir de U^μ en utilisant la métrique: $U_\mu = g_{\mu\nu}U^\nu$.

$U_0 = g_{tt}U^t + g_{tr}U^r = -(1-2M/r)(p^{1/2}) - (1-p(1-2M/r))^{1/2}((1/p)-1+2M/r)^{1/2} = -p^{-1/2}$
$U_r = g_{rr}U^r + g_{rt}U^t = -p((1/p)-1+2M/r)^{1/2} + (1-p(1-2M/r))^{1/2}p^{1/2} = 0.$

On vérifie que *(6-1bis)* et (*6-2bis)* se ramènent respectivement à *(6-1)* et *(6-2)* quand $p = 1$.
Rappelons également que nous avons montré, au chapitre *5*, que la ligne d'univers (géodésique) de l'observateur de quadri-vitesse définie par *(6-1bis)* et (*6-2bis)* est orthogonale aux sections spatiales (qui par contre ne sont plus euclidiennes) de cette forme.

---

[376] Les quadri-vitesses contra et covariantes $U^\mu = p^{-1/2}\{[r/(r-2M)],\ [-(1-p(1-2M/r))^{1/2}],0\ ,0\ \}$ et $U_\mu = \{-p^{-1/2}, -(1-p(1-2M/r))^{1/2}/(1-2M/r)\ ,0\ ,0\}$ de l'observateur en chute libre radiale avec boost non nul à l'infini dans les coordonnées de Schwarzschild se déduisent simplement de l'article de Martel & Poisson (2000), on utilise la même méthode que pour Painlevé pour calculer U^μ et U_μ dans la forme généralisée de Painlevé.

[377] Nous pouvons vérifier avec la méthode générale en utilisant $-K_\mu p^\mu = E = p^{-1/2}$ où K_μ est le vecteur de Killing de type temps, E l'énergie ici égale à $p^{-1/2}$ et conservée, car la forme de la métrique est stationnaire et $U_\mu U^\mu = -1$, la normalisation de la quadri-vitesse (deux équations pour deux degrés de liberté) qu'on obtient bien cela.

La forme de Painlevé et le référentiel d'émission (réception) des photons.

Pour un rayon lumineux se propageant sur une géodésique $x^{\mu}(\lambda)$ définie dans la forme de la métrique de Painlevé, dont le paramétrage λ est défini par[378] :

$$p^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{d\lambda},$$

où p^{μ} est l'impulsion du photon[379], la fréquence d'un photon d'énergie[380] $E = \omega$ (avec $h = 1$) mesurée par un observateur de vitesse U_{μ} dans cette forme vaut : [381]

$$E = \omega = - \frac{dx^{\mu}}{d\lambda} U_{\mu}. \qquad (6\text{-}3)$$

Par la formule *(6-3)* on obtient la valeur de p^{μ} quand on mesure l'énergie du photon dans un référentiel où $U_{\mu} = \{-1, 0, 0, 0\}$, ce qui est le cas à l'infini pour la forme de Schwarzschild.

Pour l'observateur de Painlevé, comme $U_{\mu} = \{-1, 0, 0, 0)$ cela donne partout:

$$\omega = \frac{dt}{d\lambda}.$$

Ce décalage décrit la variation de fréquence (la variation de p^{μ}) dans l'espace-temps de cette solution mesurée par les observateurs de Painlevé, co-mobiles de l'effondrement de cet espace-temps, autrement dit la variation de cette impulsion (fréquence du photon) par rapport à l'espace-temps lui-même.

Nous reviendrons en détail sur ces interprétations[382].

Hypersurfaces à temps propre chute libre constant dans la forme de Schwarzschild

Pour essayer de voir à quoi ressemble l'espace-temps dans cette forme de la métrique, il est utile de représenter les hypersurfaces spatiales à temps (coordonnée de Painlevé T) constant.

Les hypersurfaces à $T = cste$[383] réalisent un feuilletage de l'espace-temps par ces hypersurfaces, et définit des champs de quadrivecteurs U^{μ} orthogonaux aux hypersurfaces.

Si V^{ν} est un vecteur quelconque appartenant à l'hypersurface définie par $T = T_i = cste$, cela implique que :

$$U^{\mu} g_{\mu\nu} V^{\nu} = 0.$$

Comme l'équation *(5-3)* l'indique, la coordonnée T est une fonction scalaire de r et t (coordonnées de Schwarzschild). On en déduit une fonction $t(r; T_i)$, qui va être représentée par une courbe, caractérisant chacune une isochrone de valeur $T = T_i$. Ceci va produire un réseau de courbes sur un diagramme de Minkowski en coordonnées $(r; t)$ de Schwarzschild.

---

[378] C'est un paramétrage souvent utilisé pour les géodésiques nulles.
[379] Il faut définir comment l'impulsion est définie (mesurée), nous l'indiquerons plus loin.
[380] L'énergie est conservée sur une géodésique dans un espace-temps stationnaire ou statique.
[381] Ce paramétrage est également valable pour une particule de masse unitaire.
[382] Cela nous laisse soupçonner ce qui a pu inspirer les propos de Painlevé au sujet du décalage spectral.
[383] La valeur des isochrones $T = T_i$ est déterminée par le temps pour r = 0, point caractéristique de la géodésique.

Représentons, sur un diagramme cartésien qu'on peut, compte tenu de la symétrie sphérique limiter aux axes associés aux coordonnées *t, r*, les hypersurfaces isochrones *T = constante* qui sont des courbes sur ce diagramme à deux dimensions.

Leur intersection avec la géodésique radiale entrante (non représentée) suivie par l'observateur de Painlevé dans le plan *(t, r)* permettra de baliser son temps propre τ puisque $T = \tau$ sur cette géodésique.

Ces hypersurfaces isochrones sont représentées par un réseau de courbes, sur la figure *6*, pour des valeurs de *T*, régulièrement espacées. On constate que sur l'horizon la coordonnée *t* tend vers l'infini, conformément à la métrique de Schwarzschild.

Cela est similaire à la représentation de l'altitude par des courbes de niveau (les isochrones) sur une carte géographique plane. Elles permettent de représenter la quadri-vitesse U^{μ}, en direction[384] et en module.

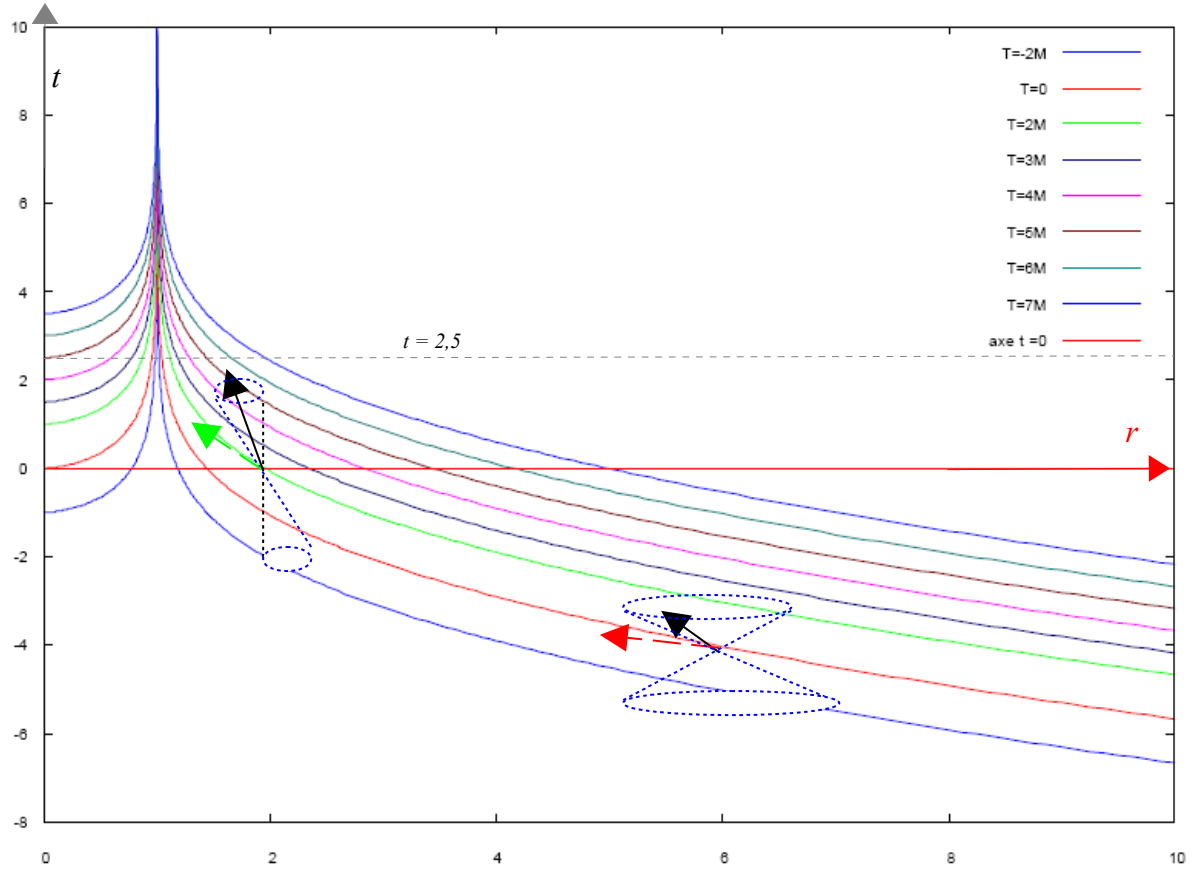


Figure 6.[385] *Courbes T = constante, cônes de lumière et vecteurs tracés sur un diagramme cartésien en coordonnées de Schwarzschild*[386]*. On a posé 2GM/c² =1, c=1,G =1, 2M =1.*

[384]La quadri-vitesse est orthogonale aux courbes *T = constante* (orthogonale en RR, c.a.d symétrique par rapport au cône de lumière sur la figure et est évidemment tangente à la géodésique, mais celle-ci n'est pas représentée).

[385]Tracée avec Maxima. Tous les diagrammes de ce type, donnés dans le document, sont_faux, car représentés en géométrie euclidienne et non pas minkowskienne. Les longueurs des courbes, les angles sont faux mais on peut en tirer des conclusions justes en en tenant compte. Les cônes de lumière et quadrivecteurs sont approximatifs.

[386]Ce type de diagramme nous sert à représenter des fonctions du type *t(r)* ou *r(t)* où *t* et *r* sont les coordonnées données sur des axes cartésiens.
Mais attention il ne faut considérer cela que comme la représentation de fonctions.
En effet ce diagramme de Minkowski cartésien est tracé dans une métrique euclidienne (ce qui n'est pas gênant pour représenter des fonctions, car c'est formel), mais la mesure des "longueurs" des courbes tracées sur ce diagramme est cartésienne alors qu'en relativité elle est minkowskienne.

La figure *6* donne un embryon de représentation des coordonnées de Painlevé dans un diagramme en coordonnées de Schwarzschild.

Deux cônes de lumière et les quadrivecteurs U^μ géodésiques ont été représentés en deux points. Ils permettent de visualiser l'orthogonalité (symétrie par rapport à la surface du cône) de la quadri-vitesse aux hypersurfaces $T = constante$.

On a représenté un vecteur V^μ tangent à la courbe $T = constante$ en chacun de ces deux points (en tirets de la couleur de l'isochrone).

Il est orthogonal[387] au vecteur quadri-vitesse U^μ en trait plein noir dont le module dépend inversement de l'écartement des courbes à $T = constante$.

On voit que, par exemple, pour le point $r = 2,\ t = 0$, le module de la quadri-vitesse est plus grand qu'en $r = 6,\ t = -4$ du fait que les isochrones sont plus rapprochées.

On constate que, par exemple, la courbe marron correspondant à $T = 5M$ (on rappelle qu'on a posé $2M = 1$ donc $T = 2,5$) coupe bien l'axe $r = 0$ en $t = 2,5$.

Pour $r \rightarrow \infty$, les coordonnées temporelles des formes de Painlevé et Schwarzschild convergeant asymptotiquement, les isochrones dans la forme de Painlevé tendent vers une asymptote horizontale.

Ajoutons que compte tenu de la symétrie sphérique, chaque point de la courbe est représentatif d'une sphère de rayon r.

Sur le diagramme *(figure 6)* ci-dessus les isochrones dans la forme de Schwarzschild sont des droites horizontales (on en a tracé une pour $t = 2,5 = 5M$).

Il faut en tenir compte si on veut calculer ces éléments d'intervalles d'espace-temps relativiste, ces figures étant géométriquement fausses. Mais avec ces précautions, ce type de diagramme se révèle d'une grande utilité pour les calculs relativistes, comme l'usage intensif que nous en ferons en atteste. Quelques éléments de règles à respecter sont donnés ci-dessous et nous les rappellerons si nécessaire à chaque utilisation..
En coordonnées de Schwarzschild, il se trouve que la coordonnée temporelle est localement orthogonale (en métrique relativiste) à la coordonnée radiale, mais ce n'est pas toujours le cas (par exemple dans la forme de Painlevé où nous utiliserons aussi des diagrammes de ce type). Mais même dans le cas de ce diagramme ces coordonnées de sont pas de même type (leur signature dans la métrique est différente). Aussi la géométrie des objets dans cette représentation doit être interprétée dans ce contexte. Par exemple l'orthogonalité entre deux vecteurs au même point est caractérisée par le fait que le cône de lumière en ce point en est la bissectrice, ce qui en général ne correspond pas à un angle droit entre les deux vecteurs sur la figure.

[387] V^μ symétrique de U^μ par rapport à la surface du cône de lumière.

7- Hyper-surfaces isochrones dans les formes de Schwarzschild et de Painlevé

On montre comment les isochrones de temps propre de l'observateur de Painlevé révèlent la courbure temporelle en visualisant l'écoulement de son temps propre, par référence à la coordonnée temporelle de la forme de Schwarzschild.

Isochrones dans la forme de Schwarzschild

Dans ce diagramme à deux dimensions cf. *figure 6*, chaque point est représentatif de la surface d'une sphère de rayon *r*.

La représentation du diagramme dans ces coordonnées peut paraître d'autant plus naturelle[388] que c'est celle qu'on utilise, en général, quand on établit la solution de Schwarzschild dans les ouvrages modernes[389].

Soulignons que cette approche privilégie implicitement une solution statique.[390]

Les courbes à t = *constante* régulièrement espacées en coordonnées de Schwarzschild sont des droites régulièrement espacées parallèles à l'axe des abscisses dans ces coordonnées de Schwarzschild.

Ces courbes caractérisent des hypersurfaces spatiales qui dépendent de la coordonnée temporelle.

Dans ces hypersurfaces spatiales r est une coordonnée sans caractère physique qui n'est pas homogène dans cette forme de la métrique (la section spatiale n'est pas euclidienne).

Isochrones dans la forme de Painlevé

Les isochrones (courbes) régulièrement espacées de la forme de Painlevé[391] déterminent d'autres sections spatiales (hypersurfaces) puisque la coordonnée temporelle est différente.

---

[388]Sur la figure *6* ce caractère paraît naturel, car le diagramme est tracé en coordonnées (*t, r*) de Schwarzschild.

[389]Voir par exemple Carroll S. (2003). Chapitre 5.

[390]On trouve d'ailleurs une solution statique, sans avoir à en faire l'hypothèse. Mais, si la forme de Schwarzschild est bien indépendante du temps, l'horizon délimite deux régions, car comme indiqué dans Damour T. & Deser S. (1995) p.744 "En effet, si la région extérieure à un trou noir est bien stationnaire au sens usuel, c'est-à-dire admet un groupe d'invariance de la métrique correspondant à des translations "dans le temps ", la région intérieure, quant à elle, admet (par prolongement) un groupe d'invariance de la métrique, mais ce groupe y correspond maintenant à des translations "dans l'espace", ce qui veut dire que la région intérieure est homogène mais non stationnaire"

[391]Rappelons d'ailleurs que, au chapitre *3*, nous avons dérivé la solution de Painlevé de la forme de Schwarzschild par un changement de coordonnée qui en éliminait la singularité sur l'horizon. Ce passage "obligé" par la forme de Schwarzschild est-il incontournable ? Nous verrons que non, quand nous exposerons la méthode qu'a utilisée Lemaître, qui établit une solution native sans singularité directement à partir des équations d'Einstein et où la singularité est introduite dans la transformation de coordonnées nécessaire pour retrouver la forme de Schwarzschild. Cette démarche permettant d'obtenir la forme de Painlevé et montrant que la singularité sur l'horizon dans la forme de Schwarzschild résulte d'un choix de coordonnées est beaucoup plus élégante et convaincante que la démarche inverse que nous avons utilisée jusqu'ici.

La nature très différente de ces courbes, un réseau de droites parallèles régulièrement espacées dans un cas et un réseau de courbes dont l'espacement est variable, traduit une courbure manifeste entre les deux coordonnées temporelles.

À ce titre, la forme de Painlevé paraît plus complexe, mais c'est lié au fait qu'on représente ces isochrones dans la forme de Schwarzschild.

Cette non linéarité relative entre les coordonnées temporelles des deux formes compense la non uniformité de la coordonnée *r* de la section spatiale (non euclidienne) de la forme de Schwarzschild puisque comme la forme de la métrique le montre les sections spatiales (à *T* constant) dans la forme de Painlevé sont euclidiennes.

Ceci fait que la forme de Painlevé, qui paraît de prime abord plus étrange dans ces coordonnées, conduit à une représentation plus simple de la solution au problème du corps unique à symétrie sphérique.

Ceci nous amène tout naturellement à étudier et comparer la forme des géodésiques radiales dans les deux solutions.

8- Géodésiques radiales et hypersurfaces isochrones, dans la forme de Schwarzschild

---

L'étude des géodésiques est fondamentale pour déterminer la géométrie de l'espace-temps puisqu'elles la caractérisent. Nous commençons par leur étude dans la forme de Schwarzschild, sachant que, ces géodésiques ayant un caractère géométrique intrinsèque, les résultats de type géométrique trouvés seront valides dans tous les référentiels. En particulier, malgré les divergences des paramètres, nous montrons le caractère fictif de la singularité sur l'horizon en montrant que le temps propre d'un observateur reste fini même si, dans la représentation de ses isochrones dans ce diagramme, elles divergent sur l'horizon.

Représentation dans le plan r, t de Schwarzschild.

Méthode d'établissement de l'équation géodésique.

En coordonnées de Schwarzschild, en comparant les courbes relatives à une géodésique définie par la fonction $t_{geo}(r)$ suivie par un observateur de Painlevé et celles des isochrones de son temps propre représentées dans cette forme, nous allons montrer qu'il existe une isochrone de temps propre de valeur finie[392] T_0 définissant une fonction $t(r, T_0)$ où t est toujours supérieur à la coordonnée t_{geo} de la géodésique, pour toute valeur de r dans l'intervalle $r[0, \infty[$.

Ceci prouvera que l'observateur de Painlevé, depuis une position à une distance $r > 0$ (en général on pose $r >> r_s$) traverse l'horizon et atteint $r = 0$ en un temps propre τ fini : $\tau \leq T_0$.

L'équation géodésique radiale (paramétrée par le temps propre) d'un observateur de Painlevé s'obtient très simplement par la méthode utilisée au chapitre *5* à partir des équations[393]:

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{r(\tau)}{r(\tau) - r_s}, \qquad (8\text{-}1)$$

$$\frac{dr^2}{d\tau^2} = \frac{r_s}{r(\tau)}. \qquad (8\text{-}2)$$

Rappelons que la première équation est liée à l'existence d'un vecteur de Killing de type temps (conservation de l'énergie valorisée à 1) sur une géodésique.

De même, la deuxième résulte de la première et de la normalisation de la quadri-vitesse :

$$U^{\mu}.\, U_{\mu} = -1.$$

---

[392]L'observateur de Painlevé partant de l'infini où il est impossible de définir une "origine" de départ du temps propre, l'origine du temps propre (T_0) sur sa géodésique est fixée au point $r = 0$, qui est l'arrivée. Le temps de parcours sur la géodésique entre $r > 0$ (en général on prend $r >> 2GM$) où son temps propre vaut T où $T < T_0$ et $r = 0$, où il vaut T_0 *s'*évalue alors comme la différence $\Delta T = T_0 - T$.

[393]Voir : Linet B. p. 91-93. Les coordonnées *t, r* sont celles de Schwarzschild.

Nous considérons la solution correspondant à la géodésique entrante.

Les relations *(8-1)* et *(8-2)* s'intègrent et donnent respectivement

$$r(\tau) = (9\, r_s/4)^{1/3}\, (\tau_0 - \tau)^{2/3}, \qquad (8\text{-}3)$$

$$t(\tau)=\tau-3a.(\tau_0-\tau)^{(1/3)}-(3/2)a^{(3/2)}\ln\left(\frac{(\tau_0-\tau)^{(1/3)}-\sqrt{a}}{(\tau_0-\tau)^{(1/3)}+\sqrt{a}}\right)+t_0 \quad , \qquad (8\text{-}4)$$

où τ_0, t_0 sont des constantes d'intégration et $a = r_s\, (9r_s/4)^{-1/3}$

À partir de cette description paramétrique de la géodésique on peut calculer la fonction $t(r)$. Pour simplifier les calculs on choisit une échelle où $r_s = 2GM/c^2 = 1$.

Après quelques calculs[394], on obtient l'équation géodésique sous forme d'une fonction $t(r)$[395]:

$$t=\tau_0-(2/3)r^{(3/2)}-2\left(\sqrt{r}+(1/2)\ln\left(\frac{\sqrt{r}-1}{\sqrt{r}+1}\right)\right). \qquad (8\text{-}5)$$

Comparaison entre courbes isochrones et géodésiques

La courbe isochrone

De la définition *(5-3)*, que nous avons donnée au chapitre *5*, de la coordonnée T pour une valeur T_0 donnée, avec $r_s = 1$, nous tirons :

$$t=T_0-2\left(\sqrt{r}+\frac{1}{2}\log\left(\frac{\sqrt{r}-1}{\sqrt{r}+1}\right)\right) \quad . \qquad (8\text{-}8)$$

La courbe géodésique de l'observateur de Painlevé

[394]On peut le vérifier directement en faisant le rapport entre *(8-1)* et *(8-2)* et en dérivant ce résultat. Ce calcul est fait en annexe *3*, chapitre *8*, équations *(8-6)-(8-7)*. Ceci explique qu'on saute à l'équation (8-8) dans ce chapitre.

[395]Cette équation diverge pour $r = r_s = 1$. On retrouve toujours le délicat problème de la divergence de la fonction géodésique sur l'horizon et sa non définition au-delà qui nécessite une discussion (utilisant le fait que la divergence d'une coordonnée non physique n'a rien de critique) pour autoriser la prolongation au-delà (vers l'intérieur) de l'horizon. Voir annexe *3* pour une vérification rapide.

La relation géodésique *(8-5)* $t_{géo}(r)$, en posant également $r_s = 1$, s'écrit [396]

$$t_{geo} = \left(-\left(\frac{2}{3}\right) r^{\left(\frac{3}{2}\right)} + \tau_0\right) - 2\left(\sqrt{r} + \frac{1}{2}\log\left(\frac{\sqrt{r}-1}{\sqrt{r}+1}\right)\right) \qquad (8\text{-}9)$$

Existence d'une borne supérieure pour le temps propre de l'observateur de Painlevé

Calculons la différence[397]:

$$t - t_{géo} = T_0 - [-(2r^{3/2})/3 + \tau_0].$$

On voit que pour toute valeur de r, la valeur de $t(r)$ définie par *(8-8)* qui tend vers l'infini pour $r = 1$ est toujours supérieure à la valeur coordonnée $t(r)$ notée $t_{géo}(r)$ (qui tend aussi vers l'infini) définie par *(8-9)* si :

$$t - t_{géo} \geq 0 \rightarrow T_0 - \{-(2r^{3/2})/3 + \tau_0\} \geq 0 \rightarrow \quad T_0 > -(2r^{3/2})/3 + \tau_0.$$

Pour $r \geq 0$, le maximum du membre de droite de l'inégalité de droite est atteint pour $r = 0$.

L'observateur de Painlevé atteint la singularité en un temps fini

Il suffit donc que $T_0 > \tau_0$ pour que $T_0(r) > t_{géo}(r)$ quel que soit r.

Ceci confirme que $t_{géo}$ de l'équation géodésique reste inférieur à T_0 qui est fini.

La constante d'intégration τ_0 permet d'étiqueter l'infinité d'observateurs de Painlevé (par leur date relative d'arrivée ordonnée)[398].

Le choix d'une origine pour la valeur (relative) de τ_0 est arbitraire.

Pour $r = 1$ (horizon), on obtient la valeur finie : $T = -2/3 + \tau_0$ et pour $r = 0$ on obtient $T = \tau_0$.

[396]La coordonnée t de Schwarzschild est notée $t_{géo}$. C'est la coordonnée t relative au mouvement d'un observateur de Painlevé mesurée par un observateur statique de Schwarzschild (alors que T est une coordonnée différente).
[397]La différence de ces deux fonctions qui tendent toutes deux vers l'infini pour la même valeur de r est finie.
[398]Il n'est pas pratique de fixer l'origine du temps à l'origine de la géodésique d'un observateur de Painlevé puisqu'elle est à l'infini. Il est plus simple de fixer une origine du temps en un point bien défini de la géodésique, à l'arrivée, correspondant à la fin de la géodésique puisqu'elle est incomplète. Nous parlons des géodésiques radiales "entrantes" où la fonction $\tau(r)$ est décroissante. Pour les "sortantes" ce choix serait naturel. Le point $r = 0$, lui-même, n'appartient pas à variété décrivant l'espace-temps (ouvert).

Représentation sur un diagramme

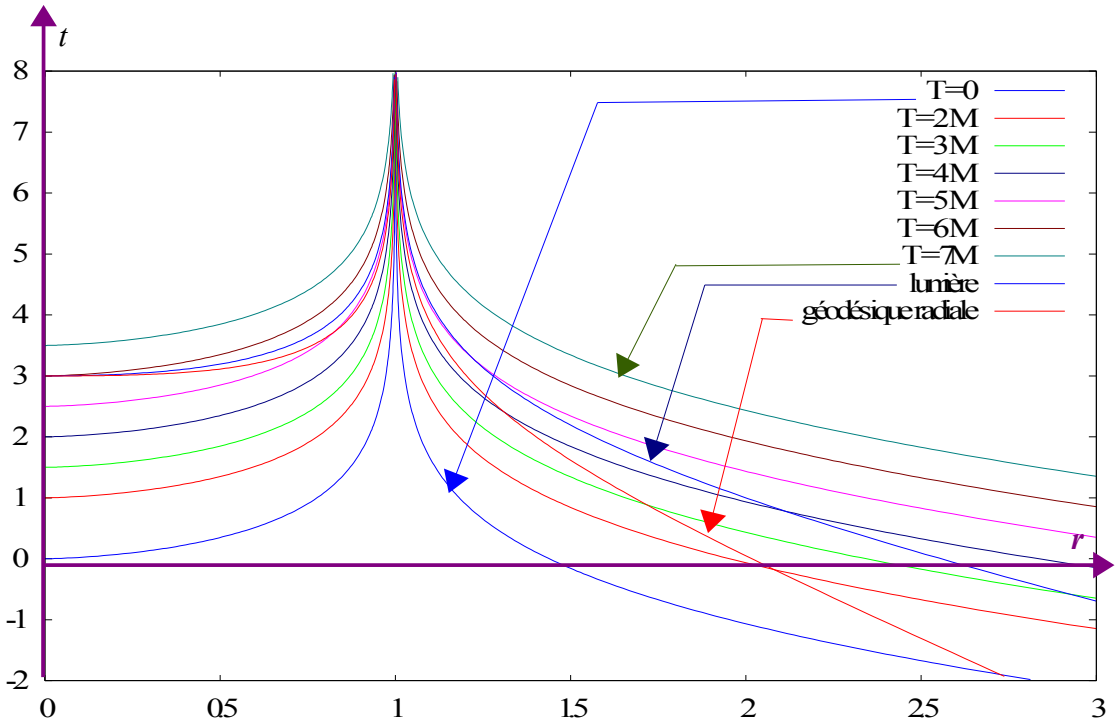


***Figure 8-1**. L'observateur de Painlevé atteint la singularité en un temps fini (2M=1).*

On a représenté sept courbes T = *constante* de $T = 0$ en bas à $T = 7M$ en haut, une courbe géodésique radiale de type temps pour $\tau_0 = 3$ et une géodésique nulle.
On remarque que la courbe géodésique coupe orthogonalement les hypersurfaces à T = *constante* dans le sens croissant (avec nos conventions de géodésiques entrantes). Par ailleurs ces isochrones balisent le temps propre de l'observateur de Painlevé sur sa ligne d'univers géodésique par leurs intersections avec la géodésique.
La figure *8-1* illustre comment, dans la forme de Painlevé où T est la coordonnée temporelle géodésique, elle reste finie quand on franchit l'horizon alors que $t_{géo}$ diverge.

Dans l'exemple représenté sur la figure *8-1* où on a posé $\tau_0 = 3$, à $r = 0$, on obtient :

$$t_{géo} \leq +7/3 \text{ pour } r = 1 \text{ et } t_{géo} \leq 3 \text{ pour } r = 0.$$

Ceci montre que la courbe $t_{géo}(r)$ n'est jamais au-dessus de la courbe $T(r) = 6M = 3$.

Par différence, on obtient le temps mis par l'observateur de Painlevé pour parcourir la distance entre l'horizon et la singularité centrale.
Il vaut $t = 2/3$ en unités où $c = 1$ et $2GM/c^2 = r_s = 1$.

Pour $rs = 3km$ (trou noir d'environ une masse solaire) cela donne environ *6.7* microsecondes.

Pour la lumière en utilisant l'équation géodésique de la lumière

$$T = 2x^{1/2} - x - 2\ln(x^{1/2} + 1) + T_0,$$

établie au chapitre *17*, dont la courbe est représentée sur la figure *8-1*, le temps de parcours est d'environ 3.7 microsecondes, inférieur à celui de l'observateur de Painlevé, comme prévu.

Vitesse de l'observateur de Painlevé dans les deux systèmes de coordonnées.

Comme dans les formes de Schwarzschild et de Painlevé la coordonnée *r* est la même et seules les coordonnées temporelles *t* et *T* diffèrent, on peut caractériser la différence de phénoménologie par la différence entre le rapport *dr/dt* et *dr/dT* ce qu'on peut appeler la "vitesse".

Remarquons que pour la forme de Painlevé la vitesse $dr/dT = dr/d\tau = - (r_s /r)^{1/2}$ est la composante radiale relativiste de la quadri-vitesse puisque la coordonnée temporelle correspond au temps propre de l'observateur de Painlevé alors que dans la forme de Schwarzschild $dr/dt = - (r_s/r)^{1/2}(r - r_s)/r$, il s'agit d'une pure vitesse de coordonnées.

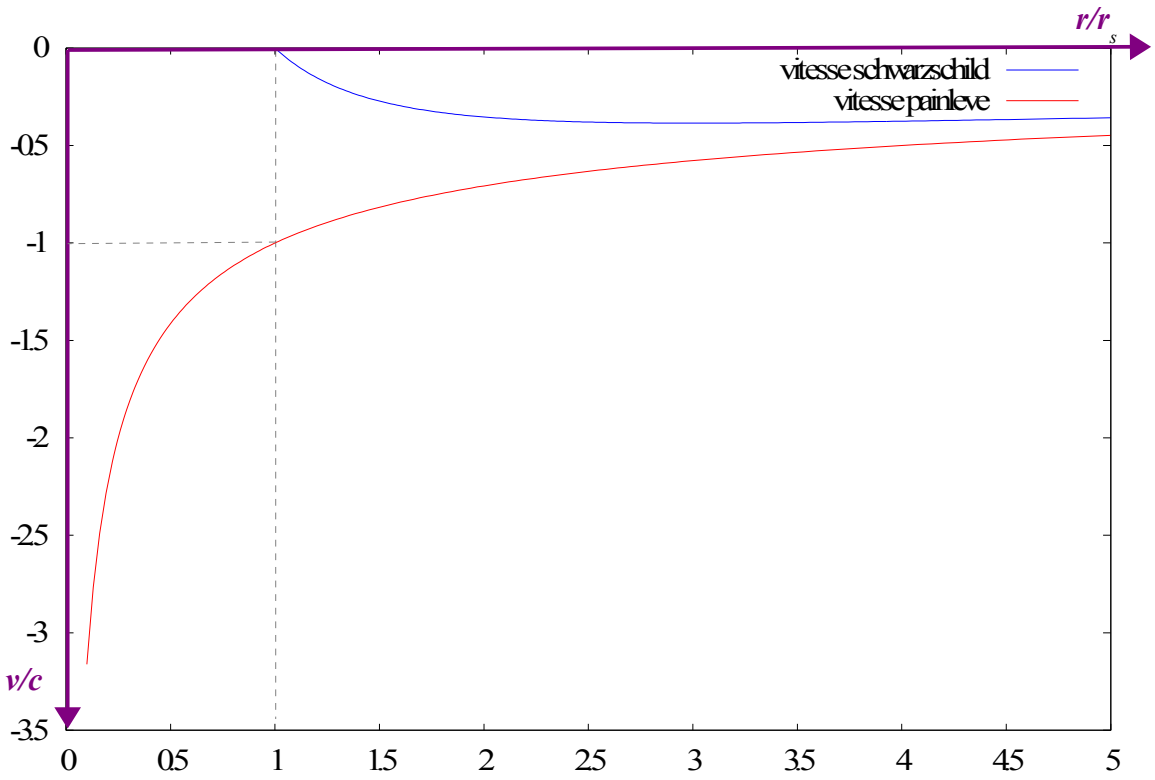


Figure 8-2 [399]*. Comparaison de la "vitesse" de l'observateur de Painlevé dans les coordonnées de Schwarzschild dr/dt et de Painlevé dr/dT. On a posé* $r_s = 2GM/c^2 = 1$

On voit que dans les coordonnées de Schwarzschild pour un observateur statique à grande distance du trou noir, l'observateur de Painlevé semble ralentir jusqu'à se figer (avec décalage infini vers le rouge) lorsque celui-ci s'approche de l'horizon.

La "vitesse" dans les coordonnées de Painlevé, au contraire augmente de plus en plus vite lorsqu'on s'approche de la singularité centrale (tend vers l'infini) et qu'elle vaut la vitesse de la lumière sur l'horizon que l'observateur de Painlevé traverse sans rencontrer de singularité.

Bien entendu ces deux vitesses n'ont aucun caractère physique, *r* étant une coordonnée sans caractère physique.

[399] Diagramme réalisé avec logiciel Maxima.

9 – Équation géodésique radiale dans la forme de Painlevé : ce qu'elle révèle

---

Nous faisons la même analyse du point de vue dual du précédent, dans le système de coordonnées de la forme de Painlevé ce qui, à travers un formalisme beaucoup plus simple, met en évidence certains caractères newtoniens et évacue tous les problèmes délicats de divergence que nous avions rencontré dans l'analyse précédente. Après avoir étendu l'analyse au cas de la forme de Painlevé généralisée, nous étudions les cônes de lumière qui montrent simplement dans cette forme comment un observateur traverse l'horizon. La simplicité de la représentation conforte la meilleure adéquation de la forme de Painlevé à la description de cette solution de la relativité générale.

Méthode directe

Nous avons vu l'équation géodésique radiale des observateurs de Painlevé dans la forme de Schwarzschild, intéressons-nous à cette équation dans la forme de Painlevé.

Nous allons montrer que l'espace-temps vu par un observateur de Painlevé est "newtonien".

La quadri-vitesse exprimée dans ces coordonnées s'écrit, cf. équation *(6-1),* chapitre *6*,[400]

$$U^{\mu} = \{ 1, -(r_s/r)^{1/2}, 0, 0\} ,$$

où $$U^{l} = U^{r} = dr/d\tau = -(r_s/r)^{1/2} \rightarrow r(\tau) = (9\, r_s/4)^{1/3} (\tau_0 - \tau)^{2/3}. \qquad (9\text{-}1)$$

Dérivons cela par rapport au temps propre pour obtenir l'accélération. Seule la composante *r* de U^{μ} n'est pas constante et elle ne dépend que de *r*. Calculons cette composante :

$$(U^{\mu})' = (r')' = d(r')/d\tau = (dr'/dr)(dr/d\tau) = \{d[(r_s/r)^{1/2}]/dr\}\{dr/d\tau\} = -\tfrac{1}{2}(r_s/r^2)(r_s/r)^{-1/2}(r_s/r)^{1/2}$$
$$\rightarrow \mathbf{r'' = -\tfrac{1}{2}(r_s/r^2) = -GM/r^2}.\ ^{401} \qquad (9\text{-}2)$$

Ce résultat est remarquable et montre que la physique vue par ces observateurs est pratiquement entièrement Newtonienne[402].

Ce résultat s'intègre facilement et montre que, à la différence de ce qu'on obtenait dans la forme de Schwarzschild, l'équation géodésique est continue et régulière (dérivable à tous les ordres) dans l'intervalle $r =]0, \infty]$.

Point besoin ici d'argumenter comme dans la solution de Schwarzschild pour valider la prolongation vers $r = 0$ à partir de l'horizon.

Méthode générale

On peut vérifier ce résultat en utilisant la méthode générale (voir annexe *3* chapitre *9*).

---

[400] $d\tau = -\, dr\, (r/r_s)^{-1/2} \rightarrow \tau - \tau_0 = -(2/3) r s^{-1/2}\, r^{3/2}$ en inversant cela donne le même résultat que l'équation *(8-3)*, $r(\tau) = (9\, r_s/4)^{1/3} (\tau_0 - \tau)^{2/3}$. C'est la même géodésique décrite dans deux formes décrivant le même espace-temps.

[401] Où $r_s = 2GM$, on a posé comme d'habitude, $c = 1$.

[402] Notons que la dérivation s'effectue par rapport au temps propre qui se trouve être également la coordonnée temporelle dans cette forme. Démonstration à partir du résultat donné dans Doran C. (2000)

La forme de Painlevé et la mécanique quantique

L'intérêt en physique moderne est que cette forme, où l'observateur en chute libre voit un espace minkowskien, permet d'exprimer simplement des équations de la physique quantique comme l'équation de Dirac par exemple sous forme Hamiltonienne en ajoutant simplement un terme au Hamiltonien d'une particule libre dans un espace-temps de Minkowski[403].

Remarquons qu'elles décrivent une géodésique radiale entrante, mais que la forme symétrique par renversement du temps (ce qui change le signe du terme en *dr.dT*) décrit une géodésique radiale sortante (ce qu'avait, sans vraiment s'en rendre compte, décrit Painlevé, à l'époque). Elles permettraient d'accéder dans ces conditions aux quatre régions qui seront décrites ultérieurement par la forme de Kruskal.

Remarque sur l'équation géodésique dans la forme de Painlevé généralisée.

Appliquons le même calcul que celui de la méthode directe, avec :

$$U^{\mu} = \{p^{1/2}, -[(1/p)-1+2GM/r]^{1/2}, 0, 0\}.$$

Dérivons par rapport au temps. Seule la composante r de U^{μ} n'est pas constante et elle ne dépend que de r. Calculons cette composante :

$(U^{\mu})' = (r')' = d(r')/d\tau = (dr'/dr)(dr/d\tau) = \{d[-[(1/p)-1+2GM/r]^{1/2}]/dr\}\{dr/d\tau\} = -\frac{1}{2}(2GM/r^2)[(1/p)-1+2M/r]^{-1/2}[(1/p)-1+2GM/r]^{1/2} \rightarrow \mathbf{r'' = -\frac{1}{2}(2GM/r^2) = -GM/r^2}$.

Nous trouvons le même résultat, ce qui est normal, car ajouter un boost ne change rien aux accélérations, mais les conditions initiales étant différentes (la vitesse à l'infini est non nulle) lorsqu'on intégrera l'équation différentielle, nous aurons une constante d'intégration (vitesse) à prendre en compte. Rappelons que la géodésique suivie par cet observateur est également orthogonale aux sections spatiales (non euclidiennes ici).

Basculement des cônes de lumière vers l'horizon dans la forme de Painlevé

Pour la lumière, pour le trou noir, pour $\mathbf{r = 2GM = r_s}$, la métrique devient

$$2dT\,dr + dr^2 = 0,$$

soit :

$$dr(dr+2dT) = 0,$$

donc :

$$\frac{dr}{dT} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dr}{dT} = -2.$$

[403] Voir C. Doran 2000, p. 1, équation (6).

Pour le trou blanc on obtient par la même méthode[404] : $-2dT\,dr + dr^2 = 0$, soit $dr(dr-2dT) = 0$

donc :

$$\frac{dr}{dT} = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{dr}{dT} = 2.$$

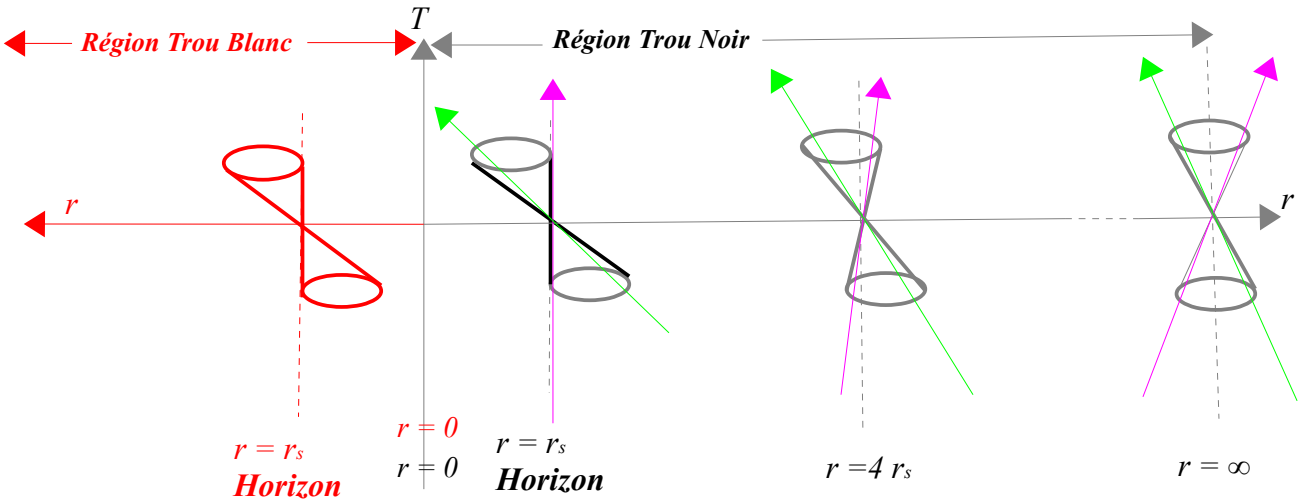


Figure 9. *Cônes de lumière entrant et sortant sur l'horizon dans la forme de Painlevé.*

Nous avons représenté sur le même diagramme les régions correspondant au trou noir et au trou blanc.

Nous avons tracé plusieurs cônes de lumière pour le trou noir pour différentes valeurs de *r*.
A l'infini le cône de lumière est symétrique par rapport à un axe parallèle à l'axe *T*.

Puis il bascule progressivement comme indiqué sur le diagramme[405].

Sur l'horizon, on voit qu'aucune géodésique nulle sortante ne peut rejoindre l'infini.

Nous avons représenté des lignes d'univers de type temps (dans le cône de lumière) entrante en vert et "sortantes" en magenta. Nous n'avons pas représenté (ici) ce cône pour $r < r_s$ mais le cône continue de basculer, la lumière "sortante" étant vouée à percuter la singularité.

La lumière franchit bien l'horizon dans le sens entrant mais pas dans le sens sortant pour le trou noir.

Pour le "trou blanc", où nous n'avons représenté que le cône sur l'horizon c'est l'inverse. Les rayons sortants se propagent au-delà de r_s et les rayons entrants ne se propagent pas en deçà de r_s.

[404]Nous avons vu qu'on peut passer du trou noir au trou blanc en changeant le signe du deuxième terme du membre de droite dans les équations (3-3-1) et (3-3-2) décrivant la transformation de coordonnées au chapitre *3*.
[405] Comme nous avons déjà eu l'occasion de l'indiquer ce basculement et variation d'ouverture qu'on constate en appliquant la forme de la métrique se justifie simplement géométriquement en considérant le référentiel fixe local de Minkowski attaché à l'observateur où le cône de lumière est fixe et celui, variable, défini par la base de vecteurs tangent localement aux coordonnées globales. C'est de la simple analyse vectorielle de vecteurs représentés dans des bases différentes dans un espace vectoriel. Voir par exemple figure *12-3* chapitre *12*.

10- La géodésique circulaire révèle une différence essentielle

---

Ceci complète le travail précédent en étudiant un autre type de géodésique (géodésique circulaire) qui montre que dans ce cas la forme de Schwarzschild et celle de Painlevé donnent les mêmes résultats. Ceci révèle une différence essentielle de phénoménologie avec la géodésique radiale. La forme de Painlevé et celle statique de la forme de Schwarzschild sont identiques à coordonnée *r* constante.

Nous ne ferons pas l'étude de toutes les équations géodésiques, mais on remarquera que pour *r = constante,* les formes des métriques de Painlevé et celle de Schwarzschild sont identiques.

Forme réduite identique à celle de Schwarzschild pour une orbite circulaire

Pour *r = constante,* (*dr = 0)*, elles se réduisent toutes deux à :

$$ds^2 = -\left(1-\frac{2GM}{r}\right)dt^2 + r^2\left(\sin(\theta)^2 d\varphi^2 + d\theta^2\right) \quad . \qquad (10\text{-}1)$$

Établissement de l'équation géodésique circulaire

Les orbites circulaires de rayon $r = r_c$ ont la même équation dans les deux formes, la méthode utilisée et les résultats obtenus vont donc être identiques. Les calculs détaillés sont faits au chapitre *10,* équations *(10-1)-(10-16),* de l'annexe *3,* nous en retenons les résultats suivants.

Temps propre pour décrire une orbite complète

$$\tau = \frac{2\pi r\sqrt{(r-3GM)}}{\sqrt{GM}} \quad . \qquad (10\text{-}12)$$

Le caractère relativiste se manifeste dans cette équation qui est différente de l'équation newtonienne, ce qui est dû, comme nous le verrons, au moment angulaire *L* qui n'est pas nul.

Notons que pour *r = 3GM* le temps propre τ est nul. Cette orbite correspond à la "sphère de photons", où la vitesse de satellisation est celle de la lumière. Pour *r < 3GM,* le temps propre non défini montre qu'il n'existe pas de géodésique circulaire de type temps. Mais il existe encore des orbites circulaires stables non géodésiques de type temps pour *r > 2GM.*

Pour *r* tendant vers l'infini *(10-12)* tend vers :

$$\tau = \frac{2\pi r\sqrt{r}}{\sqrt{GM}} \quad . \qquad (10\text{-}13)$$

C'est la loi de Kepler, ce qui est bien compatible avec la convergence des deux théories dans ces conditions, qui résulte des hypothèses faites par construction de la forme relativiste.

Par contre l'équation *(10-12)* confirme que l'équation reliant temps propre (paramètre affin temps sur la trajectoire) et rayon est différente de la loi de Kepler *(10-13)* dans le cas général.

Temps coordonnée pour décrire une orbite

La période de révolution de l'orbite *T* exprimée en temps coordonnée vaut ;

$$t=\frac{\tau\sqrt{r}}{\sqrt{r-3GM}}\rightarrow T=\frac{2\pi r\sqrt{r}}{\sqrt{GM}} \qquad (10\text{-}14)$$

On retrouve la loi de Kepler ! Mais la différence entre les théories c'est qu'en mécanique classique la coordonnée temporelle est identifiée à un temps absolu physique alors qu'en relativité, c'est une simple coordonnée, car ce qui est physique c'est le temps propre de l'observateur. Nous en proposerons une analyse phénoménologique dans la partie épistémologique.

Quadri-vitesse orbitale

La quadri-vitesse covariante, avec $x^{\mu} = (t, r, \theta, \varphi)$ vaut :

$$U^{\mu} = \{ \frac{1}{(1-2GM/r)}, 0, 0, \frac{(GM)^{1/2}}{r(r-3GM)^{1/2}} \}. \qquad (10\text{-}15)$$

La 4- vitesse covariante :

$$U_{\mu} = \{-1, 0, 0, \frac{r\,(GM)^{1/2}}{(r-3GM)^{1/2}} \}. \qquad (10\text{-}16)$$

On remarque que dans la forme covariante la composante temporelle est constante sur une géodésique orbitale ce qui était prévisible compte tenu de la dépendance de la métrique en *r* seulement et qu'on décrit une géodésique à *r = constante*.

L'équation géodésique générique dans l'espace-temps statique à symétrie sphérique

Nous n'avons pas reproduit ici les calculs qui sont donnés dans l'annexe *3*. Mais pour toutes les formes de métrique qui utilisent les coordonnées sphériques avec *r* comme coordonnée spatiale radiale, ce qui est le cas des formes de Schwarzschild de Painlevé et de quelques autres, ces calculs donnent des résultats que nous aurons l'occasion de réutiliser aussi il est utile de les récapituler dans ce paragraphe, avec la méthode qui permet de les obtenir, pour s'y référer à l'occasion. Les vecteurs de Killing associés aux invariants (t, θ, φ) de la métrique conduisent à poser :

$$\theta=\frac{\pi}{2} \quad . \qquad (10\text{-}17)$$

L'orbite est plane et par un changement de coordonnées on peut se ramener à cette valeur.

$$(1-\frac{2GM}{r})\frac{dt}{d\lambda}=E \qquad (10\text{-}18)$$

Exprime la conservation de l'énergie *E,* car la métrique est indépendante du temps.

$$r^2\frac{d\varphi}{d\lambda}=L \qquad (10\text{-}19)$$

Exprime la conservation du moment angulaire *L*, car la métrique est indépendante de φ.
En intégrant tous ces éléments dans la métrique

$$ds^2=-(1-\frac{2GM}{r})dt^2+r^2(\sin(\theta)^2 d\varphi^2+d\theta^2) \quad , \qquad (10\text{-}20)$$

on obtient

$$-E^2+(\frac{dr}{d\tau})^2+(1-\frac{2M}{r})(\frac{L^2}{r^2}+\varepsilon)=0 \quad , \qquad (10\text{-}21)$$

qui est une équation qui ne dépend que de la coordonnée radiale, qu'on peut aussi écrire

$$\frac{1}{2}(\frac{dr}{d\lambda})^2+V(r)=\frac{1}{2}E^2 \quad , \qquad (10\text{-}22)$$

où *E* est l'énergie totale par unité de masse (conservée) et où on a défini un potentiel

$$V(r)=\frac{1}{2}\epsilon-\epsilon\frac{GM}{r}+\frac{L^2}{2r^2}-\frac{GM\,L^2}{r^3} \quad . \qquad (10\text{-}23)$$

Dans ce cas de champ gravitationnel à potentiel central, défini par *(10-23)*, il est une fonction scalaire comme en mécanique classique[406]. Pour les géodésiques nulles $\epsilon = 0$, sinon il vaut *1*.

Mais la variable dynamique (servant à la dérivation pour décrire le mouvement) est le temps propre, paramètre affin à caractère physique en relativité générale et non pas le temps réputé physique de la mécanique classique.

Dans ce cas de champ à potentiel central, une approche post-classique décrivant la gravitation dans un espace de Minkowski et considérant un lagrangien construit sur les constantes du mouvement dont le paramètre dynamique est le paramètre affin temps propre peut conduire à une forme similaire mais peut être interprétée physiquement différemment [407].
Les équations (*10-17* à *10-23*) caractérisent les géodésiques dans cette forme de solution[408].

[406]Un potentiel scalaire peut aussi être défini pour les types d'espace-temps de Kerr (type D : masses isolées).
[407]Voir Mizony (2011). Dans ce cas, la symétrie sphérique du champ tensoriel permet cette simplification.
[408]On note que *V(r)* est égal au potentiel newtonien si *L = 0* justifiant que la géodésique radiale est newtonienne.

11- Analyse de la différence entre distance spatiale géométrique et distance observable dans la forme de Painlevé

Nous débattons ici du problème et du caractère physique de la distance spatiale, notion souvent source de confusion faute de définition unique. Nous commençons à en donner deux expressions qui donnent des valeurs différentes dans la forme de Painlevé.

La distance spatiale géométrique : sections spatiales en posant t = constante

Painlevé avait bien noté dans son article que les sections spatiales de sa forme étaient euclidiennes, ce dont, d'ailleurs, il avait tiré des conclusions qu'on lui a tant reprochées.

En effet, indépendamment du fait qu'elle efface la "singularité" de coordonnées à $r = 2GM = r_s$, cette forme de la métrique possède quelques propriétés originales.

En posant $T = constante$, on voit que le ds^2 se réduit à[409]:

$$ds^2 = dl^2 = [dr^2 + r^2(d\theta^2 + sin^2\theta.d\varphi^2)]. \qquad (11\text{-}1)$$

Cette forme caractérise une géométrie euclidienne en coordonnées sphériques.

La distance spatiale déterminée par la méthode du "radar"

Appliquons la méthode du "radar"[410] proposée dans le Landau & Lifchitz, par exemple, pour mesurer une distance par utilisation du temps mis par la lumière pour faire un aller-retour, elle vaut :[411]

$$dl^2 = \gamma_{ij}\, dx^i dx^j \qquad \text{avec} \quad \gamma_{ij} = -g_{ij} + g_{0i}.g_{0j}/g_{00}.$$

On remarque a présence du terme croisé spatio-temporel $g_{0i} = g_{tr}$.

$$\gamma_{rr} = +1 + (r_s/r)[1 - (r_s/r)]^{-1} = [1 - (r_s/r)]^{-1}$$

[409]Rappelons que dans l'extension de la forme de Painlevé (avec boost) ces sections spatiales ne sont pas plates.

[410]Méthode qui donne une "observable" par opposition à une distance géométrique.

[411]Landau & Lifchitz, 1994. p 306. C'est un autre concept de "distance spatiale" différent du concept purement géométrique. Ici on mesure le temps mis par la lumière pour parcourir un arc de géodésique lumière aller-retour entre deux points de coordonnées spatiales constantes (ce qui implique que l'observateur qui fait cette mesure est "statique " dans la métrique) et on multiplie par $c/2$ pour obtenir la distance. C'est un dl^2 "mesurable" (télémétrie), une observable, à la différence de l'autre qui est purement géométrique. Notons qu'ils sont identiques s'il n'y a pas de termes croisés $dr.dt$. Cette évaluation de la distance radar, quand il y a des termes croisés, est contestée, entre autres, dans Gautreau R. Hoffmann B.(1978) au motif que cette mesure est certes physique (c'est une observable) mais elle ne correspond pas à la définition géométrique du dl^2. Ce problème est particulièrement évident dans le cas des espaces temps non stationnaires (cosmologiques par exemple) où la mesure de certaines "distances" qui sont en fait des "observables" (distance de décalage spectral, de luminosité, angulaire, de temps de parcours de la lumière qui est une variante de la distance radar, etc.) donnent toutes des valeurs différentes pour un même objet, ce qui peut paraître absurde mais qui se comprend en l'interprétant en tant qu'observable associée à un observateur dans un modèle et réciproquement ces valeurs d'observables permettent de sélectionner le modèle qui en donne une interprétation cohérente.

Alors, comme $\gamma_{\theta\theta} = g_{\theta\theta}$ et $\gamma_{\varphi\varphi} = g_{\varphi\varphi}$ la métrique spatiale vaut :

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1 - (r_s/r)} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta . d\varphi^2). \qquad (11\text{-}2)$$

On retrouve le dl^2 de la forme de Schwarzschild (qui correspond à ses sections spatiales, car il n'y a pas de termes croisés dans la forme de Schwarzschild).

On trouve la même "distance" radar pour les formes de Schwarzschild et Painlevé

Pas étonnant, puisque c'est la même observable. La méthode pour déterminer la distance radar, distance qui est en fait une observable, donc relative à un observateur, est dépendante de cet observateur (de son référentiel associé) et non pas de la forme de la métrique.

C'est un point que nous avions souligné au chapitre *5* lorsque nous avions discuté de la distinction entre forme de métrique et observateurs.

On trouve la même valeur de la distance radar pour les deux formes de la métrique (Schwarzschild et Painlevé) parce que c'est le même observateur qui fait la mesure, bien qu'il soit représenté dans deux formes différentes de la métrique.

En effet la méthode pour déterminer la distance radar, telle qu'elle est décrite dans le Landau & Lifchitz suppose implicitement[412] que les observateurs sont statiques (à coordonnées spatiales constante, ce qui n'est pas le cas de celui de Painlevé) et on peut noter que dans ce cas les formes de Schwarzschild et Painlevé sont identiques, elles se réduisent à la forme commune :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 \quad .$$

Le fait que ce soit le même observateur qui fait la même mesure, impose ce même résultat.

Les distances géométriques données par les deux méthodes sont différentes

S'agissant des distances géométriques spatiales définies par les formes de métriques, la section spatiale géométrique dépend évidemment de la forme de la métrique utilisée.

Comme la coordonnée temporelle de la forme de Painlevé est différente de celle de Schwarzschild, les métriques spatiales, induites sur les sections spatiales d'une même variété obtenues en fixant la coordonnée temporelle, sont différentes, ce qui donne des résultats différents, ce qui atteste du caractère non physique de ces grandeurs géométriques purement spatiales construites à partir des coordonnées.

[412] Cela se voit dans le calcul qui est fait, mais ce n'est pas dit explicitement ce qui aurait été préférable pour bien indiquer qu'on se réfère à un observateur statique.

12- Le terme non quadratique de la forme de Painlevé. Causalité, temps, mouvement

---

Après quelques rappels fondamentaux sur le caractère spatial ou temporel des vecteurs de base, dérivés des coordonnées, nous montrons que leur type peut varier selon la région. Nous étudions le cas particulier de la phénoménologie sous l'horizon (région dynamique) où ils sont tous de type espace. Nous débattons des conditions d'existence de trajectoires (de type temps) d'objets physiques. Nous montrons que cela est alors permis par l'existence du terme non quadratique (si décrié et totalement incompris à l'époque) qui offre un degré de liberté supplémentaire. Ceci nous amène à une réflexion à caractère épistémologique sur les relations entre temps, espace et causalité à la lumière de ce cas spécifique à la relativité.

Type des vecteurs de base dérivés des coordonnées dans la forme de Painlevé

Rappel de la définition

Ces vecteurs sont les vecteurs tangents[413], en un point *M,* aux courbes associées aux coordonnées sur la variété. Ils sont situés dans l'espace-temps tangent au point *M* considéré de la variété. Leur valeur, exprimée dans les coordonnées globales, dépend du point *M* considéré de la courbe coordonnée. Comme *M* est un point de la variété on peut aussi considérer les composantes covariantes (sur la variété) faisant intervenir la métrique du vecteur. Ces différents éléments permettent de définir à quelle classe (Type temporel, nul ou spatial) le vecteur appartient donc de quel type est la coordonnée localement. Comme toute ligne d'univers appartient à la variété et est définie de façon analytique globale dans les coordonnées globales, le type local de ces vecteurs, donc des coordonnées, intervient dans le type de cette ligne d'univers via la métrique.

Calcul du type ces vecteurs

Commençons par le vecteur de base $(\partial_t)^\mu$ temps[414] associé à la coordonnée *t :* sa valeur est par définition :

$$(\partial_t)^\mu = (1, 0, 0, 0).$$

Sa version covariante, dans la forme de Painlevé vaut :

$$(\partial_t)_\mu = g_{\mu\nu}\,(\partial_t)^\nu = \quad \left(-\left(1-\frac{2GM}{r}\right), \sqrt{\frac{2GM}{r}}, 0, 0\right) \quad .$$

Par définition, le type de ce vecteur est déterminé par son auto-produit scalaire.

---

[413]En définissant une courbe C de façon paramétrique par $C(\lambda) = x^\mu(\lambda)$ où x^μ sont les coordonnées des points de la courbe C et λ le paramètre affin, les composantes X^μ de la tangente à cette courbe valent $dx^\mu/d\lambda$.

[414]Cette notation habituelle donne en fait les coordonnées du vecteur. la signature de la métrique est (-, +, +, +).

$$(\partial_t)^\mu(\partial_t)_\mu = (\partial_t)^0(\partial_t)_0 = -(1 - \frac{2GM}{r})$$

Ce produit scalaire est :

- négatif pour $r > 2GM$, $(\partial_t)^\mu$ est alors de type temps,
- nul pour $r = 2GM$, $(\partial_t)^\mu$ est de type nul,
- positif pour $r < 2GM$, $(\partial_t)^\mu$ est de type espace.

Pour les autres vecteurs de base nous ne ferons pas le calcul mais il est facile de vérifier que :

$$(\partial_r)^\mu(\partial_r)_\mu = 1,$$
$$(\partial_\theta)^\mu(\partial_\theta)_\mu = r^2,$$
$$(\partial_\varphi)^\mu(\partial_\varphi)_\mu = r^2 \sin^2\theta.$$

Tous ces vecteurs sont toujours positifs quel que soit r, ils sont toujours de type espace.

Condition pour qu'une trajectoire radiale soit de type temps pour r < 2GM

Rappelons la forme de la métrique entrante de Painlevé.

$$ds^2 = -\left(1 - 2\frac{GM}{r}\right)dt^2 + 2\sqrt{\frac{2GM}{r}}\,dr.dt + \left(dr^2 + r^2\left(\sin(\theta)^2 d\varphi^2 + d\theta^2\right)\right)$$

Les quatre coordonnées étant de type espace pour $r < 2GM$ cela semble compromettre l'existence de lignes d'univers de type temps (associés à des objets physiques) dans cette région.

Mais l'existence du terme non quadratique $dt.dr$ offre un degré de liberté supplémentaire, par rapport à une métrique de termes quadratiques entièrement déterminée par le signe des $g_{\mu\mu}$, en permettant de contrôler le signe du terme en $dr.dt$ en choisissant indépendamment celui de dr et de dt.

Pour que le ds^2 donné par la forme entrante de la métrique de Painlevé soit de type temps pour $r < 2GM$ sur une ligne d'univers radiale il faut et il suffit que :

$$\left(1 - 2\frac{GM}{r}\right)dt^2 - 2\sqrt{\frac{2GM}{r}}\,dr.dt > 0$$

En divisant par dt^2 les deux membres on obtient

$$(1-2\frac{GM}{r})-2\sqrt{\frac{2GM}{r}}\frac{dr}{dt}>0 \quad ,$$

soit :

$$\frac{-dr}{dt}>\frac{2GM-r}{2\sqrt{2GMr}} \quad . \qquad (12\text{-}1)$$

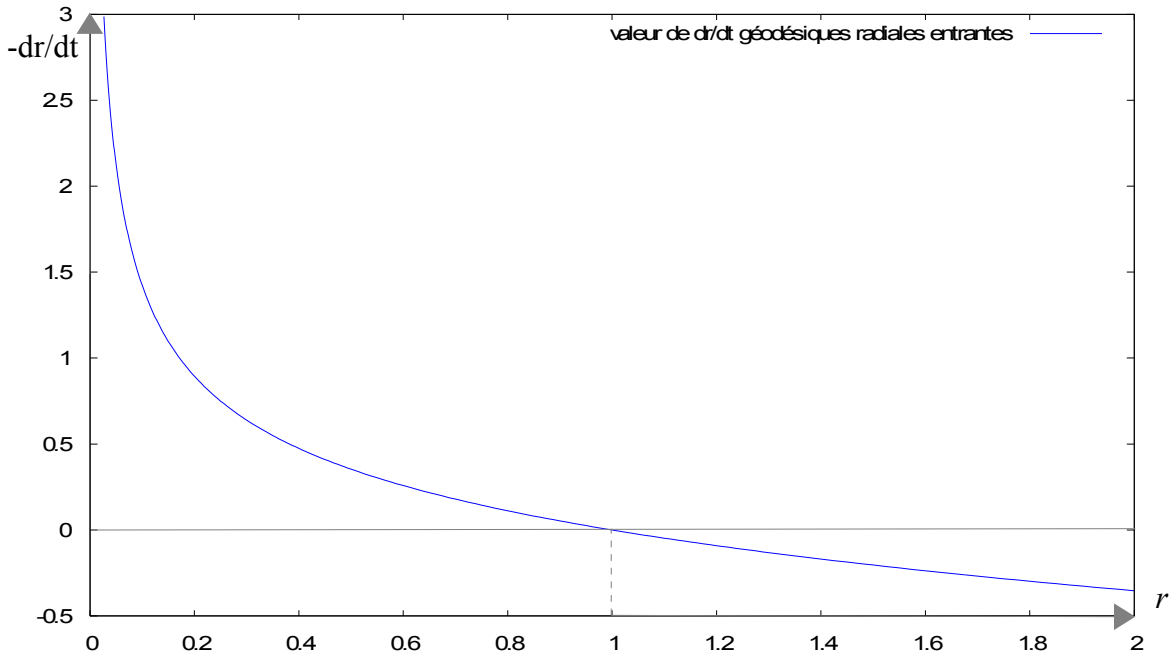


Figure 12-1[415]*. Graphe représentant l'équation (12-1) donnant la valeur minimum de (-dr/dt) en fonction de r en posant 2GM = 1.*

Pour *r > 2GM*, la valeur de *(-dr/dt)* est négative (*dr/dt* peut être positif), pour *dt > 0* des lignes d'univers radiales sortantes sont possibles, donc à fortiori du "surplace"*(dr/dt =0)*.

Pour *r = 2GM*, *(-dr/dt)* est nul (on est sur l'horizon), pour *dt >0* on ne peut pas faire mieux que du "surplace" (*dr/dt =0*) vers l'extérieur).

Pour *r < 2GM, (-dr/dt)* est positif, pour *dt > 0*, *dr* doit impérativement être négatif (*dr/dt <0*)

Ceci se voit d'ailleurs directement sur l'équation *(12-1)*: le terme de droite étant positif on voit que *dr/dt* doit être négatif.

Nous avons une limite de staticité, en deçà de laquelle il n'est plus possible pour un observateur "physique" d'être immobile (à coordonnées spatiales constantes). Pour *r = 0,* la vitesse radiale entrante tend vers l'infini.

[415]Tracé avec Maxima pour *c =1, 2GM =1*.

Notons que si la trajectoire n'est pas radiale, un terme complémentaire de type espace se rajoute, ce qui fait que la limite de staticité se produit pour une valeur de *r* supérieure.

On sait que pour une orbite circulaire la vitesse limite à $r = 3GM$ est la vitesse de la lumière (sphère des photons) et que toute orbite circulaire de type temps pour $r \leq 3GM$ est impossible.

La coordonnée t est non orthogonale à l'hypersurface t = constante

Calculons le produit scalaire du vecteur temps $(\partial_t)^\mu$ avec le vecteur spatial $(\partial_r)^\mu$ qui appartient à l'hypersurface définie par *t = constante*.

Avec

$$(\partial_r)^\mu = \{0, 1, 0, 0\}$$

et

$$(\partial_t)_\mu = g_{\mu\nu}\,(\partial_t)^\nu = \left(-\left(1 - \frac{2GM}{r}\right), \left(\frac{2GM}{r}\right)^{1/2}, 0, 0\right),$$

cela s'écrit :

$$(\partial_r)^\mu(\partial_t)_\mu = (\partial_r)^1(\partial_t)_1 = \sqrt{\frac{2GM}{r}} \quad .$$

L'orthogonalité des vecteurs se traduit par un résultat nul.

Ici le résultat qui est toujours positif et ne tend vers zéro que pour *r* tendant vers l'infini comme cela était prévisible.

Donc le vecteur $(\partial_t)^\mu$ n'est pas orthogonal aux hypersurfaces à *t = constante, s*auf à l'infini.

Ceci explique géométriquement comment une ligne d'univers peut être de type temps dans une région où les coordonnées sont toutes de type espace, mais non orthogonales deux à deux.

13- Congruences de géodésiques : description covariante de l'espace-temps

---

Jusqu'à présent nous avons modélisé l'espace-temps par une variété définie par un ensemble de points. Comme la variété modélise géométriquement l'effet de la gravitation et contraint les objets physiques (matière, rayonnement) à en suivre des géodésiques, nous sommes fondés à l'étudier à travers le comportement de ces géodésiques, méthode covariante plus structurée qui devrait nous donner une piste pour construire une forme de métrique s'appuyant sur des critères géométriques intrinsèques représentatifs de la structure de l'espace-temps de la solution considérée. Cette approche nous amènera à nous interroger sur la portée de la théorie. Nous examinons la position de la forme de Painlevé par rapport à cette analyse.

Comme il est possible de décrire l'espace-temps et ses caractéristiques physiques intrinsèques que nous considérons dans divers systèmes de coordonnées comme le stipule la relativité générale, il est intéressant de rechercher la ou les descriptions qui représentent le plus clairement ces caractéristiques dans le respect de la covariance[416].

Nous avons examiné certaines propriétés de cette solution du trou noir à symétrie sphérique à travers différentes formes de la métrique permettant d'en étiqueter les points et de calculer en quatre dimensions les "distances" (le ds^2 et le s^2 par intégration), en particulier à travers la forme de Painlevé qui utilise un système de coordonnées particulier dont nous avons montré l'intérêt.

Dans cette approche, peu contrainte, l'objet fondamental était le point, objet on ne peut plus simple (zéro dimension), repéré par ses coordonnées dont nous avions souligné le caractère arbitraire.

La variété était définie par ses points eux même définis par leurs coordonnées dans un système de coordonnées arbitraire mais connu[417].

Cette forme de métrique nous a permis de calculer des géodésiques, objet de type ligne (unidimensionnel), dont nous avions souligné le caractère physique indépendant des coordonnées.

Étudier les propriétés de l'espace-temps, en prenant la géodésique comme objet fondamental[418], de façon plus contrainte puisque une géodésique est caractéristique de l'espace-temps étudié, en étudiant le comportement relatif d'une "famille" de géodésiques va nous permettre de dégager au niveau de la structure de la variété des propriétés nativement covariantes que les points ne permettaient pas de mettre, si clairement, en évidence.

---

[416]L'étude par le diagramme de Minkowski de fonctions reliant cordonnées temps et espace n'est pas covariante. La méthode proposée s'appuie sur des structures de courbes appartenant à la variété. Elle a un caractère objectif et physique indépendamment de toute description dans un système de coordonnées ce qui est bien covariant.

[417]Un système de coordonnées sur une variété de dimension N est l'application bijective de l'ensemble des objets constitués d'une liste ordonnée de N réels sur l'ensemble décrivant les points de la variété, il est purement formel et ne reflète en général (pas nécessairement) que des propriétés de symétrie *a priori*. Par exemple les coordonnées sphériques, associées naturellement à la symétrie sphérique spatiale *a priori* dans notre cas, sont en général considérées physiques dans une géométrie euclidienne (parce qu'on considère par habitude la géométrie euclidienne comme implicitement physique) mais si, comme il se doit, on explicite la forme de la métrique même dans le cas euclidien, alors le caractère universel et arbitraire de ces coordonnées, qui fait qu'on peut les utiliser dans des métriques non euclidiennes associées des géométries courbes de l'espace-temps, devient clair.

[418]Pour une présentation plus complète voir par exemple Carroll S. (2003), appendix F.

Ce type de description plus structuré permet de définir “le squelette” de l’espace-temps considéré, nous renseignant sur sa morphologie [419].

Nous avons déjà étudié une géodésique seule (par sa courbe définie par des points), ici ce qui nous intéresse c’est la notion de “famille” de géodésiques et leurs relations géométriques entre elles.

D’où la notion de famille de géodésiques, le terme consacré étant congruence de géodésiques.

Ce qui va nous intéresser c’est comment les géodésiques voisines d’un “même” type se comportent relativement.

On va arbitrairement en prendre une et considérer le faisceau de géodésiques infiniment voisines en étudiant la section normale à la géodésique de référence d’un faisceau.

Par exemple les géodésiques voisines dont la section spatiale normale est sur un cercle centré sur la géodésique de référence.

S’écartent-elles ou se resserrent-elles, dans quelle direction ?

Se déforment-elles en une autre figure (anisotropie) ?

Tournent-elles autour du centre ?

Autant de propriétés qui vont caractériser (localement) l’espace-temps.

En appliquant les symétries de l’espace-temps, dans notre cas, on va pouvoir étendre cette famille locale en une famille globale qui va remplir tout l’espace-temps de manière à obtenir une congruence de géodésiques, où chaque point de la variété appartient à une géodésique, la congruence contenant tous les points de la variété, fournissant un moyen plus structuré (et plus performant) que les points définis comme précédemment pour remplir ce rôle, car :

- D’une part, ses éléments, les géodésiques, sont des lignes, structures organisées de points, obéissant à des contraintes géométriques inhérentes à la structure de l’espace-temps, qui le caractérisent et recèlent donc plus d’information que les points indépendamment définis.
- D’autre part on peut étudier le comportement de la congruence, c’est-à-dire des géodésiques les unes par rapport aux autres, ce qui va nous révéler des propriétés complémentaires de l’espace-temps que nous étudions.

Comme nous l’avons indiqué, ceci s’évalue sur une “section normale” à la géodésique de référence, en prenant comme condition initiale un ensemble de géodésiques proches dont cette section forme un cercle centré sur le point correspondant à la géodésique de référence et on étudie la variation de ce cercle qui peut varier en dimension (expansion), tourner (rotation), se déformer (anisotropie) lorsque cette section évolue en parcourant la géodésique de référence.

[419] En particulier, la théorie “seule” ne définit-elle pas totalement seulement que les géodésiques ? Les autres courbes décrites nécessitent un couplage avec d’autres phénomènes physiques.

Géodésiques suivies par l'observateur de Painlevé (type temps)

Étudions les caractéristiques de la congruence de géodésiques de Painlevé entrantes.

Dans la forme de Painlevé, en coordonnées sphériques[420], les observateurs de Painlevé suivent des géodésiques à θ et Φ constant, de quadri-vitesse

$$U_{ff}{}^{\mu} = (1, \beta, 0, 0), \qquad (13\text{-}1)$$

en posant: $\beta = -(r_s/r)^{1/2}$.

Dans l'étude des congruences de géodésiques (de type temps) on définit un tenseur[421]:

$$B^{\mu}{}_{\nu} = U_{ff}{}^{\mu}{}_{;\nu}. \qquad (13\text{-}2)$$

On voit que ce tenseur est la dérivée covariante de la quadri-vitesse géodésique de l'observateur de Painlevé, donc indique la variation covariante de ce quadrivecteur en fonction de la variation (infinitésimales) de coordonnées, donc autour du point spatio-temporel considéré. C'est bien ce que nous cherchons.

Sa version covariante

$$B_{\mu\nu} = g_{\mu\lambda}\, B^{\lambda}{}_{\nu} = g_{\mu\lambda}\, U_{ff}{}^{\lambda}{}_{;\nu} = U_{ff\,\mu;\nu},$$

est un tenseur qui peut être décomposé de la façon suivante :

$$B_{\mu\nu} = \tfrac{1}{3}\,.\theta\,.P_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu}, \qquad (13\text{-}3)$$

où : $$P_{\mu\nu} = g_{\mu\lambda}P^{\lambda}{}_{\nu} = g_{\mu\lambda}\,(\delta^{\lambda}{}_{\nu} + U_{ff}{}^{\lambda}\,U_{ff\,\nu}) = g_{\mu\nu} + U_{ff\,\mu}\,U_{ff\,\nu}, \qquad (13\text{-}4)$$

avec le tenseur de projection

$$P^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu} + U_{ff}{}^{\mu}\,U_{ff\,\nu},$$

dont la fonction est de projeter n'importe quel vecteur de l'espace tangent en un point dans le sous-espace orthogonal au champ de vecteurs $U_{ff}{}^{\mu}$.

[420]La forme de Painlevé en coordonnées cartésiennes sera utilisée dans le modèle de la rivière. U_{ff} (free fall) dénote, la quadri-vitesse en chute libre radiale de l'observateur de Painlevé, le ";" la dérivée covariante.

[421]Nous verrons le lien entre ce formalisme et la définition de la courbure extrinsèque au chapitre qui en traite.

Dans la relation *(13-3)*, θ [422] est une fonction scalaire qui définit l'expansion de la congruence, σ qui est un tenseur symétrique de trace nulle[423] définit son anisotropie (cisaillement) et ω, qui est un tenseur antisymétrique par construction, définit sa rotation.

Ces éléments se calculent à partir de la quadri-vitesse U_{ff}^{μ} et de la métrique.

$$\begin{aligned} \theta &= P^{\mu\nu} B_{\mu\nu} = U_{ff}^{\mu}{}_{;\mu} \\ \sigma_{\mu\nu} &= B_{\mu\nu} - \tfrac{1}{3}.\,\theta.P_{\mu\nu} \\ \omega_{\mu\nu} &= B_{[\mu\nu]} \end{aligned} \qquad (13\text{-}5)$$

Ces éléments, en général, ne sont pas très simples à calculer.

Application aux trous noirs de Schwarzschild

Calcul de l'expansion de la congruence en coordonnées sphériques

À titre d'exemple, dans le cas des trous noirs sphériques non chargés, dans la forme de la métrique de Painlevé en coordonnées sphériques où

$$U^{\mu} = \{1, -(2M/r)^{1/2}, 0, 0\},$$

le calcul donne[424] :

$$\theta = -3/2(2M^{1/2})r^{-3/2}.$$

Ce facteur scalaire donne l'ampleur de l'expansion (la déviation géodésique) du rayon de la section spatiale des géodésiques voisines. Elle est proportionnelle à $r^{-3/2}$. L'expansion de la surface transversale est alors proportionnelle à r^{-3}. Elle diverge sur la singularité où la courbure devient infinie, et tend vers zéro à l'infini où la courbure s'annule. Cette phénoménologie est compatible avec ce que nous avons décrit jusqu'à présent.

Notons son lien avec l'effet de marée, conséquence longitudinale unidimensionnelle de la même courbure, induisant une élongation radiale proportionnelle directement à r^{-3}, puisque c'est unidimensionnel, sur une géodésique radiale.

Concernant la rotation $\omega_{\mu\nu}$ et l'anisotropie $\sigma_{\mu\nu}$ de la congruence dans ces trous noirs sphériques, compte tenu des symétries de ces tenseurs, ces deux paramètres sont nuls.

La congruence de géodésiques radiales entrantes dans la solution de Schwarzschild (qui engendre tous les points de cet espace-temps) est caractérisée par ces valeurs.

Expansion d'une congruence dans le formalisme de Newmann-Penrose

[422] Attention à la notation, θ n'est pas la coordonnée angulaire mais le facteur d'expansion.

[423] L'équation *(4)* montre sa symétrie, pour vérifier que la trace est nulle on développe $\sigma^{\mu}{}_{\nu} = B^{\mu}{}_{\nu} - \tfrac{1}{3}.\,\theta.P^{\mu}{}_{\nu}$ et on contracte pour calculer la trace en posant $\mu = \nu$. Il vient : $\sigma^{\mu}{}_{\mu} = B^{\mu}{}_{\mu} - \tfrac{1}{3}.\,\theta.P^{\mu}{}_{\mu}$. En utilisant les relations ci-dessus et en utilisant $U_{ff}^{\mu}\, U_{ff\,\mu} = -1$, on obtient $\sigma^{\mu}{}_{\mu} = \theta - \tfrac{1}{3}.\,\theta.[(4)+(-1)] = 0$.

[424] Le calcul dans d'autres coordonnées, avec U^{μ} dans ces coordonnées, donne le même résultat. C'est un scalaire.

Pour aller un peu plus avant dans la recherche de solutions caractérisant l'espace-temps considérons le formalisme de Newmann-Penrose utilisant une base locale de vecteurs nuls, ce qui peut dérouter, si on n'en connaît pas la motivation que nous rappelons brièvement.

Ce choix, manifestement adapté à la description de géodésiques de type "lumière", qui peut paraître étrange pour décrire physiquement les lignes d'univers de particules massives réelles, peut se révéler être un "intermédiaire de calcul" particulièrement efficace, simplifiant considérablement les calculs.
En réalisant un changement de coordonnées approprié, opération triviale en Relativité Générale, du fait de la covariance, on pourra alors transformer les résultats obtenus par cette méthode pour les exploiter dans une base tétradique réelle adaptée à la description physique de la ligne d'univers de particules massives réelles.

Indépendamment de l'aspect purement pratique, comme cette simplification le laisse supposer (si les calculs sont simplifiés dans une telle base, ce n'est pas sans raisons), ce choix révèle l'importance des géodésiques de type nul, en particulier les directions nulles principales, dans la description de la structure de ces espaces-temps.

Ce formalisme a été établi sur la conviction que les cônes de lumière sont un élément essentiel de la structure des espaces temps, et que la structure des cônes de lumière révèle, plus que tout autre, les symétries de ces espaces temps.

Explicitons comment ce formalisme simplifie les calculs des équations d'Einstein.

Dans le cas général elles se composent de dix équations couplées aux dérivées partielles du second ordre hautement non linéaires, pour les dix composantes du tenseur métrique, ce qui les rend extrêmement difficiles à résoudre.

Dans ce formalisme elles se transforment en 30 équations différentielles partielles, relatives à 30 variables, toutes du premier ordre (au lieu du second) et presque linéaires.

On voit que l'intérêt de la méthode réside alors principalement dans :

- Le fait que les équations soient du premier ordre au lieu du second.
- Le fait qu'elles soient quasiment linéaires (ce qui facilite leur résolution numérique).
- Et de façon surprenante, le fait que le grand nombre de variables permet d'imposer facilement des conditions particulières.

L'analyse de l'espace-temps en particulier l'étude du tenseur de Weyl associé montre que c'est bien dans cette base que les symétries de cet espace-temps sont le mieux représentées, autrement dit, c'est dans cette base que le tenseur de Riemann (qui est égal au tenseur de Weyl dans le vide) va trouver sa forme la plus simple puisque même dans le cas plus complexe d'espace-temps de la famille de Kerr les 5 scalaires (complexes) ψ_0 à ψ_4 de Weyl caractérisant l'espace-temps se réduisent à un seul non nul, ce qui est très significatif de l'adéquation du formalisme à ce type d'espaces temps (caractérisés par une masse unique).

En particulier les "forces de marées" qui vont être calculées à partir de ces tenseurs vont se présenter sous une forme particulièrement "simple".

La base de vecteurs nuls utilisée dans ce formalisme a été calculée en utilisant cette base calculée dans la solution de Kerr dans la forme de Doran[425], qui est l'extension naturelle de la forme de Painlevé pour la solution de Kerr, en posant $a = 0$ pour les avoir dans la forme de Painlevé.

Elle se compose des vecteurs ***l, n*** tangents aux deux directions nulles principales et de deux vecteurs complexes nuls additionnels ***m*** et ***m**** avec les relations suivantes :

$$\boldsymbol{l.l = n.n = m.m = m^*.m^* = 0,\ l.m = l.m^* = n.m = n.m^* = 0,\ l.n = 1,\ m.m^* = -1.}$$

$$l^\mu = \{1,\ 1-\beta,\ 0,\ 0\}$$
$$n^\mu = \tfrac{1}{2}\{-1,\ 1+\beta,\ 0,\ 0\}$$
$$m^\mu = (1/r\sqrt{2})\{0,\ 0,\ 1,\ i/\sin\theta\}$$
$$m^{*\mu} = (1/r\sqrt{2})\{0,\ 0,\ 1,\ -i/\sin\theta\}$$

Où $\beta = (2M/r)^{1/2}$.

Il est facile de vérifier (en calculant les composantes covariantes de ces vecteurs dans la forme de Painlevé et en calculant les produits scalaires) que les relations entre vecteurs (en caractères gras) ci-dessus sont satisfaites pour ces vecteurs.

Nous savons que dans cette base nulle, parmi les cinq scalaires (complexes)[426] Ψ_i de Weyl permettant de définir les 10 valeurs non nulles du tenseur de Weyl, (le tenseur de Riemann se ramène au tenseur de Weyl puisque nous sommes dans le vide), seul le scalaire Ψ_2 n'est pas nul.

Pour la solution de Schwarzschild dans la forme de Painlevé, il prend une valeur simple réelle:

$$\Psi_2 = -M/r^3.$$

Rappelons que Ψ_2 représente physiquement à grande distance de la source le terme de Coulomb, relatif à l'effet de marée du champ gravitationnel monopolaire de la source.

On retrouve bien un effet de marée (le tenseur de Weyl représente ces effets) proportionnel à M et proportionnel à r^{-3} pour les géodésiques de Painlevé.

Cas des géodésiques nulles

Les géodésiques nulles sont un cas particulier essentiel, car elles possèdent un degré de liberté de moins que les géodésiques temporelles, du fait de la contrainte $ds^2 = 0$.

Elles définissent le cône de lumière qui contient les géodésiques temporelles, déterminant ainsi la causalité.

---

[425] Doran C.(2000). Pour une description du formalisme de Newmann Penrose cf Chandrasekar S. (1983) p.41.

[426] Ψ_1 et Ψ_3 sont les termes relatifs au rayonnement longitudinal entrant et sortant et Ψ_0 et Ψ_4 sont les termes relatifs au rayonnement transversal entrant et sortant. Dans un espace-temps asymptotiquement plat Ψ_1 et Ψ_3 peuvent être annulés par un choix approprié de tétrade nulle (celle que nous avons choisie). Elles peuvent être considérées comme des valeurs de jauge.

Soulignons que la lumière a toujours un mouvement géodésique, propriété non triviale, qui résulte de la nullité de "l'action" de la lumière sur sa ligne d'univers, ce qui entraîne un paramétrage particulier de ces géodésiques[427] puisqu'on ne peut pas utiliser le temps propre comme paramètre affin.

En partant de l'équation géométrique dans un paramétrage quelconque

$$\frac{d^2x^\mu}{d\alpha} + \Gamma^\mu_{\rho\sigma}\frac{dx^\rho}{d\alpha}\frac{dx^\sigma}{d\alpha} = f(\alpha)\frac{dx^\mu}{d\alpha}, \qquad (13\text{-}6)$$

qui dans le cas d'une géodésique de type temps se ramène à la forme bien connue ci-dessous

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda} + \Gamma^\mu_{\rho\sigma}\frac{dx^\rho}{d\lambda}\frac{dx^\sigma}{d\lambda} = 0, \qquad (13\text{-}7)$$

en utilisant le temps propre comme paramètre affin, montrons qu'on peut aussi obtenir la même forme *(13-7)* pour la lumière. On peut vérifier que si on considère α dans *(13-6)* comme une fonction d'un paramètre affin λ, soit $\alpha(\lambda)$ on annule le terme de droite après insertion de ce paramètre affin λ dans l'équation complète en posant $f(\alpha)$

$$f(\alpha) = -\left(\frac{d^2\alpha}{d\lambda^2}\right)\left(\frac{d\alpha}{d\lambda}\right)^{-2}, \qquad (13\text{-}8)$$

ce qui conduit à

$$\frac{d\alpha}{d\lambda} = a\exp\left(\int_0^\alpha f(\eta)\,d\eta\right), \qquad (13\text{-}9)$$

où f est bien la fonction citée dans l'équation *(13-6)* et η une variable auxiliaire d'intégration.

En pratique, pour la lumière, on utilise l'impulsion p^μ pour définir le paramètre affin λ par la relation :

$$p^\mu = dx^\mu/d\lambda. \qquad (13\text{-}10)$$

Comme pour la lumière l'énergie vaut $p^\mu c$, impulsion et énergie sont égales en valeur si on pose $c = 1$).

Quelle est la signification physique du paramètre affin λ défini dans *(13-9)* ?

Comme p^μ est proportionnel à la fréquence v (on utilise plutôt la pulsation $\omega = 2\pi v$), sur une géodésique dans cet espace-temps, λ est proportionnel à la longueur d'onde du rayonnement, ce qui correspond à une échelle de longueur, qui est donc le paramètre affin dans ce cas.
Soulignons que la représentation sur un diagramme de Minkowski de la géodésique parcourue par la lumière ne dépend pas de la fréquence du photon, ce qui est incomplet sur le plan physique, car ces géodésiques dépendent du paramètre affin λ utilisé (non représenté sur le diagramme).

[427] Adapté de Carroll S. (2003), chapitre 3.4

Plus l'impulsion est grande plus la fréquence est élevée et plus le paramètre affin λ, qui est proportionnel à la longueur d'onde sera petit et, physiquement, plus l'énergie du photon mesurée par un observateur donné sera grande ce qui caractérise physiquement une différence entre les géodésiques.

Il s'agit physiquement de géodésiques différentes que le diagramme ne met pas en évidence sauf à tracer les courbes iso-affines équidistantes (en paramètre affin) dont l'écartement sur le diagramme va dépendre de l'impulsion du photon pour les géodésiques nulles.
Autrement dit sur le diagramme de Minkowski, l'unicité de géodésique radiale entrante nulle en un point ne traduit qu'une insuffisance de la représentation qui ne concerne que la relation entre la coordonnée t et la coordonnée r, excluant le paramètre affin λ sans relation avec la coordonnée t, à la différence du paramètre affin temps propre τ pour les géodésiques temporelles, sauf à représenter les courbes iso-affines comme nous l'avons fait pour le temps propre des géodésiques temporelles et à le prendre en compte dans le raisonnement.
Il y en a une infinité de géodésiques nulles radiales entrantes de fréquences différentes en tout point p, comme il y a une infinité de géodésiques radiales entrantes de type temps de boosts différents (à l'intérieur du cône de lumière) qui elles sont caractérisées par des pentes différentes $(dx/dt)_p$ de leur tangente à la géodésique $x(t)$ sur le diagramme (cf figure 15-5) du fait que le paramètre affin temps propre τ [428], à la différence de λ, dépend de la coordonnée t.

Le critère physique qui permet de distinguer les géodésiques est de nature spatio-temporelle (une vitesse relative non nulle) dans un cas et de nature fréquentielle dans l'autre.

L'absence de référentiel absolu ne permet que des comparaisons relatives mais parfaitement physiques cependant. Ainsi les horloges, sur une géodésique temporelle, battent au même rythme, propriété remarquable qui a sans doute motivé les interrogations de Painlevé sur la fréquence "native" d'un photon (de référence) et sa préférence donnée au référentiel inertiel, ce que nous commenterons ultérieurement.

On retrouve la dualité temps-espace / fréquence-impulsion dont l'équivalence se traite par les transformations de Fourier. On voit que la valeur du paramètre affin pour une géodésique nulle est bien particulière. L'étude de ces congruences de géodésiques nulles devraient nous aider à la compréhension des solutions dans de vide d'une classe d'espaces temps à laquelle le trou noir à symétrie sphérique appartient.

Retour sur la causalité

Dans une étude très complète sur les singularités et les horizons d'espaces temps [429], F.J.Tipler, C.J.S Clarke & G.F.R Ellis ont tenté de donner des critères objectifs pour caractériser globalement l'absence de violation de causalité dans un espace-temps, solution de la relativité générale, sans vraiment parvenir à une conclusion totalement convaincante.

Ceci montre la complexité et la difficulté d'établir des relations régissant globalement la causalité dans ces espaces-temps.

---

[428] Les différentes géodésiques radiales temporelles ne se différencient que par un boost et leur paramètre affin τ est donc lié à la coordonnée t par une transformation de Lorentz. Formellement c'est identique au cas des géodésiques nulles puisque c'est bien le paramètre affin qui distingue les différentes géodésiques, c'est la nature "physique" de ce paramètre affin qui est différente.

[429] F.J.Tipler, C.J.S Clarke & G.F.R Ellis (1980).

Considérons que la relativité générale native ne traite exhaustivement que de géodésiques, autrement dit qu'elle ne définit, en standard, que des lignes d'univers sous l'action de la seule gravitation.

A l'appui de cette hypothèse, citons l'étude des géodésiques nulles (toujours géodésiques) que nous avons estimées fondamentales pour décrire un espace-temps.

Cette approche décompose le problème en plusieurs parties. En traitant d'abord ce cas natif, cela devrait permettre de simplifier sa solution[430].

Mais ce qui motive vraiment cette démarche c'est que lorsque le mouvement est non géodésique[431], un élément externe autre que la gravitation intervient et qu'on considère alors l'espace-temps défini par la relativité générale comme la "base", structure non dynamique vis-à-vis du phénomène externe qui génère le caractère non géodésique de la ligne d'univers suivie.

Ceci conduit à définir localement un couplage entre l'espace-temps (base) et ce phénomène externe pour en décrire la composition régissant le phénomène résultant.

Nous considérons ceci comme une extension de la théorie de la relativité générale, car ceci conduit en général à rajouter dans un espace local interne (en chaque point de l'espace-temps) des paramètres supplémentaires relatifs à ce couplage. Ces paramètres, et leurs évolutions, le long de la ligne d'univers peuvent permettre de résoudre certains problèmes comme les boucles temporelles dans la machine temporelle de l'espace-temps de Kerr.

Classification de Petrov-Pirani

Dans la solution, dans le vide, que nous étudions nous savons que le tenseur de Riemann se réduit au tenseur de Weyl décrivant un espace-temps conforme qu'on peut caractériser par les géodésiques nulles.

Étudier les symétries des familles de géodésiques nulles va permettre de classer les espaces-temps en différents types.

C'est cette démarche, qui s'est révélée fructueuse, que nous allons brièvement présenter.

Définition

Y ayant fait référence dans les paragraphes précédents, il est utile de rappeler les éléments essentiels qui ont conduit à cette classification[432] qui a été à la source de progrès importants dans le développement de la théorie de la relativité générale.

Comme un espace-temps vide est caractérisé par le tenseur de Weyl (tenseur conforme), cette classification[433] permet de cataloguer des types d'espaces-temps vides particuliers par le nombre de valeur propres du tenseur de Weyl considéré comme un opérateur $C^{ab}{}_{mn}$ s'appliquant sur des bi-vecteurs (tenseurs à deux indices) soit :

[430]Par exemple la violation de causalité dans la "Carter Time Machine" des espaces temps de la famille de Kerr, concerne des lignes d'univers non géodésiques.

[431]On peut considérer comme géodésique le mouvement d'une particule chargée dans un champ généré par une masse avec charge (solution Reissner-Nordström, Kerr-Newmann) où la structure du champ électrique (et magnétique) est la même que celui du champ gravitationnel (électro-vide) et où on peut coupler les équations d'Einstein avec celles Maxwell : voir solution données par B. Carter (1968).

[432]Rappelons le remarquable article de E. Cartan (C.R.A.S) T 174 (1922) p. 857-860, qui préfigure cette classification

[433]Voir Petrov A.Z (1954), Pirani F.A.E (1957)

$$X^{ab} \rightarrow \tfrac{1}{2} C^{ab}{}_{mn} X^{mn}.$$

Ces valeurs propres λ caractérisées par

$$\tfrac{1}{2} C^{ab}{}_{mn} X^{mn} = \lambda X^{ab},$$

vont déterminer les niveaux de symétrie de ce tenseur.

On peut avoir de 1 à 4 valeurs propres différentes dont les combinaisons donnent :

Type I : quatre directions principales nulles,

Type II : une direction double et deux directions simples principales nulles,

Type D : deux directions doubles nulles,

Type III: une direction triple et une direction simple principale nulles,

Type N: une direction quadruple principale nulle,

Type O : le tenseur de Weyl s'annule.

Interprétation physique

En Relativité Générale les différents types de Petrov algébriquement spéciaux peuvent s'interpréter physiquement, la classification résultante étant quelquefois appelée la **classification des champs gravitationnels**.

Les régions de **type D** sont associées aux champs gravitationnels d'objets massifs isolés, comme les étoiles. Plus précisément le type **D** est associé au champ gravitationnel d'un objet qui est complètement caractérisé par sa masse, sa charge électrique et son moment angulaire (Un objet plus général a des moments multipolaires d'ordre plus élevés non nuls).

Les deux directions nulles principales définissent les congruences nulles radiales entrantes et sortantes près de l'objet qui est la source du champ.

Le tenseur gravito-électrique (tenseur de marée) dans une région de type **D** ressemble beaucoup à son cousin Newtonien décrit par un potentiel gravitationnel de type Coulombien. Un tel champ de marée se traduit par une élongation dans une direction et une compression dans les directions orthogonales, les valeurs propres ont le profil (-2, 1, 1).

Par exemple une capsule spatiale en orbite autour de la Terre subit une élongation radiale minuscule et une compression minuscule dans les directions orthogonales.

Le champ de marée décroît en $O(r^{-3})$, comme en mécanique Newtonienne où r est la distance à l'objet.

À ces valeurs propres dont le nombre (de 1 à 4) dépend des symétries de l'espace-temps, on peut associer des congruences de vecteurs nuls (quatre différentes dans le cas de symétrie minimum, jusqu'à une valeur quadruple dans le cas le plus symétrique) et l_μ, n_μ, dans notre cas.

À la recherche d'une solution représentative inspirée de la méthode

On peut s'inspirer de la démarche structurée qu'avaient fait Kerr et Schild (1964) dans l'étude des trous noirs de la famille de Kerr, car l'espace-temps que nous étudions en est un cas particulier (sans charge, ni moment cinétique angulaire).

Ils avaient recherché des solutions où la forme du tenseur métrique s'exprimait comme la somme du tenseur de la métrique de Minkowski et du produit d'une fonction scalaire par le produit tensoriel d'un vecteur covariant nul par lui-même (en espace-temps de Minkowski).

Reste à déterminer quel pourrait bien être ce vecteur nul.

Comme nous nous intéressons à la région "trou noir" de la solution "dite de Schwarzschild[434]" notre intuition nous oriente vers le vecteur nul principal radial entrant

$$l_\mu = \{1, 1, 0, 0\},$$

qui est nul, de façon évidente, en espace de Minkowski et est le seul qui répond à la question.

Le tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ de la forme de Kerr-Schild sans rotation s'écrit donc :

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + (2M/r) l_\mu l_\nu.$$

Le ds^2 s'écrit

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) + (2M/r)(dr + dt)^2,$$

soit également :

$$ds^2 = -(1-2M/r)dt^2 + 2.(2M/r)dt.dr + (1+2M/r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2).$$

Ce résultat remarquable montre le caractère pseudo-minkowskien de la solution. Notons qu'on obtient le même résultat en calculant[435] l^μ par le système de deux équations $l_\mu = g_{\mu\nu} l^\nu$ pour $\mu = 0$ et 1 où $g_{\mu\nu}$ est la métrique de Kerr-Schild sans rotation.

[434]Il s'agit d'une appellation générique qui désigne l'espace-temps défini par cette forme de la métrique dans ce système de coordonnées particulier et par conséquent dans tous les systèmes de coordonnées qui se déduisent des premières par une transformation par une fonction scalaire des coordonnées. Par exemple quand on déclare que le théorème de Birkhoff montre que la solution de Schwarzschild est l'unique solution du problème du corps à symétrie sphérique, dans le vide, c'est ainsi qu'il faut le comprendre.

[435]Nous ne donnons pas le détail des calculs très simples. On peut vérifier les relations par le résultat.

Ceci corrobore les résultats afférents à la proposition pseudo-classique de Painlevé qui, comme nous l'avions noté au chapitre *3*, décrivait bien la structure conforme, associée aux géodésiques nulles, de ce type d'espace-temps puisqu'on trouve le même résultat en espace de Minkowski et en espace courbe, en coordonnées de Kerr-Schild.

Ce qui donne :

$$l^\mu = \{-1,\ 1,\ 0,\ 0\},$$
$$l_\mu = g_{\mu\nu}\, l^\nu \ = \eta_{\mu\nu}\, l^\nu = \{1,\ 1,\ 0,\ 0\}.$$

Ce qui atteste que pour la géodésique nulle entrante l'espace-temps se comporte, de façon non triviale, comme l'espace-temps de Minkowski, du moins pour cette forme de la métrique.

Finalement en calculant :

$$l_\mu\, l^\mu = -1 + 1 = 0.$$

On vérifie que le vecteur ***l*** est aussi bien nul dans les coordonnées de la forme de Kerr Schild.

Cette métrique de Kerr-Schild (avec $a = 0$) sous forme cartésienne s'écrit (en tableau):

$$\begin{pmatrix} -1 + \frac{2m}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \frac{2mx}{x^2+y^2+z^2} & \frac{2my}{x^2+y^2+z^2} & \frac{2mz}{x^2+y^2+z^2} \\ \frac{2mx}{x^2+y^2+z^2} & 1 + \frac{2mx^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} & \frac{2mxy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} & \frac{2mxz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \\ \frac{2my}{x^2+y^2+z^2} & \frac{2mxy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} & 1 + \frac{2my^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} & \frac{2myz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \\ \frac{2mz}{x^2+y^2+z^2} & \frac{2mxz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} & \frac{2myz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} & 1 + \frac{2mz^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \end{pmatrix}$$

Nous obtenons la forme de Kerr-Schild (sans rotation) qui nous le verrons plus en détail dans la suite satisfait à la condition de pseudo-tenseur nul et autres conditions qui sont attachées à cette propriété et qui, on peut le vérifier, décrit bien le même espace-temps que la forme de Painlevé (et Schwarzschild).

Comment obtenir la forme de Kerr-Schild sans rotation à partir de celle de Kerr

La forme de Kerr (1963), lorsque le paramètre a est nul[436] se réduit à la forme de Finkelstein[437], qui appartient à la même famille que celle de Painlevé. En effet avec $a = 0$, on obtient :

$$ds^2 = -(1-2GM/r)du^2 +2du.dr +r^2(d\theta^2 +sin^2\theta d\varphi^2).$$

Dans cette forme la coordonnée r est de type nul. On peut rendre cette coordonnée r non nulle en opérant une "rotation" en posant $t = u - r$ comme Kerr et Schild l'ont proposé pour obtenir la forme générale dite de Kerr-Schild (avec a $\neq$ 0) à partir de la métrique de Kerr.

Le cas $a = 0$ n'en est qu'un cas particulier.

Dans les nouvelles coordonnées (t, r, θ, φ), cette forme devient alors :

$$ds^2 = -(1-2GM/r)dt^2 +2.(2GM/r)dt.dr + (1+2GM/r)dr^2 +r^2(d\theta^2 +sin^2\theta d\varphi^2),$$

ce qui est bien la forme que nous avions prédite.

Le caractère minkowskien orienté pour la lumière de la forme de Kerr-Schild

La forme des cônes de lumière dans cette forme de Kerr-Schild sans rotation est donnée par les équations suivantes.

Géodésique radiale entrante :

$$dr/dt = - \frac{(\beta^2+ 1)}{\beta^2 +1} = -1,$$

Géodésique radiale sortante :

$$dr/dt = - \frac{(\beta^2 - 1)}{\beta^2 +1},$$

où on a posé $\beta= -(2GM/r)^{1/2}$.

On voit que la pente de la géodésique nulle entrante est constante[438], ce qui correspond, comme dans la forme de Finkelstein mais ayant subi une rotation de $\pi/4$, à une "homogénéité" d'un phénomène dans une métrique qui ne l'est pas.

La géodésique radiale nulle entrante de la forme de Kerr-Schild sans rotation se comporte de façon homogène. Cette forme présente donc des similitudes avec celle de Minkowski[439].

[436]S'agissant de la forme de Kerr la charge électrique est nulle.
[437]Cette propriété est rarement soulignée.
[438]Celle des géodésiques radiales sortantes est variable et vaut $+1$ à $+\infty$, 0 sur l'horizon et -1 pour $r = 0$.
[439]On a $r = -c.dt$, en tout point de la géodésique nulle comme dans la forme de Minkowski, mais le paramétrage par le paramètre affin λ qu'on utilise habituellement pour les géodésiques nulles peut être différent. Nous

Forme de Kerr-Schild sans rotation et forme de Painlevé

On calcule la géodésique suivie par un observateur de Painlevé (donc pour $\mu = 0$ et $\mu = 1$) dans les coordonnées de Kerr-Schild où K_μ est le vecteur de Killing de type temps, en utilisant la méthode habituelle (calculs détaillés donnés en annexe *3* chapitre *13*).

En intégrant l'équation différentielle résultant de ces calculs, on obtient[440]:

$$t = -\tfrac{2}{3}\, r^{3/2} + [-2\, r^{1/2} + 2\ln(1+r^{1/2})] + cste.$$

Géodésique de l'observateur de Painlevé dans la forme de Kerr-Schild sans rotation

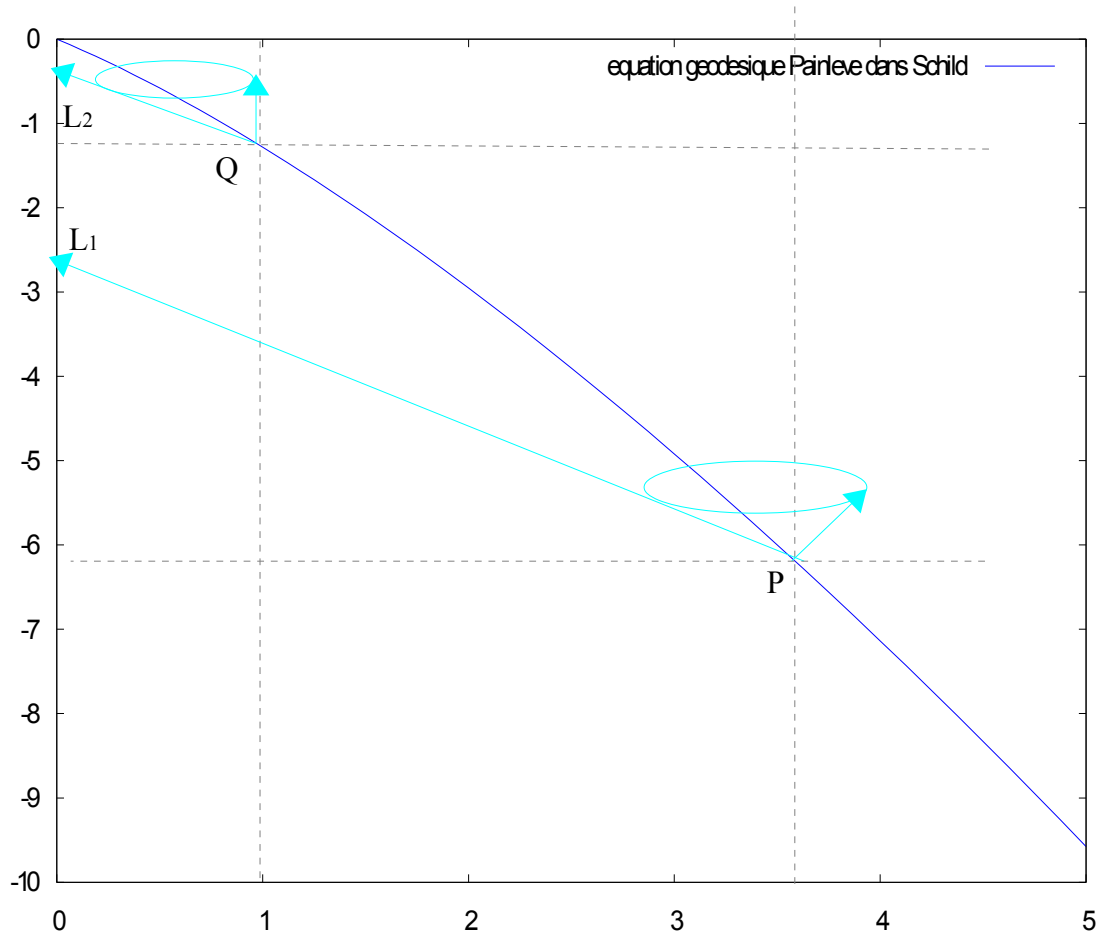


Figure 13. *Géodésique entrante radiale de Painlevé et cône de lumière dans la forme de Kerr Schild sans rotation*

Le cône de lumière (turquoise clair) a été représenté en quelques points (*P, Q*). La pente *dt/dr* correspondante au rayon entrant est fixe et vaut *-1*, le rayon sortant à une pente *dt/dr* variable valant *1* à l'infini, l'infini sur l'horizon et *-1* pour $r = 0$.

reviendrons sur ces aspects spécifiques aux géodésiques nulles.

[440]Intégrale donnée par Mathematica que j'ai vérifiée.

Les géodésiques nulles entrantes en *P* **et** *Q* sont représentées dans ces coordonnées par les droites *P-L1 et Q-L2* parallèles, de pente égales à *-1*. Ceci illustre leur caractère minkowskien orienté dans cette représentation.

Cette recherche ne nous conduit pas directement à la forme de Painlevé

Nous voyons que notre recherche ne nous conduit pas à la forme de Painlevé mais à une autre forme qui comme celle de Painlevé présente un caractère pseudo-minkowskien, dans le cadre de la région associée au trou noir mais pour des géodésiques entrantes de type nul et ce n'est ce que nous recherchons.

Par contre elles sont toutes deux la somme du tenseur de Minkowski (éventuellement incomplet) et du produit tensoriel d'un vecteur ***V*** de composantes covariantes V_μ par lui-même, soit :

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + f(x^i) V_\mu V_\nu .$$

Propriétés structurelles communes aux formes de Painlevé et Kerr-Schild sans rotation

Forme de Painlevé en coordonnées sphériques :

$$ds^2 = \{-dt^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) + dr^2\} - dr^2 + [(2M/r)^{1/2}dt + dr]^2 = (\eta_{\mu\nu} + V_\mu V_\nu)\, dx^\mu dx^\nu - dr^2 .$$

Les vecteurs V_μ et V^μ, dans la forme de Painlevé, s'écrivent

$$V_\mu = \{ (2M/r)^{1/2}, 1, 0, 0\} \rightarrow V^\mu = \{ 0, 1, 0, 0\},$$

ce qui caractérise une direction spatiale radiale.

En coordonnées cartésiennes la même forme s'applique avec les mêmes propriétés :

$$ds^2 = \{ -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2\} - \frac{(xdx+ydy+zdz)^2}{x^2+y^2+z^2} + \left[\frac{(2M)^{1/2}}{(x^2+y^2+z^2)^{1/4}} dt + \frac{(xdx+ydy+zdz)}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} \right]^2 .$$

Forme de Kerr-Schild sans rotation en coordonnées sphériques :

$$ds^2 = \{-dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)\} + (2M/r)(dr + dt)^2 = (\eta_{\mu\nu} + V_\mu V_\nu)\, dx^\mu dx^\nu ,$$

où le vecteur ***V*** de composantes covariantes et contravariantes

$$V_\mu = 2M/r\{ 1, 1, 0, 0\} \rightarrow \quad V^\mu = 2M/r\{ -1, 1, 0, 0\},$$

caractérise une direction nulle principale.

En coordonnées cartésiennes, cela s'écrit :

$$ds^2 = \{-dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \} + \frac{(2M)}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} \left[dt + \frac{(xdx+ydy+zdz)}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}\right]^2.$$

Ces formes sont bien la somme du tenseur de Minkowski[441] et du produit tensoriel d'un vecteur[442] radial entrant (de type nul pour Kerr-Schild et non nul pour Painlevé) par lui-même, produit affecté éventuellement d'un facteur scalaire.

En coordonnées cartésiennes, de plus, le déterminant des métriques de Painlevé et de Kerr-Schild valent *(-1)* ce qui implique que le déterminant de la partie autre que le tenseur de Minkowski vaille zéro pour que la somme des deux vaille *-1*.

Justification des différences de structure entre les formes de Kerr-Schild et Painlevé

Dans le cas de la forme de Kerr-Schild (sans rotation) c'est évident, car le tenseur, issu du produit tensoriel d'un vecteur nul par lui-même, a un déterminant nul, donc cette métrique se compose bien de la somme du tenseur de Minkowski (complet) et du produit tensoriel de ce vecteur nul par lui-même.

Dans la forme de Painlevé comme le déterminant d'un produit tensoriel d'un tenseur non nul par lui-même n'est pas nul, il faut donc un terme correctif.

La forme de Painlevé est donc la somme du tenseur de Minkowski moins le dr^2 dans la forme en coordonnées sphériques et donc son équivalent en coordonnées cartésiennes ce qui est représenté ci-dessus.

On peut vérifier que ce terme correctif fait que la partie tensorielle à l'extérieur des *{....}* a un déterminant nul.

Ceci est la raison qui explique la différence de construction entre les deux formes.

Interprétation physique du vecteur inclus dans les formes de Painlevé et de Kerr-Schild

Dans le cas de la géodésique non nulle de la forme de Painlevé, cela correspond au vecteur d'entraînement radial entrant principal qui caractérise totalement cette solution à symétrie sphérique que nous avons associé à l'effondrement de l'espace vide dans cette représentation.

Dans le cas de la géodésique nulle ce vecteur radial entrant géodésique correspond à une direction principale nulle entrante (double) résultant de la structure conforme de l'espace-

[441] Incomplet dans le cas de Painlevé.
[442] Nul dans un cas non nul dans l'autre, nous verrons l'impact de cette différence sur la forme.

temps, déterminée par le tenseur de Weyl auquel se réduit le tenseur de Riemann dans le vide. Comme nous l'avons déclaré pour la forme de Painlevé, nous pouvons considérer que cette forme décrit un espace-temps en effondrement mais alors caractérisé par ce vecteur nul.

Par ailleurs, quand on dérive une expression du type :

$$\partial_\sigma g_{\mu\nu} = \partial_\sigma[\eta_{\mu\nu} + V_\mu V_\nu] = \partial_\sigma[V_\mu V_\nu]$$

La partie de métrique fixe s'annule et ne reste comme élément que le produit tensoriel du vecteur par lui-même ce qui montre que toute l'information de courbure est portée par ce vecteur.

Ceci simplifie considérablement la structure puisqu'elle déterminée par un vecteur et non pas un tenseur.

Comme nous l'avons indiqué si le vecteur est radial et si en coordonnées cartésiennes le déterminant est unitaire, à ces caractéristiques on peut associer[443] :

> La nullité de la double divergence de la forme de la métrique et de la métrique inverse en coordonnées cartésiennes.
>
> Et également la nullité du pseudo-tenseur de Landau & Lifchitz en coordonnées cartésiennes dans ces deux formes.

Ceci suggère que ces formes sont les représentants d'une structure bien particulière chacune dans son type et qu'on doit pouvoir mettre en correspondance certains de leurs attributs spécifiques.

Ainsi pour interpréter la phénoménologie, en particulier la nullité du pseudo-tenseur de gravitation, à la direction principale nulle entrante radiale de la forme de Kerr-Schild on est amené à considérer que la direction radiale associée au vecteur d'entraînement de la forme de Painlevé jouit du même statut.

Ces formes peuvent être considérées comme décrivant un espace-temps en effondrement.

Sa dynamique est co-mobile, pour l'un d'un objet matériel et pour l'autre d'un photon.

Ceci explique que le pseudo-tenseur de gravitation, qui caractérise le "flux gravitationnel" traversant le référentiel de Painlevé dans un cas et celui de Kerr-Schild dans l'autre, soit nul donc qu'aucun effet gravitationnel ne soit sensible.

Cela sera conforté par le calcul de la masse gravitationnelle de la source du champ par différentes méthodes où nous verrons qu'on obtient un résultat nul.

[443]Nous l'avons vérifié dans le cas des métriques de Painlevé et Kerr-Schild mais nous ne l'avons pas démontré formellement dans ce document.

14- La forme de Painlevé établie et superbement ignorée par Lemaître dans un article fondamental de Cosmologie

---

Si on peut douter que Painlevé ait vraiment compris l'intérêt de sa découverte, il n'en est pas de même pour Lemaître qui au terme d'une démonstration magistrale sur des solutions cosmologiques a considéré que celle du trou noir à symétrie sphérique en était un cas particulier. Cet article recèle encore aujourd'hui des richesses immenses que Lemaître n'a d'ailleurs pas complètement exploitées en particulier pour la solution que nous étudions qu'il a traité comme une annexe de sa réflexion. En respectant sa démarche nous nous attacherons à développer les points qu'il a laissé dans l'ombre, compte tenu de l'objectif qu'il s'était donné, mais riches en enseignements dans le cadre de l'analyse que nous conduisons.

Les hypothèses de base

Pour établir les équations du mouvement des solutions cosmologiques de type "Friedmann" à partir des équations de la relativité générale, Lemaître [444] définit une métrique générique diagonale à symétrie sphérique, co-mobile du fluide matière énergie, qui s'écrit :

$$ds^2 = -a^2\, d\chi^2 - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right) + c^2\, dt^2 \quad . \qquad (14\text{-}1)^{445}$$

Les coordonnées sont χ, coordonnée "radiale" (angle de développement dans le cas d'une hypersphère), θ et φ coordonnées angulaires sphériques et t coordonnée temporelle.

Les paramètres a, r, c, sont des fonctions uniquement de χ et de t, car la forme est à symétrie sphérique et ne dépend donc pas de θ et φ. On peut les écrire $a(\chi, t)$, $r(\chi, t)$, $c(\chi, t)$.

Il va, de plus, particulariser la métrique pour que le tenseur énergie-impulsion qui intervient dans l'équation d'Einstein soit diagonal. Le référentiel est alors co-mobile du fluide parfait matériel, ce qui fait que les hypersurfaces à temps constant vont être orthogonales aux géodésiques radiales suivies par les éléments infinitésimaux du fluide.

Pour établir sa solution, en physicien avisé, Lemaître va rechercher et établir les invariants propres à cette solution à partir des équations de conservation décrivant la variation locale, par rapport aux coordonnées temporelles t et radiales χ d'une combinaison des paramètres de la matière et de la géométrie de l'espace-temps. Ces équations de conservation se présentent sous forme de composantes du gradient d'une fonction scalaire Φ[446], qu'il va associer à la masse m contenue dans la sphère de rayon χ, au temps t, en posant $m = -4i\pi\Phi$.[447]

---

[444] Lemaître G. (1933). Eisenstaedt J. (1993) fait remarquer que l'article avait été préalablement publié en 1932 dans Lemaître (1932)

[445] Nous avons renuméroté les équations de l'article de Lemaître et appelé G la constante de gravitation. (Lemaître la note K dans son article). Nous avons conservé la signature (+,-,-,-) de la métrique de l'article.

[446] Lemaître fait magistralement un calcul "ex nihilo", d'ailleurs très habile, car il utilise certaines propriétés des fonctions intervenant dans la métrique pour simplifier ce calcul, à partir de sa forme de métrique générique et des équations d'Einstein. Pour comprendre d'où se déduisent les équations (3)-(7) il faudrait citer des calculs intermédiaires, très faciles à suivre mais assez longs (Lemaître 1932) , ce qui alourdirait ce document.

[447] On utilise m pour la masse, car nous sommes dans un cas général, incluant les solutions de Friedmann.

C'est par cette fonction de masse de la matière (indépendante de $T^2{}_2 = T^3{}_3 = -\tau$)[448], qu'il a introduit fort opportunément à partir des équations de conservation qui s'écrivent alors,

$$4\pi\rho r^2\frac{\partial r}{\partial\chi}=\frac{\partial m}{\partial\chi} \quad (14\text{-}2) \qquad 4\pi p r^2\frac{\partial r}{\partial t}=\frac{\partial m}{\partial t} \quad (14\text{-}3)$$

dont l'interprétation physique n'est pas toujours triviale, où ρ est la densité du fluide caractérisant la matière énergie et p sa pression, qu'il va particulariser alors les solutions.

L'équation *(14-3)* montre que dans les deux types d'univers, la condition de pression nulle implique que cette masse est indépendante de la coordonnée *t*.

Lemaître est convaincu que les solutions cosmologiques fermées et sans pression de Friedmann, et la solution de Schwarzschild sont semblables.

Il va donc particulariser cette forme générique en ajoutant une condition de pression nulle, la métrique générique s'écrit alors[449]

$$ds^2=-\left(\frac{\partial r}{\partial\chi}\right)^2\left(\frac{d\chi}{f(\chi)}\right)^2-r^2\left(d\theta^2+\sin(\theta)^2 d\varphi^2\right)+c^2dt^2 \quad , \qquad (14\text{-}4)$$

où $f(\chi)$ est une fonction caractérisant la géométrie spatiale de la solution. Ceci lui permet de disposer d'une forme particulière valide pour des types d'univers avec ou sans matière.

Le calcul, par intégration, de cette fonction scalaire de masse va nous révéler la forme générique de l'équation géodésique à pression nulle associée[450]

$$(\partial r/\partial t)^2 = -c^2[1 - f^2(\chi)] + 2Gm/r + \lambda c^2r^2/3, \qquad (14\text{-}5)$$

qui sera elle aussi particularisée, parallèlement à la métrique par les mêmes hypothèses, pour être adaptée aux différentes solutions.

Ce seront les différences sur la fonction de masse qui vont faire que les formes avec ou sans matière vont se dissocier du tronc commun et donner deux solutions différentes. Rappelons que *m* ne dépendant pas de *t* et les univers considérés étant à symétrie sphérique, la fonction de masse ne peut dépendre que de la coordonnée radiale χ. [451]

[448]Lemaître utilise cette forme "mixte" dans ses équations pour le tenseur énergie-impulsion de la matière.
[449]Cette équation résulte simplement des calculs de Lemaître : équation *(8.1)* p.188 de Lemaître (1932).
[450]Celle-ci dérive de l'équation (2-12) dans le document de Lemaître donnant l'expression de la fonction Φ.
[451]La coordonnée χ est l'angle de développement (dont la signification géométrique apparaît clairement dans le cas d'une hypersphère de rayon R(t): c'est l'angle à partir du pôle). On utilise aussi *r,* rayon de la sphère correspondant à χ. Dans la métrique *RW* ces 2 coordonnées sont liés par la relation $d\chi^2 = dr^2/(1-kr^2)$ où *k* vaut 0, *-1* ou *+1* selon la géométrie spatiale. Si $f(\chi) = 1$, ce qui correspond à un espace Euclidien, $k = 0$ alors $d\chi^2 = dr^2$.

La solution cosmologique de Friedmann

Pour la solution cosmologique de Friedmann, pour un univers fermé, Lemaître obtient la forme de la métrique connue [452] :

$$ds^2 = - R^2(t)[d\chi^2 + \sin^2\chi\,(d\theta^2 + \sin^2\theta.d\varphi^2)] + c^2.dt^2, \qquad (14\text{-}6)$$

en introduisant implicitement la condition d'homogénéité, en définissant une forme pour cette fonction de masse $m(\chi)$ qui traduit la proportionnalité de la masse au volume.

Ici, *c,* est la vitesse de la lumière (constante), la variable *t* est donc le temps propre d'un observateur à coordonnée spatiale (co-mobile) constante. Notons qu'on pose souvent $c = 1$ dans ces équations. Nous verrons que ce caractère physique de la variable *t* va être préservé dans la solution au problème de Schwarzschild proposée par Lemaître.

Par contre, dans la solution de Schwarzschild, la masse étant ponctuelle, elle est indépendante de la coordonnée χ, ce qui va donner une autre forme de la métrique, nouvelle cette fois, qu'il va particulariser en supposant, *a priori*, la géométrie spatiale euclidienne ($f(\chi) = 1$) [453].

À ce stade, il faut noter un certain "flou" dans la démarche de Lemaître, puisque pour la solution cosmologique de Friedmann, il se réfère (à tort comme nous l'avons dit) toujours à la solution fermée *(14-6)*, qui est la seule qu'il développe complètement.

Pourtant, c'est avec la solution de Friedmann critique à sections spatiales euclidiennes, que Lemaître ne fait qu'évoquer dans son document, qui correspond à un univers infini, que phénoménologiquement, le lien structurel avec la solution de Schwarzschild existe.

Cette forme [454] peut s'écrire sous les formes suivantes :

$$ds^2 = - a^2(t)[d\chi^2 + \chi^2\,(d\theta^2 + \sin^2\theta.d\varphi^2)] + c^2dt^2, \qquad (14\text{-}7)$$

$$ds^2 = - a^2(t)[dr^2 + r^2\,(d\theta^2 + \sin^2\theta.d\varphi^2)] + c^2dt^2, \qquad (14\text{-}7bis)$$

$$ds^2 = - a^2(t)[dx^2 + dy^2 + dz^2] + c^2dt^2. \qquad (14\text{-}7ter)$$

Considérons ce cas, avec la même masse *m* pour faire correspondre les deux solutions.

---

[452] Équation *(8.8)* p.190 de Lemaître (1932) qui enchaîne par l'équation géodésique équation *(8.9)* p.190 : $(dR/dt)^2 = -c^2 + 8GM/3\pi R + \lambda c^2/3$. Si on rapproche cette équation de la version moderne de l'équation de "Friedmann-Lemaître" pour un univers fermé $(\kappa = 1)$ avec $p = 0$, le volume à trois dimensions de l'hypersphère valant $2\pi^2R^3$, ceci représente la moitié de la masse de l'hypersurface 3D d'une hypersphère de densité ρ.Il est curieux que Lemaître ne considère que la moitié du volume 3D de l'hypersphère, ce qui correspond à un "repliement" au niveau de l'équateur. On retrouve ce point plus loin où il considère les cas à "points antipodaux distincts".

[453] Dans la forme de Lemaître, ceci n'est pas évident. C'est évident dans la forme de Painlevé (tenseur de Riemann spatial *3D =0*). Comme ces deux formes utilisent la même variable temporelle *T*, les sous variétés définies par *T=constante* sont les mêmes et elles sont donc toutes deux euclidiennes.

[454] La forme critique, où $f(\chi) = 1$, *(14-7)* se calcule à partir de *(14-4)* de Lemaître en posant $r = a(t).\chi$, $a(t)$ est le facteur d'échelle, la forme critique *(14-7bis)* en coordonnées sphériques en posant $d\chi^2 = dr^2/(1-kr^2) = dr^2$ avec $k = 0$, où on remarque que la section spatiale entre crochet est euclidienne enfin *(14-7ter)* est la forme cartésienne de la solution critique où le caractère euclidien isotrope et homogène de la section spatiale est le plus évident.

Phénoménologies comparées des solutions de Friedmann et de Schwarzschild

Comparaison des solutions pour des objets de masses égales

Considérons un observateur quelconque dans la solution de Friedmann critique,[455] situé en O, qui observe le mouvement des particules sur une sphère S**,** de rayon χ*,* dont il est le centre.

Il voit leur mouvement ralenti [456] par l'action gravitationnelle de la masse contenue dans la sphère S. On peut choisir $\chi = \chi_m$ [457] de sorte que cette masse soit égale à *m*.

Comme χ_m est une coordonnée co-mobile dans *(14-7)* cette masse va rester égale à *m* à χ_m constant.

Mais pour les particules à la surface de la sphère, compte tenu du théorème de Birkhoff, la phénoménologie du mouvement (par rapport à O) serait inchangée si au lieu d'une sphère *S* de matière homogène de masse *m*, la masse était concentrée au centre de symétrie.

La solution cosmologique, avec $\chi = \chi_m$, présente exactement la même phénoménologie que la solution de Schwarzschild, mais ici inversée dans le temps ($t \rightarrow -t$), car dans un cas nous avons une expansion (ralentie par la matière) et dans l'autre cas une contraction accélérée[458].

La solution cosmologique critique de Friedmann correspond à la région en expansion [459] de la solution de Lemaître.

Horizon trou noir et horizon cosmologique dans la solution de Friedmann Lemaître

Ces convergences entre les solutions s'appliquent également au cas des horizons.

En effet, un univers de poussière (sans pression) de densité critique est caractérisé par

$$\Omega_m = \frac{8\pi G\rho_0}{3H_0^2} = 1,$$

avec $c = 1$, où $\Omega_m = (\rho_m/\rho_{critique})$,

est le rapport de la densité de matière à la densité critique.

---

[455]La solution étant homogène, tous les observateurs se valent, un observateur est représentatif de tous.

[456]Nous verrons que Lemaître donne une solution qui contient l'expansion et la contraction.

[457]La solution pour χ est unique, l'univers étant critique nous n'avons pas de degré de liberté sur la densité.

[458]Si on considère le cas où la condition de vitesse initiale nulle pour un mouvement géodésique radial s'applique en un point quelconque et non pas seulement à l'infini, généralisation de la solution de Lemaître au problème de Schwarzschild, la relation $r = R/2(1 + cos\eta)$, $\tau = (R^3/8M)^{1/2} (\eta + sin\ \eta)$ qui lie le temps propre $\boldsymbol{\tau}$ et la coordonnée *r* est de type cycloïdal, avec un facteur d'échelle différent pour τ et *r*, à la différence de la solution également cycloïdale de Friedmann type poussière $r = a/2(1 + cos\eta)$, $\tau = a/2\ (\eta + sin\ \eta)$. Cf. Misner C.W. & Thorne K. & Wheeler J.A.(1973) Gravitation p.664. Cependant, ce facteur d'échelle est identique si $R=2M$ solution radiale de Novikov, dont la solution de Lemaître est un cas particulier ($r_{max} = \infty$), et celle de Friedmann sont identiques. Gautreau-Hoffmann (1978) traite aussi ce type de phénoménologie mais à des fins différentes.

[459]Nous anticipons ici sur l'extension de la solution de Lemaître sur la solution de Schwarzschild. La solution de Lemaître montre une région en contraction et une région en expansion. La solution de Lemaître est un cas particulier (vitesse nulle à l'infini) de la solution de Novikov, qui exprimée sous forme paramétrique, montre la relation cycloïdale entre *temps propre* et *r* comme dans celle de Friedmann.

Par analogie avec le trou noir, définissons un « horizon » comme l'hypersurface située à une distance ***r*** de l'observateur, aujourd'hui, telle que $rH_0 = c$. Alors cet horizon fuit l'observateur à une vitesse égale à celle de la lumière, comme dans le cas du trou noir.

En reportant on obtient

$$\frac{8\pi G\rho_0 r^2}{3} = 2G\left(\frac{4\pi r^2\rho_0}{3}\right) = \frac{2G.M}{r} = 1,$$

d'où on déduit $r = 2GM$, comme pour un trou noir statique.

L'analyse de Lemaître suggère de mettre en relation ces « horizons » pourtant dissemblables. L'horizon de la solution de Schwarzschild, qui est statique ou stationnaire, est à coordonnée radiale constante, dont l'origine est la singularité centrale. Il est le même pour tous les observateurs situés à l'extérieur de l'horizon. Il peut être traversé dans un sens par des observateurs. On peut lui attribuer un caractère physique.

Dans le cas des solutions Friedmann Lemaître qui sont homogènes et non stationnaires cet « horizon » dépend de l'observateur et du temps.

Par ailleurs, on définit un horizon causal, aujourd'hui, qui est en général également différent de celui d'hier et de celui de demain, par la distance (aujourd'hui) de la source du signal lumineux le plus ancien, compte tenu de l'âge de l'univers, qui nous a pu nous atteindre aujourd'hui.

Cette définition, qui est rigoureuse, nécessite cependant de connaître intégralement la dynamique de l'univers entre l'instant d'émission du photon et sa réception. Le rôle de l'inflation primordiale, dans la causalité entre les régions éloignées de l'univers, modifie les données du problème, ce qui fait, qu'en pratique, un horizon physique de causalité n'est pas vraiment clairement défini dans le modèle standard cosmologique.

La ressemblance structurelle des formes de Painlevé et Robertson-Walker critique

Dans ces deux formes[460] les sections spatiales sont euclidiennes (isotrope et homogène), mais alors que l'une est dynamique, l'autre est stationnaire[461].

Mais ne peut-on pas considérer la stationnarité comme un cas particulier (un cas dégénéré) du caractère dynamique ?

En effet dans "stationnaire" il y mouvement, même s'il est toujours le même.

Le pseudo-tenseur gravitation dans la métrique cartésienne de Robertson-Walker est diagonal et vaut[462]:

$$diag\left(\frac{40}{9}\ t^{-\left(\frac{10}{3}\right)}\right)\left[\left(\frac{3}{5}\right)t^{\frac{4}{3}},\ 1,\ 1,\ 1\right] .$$

À la différence de celui de la forme de Painlevé il n'est pas identiquement nul, mais du fait de l'homogénéité et de l'isotropie de l'espace, ses composantes ne dépendent que de t.

[460]Rappelons que Lemaître a posé une condition de pression nulle : il 'agit donc de la solution sans pression.
[461]On peut noter que la forme de la métrique de Lemaître, "duale" de celle de Painlevé, que nous allons citer, qui est dynamique est encore plus proche de la forme de la métrique de Robertson-Walker critique.
[462](Calcul Mathematica 4). Par définition il ne peut être nul que si le tenseur énergie-impulsion est nul.

Pour $t = \infty$, le pseudo-tenseur s'annule. Cette solution se raccorde avec celle de Painlevé qui est stationnaire donc ne dépend pas de t, mais suppose que $t = \infty$: la solution est "éternelle".

La convergence des pseudo-tenseurs gravitation pour $t = \infty$ n'est pas surprenante si on considère que, dans la phénoménologie de la solution de Friedmann critique, l'expansion se poursuit indéfiniment, faisant tendre sa densité vers zéro et sa vitesse d'expansion asymptotiquement vers zéro (pseudo-statique) ce qui correspond au "trou blanc" de la solution de Schwarzschild.

Pour le trou noir, rappelons que sous l'horizon la solution a gardé le caractère dynamique de la solution de type Friedmann (vestige de cet univers effondré). [463]

La quadri-vitesse de l'observateur de Robertson-Walker (co-mobile de l'expansion) vaut

$$U^{\mu} = (1, 0, 0, 0),$$

et la quadri-vitesse covariante $U_{\mu} = g_{\mu\nu} U^{\nu}$ vaut

$$U_{\mu} = (-1, 0, 0, 0).$$

On remarque que les quadri-vitesses covariantes d'un observateur de Painlevé et de Robertson-Walker (co-mobile de l'expansion) sont égales et valent toutes deux :

$$U_{\mu} = (-1, 0, 0, 0).$$

Nous avons vu[464] que ceci qui n'est pas trivial résulte de propriétés géométriques.

Par contre cela nous montre que cette propriété n'implique pas que le pseudo-tenseur de gravitation soit nul, (propriété non triviale également) comme l'exemple de la forme de la métrique de Robertson-Walker où $T^{\mu\nu}$ n'est pas nul le montre.

La forme de la métrique de Painlevé possède ces deux propriétés, la forme de Robertson-Walker une seule.

Ces solutions ont des similitudes mais ne sont pas identiques.

La forme de "Painlevé" de la solution cosmologique homogène et isotrope

La forme habituelle de la métrique (Robertson-Walker) de cette solution s'écrit

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)[d\chi^2 + S_k(\chi)^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\varphi^2)] \quad ,$$

[463] Nous avons donné des éléments de mise en correspondance des solutions (par les horizons) précédemment.
[464] Voir équations *(5-1)* et *(5-2)* du chapitre *5*.

où χ est une coordonnée spatiale et $S_k\ (\chi)$ vaut $sin(\chi)$ si la courbure est positive ($k = 1$), vaut $sinh(\chi)$ si la courbure est négative ($k = -1$) et vaut χ si la courbure est nulle ($k = 0$).

On utilise aussi une autre forme avec k et la coordonnée radiale r, en posant $d\chi = dr\ (1-kr^2)^{-1/2}$.

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-k\,r^2} + r^2\left(d\,\theta^2 + \sin^2(\theta)\,d\,\varphi^2\right)\right]$$

Cette forme est quadratique et diagonale, les coordonnées spatiales sont appelées co-mobiles. Un observateur à coordonnées co-mobiles constantes est géodésique co-mobile de "l'expansion" du fluide cosmique.

Nous allons utiliser un argument similaire[465] à celui qu'a utilisé Painlevé pour dériver sa forme à partir de la forme quadratique diagonale de Schwarzschild.

Sachant que pour un observateur en O, en $r = 0$ dans l'équation ci-dessus, la vitesse v d'un point à une distance géométrique $R = a(t).r$ vaut $v = R.H(t)$ où $H(t)$ est la constante de Hubble, nous allons faire apparaître la quantité $(dR - R.Hdt)^2$ dans l'équation, dont la nullité est caractéristique d'un point géodésique à une distance R, donc à distance r constante.

Ceci s'obtient simplement en posant $R = a(t).r$ avec $\Omega\ (t) = \rho/\rho_{crit}$ (densité de matière-énergie)

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{\left(dR - R.H(t).dt\right)^2}{1 + H^2(t)R^2[1-\Omega(t)]} + R^2[(d\,\theta^2 + \sin^2(\theta).d\,\varphi^2)] \quad .$$

Dans le cas critique $\Omega = 1$ cette expression[466] se réduit à

$$ds^2 = -dt^2 + (dR - R.\,H(t)\,dt)^2 + R^2[(d\,\theta^2 + \sin^2(\theta)\,d\,\varphi^2)] \quad ,$$

qui est une forme similaire à celle de Painlevé. Les sections spatiales $(dt = 0)$ sont euclidiennes comme dans la métrique de base de Robertson-Walker, mais ne dépendent pas du temps alors que les sections temporelles $(dx^i = 0)$ en dépendent, à la différence de la métrique de Robertson-Walker : l'expansion est alors représentée par cette section temporelle.

Le caractère dynamique de cet espace-temps s'exprime différemment dans les deux formes. Dans le cas critique il est facile de montrer, à partir de l'équation de Friedmann, que $H = 2/3t$. La métrique s'écrit alors :

$$ds^2 = -dt^2 + [dR - (2\,R/3\,t)\,dt]^2 + R^2[(d\,\theta^2 + \sin^2(\theta)\,d\,\varphi^2)] \quad .$$

[465]Hypothèse que nous formulons sur la méthode (non révélée par Painlevé) qu'il a utilisée pour dériver sa forme. Point développé au chapitre *21* § "la phénoménologie qui a pu motiver les propos de Painlevé"

[466]Forme donnée dans Mizony M. et Lachièze Rey M. (2004). Notons que R (comme r) n'est pas une observable.

Sous forme cartésienne, avec $2R/3t = \beta$ soit $\beta^\mu = (2/3t)\ \{0, x, y, z\}$ cette forme se réduit à

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu}(dx^\mu - \beta^\mu dx^0)(dx^\nu - \beta^\nu dx^0) \quad .$$

qui est la même forme, avec une valeur de β différente, mais qui a la même signification physique de vitesse spatiale relative entre observateurs, que celle de Painlevé.

Comme pour la forme de Robertson-Walker le pseudo-tenseur de Landau & Lifchitz n'est évidemment pas nul, mais les tétrades ont la même forme très simple que celle de Painlevé (avec une valeur de β^μ différente).

Équation géodésique de l'espace-temps

Cette autre forme ayant été présentée, revenons à l'équation géodésique de la solution au problème de Schwarzschild, telle que Lemaître l'établit.

N'oublions pas que Lemaître fait cela dans un contexte cosmologique.

Son équation géodésique traduit la dynamique de l'espace

En posant[467]

$$r_0^3 = \frac{GM,}{4A^2} \qquad A^2 = \frac{\lambda c^2}{3}, \qquad (14\text{-}8)$$

l'équation géodésique s'écrit :

$$r\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2 = A^2(r^3 + 8r_0^3). \qquad (14\text{-}9)$$

Lemaître propose la solution[468] :

$$r = 2r_0 Sh^{2/3}\ [(3/2)A(t - \chi)]. \qquad (14\text{-}10)^{469},$$

Comme la figure *14-1* ci-dessous le visualise, cette équation décrit une région en expansion et une région en contraction.

Lemaître avait trouvé les 4 régions du trou noir statique à symétrie sphérique[470], plus de 30 ans avant Kruskal, mais ceci n'a pas retenu son attention.

---

[467] Le paramètre λ est la constante cosmologique, le rayon de courbure R vaut $(3/\lambda.)^{1/2}$, donc $\lambda r^2 = r^2/R^2$.

[468] L'équation *(9)* a pour solutions $r = \pm 2r_0 Sh^{2/3}\ [3A(t - \chi\ t)/2]$. Lemaître ne considère pas le cas où r < 0, d'ailleurs ceci n'ajouterait rien à la phénoménologie. Notons que la fonction est paire: $r(t - \chi) = r\ (\chi - t)$.

[469] Compte tenu que $r(t - \chi) = r\ (\chi - t)$, on peut tout aussi bien écrire: $r = 2r_0 Sh^{2/3}\ [3A(\chi - t)/2]$ (11.4bis).

[470] Ce que Synge, en mathématicien, avait remarqué, sans y prêter plus attention ! Synge JL. (1950).

Lemaître réintroduit un caractère d'homogénéité dans sa solution au problème

Dans les hypothèses de base nous avions les coordonnées indépendantes *t, χ* et une fonction *r(t, χ),* soit trois possibilités de coordonnées (*t, χ, r)* pour deux degrés de liberté, ce qui permet en en éliminant une de décliner plusieurs formes.

Rappelons que l'équation *(14-9)* n'implique que la dérivée partielle de *r* par rapport à *t* et que la masse centrale, *m* ne dépend pas de χ.

La coordonnée *χ* réapparaît cependant dans *(14-10)* mais, non pas comme une coordonnée indépendante de *t* puisque c'est *(t - χ)* qui intervient dans les équations et dans la métrique mais comme une constante d'intégration, associée à un observateur de Lemaître-Painlevé, co-mobile de la dynamique de l'espace, fixée par des conditions initiales pour $t = 0$[471].

Elle permet d'étiqueter, sur la géodésique radiale, les différents observateurs de Lemaître.

Rappelons que, comme dans la solution de Friedmann, l'espace est homogène, pour décrire la phénoménologie il n'est pas nécessaire de repérer l'observateur.

L'origine (arbitraire) des coordonnées dans cette forme c'est là où l'observateur se trouve puisque tous sont équivalents.

Pour le problème du corps unique sphérique, c'est la situation duale : l'isotropie n'est valide que par rapport à un point particulier qu'on choisira comme origine et l'espace n'étant pas homogène les phénoménologies sont différentes pour des observateurs co-mobiles de l'espace en ses différents points à un instant donné. On peut étiqueter ces points par la coordonnée *χ,* qui, non contrainte par l'équivalence de masse avec la solution de Friedmann, est libre.

Ces observateurs co-mobiles définissent une classe dont chaque élément décrit toute la phénoménologie de cet espace-temps au cours du temps. Le choix de l'observateur de cette classe est libre (arbitraire) comme dans la solution de Friedmann et du coup Lemaître réintroduit par son analyse une forme d'homogénéité qui se manifeste dans l'équation non pas par rapport à une coordonnée unique mais par rapport à la différence entre deux coordonnées.

Cette homogénéité, qui rapproche encore la forme *(14-16)* de Lemaître (voir ci-après) de celle Robertson-Walker est invariante par translation simultanée de *χ* et *t* si *(ct – χ) = constante.*

Ceci correspond en fait à une translation spatio-temporelle à *r = constante*, mais il est significatif que cette forme représente sous forme d'homogénéité spatio-temporelle une symétrie sphérique spatiale.

Dans l'équation *(14-10),* la coordonnée spatiale *χ* de la forme de Lemaître, est un paramètre affin donnant la valeur origine du paramètre affin *t.* En différenciant *(14-10)* on voit qu'ils sont liés par la relation que nous utiliserons plus loin :

$$\frac{\partial r}{\partial \chi} = \frac{-\partial r}{\partial t}$$

[471] La coordonnée *χ* qui caractérisait le volume contenant la masse *m*, dans la solution de Friedmann, ne sert plus puisque cette masse ne dépend plus du volume, mais va servir d'étiquette temporelle aux observateurs en chute libre radiale en repérant par exemple la date de passage relative t_0 par un point remarquable de la géodésique (la singularité s'impose puisque cette géodésique est incomplète). En posant $\chi = t_0$ (choix unité) on remplace $t - t_0$ par $t - \chi$. L'équation géodésique est fonction de $|t\text{-}\chi|$. Elle est invariante par translation à 45° (*r = constante*) dans le plan *t, χ.* Lemaître n'a pas explicité les implications de cet affaiblissement de degrés de liberté.

Cette relation sur t, χ , $r(t, \chi)$ contraint les degrés de liberté de la solution géodésique.

L'équation géodésique de la solution de Schwarzschild par Lemaître

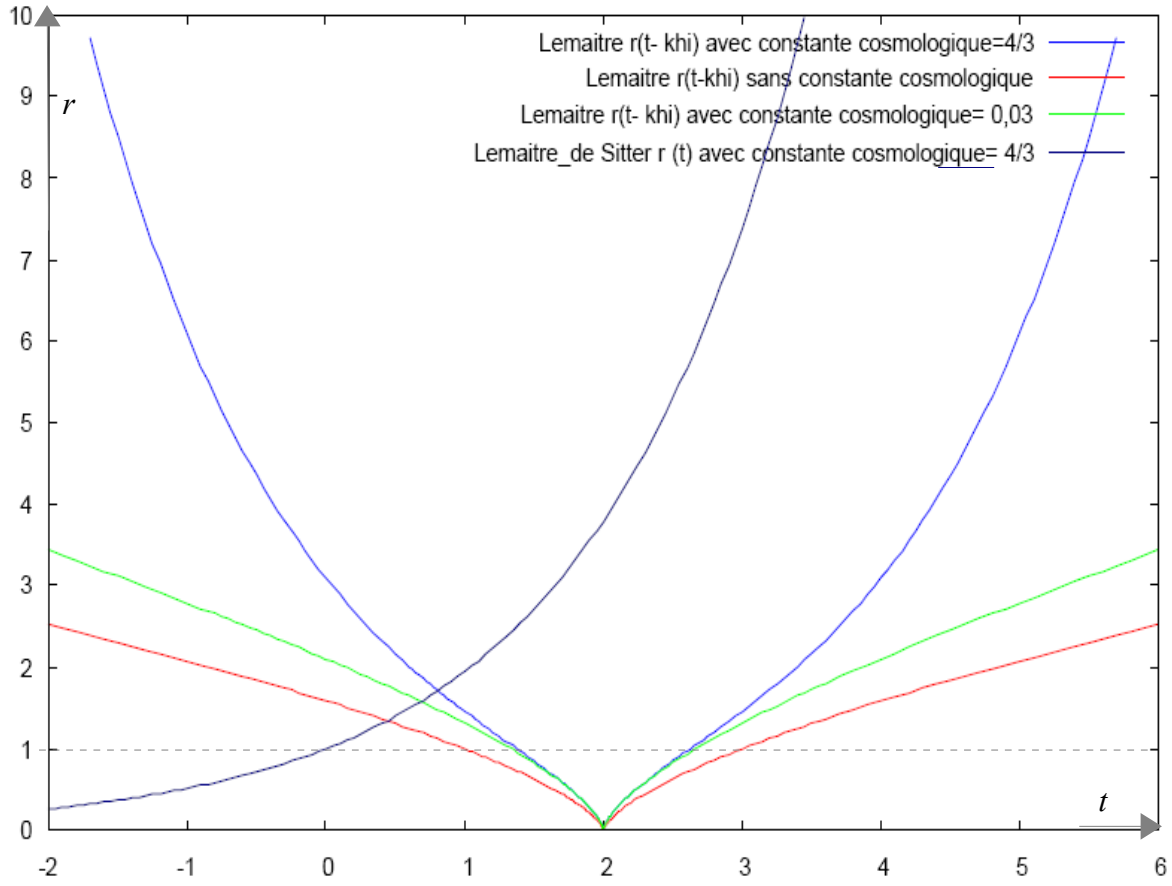


Figure 14-1. *Courbes tracées*[472] *pour l'équation géodésique (14-10), avec les valeurs suivantes des paramètres: G= c =1, 2M =1, χ =2, et 3 valeurs de la constante cosmologique : λ = 4/3, λ = 0.03, λ = 0, et pour la solution de De Sitter* [473] *avec M =0, λ = 4/3.*

On a tracé l'horizon (ligne pointillée horizontale à $r = 1$). On voit que dans cette forme de la métrique la géodésique radiale entrante traverse l'horizon sans discontinuité, à la différence du cas des coordonnées de Schwarzschild. Étudions la variation de $r(t- \chi)$ lorsque t augmente. Prenons, par exemple, la courbe correspondant à l'équation *(14-10)* pour $\lambda = 4/3$ (bleu clair). Lorsque t varie de $-\infty$ à $t = \chi$, on voit que $r\ (t-\chi)$ diminue jusqu'à atteindre la valeur *0*.

Ceci correspond à une contraction de l'univers au sens cosmologique, ou à une chute libre de l'observateur de Lemaître [474] (pour $t < \chi$) vers la singularité dans la solution de Schwarzschild.

Pour, $t > \chi$ l'univers est en expansion, l'observateur de Lemaître est expulsé.

---

[472]En utilisant le logiciel Maxima. Remarquons la discontinuité de la dérivée de $r(t -\chi)$ pour $t = \chi$, $(r = 0)$.

[473]Eisenstaedt J.(1993) p.360, précise que Lemaître a proposé cette solution en 1925. On la retrouve chez Robertson. Elle ne décrit que partiellement l'univers de De Sitter (Earman J. & Eisenstaedt J.(1999) p.202).
La forme de Lemaître de la solution de De Sitter s'obtient en intégrant directement *(14-9)* avec $m = r_0 = 0$.

[474]L'observateur de Lemaître est en chute libre radiale vers $r = 0$, dans la solution de Schwarzschild, sans vitesse initiale à l'infini, sans rotation. À cet observateur on attache un référentiel de coordonnée χ = *constante* dans la forme de Lemaître. Lorsque nous y ferons référence dans la suite du texte c'est avec cette définition.

Comme *r = 0* est une singularité, on ne peut pas passer continûment de la région de contraction à la région d'expansion : ce sont donc des régions infinies disjointes.

Nous voyons que les équations de Lemaître décrivent bien la solution analytique complète de Schwarzschild. Dommage qu'il ne se soit pas attaché à souligner ce point.

La métrique hybride de Lemaître de la solution de Schwarzschild

Conditions d'établissement de cette forme de métrique

De cette équation du mouvement *(14-10)* rappelons qu'on déduit :

$$\frac{\partial r}{\partial \chi} = \frac{-\partial r}{\partial t} \quad .$$

En reportant cette relation dans la métrique générique *(14-4)* avec *f(χ) = 1* (sections spatiales euclidiennes) et en remplaçant *∂r/∂t* par sa valeur donnée par *(14-9)*, Lemaître obtient une métrique spécifique pour la solution de Schwarzschild, sans singularité autre que celle à *r = 0*.

$$ds^2 = -A^2\left(r^3 + 8r_0^3\right)\frac{d\chi^2}{r} - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right) + c^2 dt^2 \quad . \qquad (14\text{-}11)$$

Cette forme est sensiblement différente de la forme *(14-7)* de l'univers de Friedmann critique, malgré les liens qui les unissent au niveau de l'équation du mouvement.

Cette forme de la métrique de Schwarzschild, établie par Lemaître, présente manifestement un caractère hybride (coordonnées *t, χ, θ, φ* et une fonction *r(χ, t)* de ces coordonnées).

Comme nous l'avons déjà indiqué, Lemaître peut éliminer une des variables parmi *t, χ* et *r*. Comme *t* est le temps propre, il est judicieux de le conserver.

Il reste deux choix à Lemaître, utiliser (*t, r, θ, φ*) ou (*t, χ, θ, φ*), ce qui fait que *(14-11)* va se décliner en deux formes, toutes deux non singulières sur l'horizon.

La forme de la métrique de Painlevé-Lemaître

Le premier choix conduit à une forme non dynamique, en fait stationnaire, mais comme la distinction entre statique et stationnaire n'existait pas à l'époque, ceci interpelle l'argument de Lemaître au sujet de la relation entre la staticité et le caractère singulier à l'horizon.

Lemaître établit directement la forme que Painlevé [475] avait proposée en 1921 :

$$ds^2 = dt^2\left[1 - \frac{2M}{r} \pm \frac{\lambda r^2}{3}\right] - dr^2 \pm 2\sqrt{\frac{2M}{r} - \frac{\lambda r^2}{3}}\, dr dt - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right) \quad . \quad (14\text{-}12)$$

Par la transformation : $d\tau = dt + \dfrac{Ar[(r^3+8r_0^3)/r]^{1/2}}{r - A^2(r^3+8r_0^3)}\, dr$,

Lemaître montre l'équivalence de sa forme *(14-12)* avec celle de Schwarzschild.

$$ds^2 = d\tau^2\left[1 - \frac{2M}{r} - \frac{\lambda r^2}{3}\right] - \frac{dr^2}{\left[1 - \frac{2M}{r} - \frac{\lambda r^2}{3}\right]} - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right) \quad . \quad (14\text{-}13)$$

Il montre que c'est la transformation de coordonnées, singulière [476], le dénominateur s'annule pour une certaine valeur, qui introduit la singularité à l'horizon dans celle de Schwarzschild.

La forme de la métrique de Lemaître

L'autre est dynamique et entièrement nouvelle.

$$ds^2 = -2M\frac{d\chi^2}{r} - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right) + dt^2 \quad (14\text{-}14)$$

L'équation géodésique *(14-10)* avec $\lambda = 0$, établie en intégrant *(14-9)* devient :

[475] Painlevé (1921). Lemaître l'étend au cas où $\lambda \neq 0$, ce qui avait déjà été fait par Chazy (1922). Le signe ± indique 2 cas, sortant = + et entrant = -, le signe choisi est le même pour toute l'équation. Lemaître ne cite que le premier. Rappelons que le rayon de courbure R associé à la constante cosmologique λ vaut $R = (3/\lambda)^{1/2}$. Pour la solution de Schwarzschild c'est évidemment le cas du trou noir (entrant) qui est traité. On a posé $G = 1$ et $c = 1$.

[476] Une fonction continûment dérivable aux ordres 1 et 2, ne peut être rendue non continûment dérivable à ces ordres que par une transformation qui est elle-même non continûment dérivable à ces ordres et vice versa. Notons que dans la forme de métrique de Schwarzschild (14-13), pour la distinguer de celle de Painlevé, la coordonnée temporelle est appelée τ.

$$r = \left(\frac{3}{2}\sqrt{2\mathrm{M}}\,(\chi - t)\right)^{(2/3)} \quad . \qquad (14\text{-}15)$$

Cette équation a la même forme que la solution de Friedmann plate ($r = B(t-t_0)^{2/3}$), ce qui corrobore l'analogie que nous avons développée.

En reportant *(14-15)* donnant la valeur de *r* en fonction de *t* et χ dans *(14-11)* on obtient [477] :

$$ds^2 = c^2\,dt^2 - \left(\frac{4\mathrm{M}}{3(ct-\chi)}\right)^{(2/3)} d\,\chi^2 - (2\mathrm{M}^{2/3})\left(\frac{3(ct-\chi)}{2}\right)^{(4/3)} \left(\sin(\theta)^2\,d\,\varphi^2 + d\,\theta^2\right) \quad . (14\text{-}16)$$

Elle est appelée "forme de Lemaître" [478], et correspond à l'équation du mouvement et c'est manifestement celle qui a ses faveurs. Nous avons restauré *c* du fait du terme $(ct - \chi)$.

Dans cette forme *(14-16)*, il est évident que la coordonnée temporelle *t* est bien le temps propre de l'observateur de Lemaître, à coordonnées spatiales constantes. En particulier pour l'observateur en chute libre radiale la coordonnée χ est constante.

Mais l'observateur de Lemaître est le même que l'observateur de Painlevé que nous avons cité précédemment simplement ils sont représentés dans des systèmes de coordonnées "duaux" l'un de l'autre : ils dérivent d'une même forme générique *(14-11)*.

La quadri-vitesse de l'observateur de Lemaître, (à coordonnée χ = *constante*), dans cette forme vaut[479]

$$U^\mu = \{1, 0, 0, 0\},$$

et

$$U_\mu = \{1, 0, 0, 0\},$$

ce qui caractérise les propriétés très particulières de cette forme de la métrique.

---

[477] Compte tenu de la parité de la fonction *r*, remplacer $(t - \chi)$ par $(\chi - t)$ dans *(14-15)* et *(14-16)*, ne change rien.

[478] Lemaître n'établit cette forme que pour $\lambda \rightarrow 0$. Le cas avec constante cosmologique quelconque ferait intervenir des intégrales elliptiques et n'est pas traité ici. Bien que cela ne soit pas évident, les sections spatiales sont euclidiennes, comme nous l'avons montré. Cette forme semble dynamique bien que la variable dynamique soit en fait $ct - \chi$. Elle est invariante par translation (homogène) si $ct = \chi$, c.a.d à r = *constante.* On voit la similitude avec la forme de Robertson-Walker, les deux sont des formes géodésiques à symétrie sphérique et sont homogènes, mais (14-16) pas directement par rapport à une coordonnée mais à une différence de deux.

[479] La forme (diagonale) de Lemaître est attachée à l'équation géodésique suivie par l'observateur de Painlevé. $U^\mu = (1, 0, 0, 0)$ se déduit de façon évidente de *(16)*, car les coordonnées χ, θ, φ sont constantes *et* $g_{00} = 1$ et $U_\mu = (1, 0, 0, 0)$ se calcule directement par $U_0 = g_{00}U^0$ *et* $U^1 = g_{11}U^1$.

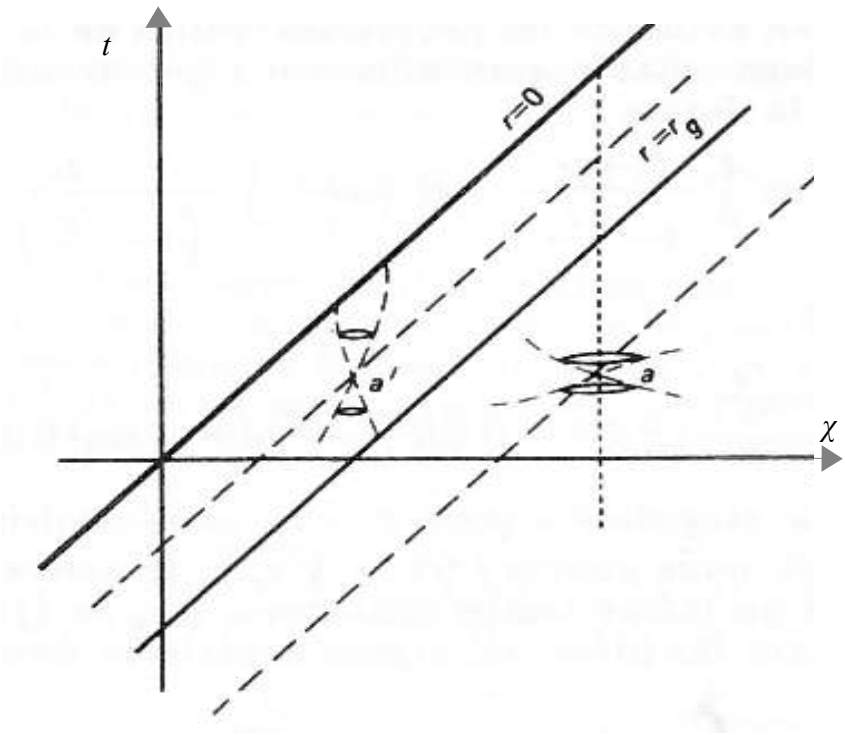


Fig 14-2.[480] *Représentation graphique en coordonnées χ, t de l'équation (14-15), pour t < χ, (région en contraction), avec λ =0. Ici la valeur du rayon de Schwarzschild est notée* r_g.

Sur la figure *14-2*, les géodésiques *r(χ –t)* suivies par un observateur de Lemaître à χ constant sont des droites verticales (comme en RR), ce qui souligne la pertinence de cette forme.

Les coordonnées *t* et χ sont représentées sur des axes orthogonaux alors que comme nous l'avons signalé ce sont des coordonnées affines sur la même géodésique. Mais cette représentation permet de représenter la fonction *r(t - χ)* qui fait le lien avec les autres formes.

On a représenté quelques droites inclinées à +45° à *r = constant*, dont *r = 0* (la singularité centrale) et $r = r_g$ (l'horizon) et une valeur de *r* de chaque côté de l'horizon avec leurs cônes de lumière pour tracer la variation de la courbure par rapport à *r*.

La figure montre que pour ce qui concerne une variation de la distance à la singularité *r* d'un observateur, un déplacement de $+ t$ ou de $- \chi$ avec $| t | = | \chi |$ sont équivalents (invariance par translation parallèle à *r = constante*) puisque c'est $| t - \chi |$ qui est la variable de la fonction.

Par ailleurs, la forme de la métrique *(14-16)* montre que la coordonnée *t* est partout de type temps, et la coordonnée χ partout de type espace.

[480]Ce diagramme, *figure 20,* p. 402 du "Landau L. & Lifchitz E. (1994)", illustre le cas *λ =0,* Ici on utilise *r(χ -t)* pour *t = 0,* on a *r(χ).* Ce choix implique que *(χ -t) = cste→ r = cste,* les courbes *r = constante* sur le diagramme cartésien *χ, t* sont des lignes droites inclinées à +45°.

La forme de Lemaître pour décrire l'effondrement d'une boule de poussière

Pour corroborer la relation structurelle étroite entre la solution cosmologique (type Friedmann) décrivant un univers de poussière critique, dont les sections spatiales sont euclidiennes et la solution de Schwarzschild exprimée dans les coordonnées de Lemaître (ou de Painlevé) où les sections spatiales sont également euclidiennes, relation dont nous avons montré l'importance et que Lemaître met en exergue puisqu'il déduit ces deux formes d'une même forme générique, cette solution se prête bien à la description de l'effondrement d'une boule de poussière sous l'effet de sa propre gravité.

Ceci est très clairement décrit dans le document de B. Linet au chapitre *8* § *8-2, 8-3*.

Il convient pourtant de faire remarquer qu'on raccorde deux espaces-temps sur la surface d'une boule de poussière appartenant à un univers de "Friedmann" isotrope ce qu'il est par rapport au centre (arbitraire dans le cas général, mais ici unique et spécifié) et homogène.

Mais si l'univers de Friedmann critique est limité à la boule il n'est plus homogène[481].

En considérant la solution globale comme la réunion avec raccordement de deux "morceaux" espaces temps (l'intérieur de la boule type Friedmann critique et l'extérieur type Schwarzschild en coordonnées de Lemaître) ne commet-on pas une erreur ?

En effet le morceau intérieur (patch) n'est pas homogène et ne saurait se prévaloir des attributs de la métrique de Robertson-Walker critique.

Pour être rigoureux, il doit être plutôt considéré comme la "superposition" avec recouvrement de ces deux espaces temps, avec gestion des recouvrements.

Comme ces deux solutions ont en commun l'isotropie par rapport à un point et une géométrie spatiale euclidienne ceci doit être structurellement possible, en particulier la géométrie spatiale sur la frontière est compatible.

L'espace-temps cosmologique de Friedmann, n'est pas contraint par cette superposition puisque ajouter la solution de Schwarzschild pour $r > 0$ consiste à ajouter du vide, la masse sphérique centrale de la solution de Schwarzschild pouvant être celle d'un morceau de l'espace-temps de Friedmann.

Par contre pour la partie extérieure de Schwarzschild il faut rajouter la poussière de l'espace-temps de Friedmann, aussi à géométrie spatiale euclidienne. Mais on sait que sur la sphère de raccordement entre les solutions, la partie extérieure de poussière, par symétrie, génère un champ nul.

Ceci est compatible au niveau des symétries mais la solution doit être établie en spécifiant bien ces hypothèses.

On peut aussi traiter le cas d'une boule de poussière de dimension finie modélisant une étoile qui s'effondre (hypersphère en géométrie de Friedmann).

Il faut alors raccorder une grande sphère de cette hypersphère avec une sphère dans la géométrie de Schwarzschild.

En général, ces caractéristiques, leurs particularités et hypothèses sont rarement explicitées.

[481] Il le serait si c'était la solution cosmologique à courbure positive (hypersphère).

L'analyse de Synge (1950)

Dans son article de 1950 [482], Synge décrit la solution de Lemaître sur la figure suivante.

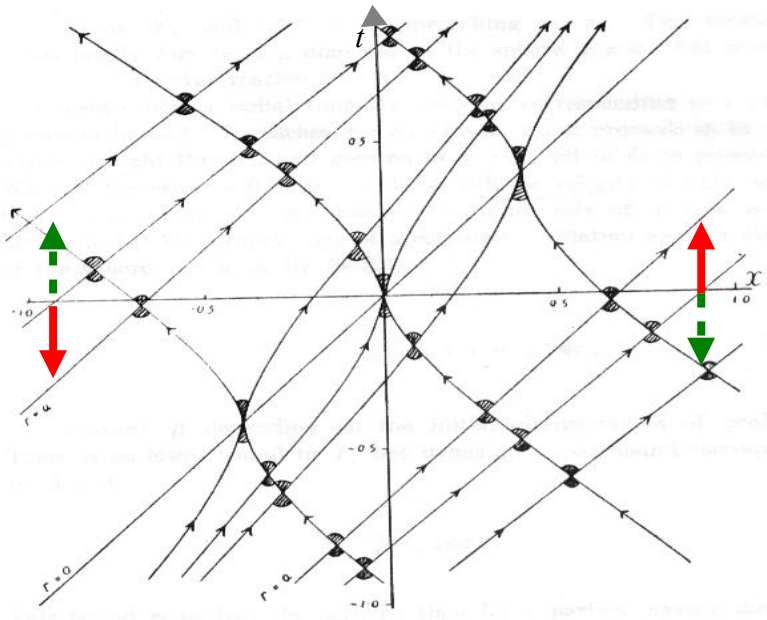


***Figure 14-3**. L'espace-temps de Lemaître, quelques courbes **r = constante**, et les enveloppes des géodésiques nulles entrantes et sortantes, tissant la structure conforme : Synge (1950)[483]*

La figure *14-2* ne présentait qu'une partie de la solution de Lemaître, Synge la complète sur ce diagramme [484], où il esquisse la structure conforme de l'espace-temps.

Compte tenu de l'orientation temporelle, la région au-dessus de la droite $r = 0$ est la région en expansion et celle en dessous la région en contraction.

Par contre, Synge connecte à tort ces deux régions, pour en faire un seul espace-temps, par des géodésiques et lignes d'univers temporelles traversant la droite $r = 0$, ce qui est formellement incorrect, car les équations du champ divergent pour $r = 0$.

La région en expansion et celle en contraction (ce qui définit les quatre régions si on prend en compte l'horizon) définies ici doivent donc être considérées comme disjointes[485].

[482]Synge J.L. (1950). Il avait découvert, sans s'en rendre compte, l'extension maximale de la solution de Schwarzschild, que retrouvera sous une forme légèrement différente Kruskal, plus de 10 ans après.

[483]Ibid, figure *13* p.111, les flèches rouges et vertes (rajoutées) ne font pas partie de la figure donnée par Synge, elles indiquent la symétrie par rotation de 180°. Les secteurs de type temps, contenant les trajectoires des particules matérielles, sont ombrés. La singularité $r = 0$ est une droite de type espace et n'est donc pas orientée (cela se déduit de la métrique pour $r = 0$). Au lieu des quelques cônes de lumière de la figure *13-2*, Synge a représenté les enveloppes des géodésiques de type lumière. On peut en vérifier la compatibilité avec la fig. *13-2*.

[484]Synge le fait sans commentaire, tant cela lui semble aller de soi. L'extension était au cœur de son article, mais cela lui semblait tellement naturel qu'il n'a pas cru utile de le souligner.

[485]L'une est le passé de la singularité $r = 0$ et l'autre son futur. Ceci est équivalent à ce que montrera Finkelstein (Finkelstein D. 1958), qui décrit également deux régions disjointes. Ceci n'est pas surprenant, car la forme de Finkelstein et celle de Painlevé que Lemaître a établi pour la forme "expansion" (géodésiques sortantes) et qui existe aussi pour la forme contraction (géodésique entrante) en changeant le signe du produit croisé $dr.dt$ sont de la même famille. Elles ne diffèrent que par les conditions aux limites à l'infini (vitesse nulle pour Painlevé, vitesse de la lumière pour Finkelstein) :cf. Martel K. Poisson E. (2000)

15- Étude comparative croisée des formes de Schwarzschild et Painlevé

À ce stade nous avons suffisamment d'éléments pour une première synthèse comparative de la description de la solution du problème du corps central à symétrie sphérique dans les trois formes que nous avons étudiées, à travers une représentation graphique par des diagrammes.

Représentation dans les coordonnées de Schwarzschild.

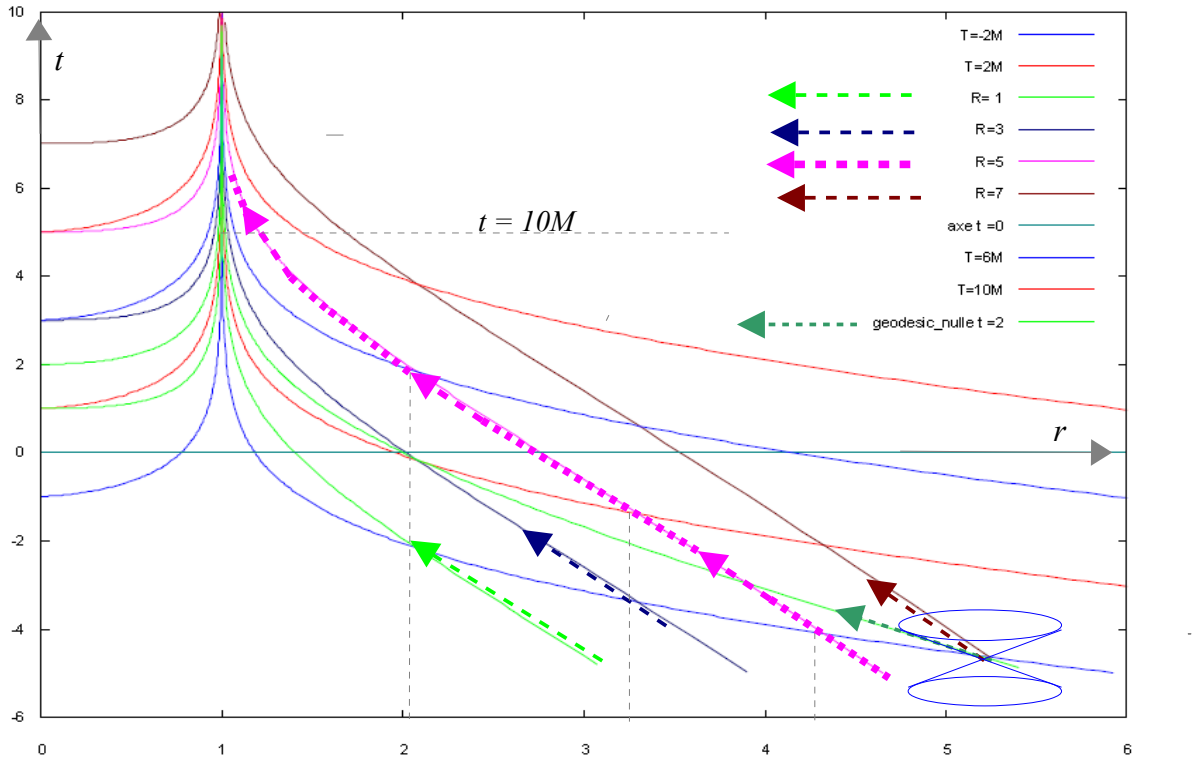


Figure 15-1[486]. *Différents systèmes de coordonnées représentées dans le plan* ***r, t*** *(forme de Schwarzschild).*

On a représenté 4 isochrones de temps propre (***T* = *τ*** = constante) en trait fin de couleur et repérées par ***T = n.2M*** sur la légende du dessin.

On a représenté 4 géodésiques parcourues par les observateurs de Painlevé (ou de Lemaître) en traits fins de couleur surmontés d'une flèche en trait épais interrompu de la même couleur pour indiquer la direction.

Elles sont étiquetées, sur la légende, par la coordonnée de Lemaître ***χ,*** égale à la constante d'intégration τ_0 de Painlevé, notée ***R*** sur la figure (***R = 1, 3, 5, 7***).

La géodésique nulle[487] *t =2* est représentée en vert (surmontées par des flèches vertes pointillées). Ceci permet de positionner cette géodésique lumière par rapport aux autres.

Un cône de lumière (en trait fin bleu) est tracé en un point ($R = 7$, $T = -2M$, $r \approx 5.3$, $t \approx -4$) de la trajectoire [488] (en trait marron plein) de l'observateur de Lemaître de coordonnée $R = 7$.

---

[486]Diagramme réalisé avec le logiciel Maxima. Unités utilisées*: 2M = 1, G = 1, c =1.*

Il montre que la trajectoire géodésique de Painlevé ($R = 7$) est orthogonale à l'hypersurface à temps propre constant $T = -2M$, (symétrique par rapport au cône de lumière).

a) **Coordonnées de Schwarzschild (**coordonnées cartésiennes sur la figure *15-1***).**

L'axe de la coordonnée $r\ (t = 0)$ est représenté horizontalement.

L'axe de la coordonnée $t\ (r = 0)$ est représenté verticalement à gauche. Les isochrones $t =$ *constante* [489]sont des droites parallèles à l'axe des r. On a tracé $t = 10M$.

b) **Coordonnées de Painlevé (**coordonnées mixtes)

La coordonnée spatiale r est identique à celle de Schwarzschild.

La coordonnée temporelle $T = \tau$ est "curviligne" dans cette représentation. Elle est matérialisée par quelques courbes isochrones à $T =$*constante* (pour $T = -2M, 2M, 6M, 10M$).

c) **Coordonnées de Lemaître** (coordonnées "curvilignes")

La coordonnée temporelle est identique à celle de $T = \tau$ de la forme de Painlevé.

La coordonnée spatiale radiale $\chi = R$ est tracée pour quelques courbes iso-spatiales (avec flèches) à $\chi = R =$ *constante* pour $R = 1, 3, 5, 7,$ chacune correspondant à un observateur de Lemaître. Ces courbes correspondent aux géodésiques suivies par des observateurs de Painlevé/Lemaître[490] dans ces coordonnées de Schwarzschild.

Suivons l'évolution du temps propre T, en fonction de r, de l'observateur de Painlevé/Lemaître sur sa géodésique de coordonnée $R = \tau_0 = 5$ (Deuxième courbe, en magenta, en partant du haut, surmontée par des flèches pointillées magenta), sur le diagramme on lit les informations suivantes.

Pour $r \approx 4.4,\ T = -2M$, pour $r \approx 3.2,\ T = 2M,$ pour $r \approx 2.05,\ T = 6M,$ après cela nécessiterait un zoom, car cela devient illisible sur le diagramme.

Le calcul montre que cette géodésique ne va jamais couper la courbe isochrone $T = 10M$.

Cela illustre le mouvement de l'observateur dans les coordonnées de Schwarzschild par rapport à son temps propre.

Ce diagramme illustre donc comment un observateur de Painlevé en suivant une géodésique atteint la singularité $r = 0$ (et à fortiori l'horizon) en un temps propre fini.

La géodésique associée, bien que tendant vers l'infini pour $r = 2M$ dans ce diagramme, reste toujours inférieure (en dessous sur le dessin, ceci pouvant être montré par le calcul, à partir des équations géodésiques, car sur la figure on ne peut que le supposer) à une isochrone de temps propre donnée.

---

[487]La géodésique nulle radiale satisfait à l'équation $dt/dr = \pm|1-2M/r|^{-1}$ *soit* $t = -[r + 2M.\ln(r - 2M)] + t_0$ pour la géodésique entrante où t_0 est une constante d'intégration.

[488]On a représenté un cône de lumière pour montrer que la trajectoire de l'observateur de Lemaître est bien à l'intérieur et qu'elle est orthogonale au sens de la RR aux hypersurfaces $T =$ *constante,* symétrique par rapport à la trajectoire des photons. A l'approche de l'horizon les cônes de lumière se ferment.

[489]Si une telle isochrone est géométriquement bien définie, sa réalisation physique n'est pas évidente.

[490]C'est bien le même observateur, tous les deux sont en chute libre radiale depuis l'infini avec $v = 0$ à $r = \infty$, seul l'étiquetage spatial change. La coordonnée spatiale est fixe pour Lemaître et variable pour Painlevé.

Ce diagramme en coordonnées “cartésiennes” de Schwarzschild, éclaire le paradoxe relatif au fait que l’observateur de Painlevé atteint l’horizon en un temps propre $\boldsymbol{\tau}$ fini mais que, pour un observateur de Schwarzschild, il met un temps $\boldsymbol{t}$ infini pour atteindre l’horizon.

Il montre que les deux points de vue sont parfaitement compatibles : il n’y a pas de paradoxe !

Temps des observateurs de Painlevé et Schwarzschild en coordonnées de Painlevé

Le temps *t* des observateurs de Schwarzschild est représenté par un réseau de courbes *t = constante*, sur un diagramme en coordonnées *r, T*.

Ici nous nous plaçons du point de vue dual, celui de l’observateur de Painlevé.

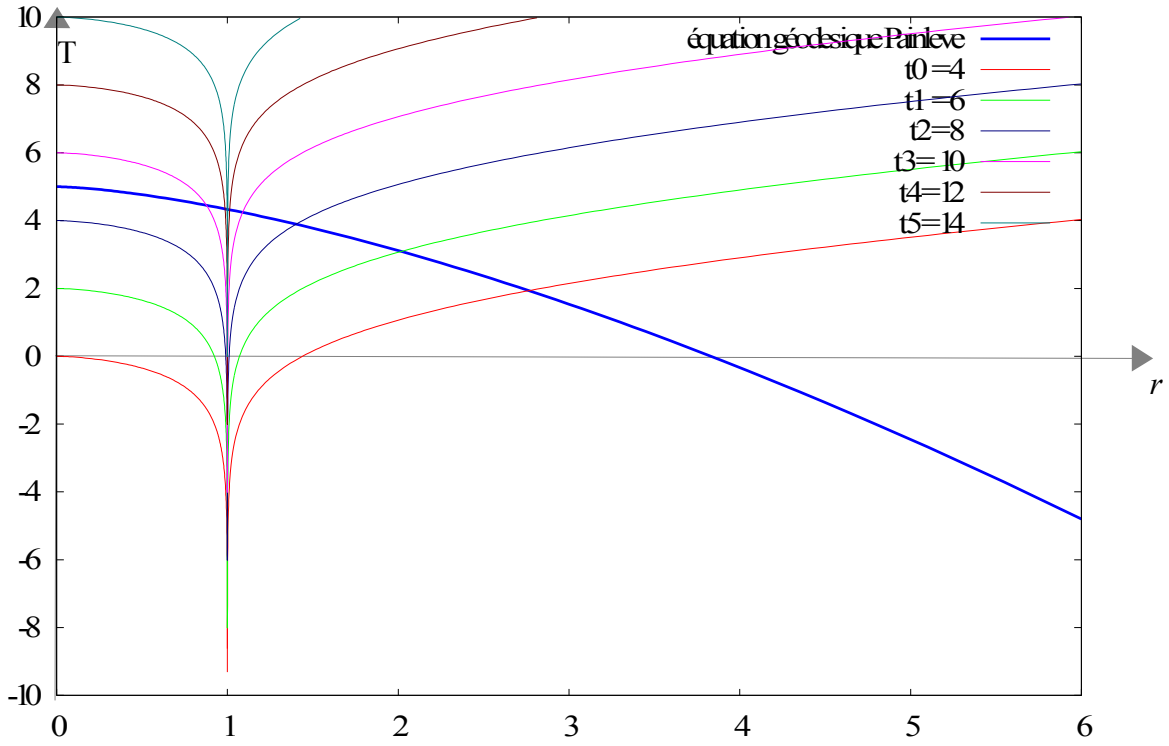


Figure 15-2 [491]*. On voit que les isochrones du temps t d’un observateur de Schwarzschild, viennent “tangenter” l’horizon en r =1. L’isochrone t = + ∞ est une droite verticale à r =1.*

Rappelons que la réalisation physique d’une isochrone en coordonnées de Schwarzschild n’est pas évidente puisqu’il est impossible de synchroniser[492] les horloges associées aux observateurs statiques le long d’une géodésique radiale qui battent toutes à des rythmes tous différents du fait de l’accélération subie qui varie avec *r*.

[491] Diagramme réalisé avec le logiciel Maxima. Unités utilisées*: 2M = 1, G = 1, c =1*

[492] Du moins par la méthode classique des signaux lumineux aller-retour. Il existe d’autres méthodes, car la solution étant statique c’est formellement possible. Voir Landau & Lifchitz 1994,§ 97. Par exemple, on peut “compenser” de façon connue et constante la différence de rythme des horloges aux différents points de la radiale. L’horloge d’un observateur particulier étant déclaré maître elle peut envoyer des signaux de synchronisation à intervalle régulier permettant à chacun de calculer le facteur correctif à appliquer à sa propre horloge. La synchronisation initiale peut être réalisée par la méthode des allers-retours de signaux. Elle peut ensuite être conservée en appliquant le facteur correctif local. Mais ce n’est pas très pratique.

Nous n'avons pas ce problème avec l'isochrone temps de Painlevé[493] puisque les horloges associées aux observateurs sont toutes en chute libre et battent au même rythme[494].

La géodésique suivie par l'observateur de Painlevé a coupé toutes les valeurs de t = *constante,* y compris $t = +\infty$, en atteignant l'horizon[495].

Sur l'horizon, l'horloge de l'observateur de Painlevé indique 13/3[496] alors que celle donnée par l'isochrone des observateurs de Schwarzschild, qui date l'événement pour eux, vaut ∞.

On voit comment la coordonnée t diverge par rapport à T quand on atteint l'horizon.

La phénoménologie paradoxale décrite de manière illisible dans le diagramme en coordonnées de Schwarzschild est totalement explicite en coordonnées de Painlevé.

Ceci montre que la forme de Painlevé est mieux adaptée à la description de la phénoménologie des géodésiques de ce type que celle de Schwarzschild.

Cette propriété s'étend à tout observateur statique à l'extérieur de l'horizon[497].

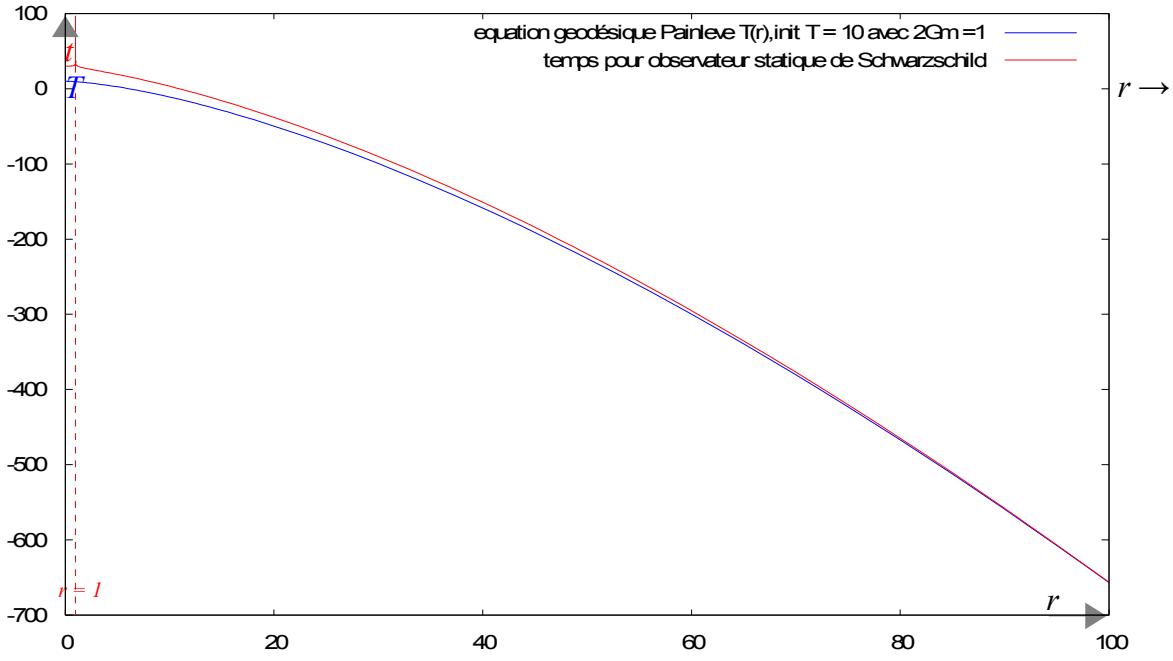


Figure 15-3 [498]. *Comparatif entre le temps chute libre T (r) écoulé mesuré par un observateur de Painlevé et le temps écoulé t(r) mesuré par un observateur de Schwarzschild depuis un point de rencontre lointain*[499] *(r = 100).*

Notons la divergence de *t(r)* pour *r =1* et que *t(r) > T.*

[493]Ceci confirme, une fois de plus, que la forme de Painlevé correspond à une meilleure description physique de l'espace-temps que celle de Schwarzschild. Voir la méthode de Gautreau Hoffmann pour une réalisation.
[494]Nous verrons que c'est une des raisons qui fait prononcer à Painlevé ses propos si contestés.
[495]Pour la réalisation physique des isochrones voir commentaires précédents.
[496]La valeur est négative, car par convention on prend l'origine du temps, t = 0, de l'observateur à $r = 0$ puisque c'est le seul point particulier.
[497]L'équation, qui s'établit simplement, est décrite dans de nombreux ouvrages, entre autres Gravitation (1973).
[498]Diagramme réalisé avec le logiciel Maxima. Unités utilisées*: 2M = 1, G = 1, c =1.*
[499]Où ils se sont synchronisés. Sur la figure, nous trichons un peu (la convergence devrait se faire à l'infini).

Diagramme géodésique associé à l'extension de la forme de Painlevé avec boost.

Sur la figure *15-2* nous n'avons pas représenté les géodésiques pour différentes valeurs de *p* (du boost) pour l'extension de la forme de Painlevé, par souci de clarté pour le propos que nous exposions.

Afin de visualiser l'influence du boost, nous allons représenter sur un même diagramme une géodésique pour un observateur de Painlevé et une autre pour un observateur en chute libre radiale dont la vitesse initiale à l'infini, n'est pas nulle.

Établissement de l'équation géodésique.

On montre, en utilisant les résultats traitant de cette extension de la forme de Painlevé du chapitre *5*, que la quadri-vitesse dans cette forme vaut

$$U^{\mu} = \{p^{1/2},\ -[(p^{-1}) -1+2GM(r^{-1})]^{1/2},\ 0,\ 0\ \},$$

soit

$$\frac{dr}{d\tau} = -[(p^{-1})-1+2GM(r^{-1})]^{1/2},$$

soit

$$d\tau = \frac{dr}{-[(p^{-1})-1+2GM(r^{-1})]^{1/2}}.$$

En posant *2GM =1,* choix d'unité pour la coordonnée *r*, qui ne réduit en rien la généralité du problème, cela donne:

$$d\tau = \frac{dr}{-[(p^{-1})-1+r^{-1}]^{1/2}}.$$

Les variables étant séparées, cela s'intègre[500] et en posant $p^{-1} -1 = a$, donne :

$$\tau = -\left(\frac{1+a*r}{a*\sqrt{a+\frac{1}{r}}}\right)+\frac{\sqrt{1+a*r}*\operatorname{arsinh}\left(\sqrt{a*r}\right)}{a^{(3/2)}*\sqrt{(a+\frac{1}{r})*(r)}}\quad .$$

Les courbes seront calculées et tracées dans cette hypothèse.

[500]En utilisant Mathematica.

Diagramme comparatif, représentant les géodésiques avec et sans boost

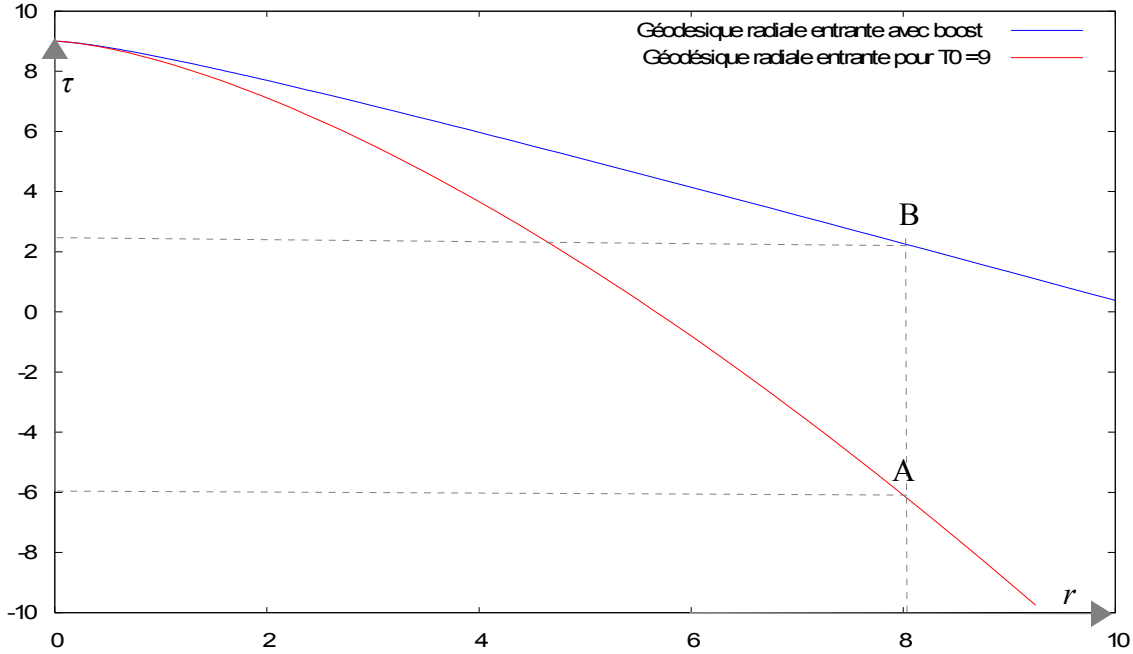


Figure 15-4 *Diagramme comparatif entre la géodésique suivie par un observateur de Painlevé et celle suivie par un observateur de Painlevé généralisé de paramètre p = 0,5.*

La comparaison s'opère sur les temps propres des deux observateurs. Les coordonnées spatiales étant identiques, ceci caractérise les différences de temps propres écoulés pour parcourir l'intervalle entre deux points (deux valeurs de *r* pour les géodésiques radiales.
Le diagramme montre que l'observateur avec boost met un temps propre inférieur (mesuré par son horloge interne) pour parcourir la distance entre $r = 8$ et $r = 0$ que l'observateur de Painlevé (avec sa propre horloge), ce qui est bien le résultat attendu.
La coordonnée temporelle se déduit simplement du temps propre, car le rapport $dT/d\tau$ est constant dans les deux cas. Il vaut *1* pour Painlevé, $p^{1/2}$ dans le cas avec boost.

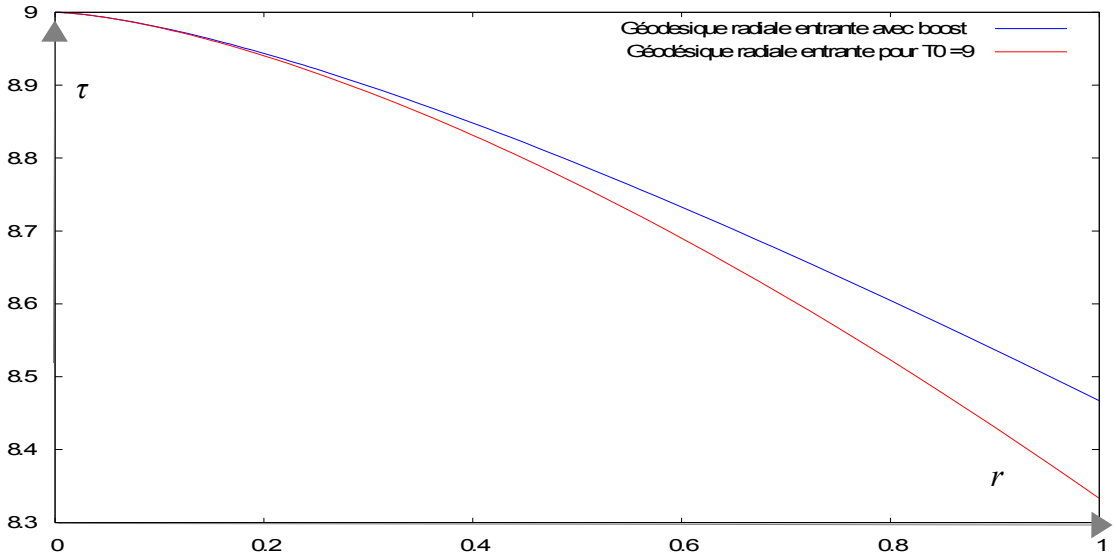


Figure 15-5[501]*. Zoom sur la région intérieure à l'horizon de la figure précédente (p= 0,5).*
Sur ces deux diagrammes, les paramètres ont été ajustés pour que les deux observateurs arrivent en même temps sur la singularité.

[501] Les courbes des figures 15-5 et 15-6 ont été tracées avec le logiciel Maxima.

16- Espace-temps localement plat et pseudo-tenseur de gravitation

---

Après cette première synthèse, nous allons maintenant essayer de caractériser physiquement le caractère “pseudo-minkowskien” atypique de cette solution de la relativité générale dans le formalisme de Painlevé. À ce titre, après avoir précisé les différentes approches en géométrie analytique de la description de la géométrie, nous allons examiner les éléments qui, en relativité générale et dans des approches connexes, en possèdent certaines caractéristiques et quels sont leurs liens éventuels avec la phénoménologie liée au formalisme que nous étudions.

Espace-temps localement plat

Définition de la métrique

Lorsque nous écrivons

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu$$

nous désignons souvent le tenseur métrique par $g_{\mu\nu}$.

En fait $g_{\mu\nu}$ représente les composantes du tenseur métrique et dx^μ ou dx^ν la base de vecteurs covariants sur laquelle les composantes s’appliquent.

Le tenseur métrique lui-même est donc représenté par ds^2, l’exposant “2” ne symbolisant pas un carré de quoi que ce soit mais simplement le rang du tenseur (tenseur à deux indices) quant à $ds = cd\tau$, c’est le paramètre affin de l’arc local de courbe considéré sur la variété.

Les éléments dx^μ ou dx^ν sont en fait les gradients des coordonnées x^μ ou x^ν appartenant à la variété, considérées comme des fonctions, ce qu’elles sont sur la variété, car elles prennent une valeur en tout point.

Jusqu’à présent nous avons essentiellement utilisé la métrique dans nos descriptions et calculs, ce qui paraît naturel puisque cette métrique s’appuie sur des constituants propres à la variété qu’on considère rendant la description intrinsèquement compatible avec la géométrie.

Pour autant d’autres approches sont possibles et dans certains cas très fécondes en utilisant la métrique inverse par exemple et également d’autres descriptions.

Définition de la métrique inverse

Nous savons qu’elle se déduit de la métrique par la relation :

$$g^{\mu\nu}\, g_{\nu\sigma} = g^{\lambda\mu}\, g_{\lambda\sigma} = \delta^\mu{}_\sigma .$$

Lorsque nous écrivons

$$\partial_s{}^2 = g^{\mu\nu}\, \partial_\mu\, \partial_\nu ,$$

de la même manière que pour la métrique, $g^{\mu\nu}$ représente les composantes du tenseur métrique inverse, ∂_μ ou ∂_ν la base sur laquelle s'applique cette métrique inverse et $\partial_s{}^2$ le tenseur métrique inverse de rang 2.

Les vecteurs contravariants ∂_μ ∂_ν sont les vecteurs tangents aux coordonnées par application de l'opérateur de dérivation sur les coordonnées, au point de tangence, quant à ∂_s c'est le vecteur tangent à la courbe considérée de la variété passant par ce point.

Cette métrique inverse s'utilise dans l'espace-temps tangent (plat) en un point à la variété et bien entendu cela s'applique au point de contact entre la variété et l'espace-temps tangent.

Nous verrons que nous utiliserons préférentiellement cette métrique inverse dans la définition du pseudo-tenseur de gravitation et dans l'analyse ADM, ceci se justifiant par une approche néo-classique du problème qui peut se raccorder naturellement à une description dans l'espace tangent plat ce que l'espace-temps courbe ne lui offre pas.

Forme canonique de la métrique

Une caractérisation utile de la métrique consiste à mettre $g_{\mu\nu}$ dans sa **forme canonique**.
Dans cette forme la métrique devient :

$$g_{\mu\nu} = diag\{-1, -1,..., -1, +1, +1,..., +1, 0, 0, ...,0\}. \qquad (16\text{-}1)$$

Signature, rang de la métrique

Dans (16-1), "diag" désigne une matrice diagonale avec les éléments donnés, n est la dimension de la variété, s est le nombre de " +1 "dans la forme canonique et t est le nombre de " -1,", alors $s - t$ est la **signature** de la métrique (la différence entre le nombre de signes plus et de signe moins), et $s + t$ est le **rang** de la métrique (nombre de valeurs propres non nulles).

Si une métrique est continue, le rang et la signature du tenseur métrique sont les mêmes en tout point et si la métrique n'est pas dégénérée le rang est égal à la dimension n. Nous n'allons nous intéresser qu'à des métriques continues, non dégénérées.

Métriques Euclidiennes, riemanniennes, lorentziennes, indéfinies.

Si tous les signes sont positifs ($t = 0$) la métrique est appelée **Euclidienne** ou **Riemannienne** ou simplement définie positive, s'il n'y a qu'un signe moins ($t = 1$) elle est appelée **Lorentzienne** ou **pseudo-riemannienne** et dans les autres cas la métrique est dite **indéfinie.**
Le mot Euclidien, dans ce cas, désigne des espaces plats ou non plats, il indique que la forme canonique est strictement positive, terminologie malheureuse mais standard.

Les espaces temps qui nous intéressent en Relativité Générale ont des métriques lorentziennes, car comme nous l'avons indiqué l'espace-temps est un fibré dont la fibre est minkowskienne.

Nous n'avons pas démontré qu'il était toujours possible de mettre la métrique sous forme canonique.

En fait c'est toujours possible de le faire en un point $p \in M$, mais en général, cela ne va être possible qu'en un seul point, pas dans le voisinage du point p.

Coordonnées localement inertielles, référentiel local de Lorentz.

Définition

En fait, nous pouvons faire un peu plus, il apparaît qu'en tout point p il existe des coordonnées dans lesquels $g_{\mu\nu}$ prend sa forme canonique et où les dérivées premières $\partial_\sigma g_{\mu\nu}$ s'annulent (les dérivées secondes $\partial_\rho\partial_\sigma g_{\mu\nu}$ par contre ne s'annulent pas toutes).

Ces coordonnées sont appelées **Coordonnées localement inertielles** et la base de vecteurs associée constitue le **référentiel local de Lorentz**.

Par exemple, si on prend comme variété riemannienne (de dimension 2) la surface d'une sphère, on sait qu'en un point P de la surface on peut faire passer une infinité de plans (surfaces euclidiennes) mais qu'il en existe un de particulier qu'on qualifie de tangent[502] qui n'a qu'un seul point commun avec la surface de la sphère (le point P) défini localement en P par les tangentes à plusieurs (deux distincts pour un plan) grands cercles (les géodésiques de la sphère) passant par P. L'infinité d'autres plans qu'on peut définir en P seront sécants et auront plus d'un point commun.

Cette notion de coordonnées localement inertielles est donc assez intuitive et est la généralisation à une variété pseudo-riemannienne de ce concept.

Remarquons qu'en coordonnées localement inertielles la métrique s'apparente à celle d'un espace plat au premier ordre au point p. Ceci formalise la notion qu'un domaine suffisamment petit est assimilable à un espace plat.

Rappel de la construction de la forme canonique générale.

Les variétés pseudo-riemanniennes M utilisées en Relativité générale (localement assimilables à l'espace de Minkowski) permettent de définir un ensemble de 4 vecteurs de base, en tout point non singulier de M tels que, dans cette base, la métrique prenne sa forme canonique.

Définissons ces vecteurs orthonormés, au sens approprié à la signature de la variété que nous considérons. Si η_{ab} est la forme canonique de la métrique, imposons au produit scalaire des vecteurs de base de satisfaire à

$$g(\hat{e}_{(a)},\hat{e}_{(b)}) = \eta_{ab}\,, \qquad (16\text{-}2)$$

où $g(\ ,\ )$ est le tenseur métrique habituel et η_{ab}, représente le tenseur métrique de Minkowski.

Étant donné cette base orthonormée, un vecteur quelconque peut s'exprimer par une combinaison linéaire des vecteurs de bases. En particulier nous pouvons exprimer nos anciens vecteurs de base $\hat{e}_{(\mu)} = \partial_\mu$ en fonction des nouveaux :

$$\hat{e}_{(\mu)} = e^a_{\ \mu}\hat{e}_{(a)} \quad . \qquad (16\text{-}2\text{-}1)$$

Les composantes de $e^{\ a}_{\mu}$ forment une matrice $(n\times n)$ inversible. (Conformément à notre habitude de confondre les objets et leurs composantes, nous nous référerons à $e^{\ a}_{\mu}$ en tant que tétrade, et souvent au pluriel à "tétrades").

[502] Nous précisons ici ce que nous appelons espace tangent, car dans la littérature il peut avoir un sens plus large.

l'inverse sera noté, en inversant les index $e^{\mu}{}_{a}$, il satisfait :

$$e^{\mu}_{a}\, e^{a}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} \qquad e^{a}_{\mu}\, e^{\mu}_{b} = \delta^{a}_{b} \quad . \tag{16-2-2}$$

Elles sont les composantes des vecteurs $\hat{e}_{(a)}$ dans la base initiale de coordonnées :

$$\hat{e}_{(a)} = e^{\mu}_{a}\, \hat{e}_{(\mu)} \quad . \tag{16-2-3}$$

Exprimé en termes d'inverse des tétrades, la métrique de Minkowski s'écrit :

$$g_{\mu\nu}\, e^{\mu}_{a}\, e^{\nu}_{b} = \eta_{ab} \quad . \tag{16-2-4}$$

Soit également :

$$g_{\mu\nu} = e^{a}_{\mu}\, e^{b}_{\nu}\, \eta_{ab} \quad . \tag{16-2-5}$$

Cette dernière équation fait dire à certains que les tétrades sont les racines carrées de la métrique.

Détermination de l'espace tangent en un point : existence

Ayant établi comment la forme canonique se construisait, contraignons celle-ci à être un espace tangent inertiel de Lorentz. Plutôt qu'une démonstration rigoureuse, il est intéressant de montrer par une esquisse de la preuve qu'on peut trouver un système de coordonnées déterminant un espace tangent en un point, dans le cas particulier d'une métrique Lorentzienne à quatre dimensions.

L'idée consiste à considérer la loi de transformation suivante pour la métrique

$$g_{\mu'\nu'} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\nu'}}\, g_{\mu\nu} \quad , \tag{16-3}$$

et de développer les deux membres en série de Taylor par rapport aux coordonnées recherchées $x^{\mu'}$. Le développement des anciennes coordonnées x^{μ} devient

$$x^{\mu} = \left(\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}}\right)_{p} x^{\mu'} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 x^{\mu}}{\partial x^{\mu'1}\, \partial x^{\mu'2}}\right)_{p} x^{\mu'1}\, x^{\mu'2} + \ldots \quad , \tag{16-4}$$

avec les autres développements de façon similaire.

Pour simplifier nous avons posé $x^{\mu}(p) = x^{\mu'}(p) = 0$.

Alors, en utilisant une notation très symbolique, le développement de l'expression *(16-3)* ci-dessus au deuxième ordre donne :

$$(g')_p + (\partial' g')_p x' + ... = \left(\frac{\partial x \partial x}{\partial x' \partial x'} g\right)_p + \left(\frac{\partial x \partial^2 x}{\partial x' \partial x' \partial x'} g + \frac{\partial x \partial x}{\partial x' \partial x'} \partial' g\right)_p x' + ... \quad . \textit{(16-5)}$$

Dans ce développement en série *(16-5)*, le deuxième terme noté symboliquement $(\partial' g')_p$ de chaque membre correspond à la dérivée (au point p) de la métrique dans les nouvelles coordonnées notées symboliquement x' que nous cherchons.

C'est ce terme qui est développé au deuxième membre que nous voulons annuler.

Soulignons que les éléments $(....)_p$ entre parenthèses avec un indice p dans cette équation sont des matrices de nombres évalués et valides au point p.

En effet il ne faut pas se laisser abuser par les symboles de dérivée partielle, les termes "$\partial x/\partial x'$" ne sont pas des dérivées de fonctions continues sur la variété, car comme nous le soulignerons plus loin il n'existe pas de transformation analytique globale de coordonnées reliant les deux systèmes de coordonnées x et x'.

Mais si on connaît les valeurs (numériques) en chaque point de cette transformation[503] cela nous permet de connaître la transformation globale (au sens le plus général d'application d'un ensemble sur un autre), même si celle-ci ne peut pas s'exprimer par une fonction analytique entre les coordonnées du type $x'^{\mu} = f_{\mu}(x^{\nu})$ et vice-versa pour la fonction inverse.

Montrons comment on peut procéder dans ce cas.

Nous pouvons égaler les termes de même ordre en x' de chaque côté. Donc les composantes $g_{\mu'\nu'}(p)$, *10* valeurs en tout (permettant de définir un tenseur symétrique à deux index) sont déterminés par la matrice $(\partial x^{\mu}/x^{\mu})_p$.

C'est une matrice 4×4 sans contraintes, donc nous disposons de *16* nombres indépendants ce qui est suffisant pour renseigner les *10* nombres à pourvoir pour permettre de poser $g_{\mu'\nu'}(p)$ sous sa forme canonique, du moins pour autant que le degré de liberté soit concerné (Il y a des contraintes, si on regarde de plus près, de conservation de la signature et du rang).

Les six degrés de liberté restants peuvent être considérés comme les paramètres du groupe de Lorentz qui doivent laisser la forme canonique inchangée.

Au premier ordre nous avons les dérivées $\partial_{\sigma'} g_{\mu'\nu'}(p)$, quatre dérivées de dix composantes soit quarante nombres.

[503] Ce qui en général donne une suite continue de valeurs globalement ou au moins par morceaux.

Si on examine le membre droit de l'expression ci-dessus nous voyons que nous avons maintenant la liberté supplémentaire de choisir $(\partial^2 x^{\mu}/\partial x^{\mu 1'}\ \partial x^{\mu 2'})_p$.

Dans cet ensemble de nombres, il y a *10* possibilités indépendantes pour les index μ_1'et μ_2' (c'est symétrique, car les dérivées partielles commutent) et quatre choix pour μ, soit un total de *40* possibilités.

C'est exactement ce qu'il nous faut pour déterminer toutes les dérivées premières de la métrique, que nous pouvons alors annuler. Nous pourrons vérifier que le référentiel local utilisé dans le modèle de la rivière satisfait à ces conditions et est donc bien un référentiel local de Lorentz tangent au point *P*.

Au deuxième ordre, côté contraintes, nous trouvons $\partial_{\rho'}\partial_{\sigma'}g_{\mu'\nu'}(p)$, qui est symétrique en ρ' et σ' ainsi qu'en μ' et ν', soit un total de $10 \times 10 = 100$ nombres.

Côté degrés de liberté nous avons $(\partial_3 x^{\mu}/\partial x^{\mu'1}\partial\ x^{\mu'2}\ \partial x^{\mu'3})_p$. Ceci est symétrique dans les trois indices ce qui donne *20* possibilités multipliés par les quatre possibilités de l'exposant, ce qui fait *80* degrés de liberté, *20* de moins que ce qui est requis, donc nous ne pouvons pas annuler les dérivées secondes de la métrique.

L'écart avec la platitude sera mesuré par *20* degrés de liberté indépendants des coordonnées représentant les dérivées secondes du champ de tenseurs métriques.

Vingt est précisément le nombre (maximum) de composantes indépendantes du tenseur de Riemann.

Ceci est une propriété fondamentale de la courbure dont la partie "irréductible" est constituée par une forme qui ne comporte que des dérivées secondes de la métrique dans le tenseur (de Riemann) qui caractérise la courbure en tout point.

Nous retrouverons ces propriétés à chaque fois que nous analyserons des propriétés structurelles de l'espace-temps, y compris dans des approches plus classiques (comme celle de Landau et Lifchitz avec un pseudo-tenseur pour caractériser la gravitation).

L'argument développé montre la possibilité de réaliser cette transformation mais ne donne pas formellement de méthode. Nous n'avons pas démontré, et pour cause puisque c'est faux, que les nouvelles coordonnées x' en question étaient des fonctions scalaires des coordonnées initiales globales $x'^{\mu} = f(x^{\mu})$, ce qui en ferait des coordonnées globales.

Mais nous voyons, qu'il est possible de définir en tout point p (non singulier) de la variété[504] sur laquelle on a construit un système de coordonnées arbitraire x^{μ}, par changement de coordonnées, des coordonnées locales inertielles $x^{\mu'}$ dont les vecteurs de base constituent un référentiel local de Lorentz et dont la métrique $g_{\mu'\nu'}$ exprimée dans ces coordonnées, satisfait :

$$\partial_{\lambda'} g_{\mu'\nu'}(p) = 0.$$

Coordonnées normales de Riemann.

Définition

Si l'espace de Minkowski tangent est (au sens où nous l'avons défini au début du paragraphe), unique les coordonnées localement inertielles que nous venons de définir ne sont pas uniques, il y a une infinité de systèmes de coordonnées satisfaisant[505] à $g_{\mu'\nu'}(p) = \eta_{\mu'\nu'}$ et $\partial_{\lambda'}g_{\mu'\nu'}(p) = 0$,

[504]Par définition de la variété pseudo-riemannienne utilisée en relativité générale.

[505]Nous verrons comment évaluer $\partial_{\lambda'}g_{\mu'\nu'}(p) = 0$, notation équivoque, car si $g_{\mu'\nu'}(p) = \eta_{\mu'\nu'}$ cela paraît trivial ;

car on peut définir une infinité de systèmes coordonnées dans un espace de Minkowski, par exemple déduites les unes des autres par des transformations du groupe de Poincaré.

Parmi tous ces systèmes de coordonnées produisant des formes localement inertielles il y en a un qui jouit d'un statut particulier, le système de coordonnées normales de Riemann, dont toutes les coordonnées localement inertielles ne diffèrent qu'au troisième ordre si on en fait un développement en série autour de *p.*

Comment les déterminer ? Ces coordonnées normales de Riemann peuvent être déterminées en utilisant la carte exponentielle. Indiquons les grandes lignes et le principe de la méthode.

Carte exponentielle

Nous pouvons tracer une carte exponentielle[506] pour toute variété par un difféomorphisme[507] et en dériver des coordonnées normales de Riemann qui sont un cas particulier important des coordonnées localement inertielles que nous avons évoquées.

De ce qui précède, il est intuitif de prédire que les coordonnées normales de Riemann doivent localement (pour une variation infinitésimale autour de p[508]) s'appuyer sur les géodésiques passant par ce point pour être localement inertielles et donc satisfaire à l'équation à $g_{\mu'\nu'}(p) = \eta_{\mu'\nu'}$ et $\partial_{\lambda'} g_{\mu'\nu'}(p) = 0,$ mais il reste à le démontrer et en définir la normalisation.

La carte exponentielle et les coordonnées normales de Riemann

Construction de la carte exponentielle

Montrons comment cette méthode permet de définir une carte d'une variété M dans l'espace tangent T_p en un point p de cette variété par un difféomorphisme entre les deux.

Il peut y avoir certaines limitations (géodésiques incomplètes par exemple) qui font que la carte peut ne pas être complète.

La méthode consiste à associer un vecteur tangent k^μ à chaque géodésique $x(\lambda)$ de la variété en p satisfaisant à un certain nombre de relations[509]

$$(dx^\mu/d\lambda) = k^\mu \text{ en } p \text{ où on pose } \lambda = 0, \qquad (16\text{-}6)$$
$$exp(k^\mu) = x^\mu \text{ pour } \lambda = 1, \qquad (16\text{-}7)$$

où x^μ est la valeur de la coordonnée qui satisfait à l'équation géodésique, pour $\lambda = 1,$ pour la géodésique suivie par l'observateur de Painlevé, dans le cas que nous traitons.

Ici $x^0 = t = \tau,$ puisque la coordonnée temporelle est égale au temps propre de l'observateur de Painlevé et $x^1 = r.$

[506]Voir Carroll 2003 p.111-113 pour une définition de la carte exponentielle et des coordonnées normales de Riemann définition que nous utilisons dans ces paragraphes.
[507]Du fait de l'invariance de la théorie de la relativité générale par difféomorphisme la carte décrit la même solution physique que la variété.
[508]Nous parlons d'un point, mais ceci s'applique évidemment en tout point.
[509]Le vecteur k^μ est la quadri-vitesse de la géodésique en p. Les relations qui suivent vont permettre de déterminer le paramétrage (λ) sur la géodésique donnant l'échelle unitaire de la carte (pour $\lambda = 1$).

La méthode permettra de réaliser la carte de la géodésique (aux restrictions éventuelles indiquées) par la relation :

$$x^{\mu}(\lambda) = \lambda k^{\mu}. \qquad (16\text{-}8)$$

Les premières relations permettent de normaliser le paramètre affin λ sur la géodésique ce qui permet à son tour d'utiliser ce paramètre affin pour mettre en correspondance les points de la géodésique $x^{\mu}(\lambda)$ avec ceux de la carte $\lambda.k^{\mu}$.

Propriétés significatives et intérêt de la carte exponentielle.

Le choix de l'opérateur exponentiel s'impose, car il satisfait la loi des exposants associée aux difféomorphismes $\Phi(a)$ à un paramètre a, $\Phi(b).\Phi(a) = \Phi(b+a)$ et il est l'opérateur exponentiel de l'algèbre de Lie du groupe des difféomorphismes d'une variété sur elle-même.[510]

Le choix d'une base de vecteurs tangents aux géodésiques de l'espace-temps en un point p garantit que cet espace tangent ainsi repéré sera très localement le plus "ressemblant" à l'espace courbe et donc que la carte qu'on pourra dresser de cet espace courbe dans cet espace tangent sera aussi fidèle que possible sachant que des distorsions sont inévitables puisqu'on ne peut pas faire coïncider ces deux espaces de géométries différentes.

Comme, généralement, rien n'interdit (à l'exception de singularités et autres particularités) d'étendre cette carte au-delà du voisinage immédiat de p, reste à déterminer l'étendue de la région où cette carte reproduit suffisamment "fidèlement" l'espace-temps[511].

Par ailleurs la courbure varie selon le point p choisi dans la variété, ce qui se traduit par un vecteur quadri-vitesse $dx^{\mu}/d\tau$ qui peut varier considérablement et la distance parcourue par unité de temps varie en proportion. En paramétrant la courbe par λ au lieu de τ nous disposons d'un degré de liberté, que nous allons fixer par les équations de définition ci-dessus, qui va permettre de "normaliser" une autre "quadri-vitesse" $dx^{\mu}/d\lambda$ pour adapter cette distance parcourue et ainsi avoir une carte dont la fidélité ne dépend pas trop du point p choisi.

Les équations de définition de la carte exponentielle, qui se présente alors comme une linéarisation de la variété, permettent de calculer un paramètre affin λ qui va répondre à ce besoin.

Ce paramètre λ permet une description à distorsion variable dans une limite jugée acceptable pour $\lambda < 1$ (distorsion augmentant quand on s'éloigne de p) de l'espace-temps considéré sous réserve qu'il soit "régulier", car bien sûr comme la définition de k^{μ} est locale et il faut éviter de choisir un point "exotique" si on veut que la carte-exponentielle soit bien représentative de la région environnante.

Ces propriétés structurelles conduisent naturellement à une méthode de calcul des coordonnées "inertielles" de Riemann que nous avons évoquées précédemment.

Nous n'en donnerons pas la démonstration[512], mais ce qui est important c'est qu'au-delà de leur existence, nous disposons d'une méthode pour les construire.

---

[510]Formellement, si on considère le champ de vecteurs $k_x(x)$ comme générant un déplacement infinitésimal sur la variété et l'action d'un difféomorphisme infinitésimal, alors l'exponentielle du champ est la famille de difféomorphismes à un paramètre a tel que $a \rightarrow (exp(a.k_x)\,(x)$ dont les dérivées d/da à $a = 0$ donne la fonction k_x.

[511]On peut faire la carte exponentielle de la surface de la Terre considérée comme une sphère par exemple et juger de la distorsion par la distorsion de la forme des continents dans la carte qui peut les rendre reconnaissables ou non. Le critère n'est pas absolu mais il est intéressant d'avoir une information de la taille de la région de cette carte qui garantit une distorsion acceptable.

[512]Une démonstration formelle est donnée dans Carroll (2003) p 111-113.

Existe-t-il un référentiel local de Lorentz attaché à un système de coordonnées ?

S'il est possible de définir, en tout point comme nous venons de le montrer, des coordonnées localement inertielles associées à un référentiel local de Lorentz, à partir de n'importe quel système de coordonnées (globales), il y a toutefois une restriction importante : il n'existe pas de système de coordonnées dont ces vecteurs de base dériveraient (seraient partout tangents aux coordonnées) et il n'y a pas de moyen de s'y ramener.

Nous n'allons pas examiner la preuve détaillée de cette proposition[513]. Comme déjà indiqué il n'existe pas de fonctions de changement de coordonnées du type :

$$x'^{\mu} = f_{\mu}(x^{\nu}). \qquad (16\text{-}10)$$

Par exemple, dans le cas de la forme cartésienne de Painlevé qui, rappelons-le, s'écrit

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu}(dx^{\mu} - \beta^{\mu}dx^0)(dx^{\nu} - \beta^{\nu}dx^0), \qquad (16\text{-}11)$$

on obtient la forme de Minkowski en coordonnées u^{μ} en posant

$$du^{\mu} = dx^{\mu} - \beta^{\mu}dx^0. \qquad (16\text{-}12)$$

On voit que pour les coordonnées spatiales il n'existe pas de fonction $u^i\ (x, y, z, t)$ dont la différentielle totale s'écrit

$$du^i = \frac{\partial u^i}{\partial t}dt + \frac{\partial u^i}{\partial x}dx + \frac{\partial u^i}{\partial y}dy + \frac{\partial u^i}{\partial z}dz, \qquad (16\text{-}13)$$

qui serait égale à

$$du^i = dx^i - \beta^i dt, \qquad (16\text{-}14)$$

puisque, par exemple pour $i = 1$, en identifiant (16-13) à *(16-14)* on doit avoir simultanément

$$\frac{\partial u^1}{\partial t} = \beta^x(x,y,z), \quad \frac{\partial u^1}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial u^1}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u^1}{\partial z} = 0, \qquad (16\text{-}15)$$

[513] Voir Schutz (1980), pp. 158-160, où elle porte le nom de "théorème de localité plate"

conditions qui sont contradictoires puisque comme β^i est une fonction qui ne dépend que de *(x, y, z),* u^i doit dépendre de *(x, y, z)* ce que les deux dernières équations de *(16-15)* contredisent.

Pour autant, pour chaque sous espace à r = *constante*, comme les valeurs de β^i sont bien définies, sur une ligne d'univers, par continuité (en faisant varier r on obtient une suite continue de valeurs numériques) on peut définir des coordonnées u^μ localement inertielles compatibles avec la définition que nous avons donnée mais qui ne se déduisent pas des coordonnées générales par un simple changement analytique de coordonnées.

En conséquence, la relation "quasi-analytique" entre ces deux systèmes de coordonnées ne peut s'écrire que sous la forme d'un développement en série, comme nous l'avons présenté.

Si on considère les vecteurs de base associés à ces coordonnées u^μ, ces coordonnées localement inertielles vont être les courbes intégrales des champs de ces vecteurs associés.

L'étude du modèle de la rivière, dans le chapitre suivant, va illustrer et éclairer la méthode en soulignant le caractère très spécifique de la forme de Painlevé.

Une approche originale non covariante de la relativité générale : le pseudo-tenseur de Landau & Lifchitz d'énergie-impulsion de la gravitation.

Définition de ce pseudo-tenseur

L'équation de conservation de la relativité générale $T^{\mu\nu}{}_{;\nu}$ (divergence covariante qui tient compte de la courbure) ne satisfait pas (sauf de façon triviale quand $T^{\mu\nu} \equiv 0$[514]) à l'équation de conservation dans le référentiel tangent local qui s'écrirait $T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0$ (divergence ordinaire).

Pour définir une grandeur qui obéit à cette loi de divergence ordinaire nulle il faut introduire un élément constitutif de la gravitation $t^{\mu\nu}$ qui va représenter la différence entre les deux lois, pour que la quadri-divergence (non covariante) de sa somme avec le tenseur énergie-impulsion soit nulle, cela nous amène à construire $(T^{\mu\nu}+t^{\mu\nu})$ [515], tel que

$$\partial_\nu(-g[T^{\mu\nu}+t^{\mu\nu}]) = 0, \qquad (16\text{-}16)$$

où g est le déterminant de la métrique et $t^{\mu\nu}$ un pseudo-tenseur d'énergie-impulsion caractérisant la gravitation.

Cette relation n'est pas covariante du fait de la présence de $t^{\mu\nu}$ et des dérivées simples.

Notons la position des indices qui privilégie une approche dans le plan tangent.

Landau et Lifchitz (1951) ont proposé une solution symétrique, définie dans le *§ 96* du Landau & Lifchitz, qui satisfaisait cette exigence ($G^{\mu\nu}$ est le tenseur d'Einstein et G la constante de gravitation) :

$$t^{\mu\nu} = -\frac{G^{\mu\nu}}{8\pi G} + \frac{\partial_\rho[\partial_\sigma(-g)\,(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma})}{(-g)16\pi G}.$$

Commençons par noter que la relation *(16-16)* est satisfaite quand

$$(-g[T^{\mu\nu}+t^{\mu\nu}]) = \partial_\rho A^{\mu\nu\rho},$$

où $A^{\mu\nu\rho}$ est antisymétrique sur ses derniers indices, soit :

$$A^{\mu\nu\rho} = -A^{\mu\rho\nu}.$$

[514] L'équation de conservation covariante $T^{\mu}{}_{\nu;\mu} = 0$ s'écrit $T^{\mu}{}_{\nu;\mu} = g^{-1/2}\partial_\mu([-g^{1/2}][T^{\mu}{}_{\nu}]) - \tfrac{1}{2}\partial_\nu(g_{\mu\lambda})T^{\mu\lambda} = 0$. Elle montre que, dans le vide, $\partial_\mu T^{\mu}{}_{\nu}=0$, car $T^{\mu}{}_{\nu} \equiv 0$ (sauf pour la singularité que nous excluons en $r = 0$ où $T^{\mu}{}_{\nu} \equiv \infty$). C'est un cas particulier, mais qui nous intéresse, car il correspond au cas de la solution décrite par la métrique de Painlevé. Pour autant la nullité de ces deux divergences n'implique pas la nullité du pseudo-tenseur.

[515] Les auteurs font observer que la définition d'un pseudo-tenseur satisfaisant cette équation et à la conservation de quantités résultant de son intégration sur l'espace-temps, cf. équation 96.11 du Landau & Lifchitz, n'est pas unique, (le pseudo-tenseur non symétrique d'Einstein y satisfait) mais que le choix fait, qui ne contient que des dérivées premières du tenseur métrique, est de plus symétrique, ce qui permet la conservation du moment cinétique.

Cela résulte de la linéarité de l'opérateur de dérivation, de la commutativité des dérivées partielles, chaque composante de $\partial_\nu \partial_\rho A^{\mu\nu\rho}$ étant une somme de 16 éléments.

À une valeur *i* (de *0* à *3*) que prend l'indice *v* et à une valeur *j* (de *0* à *3*) de l'indice ρ qui produit un terme $\partial_i \partial_j A^{\mu ij}$ correspond un terme $\partial_j \partial_i A^{\mu ji} = - \partial_i \partial_j A^{\mu ij}$, ce qui implique également $\partial_i \partial_i A^{\mu ii} = 0$ et montre donc que $\partial_\nu \partial_\rho A^{\mu\nu\rho} = 0$.

Méthode de construction du pseudo-tenseur de gravitation par Landau et Lifchitz

Pour proposer leur pseudo-tenseur, Landau et Lifchitz vont particulariser une solution.

Leur méthode consiste à calculer le tenseur énergie-impulsion dans des coordonnées localement inertielles[516] (définies au paragraphe précédent) où les dérivées premières du tenseur métrique $g'_{\mu\nu}$ s'annulent, en utilisant l'équation d'Einstein, $R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = 8\pi G T^{\mu\nu}$, où le membre de gauche se calcule à l'aide de la métrique et de ses dérivées.

Le résultat représente alors le tenseur énergie-impulsion $T'^{\mu\nu}$ qui s'écrit dans ces coordonnées inertielles :

$$16\pi G\,(-g\,)T'^{\mu\nu} = \partial_\rho [\partial_\sigma (\lambda^{\mu\nu\rho\sigma})]. \qquad (16\text{-}16bis)$$

Nous voyons apparaître un nouveau terme $\partial_\rho[\partial_\sigma(\lambda^{\mu\nu\rho\sigma})]$ qui est simplement le résultat du calcul dans ces coordonnées inertielles[517].

Un tenseur à quatre indices de même forme que celui de Riemann supersymétrique et celui de la super-métrique de Witt apparaît

Ceci nous suggère de définir dans des coordonnées quelconques générales le tenseur,

$$\lambda^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{(-g)\,(g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma})}{16\pi G}, \qquad (16\text{-}17)$$

dont la forme est similaire[518] (en permutant les indices) au tenseur de Riemann décrivant l'espace-temps le plus symétrique (*R* est le scalaire de Ricci et *n* la dimension),

[516] Nous utilisons des lettres avec ' pour dénoter les tenseurs dans ces coordonnées inertielles.

[517] Linet B. p.121-122 montre que comme cela consiste à ignorer les dérivées premières (ici nulles) dans le tenseur de Ricci $R^{\mu\nu}$, le tenseur d'Einstein est de la forme $G^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(-g)^{-1}\partial^2_{\rho\sigma}[(-g)(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma})] +$., les., désignant $t^{\mu\nu}$.

[518] Attention *(16-18)* est un tenseur de Riemann que pour certains espaces à symétrie maximum. Pour une métrique quelconque d'un espace-temps quelconque, le tenseur *(16-18)* n'est pas le tenseur de Riemann associé. Comme l'espace-temps que nous étudions n'est pas à symétrie maximum, les relations entre *(16-17*) et *(16-18)*, si on utilise la même métrique dans les deux, ne valent que pour des propriétés résultant des symétries (20 composantes indépendantes). On peut ajouter d'autres contraintes (ici tenseur de Ricci nul) mais elles n'impliquent pas que la forme *(16-17)* ne comporte que 10 composantes indépendantes, car ce n'est pas un tenseur de Riemann.

$$R^{\mu\nu\rho\sigma} = R\frac{(g^{\mu\rho}.g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho})}{n(n-1)} = \frac{(16\pi G.R)}{(-g)n(n-1)}\lambda^{\mu\rho\sigma\nu}, \qquad (16\text{-}18)$$

qu'on rencontre dans l'étude des espaces *4D* à symétrie maximum où la courbure spatio-temporelle est constante sur la variété, ce qui n'est vérifié que pour les espaces temps de Minkowski, De Sitter, anti-De Sitter).

Ce tenseur de Riemann (généralement construit sur la métrique et ses dérivées) ne comporte dans ce cas aucune dérivée et la formule *(16-18)* décrit la seule forme possible compatible avec ses symétries.

À partir de ce nouveau tenseur $\lambda^{\mu\nu\rho\sigma}$, par dérivation-contraction non covariante on va construire un pseudo-tenseur possédant les propriétés de conservation non covariante.

Il est remarquable que λ^{ijkl} version spatiale de $\lambda^{\mu\nu\rho\sigma}$ est la super-métrique de De Witt utilisée dans les tentatives de quantification de la gravitation

La divergence non covariante de *(16-17)* donne naissance à une expression antisymétrique du type $A^{\mu\nu\rho}$ [519] sur les deux derniers indices ν et ρ non sommés, car :

$$A^{\mu\nu\rho} = \partial_\sigma\,[(-g)\,(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma})] = [\partial_\sigma\,(-g)]\,(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma})] + (-g)[\partial_\sigma\,(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma})].$$

En permutant les indices ν et ρ on obtient :

$$[\partial_\sigma(-g)](g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} - g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma})] + (-g)[\partial_\sigma(g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} - g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma})] = -[\partial_\sigma(-g)](g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma})] - (-g)[\partial_\sigma(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma})].$$

Ceci montre que *(16-17)* est bien une solution qui satisfait à *(16-16)*.

Dans la forme de Painlevé, le calcul montre que $A^{\mu\nu\rho}$ (antisymétrique par échange des deux derniers indices) se réduit à $A^{\mu\nu\rho} = A^{i0j}$ et A^{ij0} où *i* et *j* désignent les valeurs spatiales (1 à 3) des indices. De plus, A^{i0j} est symétrique sur les indices *i* et *j*. Ce sont ces propriétés qui impliquent la nullité de sa divergence simple sur son dernier indice.

La forme compliquée du pseudo-tenseur dans le cas général.

Revenons à la relation *(16-16bis)*.

Le passage en coordonnées quelconques fait que cette relation *(16-16bis)* n'est plus vérifiée.

[519] $A^{\mu\nu\rho}$ est le super-potentiel de Freud. Voir par exemple Linet p.122.

On introduit alors le pseudo-tenseur de gravitation pour tenir compte de la rupture d'égalité et la rétablir.[520]

$$(-g)(T^{\mu\nu}+t^{\mu\nu}) = \partial_\rho[\partial_\sigma(\lambda^{\mu\nu\rho\sigma})] \qquad (16\text{-}19)$$

Le pseudo-tenseur est donc nul par construction dans le référentiel inertiel.

Cette équation est valide en coordonnées quelconques. Si on remplace $T^{\mu\nu}$ par sa valeur déduite de l'équation d'Einstein, $R^{\mu\nu}+- \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R= 8\pi G\, T^{\mu\nu}$, on obtient

$$-g\,[(8\pi G)^{-1}(R^{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}g^{\mu\nu}R) + t^{\mu\nu}] = \partial_\rho[\partial_\sigma(\lambda^{\mu\nu\rho\sigma})], \qquad (16\text{-}20)$$

soit :

$$t^{\mu\nu} = - \frac{G^{\mu\nu}}{8\pi G} + \frac{\partial_\rho[\partial_\sigma(-g)\,(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma})}{(-g)16\pi G}\,. \qquad (16\text{-}20bis)$$

Les équations *(16-20)* et *(16-20bis)*, développement de *(16-16bis)* montreront que la valeur du pseudo-tenseur gravitation s'exprime de façon assez complexe.

Cas particulier de ce pseudo-tenseur quand le tenseur énergie-impulsion est nul

Simplification des équations

Développons maintenant le cas particulier de la solution de Schwarzschild où le tenseur énergie-impulsion $T^{\mu\nu} \equiv 0$, ($T^{\mu\nu}$ est nul partout sauf en $r = 0$ où il est singulier). Nous avons déjà signalé que l'équation de conservation covariante de la relativité générale

$$T^{\mu}{}_{\nu;\mu} = g^{-1/2}\partial_\mu[T^{\mu}{}_{\nu}(-g)^{1/2}] - \tfrac{1}{2}\partial_\nu(g_{\mu\lambda})T^{\mu\lambda},$$

montre que $\partial_\mu T^{\mu}{}_{\nu} = 0$ est satisfaite trivialement, car $T^{\mu}{}_{\nu} = 0$ et $T^{\mu\nu} \equiv 0$. *Ceci* implique aussi $\partial_\mu T^{\mu\nu}=0$, qui correspond à la nullité de la divergence non covariante du tenseur énergie-impulsion.

La condition que nous recherchions étant satisfaite, on pourrait douter de l'utilité de $t^{\mu\nu}$, si ce n'est que le pseudo-tenseur décrit l'énergie-impulsion de la gravitation, non décrit par $T^{\mu\nu}$.

Le tenseur énergie-impulsion à deux indices ne fait que contraindre partiellement le tenseur de Riemann à 4 indices décrivant la courbure de l'espace-temps. C'est cette contrainte partielle que l'équation d'Einstein décrit.

Dans le cas où $T^{\mu\nu} \equiv 0$, l'équation *(16-16)* montre que l'expression entre crochets se réduit à $t^{\mu\nu}$ qui peut alors se calculer de façon beaucoup plus simple par double dérivation non covariante d'un tenseur générique de rang quatre *(16-17),* appelé $\lambda^{\mu\nu\rho\sigma}$ dans l'article (ici on pose $c = 1$), construit à partir des seuls produits de la métrique.

$$(-g)(t^{\mu\nu}) = \partial_\rho[\partial_\sigma(\lambda^{\mu\nu\rho\sigma})] \qquad (16\text{-}21)$$

[520] On ne peut pas comparer simplement (1bis) et *(4)*, ces expressions n'étant pas dans les mêmes coordonnées.

Différentes formules analytiques pour calculer le pseudo-tenseur

a) La version utilisant le tenseur métrique et des symboles de Christoffel : [521]

$$t^{ik} = \{c^4/16\pi G\}\{(2\Gamma^{n}_{lm}\Gamma^{p}_{np} - \Gamma^{n}_{lp}\Gamma^{p}_{mn} - \Gamma^{n}_{ln}\Gamma^{p}_{mp})(g^{il}g^{km} - g^{ik}g^{lm}) + g^{il}g^{mn}(\Gamma^{k}_{lp}\Gamma^{p}_{mn} + \Gamma^{k}_{mn}\Gamma^{p}_{lp} - \Gamma^{k}_{np}\Gamma^{p}_{lm} - \Gamma^{k}_{lm}\Gamma^{p}_{np}) + g^{kl}g^{mn}(\Gamma^{i}_{lp}\Gamma^{p}_{mn} + \Gamma^{i}_{mn}\Gamma^{p}_{lp} - \Gamma^{i}_{np}\Gamma^{p}_{lm} - \Gamma^{i}_{lm}\Gamma^{p}_{np}) + g^{lm}g^{np}(\Gamma^{i}_{ln}\Gamma^{k}_{mp} - \Gamma^{i}_{lm}\Gamma^{k}_{np})\}. \quad (16\text{-}22)$$

b) La version utilisant le tenseur métrique et de ses dérivées

$$(-g)t^{ik} = \{c^4/16\pi G\}\{\partial_l(g.g^{ik})\partial_m(g.g^{lm}) - \partial_l(g.g^{il})\partial_m(g.g^{km}) + \tfrac{1}{2}g^{ik}g_{lm}\partial_p(g.g^{ln})\partial_n(g.g^{pm}) - [g^{il}g_{mn}\partial_p(g.g^{kn})\partial_l(g.g^{mp}) + g^{kl}g_{mn}\partial_p(g.g^{in})\partial_l(g.g^{mp})] + g^{np}g_{lm}\partial_n(g.g^{il})\partial_p(g.g^{km}) + \tfrac{1}{8}(2g^{il}g^{km} - g^{ik}g^{lm})(2g_{np}g_{qr} - g_{pq}g_{nr})[\partial_l(g.g^{nr})\partial_m(g.g^{pq})]\}. \quad (16\text{-}22bis)$$

c) La version simplifiée utilisable quand le tenseur énergie-impulsion est nul

Dans ce cas rappelons l'équation *(16-21) :* $(-g)(t^{\mu\nu}) = \partial_\rho[\partial_\sigma(\lambda^{\mu\nu\rho\sigma})]$. *(16-21)*

Nous l'avons calculé dans l'annexe *7* par *(16-22)* qui est l'équation *(96-8)* du Landau & Lifchitz et aussi par *(16-22bis)* qui est l'équation *(96.9)* du Landau & Lifchitz ainsi que plus simplement, en utilisant *(16-21)* pour vérifier la cohérence des équations.

Les équations *(16-22)* et *(16-22bis)* ci-dessus montrent que, conformément aux hypothèses, t^{ik} est construit à partir de la métrique et de ses dérivées premières seulement.

Calcul du pseudo-tenseur de Landau & Lifchitz dans divers systèmes de coordonnées

On calcule alors le pseudo-tenseur gravitation "**pseudo**", équation (*96.8*) du Landau & Lifchitz, par la formule donnée ci-dessus pour différentes coordonnées.

Coordonnées cartésiennes de la forme de Painlevé : il est identiquement nul

La forme de la métrique de Painlevé en coordonnées cartésiennes *(t, x, y, z)* avec

$$\beta = -(r_s/r)^{1/2}, \qquad \beta^{\mu} = \beta\{0, x/r, y/r, z/r\}, \qquad r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

peut s'écrire très simplement : $ds^2 = \eta_{\mu\nu}(dx^{\mu} - \beta^{\mu}dx^0)(dx^{\nu} - \beta^{\nu}dx^0)$.

Les calculs effectués par Mathematica 4 (voir annexe *7*) donnent comme résultat : $\boldsymbol{t^{\mu\nu} = 0}$.

[521] La définition et le calcul sont faits dans la théorie des Champs édition 5 Landau & Lifchitz §96, nous donnons ici une des formes qui y sont proposées. Nous avons repris la notation de l'équation *(96.8)*. À noter deux coquilles (corrigées dans la formule citée ci-dessus) dans l'édition 5 en français du Landau & Lifchitz, théorie des champs. Deuxième ligne lire $\Gamma^{k}_{ip}\Gamma^{p}_{mn}$ au lieu de $\Gamma^{k}_{lk}\Gamma^{p}_{mn}$ et $\Gamma^{k}_{mn}\Gamma^{p}_{lp}$ au lieu de $\Gamma^{p}_{mn}\Gamma^{p}_{lp}$

S'il est trivial d'annuler localement ce pseudo-tenseur, un système de coordonnées globales où ce pseudo-tenseur est identiquement nul ne l'est pas. Ceci doit refléter les propriétés géométriques originales de cet espace-temps.

De plus comme le tenseur énergie-impulsion est nul, cela suggère que pour des observateurs de Painlevé (en chute libre radiale) l'espace-temps semble plat.

Nous tenterons d'interpréter cette propriété originale.

Par ailleurs ce calcul montre que le déterminant de la métrique vaut *-1*, propriété qui a pour conséquence que le formalisme de la relativité générale se simplifie.

Calculons le dans d'autres coordonnées (en utilisant le programme établi en annexe *7*) pour montrer que la nullité du pseudo-tenseur de gravitation n'est pas une propriété triviale.

Coordonnées sphériques de la forme de Painlevé : il n'est pas identiquement nul

Pour la forme de Painlevé en coordonnées sphériques (*t, r, θ, φ*), cf équation *(3-4)*, le résultat non nul (10 composantes non nulles) est donné en annexe *3,* chapitre *16*[522].

Formes cartésiennes et sphériques de Schwarzschild: il n'est pas identiquement nul

Coordonnées cartésiennes

La forme cartésienne[523]*,* qui s'obtient simplement par un changement de coordonnées, est donnée en annexe *3*, chapitre *16*.

Le pseudo-tenseur ne comporte qu'une seule composante non nulle, la composante temporelle qui vaut :

$$t^{00} = \frac{8M^2}{(x^2+y^2+z^2)[(x^2+y^2+z^2)^{1/2} - 2M]^2}.$$

Coordonnées sphériques

Le pseudo-tenseur, en coordonnées sphériques *(t, r, θ, φ)* de Schwarzschild[524], n'est pas nul (6 composantes non nulles).

Sa valeur est donnée en annexe *3*, chapitre *16*.

Coordonnées sphériques de la forme de Lemaître[525]: il n'est pas identiquement nul

Pour la forme de Lemaître en coordonnées sphériques *(t, χ, θ, φ)* le résultat non nul est donné en annexe *3*, chapitre *16* (10 composantes non nulles).

Coordonnées cartésiennes de la forme isotrope : Il n'est pas identiquement nul

[522]En coordonnées sphériques la base de vecteurs ∂_t, ∂_r, ∂_θ, ∂_φ n'est pas orthonormée ce qui fait la différence, le déterminant ne vaut pas -1.
[523]Le déterminant de la métrique vaut -1.
[524]Rappelons la forme de Schwarzschild *: $ds^2 = -(1-2GM/r)dt^2 + dr^2(1-2GM/r)^{-1} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$.*
[525]Nous en avons donné la forme au Chapitre 13, équation (16).

En coordonnées sphériques, la forme isotrope s'écrit :

$$ds^2 = -[(2r-GM)/(2r+GM)]^2 dt^2 + (1+GM/2r)^4 [dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)].$$

Il est facile de mettre la forme isotrope sous forme cartésienne (la section spatiale est "conformément" euclidienne). Pour le pseudo-tenseur, le résultat non nul (10 composantes non nulles) est donné en annexe *3*, chapitre *16*.

Coordonnées cartésiennes de Finkelstein-Eddington : Il n'est pas identiquement nul

Le pseudo-tenseur ne dépend pas de la masse du trou noir.

En forme cartésienne, donnée en annexe *10*, le pseudo-tenseur de Landau & Lifchitz se réduit à la seule composante temporelle

$$t^{00} = -2(x^2+y^2+z^2)^{-1}$$

qui ne dépend pas de la masse du trou noir. Cette propriété purement géométrique liée à la symétrie sphérique de la solution, est spécifique à la lumière. Ceci montre une fois de plus le rôle très singulier que joue la lumière en relativité.

Ce pseudo-tenseur est égal à la double divergence de la métrique covariante.

Notons également que le déterminant vaut également *-1* et que la valeur de cette composante non nulle est égale à la double divergence ordinaire de la métrique dans cette forme, en effet :

$$D = \Sigma_\mu \partial_\mu (\Sigma_\nu \partial_\nu g_{\mu\nu}) = \frac{-2}{x^2+y^2+z^2}.$$

Forme de Kerr-Schild cartésienne sans rotation : le pseudo-tenseur est identiquement nul

Cette métrique de Kerr-Schild (avec $a = 0$) sous forme cartésienne est donnée en annexe *10*.

Le calcul par Mathematica du pseudo-tenseur de Landau-Lifchitz à partir de la forme cartésienne montre que ce pseudo-tenseur est également nul :

$$t^{\mu\nu} = 0.$$

Fait remarquable, que nous avons déjà commenté au chapitre *13*, précédent. Nous avons souligné la parenté de cette forme de métrique avec celle de Painlevé.

Caractéristiques communes aux formes de Painlevé et de Kerr-Schild

Il est donc intéressant de rechercher quelles sont les propriétés, communes à la forme de Painlevé et à cette forme, qui impliquent cette nullité.

Nous avions remarqué que la forme de Painlevé pouvait également s'écrire comme la somme d'un terme minkowskien et du produit tensoriel d'un vecteur (mais non nul) par lui-même. Poursuivons l'analyse de cette similitude. Rappelons que la forme de Painlevé peut s'écrire :

$$ds^2 = -dt^2 + [(2GM/r)^{1/2}dt + dr]^2 + r^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\varphi^2).$$

Nous avions montré au chapitre *5* que cette forme mettait en évidence le caractère géodésique radial de l'observateur de Painlevé puisque sa vitesse $dr/dt = -(2GM/r)^{1/2}$ réduisait l'expression à $ds^2 = -dt^2$, ce qui est caractéristique d'un mouvement géodésique (de type temps).

De la même manière si on considère non plus un observateur réel (ligne d'univers de type temps) mais une géodésique radiale nulle en reportant $dr = -dt$ dans l'expression :

$$ds^2 = -dt^2 + (2GM/r)(dr + dt)^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\varphi^2).$$

On voit qu'on obtient $ds^2 = 0$, ce qui est caractéristique du mouvement géodésique de la lumière en espace-temps de Minkowski.

Ces deux expressions sont donc similaires dans les phénoménologies qu'elles décrivent.

Forme de Minkowski complète ou non selon le type de géodésique radiale

On peut noter que dans la forme de Kerr-Schild le ds^2 de Minkowski est complet, (terme dr^2 présent) ce qui, quand $(dr+dt)^2=0$, implique bien $ds^2 = 0$ pour la géodésique radiale nulle. Dans la forme de Painlevé le terme n'est pas présent, car quand on annule $[(2GM/r)^{1/2}dt + dr]^2$, ce qui correspond à la condition géodésique, la métrique résultante minkowskienne sur la géodésique radiale est telle que la coordonnée temporelle est le temps propre de l'observateur ($ds^2 = -dt^2$).

Nous verrons que cela correspond à une contrainte formelle sur le déterminant pour la forme cartésienne des deux solutions qui doit valoir *-1* dans les deux cas, sachant que le déterminant de la forme de Minkowski vaut *-1*.

La nullité du pseudo-tenseur résulte de la forme de métrique (choix de jauge)

Le pseudo-tenseur n'étant pas nul pour toute forme de métrique associée à cette solution, cette nullité résulte de choix particuliers. Le calcul montre que la double divergence (en espace de Minkowski) du tenseur métrique et du tenseur métrique inverse pour les formes de métrique de Painlevé et de Kerr-Schild sans rotation sont nulles, soit

$$\Sigma_\mu \partial_\mu (\Sigma_\nu \partial_\nu g_{\mu\nu}) = 0$$

et

$$\partial_\mu \partial_\nu g^{\mu\nu} = 0.$$

Ceci peut être considéré comme une contrainte, associée à un « choix de jauge ». Ici la métrique et la métrique inverse doivent être considérées comme des "matrices" vis-à-vis des opérations effectuées. Nous verrons au chapitre 19 que cela est lié à une propriété structurelle de la métrique $g_{\mu\nu}$ plus facilement identifiable sur la métrique inverse $g^{\mu\nu}$.

Nous avons déjà noté que la forme de Kerr-Schild (sans rotation), qui dérive naturellement de la forme de Finkelstein par une rotation de l'axe des temps, est liée à des géodésiques radiales nulles alors que celle de Painlevé est relative à des géodésiques radiales de type temps.

Cas de l'extension de la forme de Painlevé (avec vitesse non nulle à l'infini)

Coordonnées sphériques

Nous avons vu (chapitre *5*) que cette forme recouvrait, entre autres, le cas de la forme de Painlevé et celle d'Eddington Finkelstein.

Le pseudo-tenseur en coordonnées sphériques n'est pas nul (*10* composantes non nulles) et est donné en annexe *3*, chapitre *16*.

Coordonnées cartésiennes

La transformation en coordonnées cartésiennes est laborieuse mais ne présente pas de difficultés. Nous avons donné la forme cartésienne de cette métrique en annexe *10* où nous avons noté *a* le paramètre *p* dans les calculs réalisés avec Mathematica.

Le pseudo-tenseur de Landau & Lifchitz en coordonnées cartésiennes n'est pas nul, mais seule la composante temporelle

$$t^{00} = \frac{2(p-1)}{x^2+y^2+z^2}$$

n'est pas nulle.

Cette composante ne dépend pas de la masse *M* du trou noir (ce qui se comprend puisqu'elle ne diffère de celle de Painlevé que par un boost). Nous voyons que cette forme est compatible avec les formes de Painlevé, car $p = 1$, annule t^{00} le seul terme non nul et $p = 0$ donne la valeur obtenue pour la forme d'Eddington-Finkelstein.

Cas de la solution de Robertson-Walker critique

Au chapitre *14* nous avions calculé la valeur du pseudo-tenseur de Landau & Lifchitz :

$$t^{\mu\nu} = diag\left(\frac{40}{9}\ \ t^{-(\frac{10}{3})}\right)\left[\left(\frac{3}{5}\right)t^{\frac{4}{3}},\ \ 1,\ \ 1,\ \ 1\right]\ \ .$$

À la différence de celui de la forme de Painlevé il n'est pas identiquement nul, mais pour $t = \infty$, le pseudo-tenseur s'annule[526]. Cette solution se raccorde avec celle de Painlevé qui est stationnaire donc ne dépend pas de t, mais suppose que $t = \infty$ *:* la solution est "éternelle".

Compléments sur le pseudo-tenseur de Landau & Lifchitz.

Calcul de la 4-impulsion matière-gravitation du trou noir dans différentes formes

Expression générale

Le pseudo-tenseur représente-t-il l'énergie de gravitation du trou noir[527] comme Landau et Lifchitz le soutiennent ?

La loi de conservation $$P^{\mu} = \int (-g)(t^{\mu\nu})\, dS_{\nu}\ \ , \qquad (16\text{-}23)$$

nous indique que $P^{\mu} = 0$, car $t^{\mu\nu}$ est nul partout dans cette forme de la métrique.[528]

À la différence de ce que donne l'intégrale de Komar[529], "l'énergie" du trou noir calculée par le pseudo-tenseur est nulle dans la forme cartésienne de Painlevé

On en déduit que la masse M définie par $M = P^{\mu}P_{\mu}$ associée au "champ gravitationnel" défini par ce pseudo-tenseur est nulle, mais de la façon la plus totale puisque toutes les composantes de P^{μ} sont nulles.

Dans le Landau & Lifchitz P^{μ} est appelé la 4-impulsion totale de la matière et du champ gravitationnel.

Le calcul de l'énergie d'un trou noir de Schwarzschild en utilisant l'intégrale de Komar (en métrique de Schwarzschild) qui considère l'énergie représentée par un courant J^{μ} construit à partir du vecteur de Killing de type temps K^{μ}

$$J^{\mu} = [(K^{\nu})^{;\mu}]_{,\nu} \qquad (16\text{-}24)$$

attribue une énergie $E = M$ au trou noir [530]. Elle résulte d'une intégration dans le vide.

En fait on utilise le théorème de Stockes pour calculer un flux sortant à l'infini où l'espace-temps est asymptotiquement minkowskien.

---

[526]Ajoutons que dans cette solution, la métrique se prête à un feuilletage de l'espace-temps en sections spatiales euclidiennes orthogonales à la géodésique de l'observateur co-mobile. La courbure qui est temporelle s'annule pour t infini. L'espace est asymptotiquement minkowskien d'où la nullité asymptotique du pseudo-tenseur.

[527]On utilise le terme trou noir, mais cela s'applique à l'extérieur de tout corps unique à symétrie sphérique.

[528]Ce qui n'a rien d'extraordinaire, car la masse par l'intégrale de Komar se calcule comme un flux traversant une hypersurface. Cela montre qu'aucun flux ne traverse les hypersurfaces définies dans la forme de Painlevé.

[529]Où l'observateur est statique et est donc traversé par un flux gravitationnel ce qui engendre une accélération.

[530]En unités où $c = 1$, $G = 1$, ce qu'on posera dans la suite du chapitre.

Ceci est lié au concept de masse ponctuelle tel qu'on le trouve déjà dans la mécanique newtonienne. On résout le problème de la même manière en calculant le flux sortant d'une surface fermée enveloppant la masse ponctuelle.

Le fait de trouver un résultat nul dans cette forme de Painlevé, ce qui peut surprendre, résulte du fait que le flux gravitationnel traversant les hypersurfaces spatiales entourant le trou noir est nul. C'est parce que ces hypersurfaces sont co-mobiles de l'effondrement gravitationnel de l'espace-temps qu'aucun flux gravitationnel ne les traverse.

Même calcul dans la forme de Painlevé mais en utilisant une autre forme de l'intégrale.

Calculons l'intégrale[531] en coordonnées cartésiennes en utilisant la formule de Stockes à l'infini :

$$P^{\mu}=\frac{1}{2c}\oint h^{\mu\nu\rho}\,df_{\nu\rho} \quad .$$

Comme la solution est stationnaire il est possible d'intégrer sur une hypersurface spatiale en posant $x^0 = t$ = constante, ce qui conduit à poser $v = 0$, puis en utilisant le théorème de Stockes on peut réaliser cette intégration sur une surface sphérique (2D) à l'infini.

Le calcul par Mathematica de $16\pi.h^{\mu\nu\rho}$ est donné en annexe *3*, chapitre *16*. Compte tenu de l'antisymétrie sur les deux derniers indices il n'y a que *9* valeurs différentes qui sont du type $16\pi\, h^{i0j}$.

De façon qui peut paraître surprenante, nous allons retrouver ces valeurs (à un facteur multiplicatif α près) dans des calculs du formalisme *ADM,* utilisant cette forme de métrique qui apparemment n'ont pas de lien avec celui-ci, lorsque nous calculerons le moment conjugué π^{ij}

$$h^{\mu\nu\rho} = h^{i0j} = \alpha\,[\pi^{ij}] = \alpha\,[-g^{1/2}(K^{ij} - g^{ij}K)]$$

où $K_{ij} = n_{i;j}$ est le tenseur de courbure extrinsèque [532] (deuxième forme fondamentale), $K = K^i{}_i$ et $\boldsymbol{n}$ le vecteur unitaire normal à l'hypersurface, dans le formalisme ADM (annexe *9*).

Ceci témoigne du lien formel étroit entre ces deux approches.

Pour calculer l'intégrale, il faut aussi calculer l'élément de surface "normal" associé et tenir compte que nous allons intégrer sur une sphère à l'infini, donc naturellement en coordonnées sphériques, des composantes qui sont exprimées en coordonnées cartésiennes (multiplication par x^i/r de chacune des composantes pour générer la composante sur r).

[531] On utilise $h^{\mu\nu\rho} = \partial_\sigma \lambda^{\mu\nu\rho\sigma}$. Voir Landau & Lifchitz (1994) §96, équation *(96-2).*

[532] Équation donnée dans Arnowitt R. Deser S. Misner C.W (2004) p. 9. Notons que cette équation est valide quand le quadrivecteur $\boldsymbol{n}$ normal à l'hypersurface est aussi géodésique, ce que les auteurs semblent supposer. Voir chapitre *18* pour la définition du tenseur de courbure extrinsèque dans le cas général. Ajoutons que cette égalité n'est pas fortuite puisque, comme nous le verrons, ces deux expressions interviennent de la même manière dans les deux formalismes dans les intégrales de même forme donnant le vecteur P^{μ}.

Composante temporelle (énergie) de la 4-impulsion du champ gravitationnel

Il est évident que la composante temporelle $P^0 = 0$, car les composantes $h^{00\rho}$ sont toutes nulles.

Composantes spatiales de la 4-impulsion du champ gravitationnel

Pour P^i à partir des composantes non nulles h^{i0j} un calcul simple permet d'obtenir la composante radiale du flux de h^{i0j} à partir des composantes cartésiennes.

Pour cela il faut projeter les composantes cartésiennes h^{i0j} sur le rayon de la sphère r en utilisant $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, $x^1 = x = r.\sin\theta.\cos\varphi$, $x^2 = y = r.\sin\theta.\sin\varphi$, $x^3 = z = r.\cos\theta$ de façon à constituer un vecteur spatial dont le flux soit orthogonal à la surface de la sphère, ce qui conduit à multiplier les composantes d'indice j par x^j/r.

L'intégration du flux sur la sphère se fera en coordonnées sphériques en faisant varier θ de 0 à π et φ de 0 à 2π.

$$\frac{\Sigma_j x^j h^{i0j}}{r} = \frac{4.M^{1/2}.x^i}{16\pi(2r)^{1/2}r^2}$$

L'intégrale donnant le flux traversant une sphère à l'infini pour la composante spatiale P^1 (en posant $G = 1$, $c = 1$) du quadrivecteur impulsion de la matière et du champ gravitationnel est définie pour P^1 par

$$P^1 = \frac{1}{2c}\oint h^{10i}\frac{x^i}{r}r^2\sin\theta\, d\theta\, d\phi = \frac{\sqrt{2Mr}}{16\pi}\iint \sin^2\theta\cos\varphi\, d\theta\, d\phi = 0$$

où $r^2\sin\theta.d\theta.d\varphi$ est l'élément de métrique $2D$ de surface, en coordonnées sphériques, sur la sphère, projeté normalement.

Pour obtenir le membre de droite on a utilisé les relations données juste avant.

Malgré la présence de la racine carrée de r, en facteur, qui diverge à l'infini, le résultat est nul.

Ceci est dû à la présence de l'intégrale entre 0 et 2π de $\cos\varphi$ qui vaut 0, dans le terme de droite intervenant en terme multiplicatif. La différence de sa primitive $[-\sin\varphi]_0^{2\pi}$, prise entre 0 et 2π est nulle.

Ceci s'applique également à la composante spatiale P^2 où c'est la présence de $\sin\varphi$ dans l'intégrale à droite qui cause la nullité de l'intégrale pour la même raison.

$$P^2=\frac{1}{2c}\oint h^{20i}\frac{x^i}{r}r^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi=\frac{\sqrt{2Mr}}{16\pi}\iint\sin^2\theta\,d\theta\sin\varphi\,d\phi=0$$

Pour P^3 la nullité de l'intégrale vient du terme $sin\theta.cos\theta = ½\ sin(2\theta)$ qui entre 0 et π vaut 0.

$$P^3=\frac{1}{2c}\oint h^{30i}\frac{x^i}{r}r^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi=\frac{\sqrt{2Mr}}{16\pi}\iint\sin\theta\cos\theta\,d\theta\,d\phi=0$$

Nous retrouvons bien la nullité de la masse (énergie) du trou noir et la nullité des composantes spatiales du vecteur impulsion de la gravitation comme la nullité du pseudo-tenseur l'imposait.

Nous retrouverons la nullité de la masse par le calcul de la masse *ADM*, ceci corrobore bien le fait que la gravitation soit "annulée" dans ce référentiel puisque la masse (énergie) du corps central à symétrie sphérique, calculée dans ces coordonnées, est nulle.

L'énergie, composante temporelle de la 4-impulsion du champ gravitationnel, dans la forme de Schwarzschild en coordonnées cartésiennes vaut Mc²

Le calcul, en utilisant Mathematica, du super-potentiel de Freud $h^{\mu\nu\rho}$ en coordonnées cartésiennes donne les composantes non nulles suivantes (rappelons qu'il est aussi antisymétrique sur les deux derniers indices comme le montre le résultat ci-dessous).

$$h[1,\ 1,\ 2]\quad \frac{4\,m\,x\left(x^2+y^2+z^2-2\,m\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}\left(-2\,m+\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^2}$$

$$h[1,\ 1,\ 3]\quad \frac{4\,m\,y\left(x^2+y^2+z^2-2\,m\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}\left(-2\,m+\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^2}$$

$$h[1,\ 1,\ 4]\quad \frac{4\,m\,z\left(x^2+y^2+z^2-2\,m\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}\left(-2\,m+\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^2}$$

$$h[1,\ 2,\ 1]\quad \frac{4\,m\,x\left(-x^2-y^2-z^2+2\,m\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}\left(-2\,m+\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^2}$$

$$h[1,\ 3,\ 1]\quad \frac{4\,m\,y\left(-x^2-y^2-z^2+2\,m\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}\left(-2\,m+\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^2}$$

$$h[1,\ 4,\ 1]\quad \frac{4\,m\,z\left(-x^2-y^2-z^2+2\,m\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}\left(-2\,m+\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^2}$$

On voit que $h^{\mu\nu\rho}$ se réduit à h^{00i} et h^{0i0} (composantes antisymétriques).

Nous allons intégrer le flux de ce super-potentiel traversant une sphère de rayon r à l'infini.

Pour cela il faut transformer les coordonnées cartésiennes en coordonnées sphériques. Nous le faisons, par la même méthode que celle que nous avons utilisée pour la forme de Painlevé.

En coordonnées sphériques h^{00i} devient

$$h^{00i} = \frac{4M.x^i}{16\pi r^2(r-2M)}$$

et $$\frac{x^i h^{00i}}{r} = \frac{4M.(x^i)^2}{16\pi r^3(r-2M)},$$

ce qui fait que quand on va sommer les $\frac{x^i h^{00i}}{r}$, on va obtenir : $\frac{4M.\Sigma(x^i)^2}{16\pi r^3(r-2M)} = \frac{4Mr^2}{16\pi r^3(r-2M)}$.

À l'infini $r - 2M$ tend vers r alors : $\Sigma \frac{x^i h^{00i}}{r} \rightarrow \frac{4M}{16\pi r^2}$.

L'intégrale donnant le flux traversant une sphère à l'infini pour la composante temporelle (en posant $G = 1$, $c = 1$) est définie par

$$P^0 = \frac{1}{2c}\oint h^{00i}\frac{x^i}{r}(r^2)\sin(\theta)(d\theta)d\phi = \frac{4M}{16\pi}\iint \sin(\theta)(d\theta)d\phi = M$$

où $r^2.\sin\theta.d\theta.d\varphi$ est l'élément de métrique $2D$ de surface en coordonnées sphériques sur la sphère. Pour obtenir le membre de droite on a utilisé les relations données juste avant.

On retrouve la même valeur de l'énergie que celle donnée par l'intégrale de Komar.

P^0 donne la même valeur de l'énergie $E = M$ que celle donnée par l'intégrale de Komar. Ceci conforte la validité de la définition donnée par Landau et Lifchitz de leur pseudo-tenseur d'énergie-impulsion du champ gravitationnel.

Le résultat égal donnant le flux sortant à travers la surface d'une sphère à l'infini (élément métrique défini par $r^2\sin\theta d\theta d\varphi$) s'obtient à partir de définitions de flux différents décrits par les expressions suivantes

$$n_\mu \sigma_\nu (K^\nu)^{;\mu} = \frac{x^i h^{00i}}{r} = \partial_\sigma(\lambda^{00\rho\sigma}) = \partial_\sigma\left[\frac{(-g)(g^{00}g^{i\sigma} - g^{0i}g^{0\sigma})}{16\pi G}\right],$$

(Terme de l'intégrale de Komar) = (Terme du pseudo-tenseur)

où $K^\nu = \{1,0,0,0\}$ est le vecteur de Killing temps et n_μ, σ_ν respectivement les vecteurs covariants normaux temporels et spatiaux. Le calcul de l'intégrale de Komar en coordonnées cartésiennes, permettrait de mettre en correspondance analytique les termes des deux formes.

Composantes spatiales du pseudo-tenseur en coordonnées de Schwarzschild

Pour les composantes spatiales elles sont données par l'intégrale

$$P^i = \frac{1}{2c} \oint h^{i0i} \frac{x^i}{r} (r^2) \sin(\theta) (d\theta) d\phi = 0$$

car $h^{\mu\nu\rho}$ étant réduit à h^{00i} et h^{0i0}, les composantes h^{i0i} sont nulles.

Remarquons que cette manière de calculer l'énergie du trou noir est plus complète que celle donnée par l'intégrale de Komar, car ici nous définissons une 4-impulsion totale de la matière et du champ gravitationnel et pas seulement l'énergie.

Interprétation physique de l'énergie d'un trou noir calculée par l'intégrale de Komar

Ce qui précède et qui semble paradoxal puisque dans la forme cartésienne de Painlevé on trouve un résultat nul pour le flux "d'énergie" évalué par la composante temporelle du pseudo-tenseur alors que dans la forme de Schwarzschild pour le même calcul on retrouve l'énergie de masse du trou noir qui avait été évaluée par l'intégrale de Komar appelle la remarque suivante.

L'intégrale de Komar se réfère aux observateurs statiques (qui ressentent le champ gravitationnel, même s'il devient asymptotiquement nul ceci étant compensé par la surface de la sphère qui tend vers l'infini) sur une surface sphérique statique enveloppant le trou noir.

Ces observateurs ressentant un champ cela correspond à un flux traversant non nul.

Pour la forme de Painlevé, les observateurs sont co-mobiles de l'espace donc du "flux gravitationnel" en effondrement. Le flux ne traverse donc pas les surfaces attachées à ces observateurs ce qui explique qu'ils ne ressentent pas la gravitation.

Ceci sera confirmé par le calcul de la masse ADM au chapitre *18*.

17 – Un modèle de la forme de Painlevé à caractère pseudo-minkowskien

---

À travers un projet pédagogique, Hamilton A. & Lisle J. (2006) nous proposent un exposé très argumenté d'une description, à travers la forme de Painlevé, de la solution de la relativité générale que nous étudions où le caractère pseudo-newtonien est mis au cœur de la démonstration, avec ses limites, bien entendu. Nous en reprendrons la ligne générale pour la compréhension et compléterons l'analyse dans le sens de l'objectif que nous poursuivons.

Introduction

Les auteurs du modèle [533]se proposent de matérialiser l'espace-temps à symétrie sphérique de façon imagée en le considérant comme une rivière s'écoulant dans un espace opératoire euclidien où le fluide (qui est du vide) constituant cette "rivière" est réputé incompressible.

Les objets dans l'espace-temps se meuvent alors dans, et par rapport à, cette "rivière" conformément aux lois de la relativité restreinte.

Nous analyserons les propriétés structurelles de la forme de Painlevé qui autorisent un tel niveau de simplification, mais qui ne s'appliquent qu'à certains types d'espaces-temps[534].

L'exposé mathématique formel, même réduit aux parties concernées par notre propos, étant assez technique il a été reporté, en grande partie, dans l'annexe *3*, chapitre *17*. Dans ce qui suit, nous nous en tiendrons à l'essentiel, pour comprendre les caractéristiques remarquables évoquées.

Équations utilisées pour poser le problème

En coordonnées cartésiennes la métrique de Painlevé s'écrit[535]:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu}(dx^\mu - \beta^\mu dx^0)(dx^\nu - \beta^\nu dx^0). \qquad (17\text{-}1)$$

Les composantes du quadrivecteur vitesse $\boldsymbol{v_{ff}}$ d'un observateur de Painlevé, dans la base globale $\boldsymbol{g_\mu}$ sont définies par

$$v_{ff}{}^\mu = (1, \beta^1, \beta^2, \beta^3), \qquad (17\text{-}2)$$

avec[536]

$$\beta^\mu = \beta\left(0, -\frac{x}{r}, -\frac{y}{r}, -\frac{z}{r}\right) \quad , \qquad (17\text{-}3)$$

et

$$\beta = \sqrt{\frac{2GM}{r}} \quad . \qquad (17\text{-}4)$$

---

[533]Hamilton A. & Lisle J. (2006).

[534]Nous avons souligné au chapitre *3* l'importance la structure conforme de ce type d'espace-temps révélée par Painlevé. En plus de ce cas, les auteurs montrent que la méthode s'applique à la solution de Kerr. (Corps unique).

[535]La transformation de coordonnées est simple, car : $dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) = dx^2 + dy^2 + dz^2$ et $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. En développant (17-1) on obtient: $ds^2 = -dT^2(1-\beta^2) - 2\,dT(\beta^x.dx + \beta^y.dy + \beta^z.dz) + dx^2 + dy^2 + dz^2$.

[536]Comme nous l'avions indiqué ce vecteur est de type espace, car $\beta^\mu\beta_\mu > 0$ dans cette métrique de Painlevé.

On définit une base orthonormée de vecteurs $\boldsymbol{\gamma_m}$ satisfaisant à :

$$\boldsymbol{\gamma_m}\,\boldsymbol{\gamma_n} = \boldsymbol{\eta_{mn}}. \qquad (17\text{-}5)$$

Nous imposons que cette base de vecteurs soit celle de l'observateur en chute libre radiale sans précession, ce qui implique que les vecteurs γ_m sont transportés parallèlement le long de la ligne d'univers de cet observateur, ce qui s'écrit : [537]

$$v_{ff}^{\mu}\frac{\partial \vec{\gamma}_m}{\partial x^{\mu}} = 0 \qquad (17\text{-}6)$$

Pour simplifier la relation entre cette base cartésienne locale de vecteurs $\boldsymbol{\gamma_m}$ et la base cartésienne globale $\boldsymbol{g_\mu}$ nous pouvons imposer, sans perte de généralité, que les vecteurs $\boldsymbol{\gamma_m}$ soient alignés avec ceux du référentiel cartésien de Painlevé à l'infini.

L'espace-temps est un fluide qui coule dans un espace de fond euclidien

Alors la base de vecteurs γ_m et la base $\boldsymbol{g_\mu}$ de Painlevé satisfont en tout point à la relation [538]

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\gamma_0} = \boldsymbol{g_0} + \beta^i \boldsymbol{g_i} \\ &\boldsymbol{\gamma_i} = \boldsymbol{g_i} \qquad (i = 1, 2, 3). \end{aligned} \qquad (17\text{-}7)$$

La quadri-vitesse u^m d'une particule en chute libre, dans la base γ_m, se déduit de $u^m\boldsymbol{\gamma_m} = v^\mu \boldsymbol{g_\mu}$, ce qui implique [539]:

---

[537] Remarquons la forme vectorielle de l'équation *(17-6)*. Par convention on note les vecteurs en **caractères gras**. D'après le principe d'équivalence un vecteur $\boldsymbol{p}$ non accéléré (chute libre) reste au repos dans son référentiel (localement inertiel), sa dérivée par rapport au temps propre est nulle ($d\boldsymbol{p}/d\tau = 0$).
Les vecteurs $\boldsymbol{\gamma_m}$ sont donc transportés sans accélération si $d\boldsymbol{\gamma_m}/d\tau = 0$, condition qui est imposée par définition de la base tétradique "localement inertielle attachée à l'observateur en chute libre radiale". Montrons que la condition peut s'écrire sous la forme de l'équation *(17-6)*.
La condition $d\boldsymbol{\gamma_m}/d\tau = 0$ est équivalente à $u^n\,\partial_n\boldsymbol{\gamma_m} = 0$ d'après l'éq. *(17-11)*, dans la base tétradique où les coordonnées, d'un vecteur, sont x^n avec $u^n = dx^n/d\tau$. Dans le référentiel comobile de la rivière $u^n = (1, 0, 0, 0)$, comme $u^n\,\partial_n = v^\mu\,\partial/\partial x^\mu$ (d'après l'équation *(17-11)* où v^μ et $\partial/\partial x^\mu$ sont respectivement la quadri-vitesse et la dérivée en coordonnées globales). L'équation $d\boldsymbol{\gamma_m}/d\tau = 0$ est donc bien identique à $v^\mu\,\partial\boldsymbol{\gamma_m}/\partial x^\mu = 0$.
Vérifions qu'avec la définition de l'équation *(17-7)* des vecteurs de cette base cette condition est bien satisfaite, pour cela utilisons l'équation des coordonnées du transport parallèle d'un vecteur $\boldsymbol{v}$ qui s'écrit $dv^\mu/d\lambda + \Gamma^\mu_{\sigma\rho}\,dx^\rho/d\lambda . v^\sigma = 0$. L'équation *(17-7)* montre que $\boldsymbol{\gamma_0} = \boldsymbol{v_{ff}}$, L'équation s'écrit : $dv_{ff}^{\mu}/d\lambda + \Gamma^\mu_{\sigma\rho}\,v_{ff}^{\sigma}.v_{ff}^{\rho} = 0$. Comme $\boldsymbol{v_{ff}}$ est le vecteur tangent à la géodésique cette équation est satisfaite. Pour les vecteurs $\boldsymbol{\gamma_i = g_i}$, l'équation s'écrit: $dg_i^\mu/d\lambda + \Gamma^\mu_{\sigma\rho}\,g_i^\sigma.v_{ff}^\rho = \Gamma^\mu_{i\rho}\,g_i^i.v_{ff}^\rho = 0$, car $dg_i^\mu/d\lambda = 0$ et $g_i^\sigma = \delta_i^\sigma$, (condition vérifiée par Mathematica 4).
[538] Compte tenu de la relation $g_{\mu\nu} = e_\mu^{\ m}\,e_\nu^{\ n}\,\eta_{mn}$ reliant une base tétradique orthonormée à la métrique, l'équation *(17-1)* nous suggère la base tétradique donnée par *(17-7)*. La base tétradique est définie (en tout point) dans l'espace-temps tangent (ses vecteurs de base sont une combinaison linéaire de ceux de la base globale qui sont dans cet espace-temps tangent). Ici la transformation est particulièrement simple, seul le vecteur de base temporel $\boldsymbol{\gamma_0}$ de la base tétradique qui reste tangent à la géodésique suivie par l'observateur de Painlevé, ce qui fait qu'il reste orthogonal aux vecteurs de base spatiaux, diffère de son homologue ($\boldsymbol{g_0}$) comme indiqué.
[539] On reporte *(17-7)*, donnant la valeur des vecteurs $\boldsymbol{\gamma}$ en fonction des vecteurs $\boldsymbol{g}$ dans cette expression et on identifie les coefficients des vecteurs $\boldsymbol{g}$ correspondants soit: $u^m\gamma_m = u^0\gamma_0 + u^i\gamma_i = u^0(g_0 + \beta^i g_i) + u^i g_i = v^0 g_0 + v^i g_i \rightarrow (u^0 = v^0,\ u^i = v^i - u^0\beta^i) \rightarrow (u^0 = v^0,\ u^i = v^i - v^0\beta^i)$. Notons que la relation (17-8) donne les composantes d'un vecteur dans la base de la rivière par rapport à celles dans la base générale. On peut inverser *(17-8)* pour

$$u^0 = v^0,$$
$$u^i = v^i - \beta^i v^0 \ (i = 1, 2, 3). \qquad (17\text{-}8)$$

Physiquement la quadri-vitesse u^m est la quadri-vitesse relative par rapport au flot de la rivière.

Les relations *(17-8)* ressemblent à celles d'une transformation galiléenne qui ne modifient que les composantes spatiales du vecteur, laissant la composante temporelle inchangée, si ce n'est que dans les équations *(17-8)* les quadri-vitesses u^m et v^μ font intervenir des dérivées par rapport au temps propre de la particule en chute libre, ce qui est relativiste et non pas par rapport au temps absolu de la mécanique newtonienne.

Mais, ceci démontre[540], équations *(17-7)* et *(17-8)*, la première des deux propriétés que nous avions revendiquées pour le modèle des trous noirs à symétrie sphérique, à savoir que la rivière coule de façon galiléenne dans un espace de fond euclidien.

Les objets se meuvent dans le fluide espace-temps selon les lois de la relativité restreinte

Mais le temps propre est une propriété des objets se déplaçant dans le fluide espace-temps (la rivière), et pas du mouvement de ce fluide dans l'espace de fond euclidien. Les objets se déplaçant dans ce fluide s'y déplacent conformément aux règles de la Relativité Restreinte.

Le référentiel de Lorentz (local), entraîné par le fluide, a été construit de sorte à être celui de l'observateur de Painlevé (en chute libre radiale sans vitesse initiale à l'infini).

Mais en général un autre observateur en chute libre sur une autre géodésique[541] va constater que la base de vecteurs minkowskienne attaché à son référentiel va se désaligner de celle de l'observateur de Painlevé.

Ce désalignement est déterminé mathématiquement par les équations du mouvement des objets, caractérisés par des quadrivecteurs, représentés dans le référentiel de Lorentz.

Dans l'annexe *3*, chapitre *17*, nous démontrons, mathématiquement en définissant et calculant tous les éléments impliqués dans le calcul, que les objets se meuvent dans la rivière selon les lois de la relativité restreinte, subissant des entraînements de Lorentz liés aux effets de marée associés aux différences de vitesse du flot [542]. Nous en donnons les résultats obtenus.

Pour un vecteur $\boldsymbol{p}$ de composantes p^k représentant par exemple l'impulsion d'une particule de test, le mouvement est régi par l'équation géodésique dans le référentiel local de base $\boldsymbol{\gamma_m}$.

---

obtenir : $v^0 = u^0$ et $v^i = u^i + u^0\beta^i$, (*17-8bis*).

[540]Rappelons que la base tétradique, co-mobile de la rivière, ainsi définie satisfait bien aux conditions d'orthogonalité et d'espace-temps plat, et ceci dans le cadre de la forme de la métrique considérée.

[541]L'auteur traite de la déviation géodésique. L'étude de la congruence formée par les géodésiques radiales suivies par les observateurs de Painlevé, montrerait cet effet "de marée" qui est représenté par la déviation géodésique. Ce modèle ne traite que des mouvements géodésiques. Le mouvement non géodésique n'est qu'évoqué.

[542]Le fait que la RR s'applique dans la base tétradique est mis en œuvre implicitement par le fait que les quadrivecteurs sont définis dans la base tétradique $\boldsymbol{\gamma_m}$ obéissant à la relation *(17-5)* qui caractérise un espace-temps de Minkowski. Pour ce qui est des effets de marée ils vont être décrits que localement, ce qui permet d'en dessiner une carte, mais une intégration est nécessaire pour être exploitable mathématiquement.

$$\frac{d\,p^k}{d\,\tau}+\Gamma^{k}_{mn}u^n\,p^m=0 \quad , \qquad (17\text{-}16)$$ [543]

où Γ^{k}_{mn} sont les coefficients de la connexion dans le référentiel local, appelés "coefficients de rotation de Ricci" qui sont l'équivalent des symboles de Christoffel associés à une connexion métrique. Le quadrivecteur u^n a été défini par *(17-8)*.

Ici pour un trou noir à symétrie sphérique, il se trouve que les coefficients de rotation de Ricci non nuls sont les gradients spatiaux des composantes de la vitesse de la rivière :

$$\Gamma^{0}_{ij}=\Gamma^{i}_{0\mathrm{j}}=\frac{\partial\,\beta^i}{\partial\,x^j} \qquad (i\,,\,j=1,2,3) \quad . \qquad (17\text{-}17)$$

Ceci est une propriété non triviale reflétant une structure d'espace-temps particulière[544].
En reportant dans les équations *(17-16)* et *(17-17)* on obtient :

$$\frac{d\,p^0}{d\,\tau}=\frac{-\partial\,\beta_i}{\partial\,x^j}u^j\,p^i, \qquad \frac{d\,p^i}{d\,\tau}=\frac{-\partial\,\beta_i}{\partial\,x^j}u^j\,p^0, \qquad (i=1,2,3) \quad . \qquad (17\text{-}18)$$

Les sommations sur les paires d'indices dans les équations *(17-18)* sont formellement sur les quatre indices *0, 1, 2, 3* mais en pratique cela se réduit aux sommes sur les trois indices spatiaux 1, 2, 3, car le vecteur d'entraînement a une composante temporelle nulle, $\beta^0 = 0$, comme nous l'avons défini et une dérivée temporelle nulle: $\partial\beta^\mu/\partial x^0 = 0$. [545]

Interprétation physique des équations du mouvement dans ce modèle

Dans le contexte du modèle de la rivière les équations du mouvement *(17-18)* ont l'interprétation suivante :

Dans un intervalle $\delta\tau$ de temps propre, une particule se déplace d'une distance $\delta x^i = v^i\delta\tau$ dans les coordonnées cartésiennes de Painlevé et d'une distance propre $\delta\xi^i = u^i\delta\tau = \delta x^i - \beta^i\delta T$ [546]relativement au flot de la rivière.

La distance propre $\delta\xi^i$ est égale à la distance δx^i moins la distance $\beta^i\delta T$ parcourue par la rivière.

[543]C'est l'équation géodésique standard, ici dans le référentiel tétradique. Cela se déduit directement de *(17-10)* en utilisant *(17-11*) et *(17-13)* pour le deuxième terme. Bien qu'étant dans un référentiel minkowskien, pour une géodésique le terme Γ^{k}_{mn} n'est pas nul, car il décrit une géodésique du référentiel global. Certes, les bases tétradiques sont locales et plates mais elles sont définies en chaque point par rapport au référentiel global et leur variation doit être prise en compte, comme l'équation *(17-10)* qui décrit un vecteur inertiel dont se déduit *(17-16)*, qui décrit ce vecteur inertiel dans la base tétradique le montre.
[544]Nous avions signalé cette propriété dans le chapitre 3 et sa synthèse, lorsque nous avions étudié l'échec de la proposition de Painlevé consistant à étendre la méthode qu'il avait utilisé en mécanique newtonienne.
[545]La métrique étant stationnaire, β ne dépend pas de x^0.
[546]Cela se déduit de *(17-8)* en utilisant la définition de u^i par rapport à v^i.

Dans les coordonnées cartésiennes de Painlevé, la vitesse β^i de la rivière à la nouvelle position diffère de celle à l'ancienne position de $\delta x^j - \partial\beta^i/\partial x^j$.
Cependant dans le modèle de la rivière, une particule se déplaçant dans la rivière ne voit pas la totalité du changement de la vitesse de la rivière relativement aux coordonnées globales, mais uniquement celui lié aux effets de marée [547]

$$\delta \beta^i = \frac{\partial \beta^i}{\partial x^j} \delta \xi^j \quad , \qquad (17\text{-}19)$$

dans la vitesse de la rivière relativement au référentiel localement inertiel en chute libre.

Par exemple si la particule est co-mobile du flot de la rivière, de sorte que $\delta\xi^i = 0$, alors la particule ne voit aucun changement du tout [548] dans la vitesse de la rivière au cours du temps, $\delta\beta^i = 0$.

Le changement infinitésimal $\delta\beta^i$, lié à l'effet de marée induit un entraînement de Lorentz du quadrivecteur p^m :

$$p^0 \to p^0 - \delta\beta_i p^i \qquad p^i \to p^i - \delta\beta^i p^0 \quad (i = 1,2,3) \ . \qquad (17\text{-}20)$$

Les équations *(17-19)* et *(17-20)* [549] reproduisent les équations du mouvement (*17-18*).

Ceci illustre comment, quand une particule se meut dans la rivière d'espace, sa quadri-vitesse, ou plus généralement tout quadrivecteur qui lui est attaché subit un boost de Lorentz consécutif aux effets de marée dans la vitesse de la rivière.

Introduction d'un espace de fond plat.

Rappel des équations fondatrices liées à cette représentation

Nous allons maintenant exposer un autre point qui corrobore le caractère très particulier que nous avions remarqué à propos de l'équation géodésique.

Dans ce qui précède, nous nous sommes référés à la forme cartésienne de Painlevé en général, mais sans tenir compte la forme particulière très simple des tétrades dans notre exemple.

C'est cette forme très simple des tétrades et de leurs dérivées qui fait que le calcul des connexions Γ_{kmn} (coefficients de rotation de Ricci) à partir de *(17-22)* et *(17-21)*[550] donne le résultat simple *(17-17)*.

---

[547] Un corps étendu subit un effet de marée longitudinal et transversal du fait que la vitesse de la rivière est différente dans les différents points de cet objet.
[548] Le changement est "absorbé" par le référentiel tétradique. Elle est au repos par rapport au flot.
[549] Les équations *(17-20)* se déduisent de *(17-18)* et *(17-19)*, il suffit de multiplier *(17-18)* par $d\tau$ et d'utiliser la définition de $\delta\beta^i$ de *(17-19)* en remarquant que $\delta\xi^i = u^i.d\tau$
[550] Ces deux équations sont données dans la suite du paragraphe.

Définissons comme d'habitude les inverses des tétrades $e_m{}^\mu$ par

$$\boldsymbol{\gamma_m} = e_m{}^\mu \boldsymbol{g_\mu},$$

la relation *(17-17)* s'écrit alors

$$\boldsymbol{\gamma_0} = e_0{}^\mu \boldsymbol{g_\mu}. = g_0 + \beta^i g_i,$$
$$\boldsymbol{\gamma_i} = e_i{}^\mu \boldsymbol{g_\mu}. = g_i,$$

nous en déduisons que[551]

$$e_m{}^\mu = \delta_m{}^\mu + \delta_m{}^0 \beta^\mu,$$

en définissant les tétrades

$$e_\mu{}^m \quad \text{par } \boldsymbol{g_\mu} = e_\mu{}^m \ \boldsymbol{\gamma_m},$$

comme *(17-7)* peut s'écrire

$$g_0 = \gamma_0 - \beta^i \gamma_i,$$
$$g_i = \gamma_i,$$

on en déduit que :

$$e_\mu{}^m = \delta_\mu{}^m - \delta_\mu{}^0 \beta^m.$$

On remarque la forme très simple de cette tétrade qui comme les relations ci-dessus le montrent décrit la base globale de vecteurs $\boldsymbol{g_\mu}$ de la forme de Painlevé dans la base minkowskienne de vecteurs locaux $\boldsymbol{\gamma_m}$, donc leur relation.

Rappelons que :

$$g_{\mu\nu} = \eta_{mn}\, e^m{}_\mu\, e^n{}_\nu.$$

Les relations remarquables entre l'espace de Minkowski, le trou noir et le trou blanc

Les formules ci-dessus montrent le caractère remarquable de la relation entre la matrice *(4x4)* décrivant la tétrade, qui représente formellement la relation entre l'espace-temps de Minkowski (plat) et l'espace-temps de la solution de Schwarzschild (courbe) dans les coordonnées de la forme de Painlevé (elle décrit les vecteurs de base de l'espace-temps courbe dans la base orthonormée minkowskienne) et la matrice *(4x4)* de la tétrade inverse qui fait l'inverse comme son nom l'indique.

En effet, si l'une est l'inverse de l'autre, nous savons qu'inverser une matrice n'est pas une opération très simple dans le cas général et que, lorsqu'on compare les deux, la relation entre ses termes correspondants n'est pas évidente.

Ici la matrice décrivant la relation entre l'espace-temps minkowskien et l'espace-temps de la solution de Schwarzschild est représentée par la somme de la matrice identité $\delta_\mu{}^m$ et d'une

[551] $\delta_m{}^\mu$ est le symbole de Kronecker qui vaut *1* si $\mu = m$ et *0* dans le cas contraire.

matrice où un seul vecteur (colonne et spatial) n'est pas nul ce qui fait que l'inverse ne diffère que par le fait que le vecteur spatial est de signe opposé.

Ceci souligne certaines propriétés structurelles remarquables de cette forme auxquelles il faut ajouter que :

Si nous considérons l'anti-univers correspondant à l'autre forme de la métrique où le signe du produit croisé *dr.dt* est l'inverse alors nous constatons que la tétrade du trou noir est égale à la tétrade inverse du trou blanc et vice versa.

Ces relations très simples nous laissent supputer que les deux systèmes de coordonnées sont très proches l'un de l'autre, bien que ces systèmes de coordonnées soient de nature différente.

Rappelons que les Γ_{kmn} sont définis (dans la métrique globale) à partir des tétrades $e_m^{\ \mu}$, de leurs inverses $e_\mu^{\ m}$ et de leur dérivées métriques par[552]

$$d_{kmn} = \eta_{kl} e^l_{\ \lambda} e^{\nu}_{\ n} \frac{\partial (e^{\lambda}_{\ m})}{\partial x^{\nu}} \quad , \qquad (17\text{-}21)$$

et

$$\Gamma_{kmn} = \frac{1}{2}(d_{kmn} - d_{mkn} + d_{nmk} - d_{nkm} + d_{mnk} - d_{knm}) \quad . \qquad (17\text{-}22)$$

Le calcul explicite des coefficients de connexion, équation *(17-22)*, à partir des tétrades que nous venons de définir montre que l'expression se simplifie considérablement.

Où le caractère nul du pseudo-tenseur de gravitation s'invite dans les équations.

Autrement dit, dans l'équation *(17-22),* les facteurs $e^l_{\ \lambda}\ e^{\nu}_{\ n}$ des termes d_{kmn} de l'équation *(17-21)* dont le rôle consistait à effectuer les transformations de coordonnées entre la base minkowskienne locale et la base globale, non minkowskienne dans les coordonnées de la forme de Painlevé et vice versa peuvent être remplacés par les symboles de Kronecker $\delta^l_{\ \lambda}\ \delta^{\nu}_{\ n}$. Ceci caractérise une transformation identité (il n'y a que les indices qui changent), comme l'équation *(17-23)* ci-dessous l'indique. On constate que cette substitution ne change pas le résultat du calcul donnant la valeur de Γ_{kmn}.

$$d_{kmn} = \eta_{kl}\, \delta_\lambda^{\ l} \delta_n^{\ \nu} \partial_\nu e_m^{\ \lambda} \ \rightarrow \delta_n^{\ \nu} \partial_\nu \delta_m^{\ 0} \beta_k \qquad (17\text{-}23)$$

Dans ces conditions l'expression *(17-23)* se ramène à une dérivée partielle en espace de Minkowski de fonctions scalaires, ce qui va se retrouver comme nous l'avions noté dans Γ_{kmn}.

[552]Le formalisme est bien explicité (avec des notations différentes) dans Landau & Lifchitz (1994) § 98 p. 379-385. Notons la dérivée non covariante dans *(17-21)*. Comme on utilise *(17-21)* pour calculer *(17-22)*, cela est équivalent à une dérivée covariante. La partie covariante s'annule par antisymétrie sur les deux derniers indices des $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$.

Remarquons que l'indice k de β a été abaissé par la métrique de Minkowski η_{kl} pour satisfaire la forme de d_{kmn}, mais que comme la composante *0* de β^k est nulle, $\beta^k = \beta_k$.

Notons bien que les valeurs de d_{kmn} par les équations *(17-21)* et *(17-23)* ne sont pas identiques, en effet, les calculs de d_{kmn} donnent les composantes non nulles reproduites en annexe au chapitre correspondant[553].
Comme les coefficients de rotation de Ricci sont représentatifs de la courbure d'un espace-temps dans le formalisme des tétrades, le fait qu'ils s'expriment simplement par une dérivée partielle en espace de Minkowski est symptomatique d'une phénoménologie de type euclidien (on décrit des courbes qu'on peut décrire en géométrie euclidienne dans un espace de Minkowski).

Ce caractère non trivial confirme les éléments que nous avions déjà signalés et, dans l'annexe *3*, nous analysons comment la structure des éléments impliqués dans équations impliquées conduit à cette simplification.

Introduction des coordonnées en espace plat.

Nous pouvons alors utiliser le fait que la dérivée $e_n^{\nu}\partial/\partial x^{\nu}$ dans l'équation *(17-21)* peut être remplacée par $\delta_n^{\nu}\partial/\partial x^{\nu}$ pour introduire un nouvel ensemble de coordonnées d'espace plat x^n, avec des indices latins, ayant, par définition, la propriété donnée par *(17-24)* dans le système de coordonnées de la forme de Painlevé et la base lorentzienne particulière que nous utilisons :

$$\frac{\partial}{\partial x^n} = \delta_n^{\nu}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \quad . \qquad (17\text{-}24)$$

La relation invariante $dx^n\partial/\partial x^n = dx^{\nu}\partial/\partial x^{\nu}$ [554] implique alors que les différentielles d'espace plat dx^n sont liées aux différentielles des coordonnées dx^{ν} par :

$$dx^n = \delta_{\nu}^n dx^{\nu} \quad . \qquad (17\text{-}25)$$

Insistons bien sur le fait que les relations *(17-24)* et *(17-25)* ne sont valables que dans le système de coordonnées particulier (Painlevé cartésien) et dans la base tétradique particulière que nous utilisons[555], ce que nous montrons en annexe *3*.

Dans le système de coordonnées particulier que nous utilisons (global et tétradique), l'intégration générale de la relation *(17-25)* dans l'espace, (on a posé la constante d'intégration à zéro, sans perte de généralité), donne :

$$x^n = \delta_{\nu}^n x^{\nu} \quad . \qquad (17\text{-}27)$$

[553]Calculés par Mathematica 4, les indices des composantes sont notées de *1* à *4* où 1 est le temps *(t)* et *2, 3, 4* respectivement *x, y, z*. On donne la ligne de commande avec des notations évidentes.
[554]C'est le vecteur "intervalle" invariant ***dx*** qui est mentionné au chapitre précédent.
[555]Les relations ne sont pas covariantes (ne se transposent pas dans un autre système de coordonnées)

Mais ne nous laissons pas abuser par la notation indicielle, en fait, ni x^n ni x^ν ne sont des quadrivecteurs, ils ne sont pas invariants par des transformations de jauge locales de la tétrade ou par des transformations générales des coordonnées globales (seules les différentielles dx^n et dx^ν sont des quadrivecteurs), donc l'équation *(17-27)* ne doit pas être interprétée comme une relation covariante reliant les coordonnées x^n aux coordonnées x^ν.

On peut cependant interpréter l'équation *(17-27)* comme définissant les coordonnées d'espace plat x^n : elles ont numériquement la même valeur que les coordonnées globales courbes x^ν de la métrique cartésienne de Painlevé, mais transposées dans le cadre d'un espace plat de métrique minkowskienne.

Les coordonnées de Painlevé présentent donc la particularité de pouvoir être utilisées comme coordonnées d'un espace de fond plat dans lequel la rivière d'espace coule, dans les trous noirs statiques.

Les coordonnées d'espace-temps plat x^n ne sont pas les mêmes que les coordonnées localement inertielles ξ^n associées à la base tétradique γ_n en chaque point de l'espace-temps. Les différentielles localement inertielles $d\xi^n$ sont liées aux différentielles des coordonnées dx^ν par

$$d\,\xi^n = e^n_\nu\, dx^\nu \quad , \qquad (17\text{-}28)$$

qui diffèrent de la relation correspondante *(17-25)* entre dx^n et dx^ν.

En utilisant ceci, revenons à l'équation géodésique d'un quadrivecteur non accéléré[556]:

$$\frac{d\,p^0}{d\,\tau} = -\left(\frac{\partial\,\beta_i}{\partial\,x^j}\right) u^j\, p^i\,, \qquad \frac{d\,p^i}{d\,\tau} = -\left(\frac{\partial\,\beta_i}{\partial\,x^j}\right) u^j\, p^0\,, \qquad (i = 1,2,3) \quad . \qquad (17\text{-}18)$$

L'équation géodésique dans la base lorentzienne *(17-18)*, utilise $\partial\beta^i/\partial x^j$ comme seul paramètre caractéristique, c'est ce qui nous a permis d'affirmer que le mouvement global dans les coordonnées globales de Painlevé est bien le résultat du "produit" au sens formel du mouvement de la rivière dans un espace euclidien 3D par le mouvement dans l'espace de Minkowski local 4D.

Relation entre les coefficients de rotation de Ricci et symboles de Christoffel.

Si on calcule la valeur des $\Gamma^k{}_{mn}$ non nuls avec

$$\beta^i = -\sqrt{2\,M}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{4}{3}}\left[x^i\right] \quad ,$$

pour[557]

$$\partial\,\beta^i/\partial x^j = \Gamma^0{}_{ij} = \Gamma^i{}_{0j},$$

[556]Que l'indice *i* soit élevé dans une des équations ne pose pas de problème, car la métrique spatiale est euclidienne.
[557]Calculs fait avec Mathematica 4.

nous obtenons :

$$\begin{array}{ccc}
\frac{\sqrt{m}\,\left(x^2-2\left(y^2+z^2\right)\right)}{\sqrt{2}\,\left(x^2+y^2+z^2\right)^{7/4}} & \frac{3\sqrt{m}\,x\,y}{\sqrt{2}\,\left(x^2+y^2+z^2\right)^{7/4}} & \frac{3\sqrt{m}\,x\,z}{\sqrt{2}\,\left(x^2+y^2+z^2\right)^{7/4}} \\
\frac{3\sqrt{m}\,x\,y}{\sqrt{2}\,\left(x^2+y^2+z^2\right)^{7/4}} & \frac{\sqrt{m}\,\left(-2\,x^2+y^2-2\,z^2\right)}{\sqrt{2}\,\left(x^2+y^2+z^2\right)^{7/4}} & \frac{3\sqrt{m}\,y\,z}{\sqrt{2}\,\left(x^2+y^2+z^2\right)^{7/4}} \\
\frac{3\sqrt{m}\,x\,z}{\sqrt{2}\,\left(x^2+y^2+z^2\right)^{7/4}} & \frac{3\sqrt{m}\,y\,z}{\sqrt{2}\,\left(x^2+y^2+z^2\right)^{7/4}} & \frac{\sqrt{m}\,\left(-2\,x^2-2\,y^2+z^2\right)}{\sqrt{2}\,\left(x^2+y^2+z^2\right)^{7/4}}
\end{array}$$

Si nous comparons ces valeurs avec les valeurs des symboles covariants de Christoffel Γ_{0ij} dans les coordonnées de la métrique de Painlevé reproduits en annexe *3*, nous constatons que les neuf coefficients de rotation de Ricci $\Gamma^{0}{}_{ij}$ ci-dessus sont égaux[558] aux neuf symboles de Christoffel Γ_{0ij} de même indices calculés dans les coordonnées globales de Painlevé.

L'identité des valeurs des symboles de Christoffel (utilisés en espace courbe pour décrire la courbure, ici dans les coordonnées de la forme de Painlevé) et des coefficients de rotation de Ricci (utilisés pour décrire la variation relative du référentiel local plat dans la représentation "tétradique" en espace local minkowskien) confirme la possibilité de l'existence d'une égalité en valeur des coordonnées courbes et plates.

Rappelons que les Γ_{0ij} sont symétriques par rapport à *i, j,* (composantes Γ_{0ji} non listées).

Les coefficients de rotation de Ricci sont un sous ensemble des symboles de Christoffel puisque ceux-ci comportent en plus des composantes avec deux indices temporels.

Mais quand on considère la relation de transformation

$$\Gamma_{kmn} = d_{kmn} + e_k^{\kappa} e_m^{\mu} e_n^{\nu} \Gamma_{\kappa\mu\nu} \quad , \qquad (17\text{-}29)$$

entre les symboles de Christoffel et les coefficients de rotation de Ricci, relation plutôt compliquée, si on tient compte de la définition *(17-25)* de d_{kmn}, le fait qu'une grande partie des composantes se transforme identiquement paraît miraculeux.

En fait la transformation élimine les composantes à deux indices temporels et symétrise Γ_{0ij} sur les 2 premiers indices et l'annexe *8* montre comment la transformation $e_k^{\kappa} e_m^{\mu} e_n^{\nu} \Gamma_{\kappa\mu\nu}$ élimine les termes Γ_{0i0} et comment l'ajout de d_{kmn} élimine les Γ_{i00}, et symétrise les termes Γ_{0ij} restants sur les 2 premiers indices[559].

Ceci dévoile le lien étroit entre la forme globale de Painlevé et la forme locale considérée.

---

[558] Au signe près, mais cela est lié au fait que le premier indice qui vaut *0* est haut dans un cas et bas dans l'autre et que élever ou abaisser cet indice utilise $\eta^{00} = \eta_{00} = -1$

[559] Nous verrons au chapitre *18* que $\Gamma^{0}_{i\,j}$ est un tenseur symétrique K_{ij} à deux indices qui est la projection du tenseur de courbure extrinsèque sur l'hypersurface spatiale à t = constante dans la forme de Painlevé.

Équation géodésique et référentiel local en coordonnées cartésiennes de Painlevé

Rappel de l'équation géodésique

Nous avons eu l'occasion dans les chapitres précédents de décrire l'équation géodésique radiale entrante dans de nombreux systèmes de coordonnées.

Dans ce chapitre nous en avons implicitement traité puisque la méthode pour construire les équations invoquant la base de vecteurs associés à l'espace-temps local minkowskien (espace de Lorentz) s'appuie sur un transport parallèle, au sens de la relativité générale, de cette base le long de cette géodésique en coordonnées cartésiennes.

Pour clore ce chapitre, il convient donc de rappeler et préciser certaines caractéristiques et certains attributs de cette géodésique et de positionner les vecteurs de la base, définissant l'espace-temps de Lorentz, dans l'espace-temps tangent dans la représentation.

Ceci rappelé, représentons maintenant l'équation géodésique radiale entrante $\tau(r)$ dans la forme de Painlevé, en posant $2M, G, c = 1,$ on trouve qu'elle s'écrit

$$\tau = T = -(2/3).r^{3/2} + r_{0,}$$

où r_0 est une constante d'intégration.

Pour se ramener aux cas des coordonnées cartésiennes, on a représenté une géodésique sur l'axe $\boldsymbol{x}$, (dans le plan défini par $y = z = 0$), ce qui fait que $x = r$.

Compte tenu de la symétrie sphérique du problème, cette solution est représentative de la solution générale du problème (on peut par des rotations s'y ramener).

L'équation géodésique

$$\tau = T = -(2/3).x^{3/2} + 10,$$

est représentée sur la figure *17-1*.

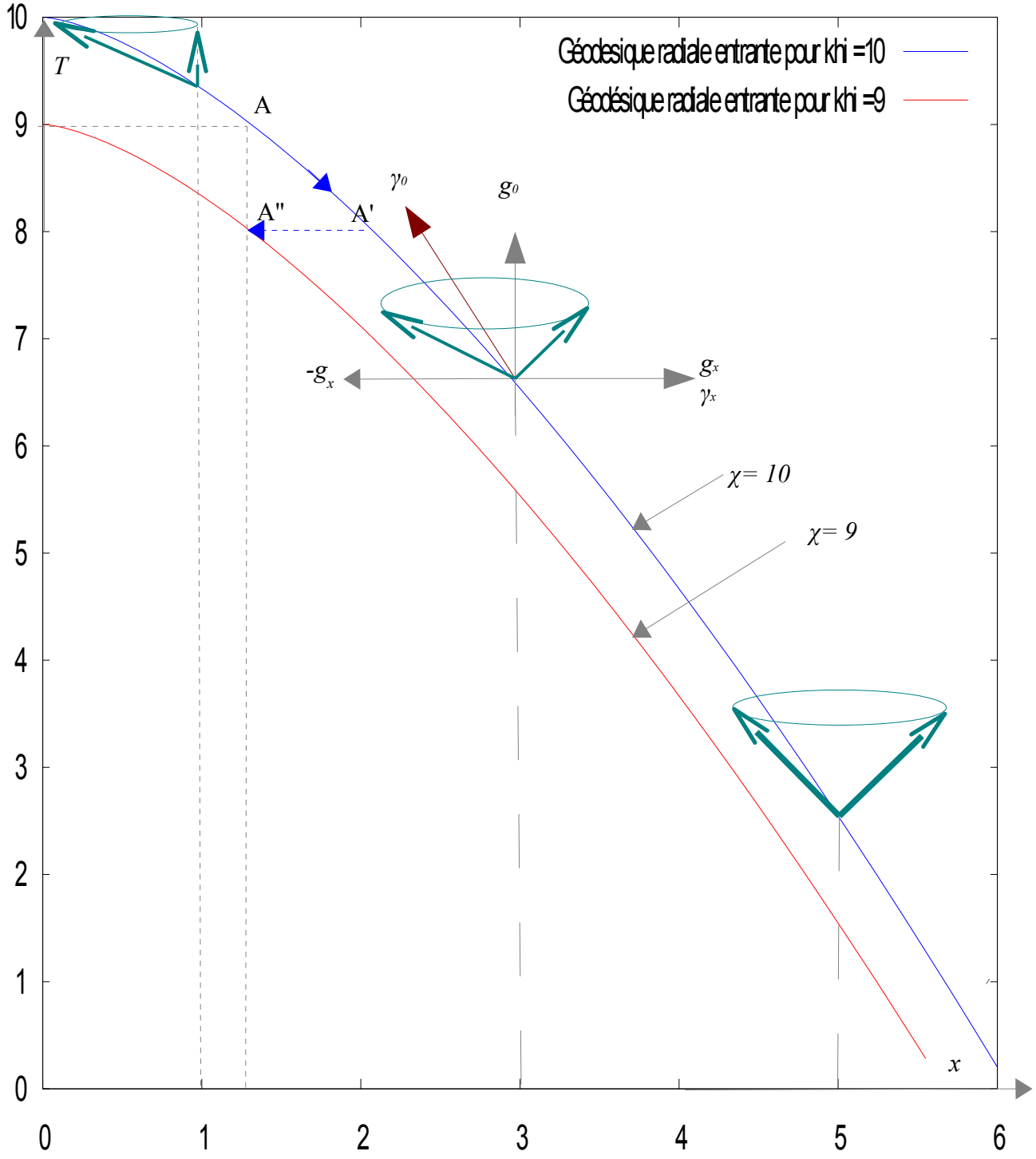


Figure 17-1. *Représentation*[560] *de l'équation géodésique :* $\tau = T = -(2/3)x^{3/2} + \chi$, *pour 2 valeurs de* χ.

Pour $\chi = 10$, en $x = 3$, $T \approx 6.5$, on a représenté le vecteur de base $\boldsymbol{g_x}$, flèche horizontale en noir, (et donc aussi $\boldsymbol{\gamma_x}$, puisqu'ils sont égaux), le vecteur de base $\boldsymbol{g_0}$, flèche verticale en noir, le vecteur de base $\boldsymbol{\gamma_0}$, flèche marron tangente à la géodésique et le cône de lumière en vert

[560]En utilisant le logiciel Maxima.

turquoise (on note sa dissymétrie en ce point, qui s'accentue quand ***x*** décroît, voir cône sur l'horizon à *x =1*)**.**

Notons que d'après l'équation *(14-15)*, les courbes géodésiques correspondent à χ = *constante,* χ étant la coordonnée spatiale de Lemaître**.**

La courbe montre que la vitesse de l'observateur $dx/dT = -c$ sur l'horizon ($x = 1$) et $dx/dT = \infty$ pour $x = 0$.

Malgré ce que la figure montre[561], nous savons que c'est $\boldsymbol{\gamma_0}$ qui est orthogonal en relativité restreinte à $\boldsymbol{\gamma_x}$ et donc à $\boldsymbol{g_x}$ et non pas $\boldsymbol{g_0}$[562]**.**

Le vecteur $\boldsymbol{\gamma_0}$ est identique (il a les mêmes composantes) à v_{ff} qui est tangent à la courbe, il reste orthogonal (en géométrie minkowskienne) à $\boldsymbol{\gamma_x}$ donc à $\boldsymbol{g_x}$. C'est bien le vecteur $\boldsymbol{g_0}$ qui tourne par rapport à $\boldsymbol{g_x}$ lorsqu'on décrit la géodésique, comme les termes croisés en *dt.dr* de la métrique le montrent.

Cette figure montre clairement que la ligne d'univers suivie par l'observateur de Painlevé est orthogonale en tout point aux hypersurfaces spatiale à *T = constante*, ce qui est bien une des propriétés qui était nécessaire pour construire la nouvelle coordonnée temps de la forme de Painlevé dont la quadri-vitesse covariante dans la forme de Schwarzschild est le gradient.

Cône de Lumière

Avec nos hypothèses (*2M, G, c =1, y = z = 0, x = r*), calculons aussi l'équation du cône de lumière qui se déduit de la forme de la métrique de Painlevé pour $ds^2 = 0$, soit :

$$-dT^2(1- x^{-1}) + 2dT\, dx(x^{-1/2}) + dx^2 = 0.$$

En divisant par dT^2 et en résolvant l'équation du second degré en (*dx/dT*)**,** on obtient :

$$dx/dT = \pm 1 - (x^{-1/2}),\ soit\ \ dT/dx = (x^{1/2})(\pm (x^{1/2}) -1)^{-1}.$$

La solution donnée par le signe + correspond aux rayons sortants, l'autre aux rayons entrants.

Lorsque ***x*** tend vers l'infini, $dT/dx \rightarrow \pm 1$.

Pour $x = 1$, $dT/dx \rightarrow \infty$, pour les rayons sortants et $dT/dx \rightarrow -1/2$ pour les rayons entrants.

[561]Ceci, malgré les apparences, c'est un artefact de la représentation cartésienne euclidienne de la métrique minkowskienne, puisque l'orthogonalité en relativité restreinte est caractérisée par la symétrie par rapport au cône de lumière.

[562]On représente des fonctions des coordonnées sur ce diagramme cartésien, Ceci est valable pour tous les diagrammes cartésiens de ce type (cf note chapitre *6*)

Pour $x = 0$, $dT/dx \rightarrow 0$.

Les intégrales, où T_0 est une constante d'intégration, sont respectivement

$$T = 2x^{1/2} + x + 2\ln|x^{1/2} - 1| + T_0 \text{ (rayons sortants)},$$
$$T = 2x^{1/2} - x - 2\ln(x^{1/2} + 1) + T_0 \text{ (rayons entrants)}.$$

Avant de poursuivre l'étude des géodésiques nulles il est bon de comparer les représentations dans les formes apparentées de Painlevé et de Lemaître afin d'en montrer la cohérence.

Comparaison des représentations en forme de Lemaître et de Painlevé.

Il est instructif de comparer les figures *(14-2)* et *(17-1)*. Commençons par rappeler que la coordonnée temporelle est la même dans les deux formes de la métrique.

Sur la figure *17*, l'équation géodésique correspond à χ = *constante,* χ étant la coordonnée spatiale dans la forme de Lemaître. Comme le montre l'équation *(14-15)* du chapitre *14*

$$r = \left(\frac{3}{2}\sqrt{2m}(\chi - t)\right)^{(2/3)} ,$$

fonction de $(\chi - t)$, dont est déduite l'équation géodésique avec $r_s = 1$ rappelée ci-dessous qui est représentée sur la figure *17-1*.

$$\tau = T = -(2/3)x^{3/2} + \chi ,$$

Ce qui peut aussi s'écrire

$$\chi = T + (2/3)x^{3/2}.$$

Deux géodésiques quelconques *Géo1* et *Géo2* se déduisent l'une de l'autre par translation parallèle (de paramètre $\chi_2 - \chi_1$) à l'axe des *t*.

Nous avions souligné l'invariance par translation parallèle à la droite *r* = *constante* sur la figure *14-2,* ce qui revient à dire que si on fait subir à un point une translation temporelle de valeur $t = k$, à χ = *constante* en enchaînant par une translation spatiale de valeur $\chi = k$, à *t* constant on retourne à la même valeur de *r*.

Sur la figure *17-1* cela se décline ainsi : partant de *A* de coordonnées $t = 9$, $r = r_1$ on parcourt l'arc de géodésique à χ constant $(\chi = 10)$ jusqu'à *A'* de coordonnées $t = 8$, $r = r_2$ $(k = \Delta t = -1)$ puis de *A'*, à *t* = *constante* (sur une ligne horizontale) on va jusqu'à la géodésique correspondant à $\chi = 8$, $(k = \Delta\chi = -1)$: on arrive alors en A" $(t = 8, r = r_1)$ de même valeur de *r*.

On remarque que la coordonnée χ est horizontale sur ce diagramme, le vecteur de base $(\partial_\chi)^\mu$ à coordonnée t constante est donc horizontal.

Il est parallèle à g_x mais non égal, comme le montre la relation ci-dessous :

$$\chi = T + (2/3)x^{3/2}$$

Néanmoins, $(\partial_\chi)^\mu$ est orthogonal à γ_0 comme l'était g_x, ce qui est normal puisque la coordonnée temporelle t étant la même pour les formes de Painlevé et Lemaître les hypersurfaces spatiales à t = *constante* sont les mêmes et comme γ_0 est orthogonal (en géométrie de Minkowski) à cette hypersurface il l'est à tous les vecteurs appartenant à cette hypersurface dont $(\partial_\chi)^\mu$ fait partie.

Mais il faut relever que alors que les vecteurs γ_0, γ_x, γ_y, γ_z forment une base orthonormée, la base associée aux vecteurs dérivant des coordonnées de Lemaître $(\partial_t)^\mu$, $(\partial_\chi)^\mu$, $(\partial_\theta)^\mu$, $(\partial_\varphi)^\mu$ est orthogonale en métrique de Lemaître (métrique diagonale) mais évidemment n'est pas orthonormée.

Représentation de quelques géodésiques nulles en forme de Painlevé

Ci-dessous nous avons représenté quelques géodésiques nulles caractéristiques. les tangentes en un point donnent la pente du cône de lumière local.

Temps de parcours de l'horizon à r = 0 pour une géodésique nulle et de Painlevé

En considérant en I_2, sur l'horizon, la géodésique nulle (lumière) en rouge et la géodésique de type temps suivie par l'observateur de Painlevé en bleu marine on constate que la géodésique lumière atteint la singularité avant l'observateur de Painlevé.

Le calcul par l'équation $T = 2x^{1/2} - x - 2\ln(x^{1/2} + 1) + T_0$ que nous venons d'établir donne 3,8 microsecondes pour la lumière (x=1 dans ces unités) et nous avions trouvé *6,7* microsecondes pour l'observateur de Painlevé au chapitre *8* pour un trou noir d'une masse solaire.

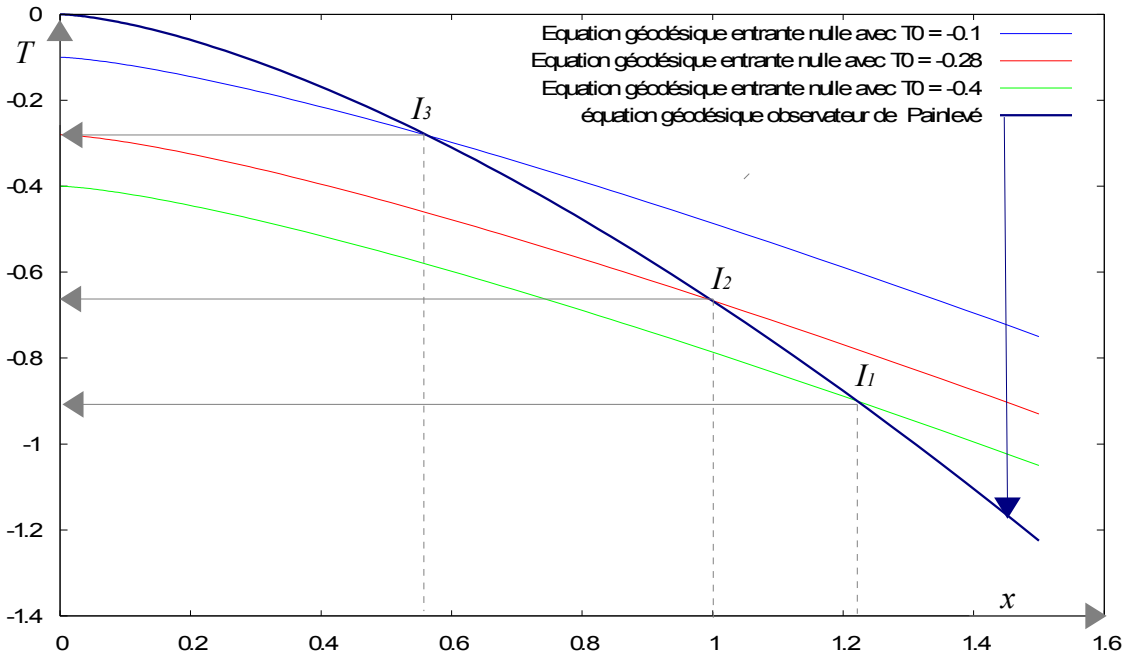


Figure 17-2 : *Équation géodésique de Painlevé et quelques géodésiques lumières entrantes dans la forme de Painlevé dans une région autour de l'horizon, tracé avec $r_s = 1$. Aux points d'intersection I_1, I_2, I_3 représentés on voit l'orthogonalité (par rapport à la tangente à la géodésique nulle) de la géodésique de Painlevé avec les hypersurfaces spatiales (à T = cste).*

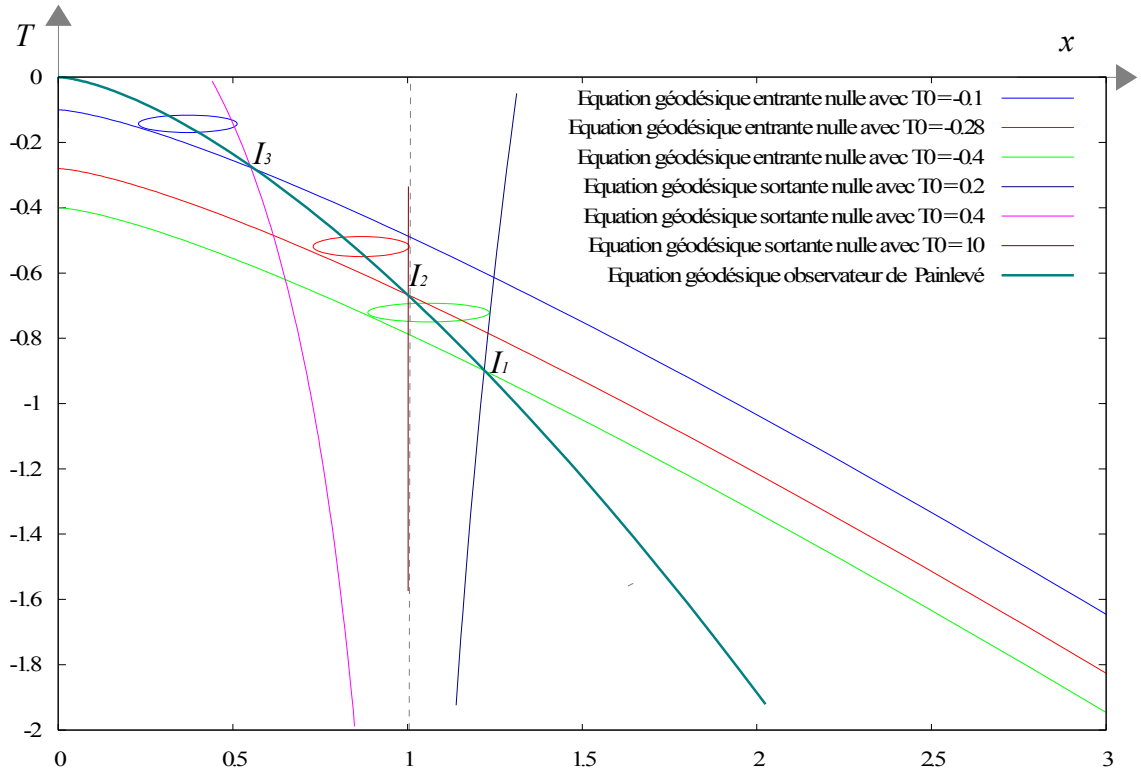


Figure 17-3 [563]*. Idem 17-2 où on a ajouté les géodésiques sortantes aux points d'intersection I_1, I_2, I_3 avec la géodésique entrante de Painlevé. On voit comment le cône de lumière, représenté par les tangentes aux géodésiques nulles, bascule sur l'horizon à x = 1.*

[563] Les figures *17-1* à *17-3* ont été tracées avec Maxima.

Le paramètre affin de la géodésique radiale de Painlevé est égal à la coordonnée temporelle.

Notons également que comme T est le temps propre τ de l'observateur de Painlevé, l'élément de longueur de la géodésique est égal à T, ce qui n'est pas évident sur la figure (la forme de la métrique Lorentzienne est représentée de façon euclidienne), mais qui se déduit simplement de la forme de la métrique de Painlevé

$$ds^2 = -dT^2 (1- 2M/x) + 2dT .dx (2M/x)^{1/2}+dx^2,$$

avec la relation

$$dx /dT= (2M/x)^{1/2},$$

pour l'équation géodésique on obtient bien :

$$ds^2 = - dT^2.$$

Nous avons représenté le problème en deux dimensions.

Compte tenu que les vecteurs de base spatiaux de la forme de Painlevé et ceux de la base locale sont égaux soit

$$\boldsymbol{\gamma}_i = \boldsymbol{g}_i ,$$

ceci se généralise à quatre dimensions.

18- Une approche hamiltonienne non covariante : le formalisme ADM

Cette approche hamiltonienne (non covariante) développée pour permettre une quantification de la gravitation par la méthode utilisée en mécanique quantique est aussi utilisée quand il n'y a pas de solution analytique exacte, ce qui n'est pourtant pas le cas ici, pour trouver une solution (numérique) à un problème de relativité générale. Elle va se révéler très utile à la compréhension de la solution particulière que nous étudions dans la forme de Painlevé. Après avoir rappelé les concepts géométriques sur lesquels cette méthode s'appuie (courbure extrinsèque) nous montrerons que le feuilletage, selon la méthode, dans la forme de Painlevé conduit à des calculs particulièrement simples.

Introduction

Dans cette approche, le "vecteur d'entraînement" va également jouer un rôle essentiel comme dans le modèle de la rivière.[564]

Dans cette approche[565], pour résoudre (numériquement) l'équation d'Einstein (en fait le système de dix équations non linéaires aux dérivées partielles du second ordre) dans le cas où une solution analytique directe n'est pas possible[566], on procède à un feuilletage de l'espace-temps en hypersurfaces de type espace, la variable dynamique étant alors associée à la coordonnée temporelle.

Cela brise la covariance de la théorie où aucune coordonnée[567] ne joue un rôle privilégié, puisque dans ce cas la structure qu'on construit est de type *3D+1D* au lieu de *4D*.

La méthode, développée formellement par les auteurs, garantit que, sous réserve de respecter certaines conditions discutées en détail dans le document, la méthode donne le résultat qu'une approche covariante aurait donné..

Dans l'annexe *9*, nous indiquons le principe général de la méthode. Nous nous référerons en particulier, au vecteur n^{μ} qui est localement le vecteur unitaire de type temps normal à l'hypersurface spatiale (géodésique dans la forme de Painlevé), au scalaire N et au vecteur spatial N^{i} qui sont respectivement le pas temporel (lapse) qui règle l'empilage des feuilles voisines spatiales et les composantes du vecteur d'entraînement *3D* (shift-vector) qui règle l'ajustement spatial des feuilles voisines entre elles.

Comparaison entre le formalisme ADM et celui de la rivière.

On peut d'abord noter une différence d'approche entre la rivière et la méthode ADM.

La méthode ADM fait un feuilletage *3D+1D* alors que la rivière utilise un espace-temps de Minkowski 4D associé à un espace spatial euclidien opératoire 3D..

Mais dans notre cas comme les feuilles, hypersurfaces spatiales ADM, sont euclidiennes, rien ne nous empêche de compléter cet espace spatial par une dimension temps orthogonale à cet espace, ce que donne d'ailleurs naturellement localement le vecteur n^{μ}.

---

[564]"Shift-vector" : vecteur d'entraînement, dont la nature est explicite dans l'approche ADM.

[565]Voir Arnowitt R. Deser S. Misner C.W (2004) pour l'exposé de la méthode et Lehner L. (2001) pour des compléments.

[566]Les solutions analytiques sont rares. Elles supposent un haut niveau de symétrie pour simplifier le système.

[567]Bien que le temps se caractérise par un signe différent de celui de l'espace dans la forme de la métrique. Quelques éléments généraux donnant le principe de la méthode ADM sont donnés en annexe *9*.

Notons que comme n^{μ} est un vecteur "constant" en module, si on le choisit comme vecteur de base de la coordonnée temporelle locale, nous pouvons avoir un espace-temps local minkowskien local qui est le même que celui défini localement dans la rivière.

L'interprétation géométrique dans l'approche ADM

La figure ci-dessous va nous permettre d'illustrer quelques éléments de cette analyse.

Les sections spatiales (les feuilles H_i) réduites à deux dimensions sont munies des coordonnées cartésiennes que nous avons utilisées pour le modèle de la rivière. Le point O de coordonnées $(x = y = z = 0)$, puisque nous avons posé $z = 0$ partout, en est l'origine.

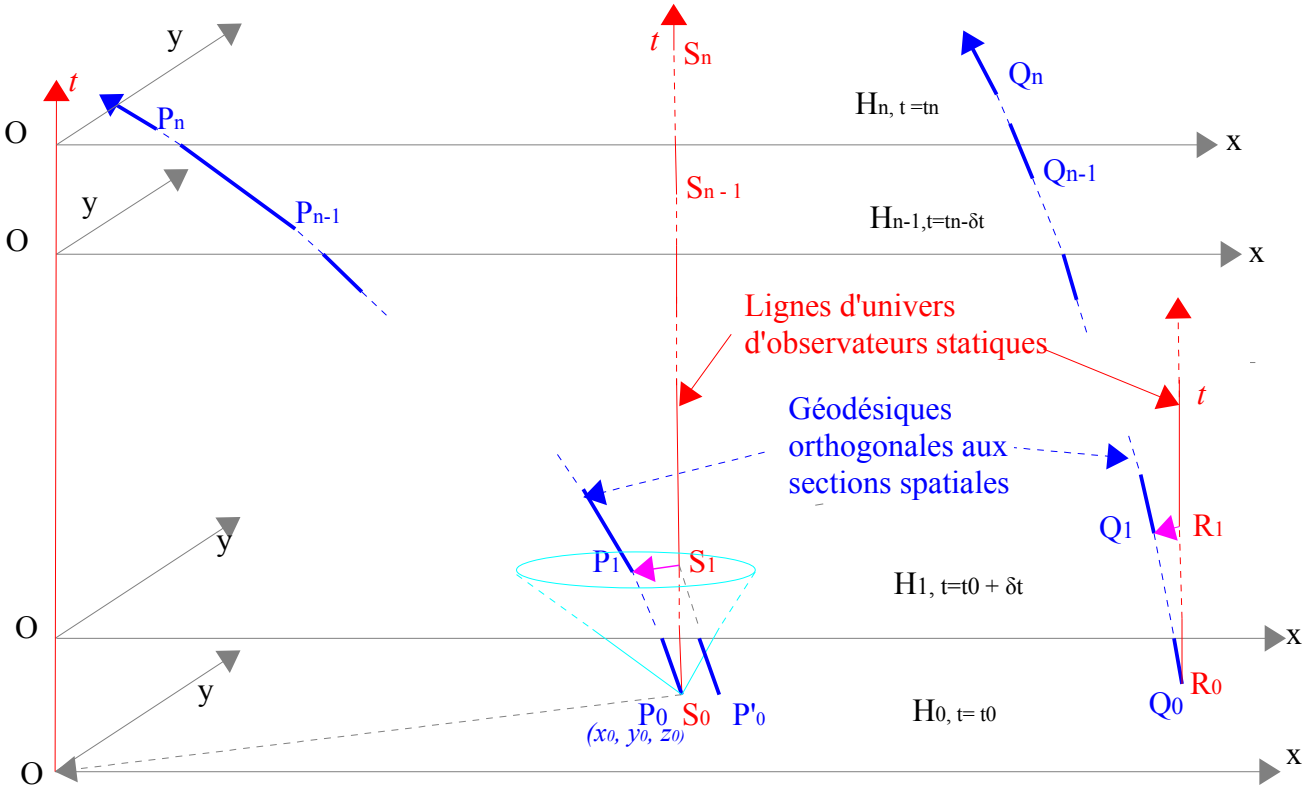


***Figure 18-1**. Représentation de la variété correspondante à la solution que nous étudions.*

Deux géodésiques P_i, Q_i (en bleu), orthogonales aux sections spatiales, suivies par les observateurs de Painlevé, sont issues des points P_0, Q_0 de coordonnées différentes dans H_0.

La coordonnée temporelle (en rouge) est représentée verticalement: c'est la ligne d'univers (non géodésique) des observateurs statiques dans cette forme de la métrique.

Rappelons que la valeur de la coordonnée temporelle du plan H_1 représentée par (S_0S_1), dans la base $(\partial_t)^{\mu}$, est identique au temps propre sur la géodésique (P_0P_1) mais ces valeurs sont mesurées sur des lignes d'univers différentes, dont l'angle dépend du vecteur d'entraînement.

La variété est formée par l'assemblage non solidaire des sections spatiales euclidiennes. Pour chaque point de la feuille, la géodésique locale (en bleu) suivie par l'observateur de Painlevé détermine le lien avec les points des autres feuilles, ainsi: $P_0 \rightarrow P_1 \rightarrow ..... \rightarrow P_{n-1} \rightarrow P_n$.

Ce modèle est valable pour tous les points, seul l'angle entre P_0P_1 et S_0S_1 dépend de la valeur locale du vecteur d'entraînement S_1P_1 et R_1Q_1, en magenta, comme cela se voit pour les géodésiques P_i et Q_i.

Les sections spatiales H_0, H_1 , H_{n-1}, H_n sont toutes identiques, la forme est stationnaire, mais l'ajustement "temporel" ne fait pas correspondre à un point de coordonnées x_0, y_0, z_0 d'une feuille (par exemple H_0) le point de mêmes coordonnées dans la feuille suivante (H_1), à la différence d'une telle construction qu'on aurait réalisée en utilisant la forme de la métrique de Schwarzschild (limitée à l'extérieur de l'horizon). [568]

Mais comme le point S_1 de mêmes coordonnées x_0, y_0, z_0 dans H_1 que P_0 dans H_0 est lui-même l'image d'un autre point (P'_0) de H_0 et ainsi de suite, l'ajustement ainsi réalisé est une application bijective qui couvre toute la section spatiale.

Ceci illustre comment la variation locale du mouvement de l'observateur de Painlevé ne dépend que du vecteur d'entraînement N^i qui régit[569] le glissement local des feuilles les unes par rapport aux autres dans leur ajustement pour produire la variété munie de ces coordonnées. Le fait que ce glissement soit non global (il est différent en chaque point) traduit la courbure de l'espace-temps[570].

Alors que l'hypersurface spatiale euclidienne reste identique à elle-même et malgré les apparences sur la figure, c'est la coordonnée temporelle qui tourne et non pas le vecteur tangent à la géodésique parcourue par l'observateur de Painlevé qui reste orthogonal aux sections spatiales.

Paramètres et équations essentielles de la décomposition 3+1 du champ d'Einstein.

Le principe de la méthode ADM est donné en annexe *9,* mais pour comprendre les calculs et ce qui suit, il est utile d'en rappeler quelques éléments de définition.

En reprenant le chapitre *3-2*, de **Arnowitt R. Deser S. Misner C.W** (2004), avec ses notations[571], nous retenons

$$g_{ij} \equiv {}^4g_{ij}, \quad N \equiv \frac{1}{\sqrt{-{}^4g^{00}}}, \quad N_i \equiv {}^4g_{0i} \qquad [3.9a] \quad , \quad \textit{(18-1)}$$

$$\pi^{ij} \equiv \sqrt{-{}^4g}\left({}^4\Gamma^0_{pq} - g_{pq}\,{}^4\Gamma^0_{rs}\,g^{rs}\right)g^{ip}\,g^{jq} \qquad [3.9b] \quad . \quad \textit{(18-2)}$$

[568]Où l'ajustement fait correspondre des points de coordonnées (spatiales) identiques et où le vecteur temps $(\partial_t)^\mu$, orthogonal à l'espace, n'est pas géodésique.

[569]Rappelons que N est tel que le "pas temporel" d'intégration (n^μ), est constant. La valeur du glissement est bien proportionnelle au vecteur 3D d'entraînement. Ce vecteur N^i est appelé β^i dans le modèle de la rivière.

[570]Si les feuilles étaient matérialisées par des membranes en caoutchouc, pour faire coïncider les points en correspondance entre deux feuilles successives il faudrait déformer de façon non homogène l'une des membranes pour procéder à l'ajustement (d'où la non linéarité).

[571]On respecte également la numérotation des équations de l'article entre […] et on les renumérote dans le contexte du document entre (…).

Le préfixe indiciel haut 4 indique que nous faisons référence aux entités de l'espace-temps à 4 dimensions. Son absence indique que nous faisons référence aux entités spatiales à 3 dimensions, en particulier g^{ij} dans *(18-2)* est la métrique inverse de g_{ij} (métrique spatiale)[572].
Le moment conjugué π^{ij} dont la signification géométrique est naturelle est utilisé en lieu et place de la dérivée de g_{ij}. En effet, il est étroitement lié au tenseur contravariant de courbure extrinsèque et met en œuvre les dérivées spatiales de la métrique à travers les symboles de Christoffel d'indices spatiaux. Il est défini par :

$$\pi^{ij} = - g^{1/2}(K^{ij} - g^{ij} K)$$

où $K_{ij} = n_{(i;j)}$ est le tenseur de courbure extrinsèque [573] (deuxième forme fondamentale) et $\boldsymbol{n}$ le vecteur unitaire normal à l'hypersurface. Il se calcule par *(18-2)*.

Avec $N^i = g^{ij}N_j$, la métrique complète ${}^4g_{\mu\nu}$ et ${}^4g^{\mu\nu}$ peut s'écrire en utilisant *(18-1)*

$${}^4g_{00} = -(N^2 - N_i N^i), \qquad [3.10] \quad \textit{(18-3)}$$

où

$${}^4g^{0i} = N^i/N^2, \quad {}^4g^{00} = -1/N^2, \qquad [3.11a] \quad \textit{(18-4a)}$$
$${}^4g^{ij} = g^{ij} - (N^iN^j/N^2). \qquad [3.11b] \quad \textit{(18-4b)}$$

Une relation utile est : $$\sqrt{-{}^4g} = N\sqrt{g} \quad . \qquad [3.12] \quad \textit{(18-5)}$$

En termes des éléments définis en *(3.9)*, le lagrangien de la relativité générale devient[574]

$$L = \sqrt{-{}^4g}\ {}^4R = -g_{ij}\partial_t \pi^{ij} - N R^0 - N_i R^i - 2\partial_i\left(\pi^{ij} N_j - \frac{1}{2}\pi N^i + \nabla^i N\sqrt{g}\right) \quad , [3.13] \ \textit{(18-6)}$$

où

$$H = R^0 \equiv -\sqrt{g}\left[{}^3R + g^{-1}\left(\frac{\pi^2}{2} - \pi^{ij}\pi_{ij}\right)\right] \qquad [3.14a] \quad , \qquad \textit{(18-7a)}$$
$$P^i = R^i \equiv -2\nabla_j \pi^{ij} \qquad [3.14b] \quad . \qquad \textit{(18-7b)}$$

La composante R^0 associée au temps (donc à l'énergie) est appelée la contrainte Hamiltonienne. Notons que c'est un scalaire construit à partir du scalaire g dérivé de la métrique, du scalaire de Ricci 3D et de scalaires dérivés du moment conjugué $\pi = g_{ij}\pi^{ij}$ et $\pi_{ij}\pi^{ij}$. Notons l'utilisation des indices hauts pour cette approche néo-newtonienne, ce qui rejoint ce que nous avions indiqué lorsque nous avions défini la métrique inverse au chapitre *16*.
Les composantes R^i définissent un 3-vecteur spatial construit à partir de π^{ij} appelé la contrainte des moments spatiaux. Ces éléments sont définis dans l'hypersurface spatiale.

[572] Et non pas la partie spatiale de la métrique inverse $g^{\mu\nu}$.
[573] C'est l'équation qui est donnée dans Arnowitt R. Deser S. Misner C.W (2004) p.9.
[574] Le symbole "nabla" désigne la dérivation covariante par rapport à la métrique spatiale dans (18-6).

On note que N et N_i sont des multiplicateurs de Lagrange dans le Lagrangien, contraignant celui-ci par 4 équations supplémentaires. La dérivée covariante s'exécute en utilisant la métrique spécifiée (métrique fonction de la position de l'indice, spatiale si l'indice haut 4 n'est pas présent).
${}^3R$ est le scalaire de Ricci calculé à partir de la métrique spatiale g_{ij} et les indices spatiaux sont élevés ou abaissés en utilisant g^{ij} et g_{ij} et $\pi = \pi^i{}_i$.

Équations du mouvement

Bien que les variables du Lagrangien représentent le tenseur métrique dans un espace à trois dimensions immergé dans un espace-temps à quatre dimensions, il est possible et souhaitable d'utiliser les procédures standards de la mécanique lagrangienne (équations de Lagrange en théorie des champs) pour en dériver les équations du mouvement qui décrivent l'évolution temporelle de la métrique g_{ij} et de son moment conjugué π^{ij}.

Le résultat est un système non linéaire d'équation aux dérivées partielles., voir équations 3.15a à 3.15c de Arnowitt R. Deser S. Misner C.W (2004):

$$\partial_t g_{ij} = 2Ng^{-1/2}(\pi_{ij} - \frac{1}{2}\pi g_{ij}) + N_{i;j} + N_{j;i} \tag{3.15a}$$

$$\begin{aligned}\partial_t \pi^{ij} = &- N\sqrt{g}\,({}^3R_{ij} - \tfrac{1}{2}\,g^{ij}\,{}^3R) + \tfrac{1}{2}\,Ng^{-1/2}g^{ij}(\pi^{mn}\pi_{mn} - \tfrac{1}{2}\pi^2) \\ &- 2Ng^{-1/2}(\pi^{im}\pi_m{}^j - \tfrac{1}{2}\pi\pi^{ij}) + \sqrt{g}\,(N^{|ij} - g^{ij}\,N^{|m}{}_{|m}) \\ &+ (\pi^{ij}N^m)_{|m} - N^i_{|m}\pi^{mj} - N^j{}_{|m}\pi^{mi}\end{aligned} \tag{3.15b}$$

En étudiant la variation des équations par rapport au pas de temps et d'espace on obtient les contraintes $H = R^0 = 0$ et $P^i = R^i = 0$.

Le calcul, particulièrement simple du fait que les sections spatiales sont euclidiennes, fait en annexe *9,* en donne les constituants dans la forme de métrique de Painlevé.

Hyper-surfaces : première forme fondamentale

Dans l'annexe *9* nous donnons les éléments essentiels utilisés par la méthode ADM tels qu'ils sont présentés par les auteurs dans leur article.

Dans le cas particulier qui nous intéresse, il est utile de présenter dans quel cadre général on traite les hypersurfaces[575] et certaines de leurs propriétés qui vont nous être utiles dans ce cas.

Pour obtenir la métrique induite g_{ij} sur une hypersurface imbriquée dans un espace-temps de métrique $g_{\mu\nu}$, définissons le tenseur de projection

$$P_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \sigma\, n_\mu\, n_\nu\,, \tag{18-8}$$

[575]Ces éléments sont tirés de Carroll S.(2003) Appendix D et de Lehner L. (2001). Bien que ce formalisme soit général nous l'utilisons ici explicitement ou implicitement dans le cas du feuilletage ADM (hypersurface espace dans l'espace-temps). Les références sont celles des articles originaux.

où $\sigma = n_\mu n^\mu = -1$ pour un vecteur de type temps.

Ce tenseur est quelquefois appelé ***première forme fondamentale.***

Hyper-surfaces : courbure extrinsèque, seconde forme fondamentale

L'annexe *9* indique que g_{ij} est la variable dans le formalisme ADM. Nous avons aussi besoin de sa dérivée pour le problème. En fait le formalisme ADM choisit une autre grandeur (qui est liée à cette dérivée) construite à partir de la courbure extrinsèque, elle-même, appelée ***seconde forme fondamentale***.

La courbure extrinsèque que nous appellerons ici $K_{\mu\nu}$ se définit à partir de $P_{\mu\nu}$ *:*

$$K_{\mu\nu} = \pounds_n P_{\mu\nu} , \qquad (18\text{-}9)$$

où $\pounds_n$ est la dérivée de Lie par rapport à n^μ.

C'est ce tenseur $K_{\mu\nu}$ qui est utilisé dans le formalisme ADM (sous forme covariante et contravariante)

Comme la dérivée de Lie de $g_{\mu\nu}$ peut s'écrire comme la dérivée covariante symétrisée du vecteur normal cela peut s'écrire :

$$K_{\mu\nu} = P^\alpha{}_\mu P^\beta{}_\nu \, n_{(\beta;\alpha)}. \qquad (18\text{-}10)$$

Comme dans le cas général n_μ n'est pas supposé nécessairement géodésique, nous pouvons définir une accélération a^μ :

$$a^\mu = n^\nu n^\mu{}_{;\nu} . \qquad (18\text{-}11)$$

En rappelant que $\sigma = n_\mu n^\mu = -1$ dans le cas d'un quadrivecteur de type temps, on peut en déduire :

$$K_{\mu\nu} = n_{\nu;\mu} - \sigma n_\mu a_\nu . \qquad (18\text{-}12)$$

On peut montrer que ce tenseur, entre autres, est symétrique et que dans le cas où le champ de vecteur n^μ est géodésique ($a^\mu = 0$) en tout point (ce qui est le cas dans la forme de Painlevé) alors sa définition *(18-10)* se simplifie pour se réduire à :

$$K_{\mu\nu} = n_{\nu;\mu} . \qquad (18\text{-}13)$$

C'est simplement la dérivée covariante dans la métrique *4D* du vecteur covariant n_μ dont la version contravariante n^μ est le vecteur normal unitaire orthogonal aux hypersurfaces à *t = constante*, il vaut[576] :

$$n_\mu = N\{-1, 0, 0, 0\}.$$

Dans la forme de Painlevé comme $g^{00} = -1$, $N = (-g^{00})^{-1/2} = 1$.

En conséquence :

$$K_{\mu\nu} = n_{\nu;\mu} = \partial_\mu n_\nu - n_\lambda \Gamma^\lambda_{\mu\nu} = 0 + N\delta^0_\lambda \Gamma^\lambda_{\mu\nu} = N\Gamma^0_{\mu\nu} = \Gamma^0_{\mu\nu}.$$

Car n_μ étant constant, sa dérivée partielle est nulle et n'ayant qu'une composante non nulle seule la valeur *0* de l'indice haut du symbole de Christoffel est sommé et *N* vaut *1*.

Les coefficients de Ricci de la rivière sont la projection de la courbure extrinsèque.

Dans le formalisme ADM (que nous avons succinctement décrit et qui permet de définir l'espace-temps correspondant à des équations d'Einstein) nous utilisons K_{ij}, rétro-projection sur l'hypersurface spatiale de ce tenseur. Précisons cela.

L'hypersurface spatiale (sous-variété 3D où on a formellement définit un système de coordonnées y^i ici *{x, y, z}*) étant imbriquée dans la variété 4D décrivant l'espace-temps où le système de coordonnées est x^μ ici *{x, y, z, t}*, on définit cette rétro-projection par une application univoque $\Phi : y^i \rightarrow x^\mu$, qui est ici évidente, la matrice rectangulaire (*3x4*) vaut 1 pour $\mu = i$ et *0* dans le cas contraire :

$$K_{ij} = K_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu \partial x^\nu}{\partial y^i \partial y^j},$$

$$K_{ij} = \Gamma^0_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu \partial x^\nu}{\partial y^i \partial y^j},$$

$$K_{ij} = \Gamma^0_{ij}.$$

Nous avons calculé $\Gamma^0_{\mu\nu}$ à différentes occasions (voir annexe *7* par exemple) d'où il est facile d'extraire Γ^0_{ij}.

Nous avons déjà indiqué dans le chapitre de la rivière que les Γ^0_{ij} et étaient égaux aux coefficients de rotation de Ricci utilisés dans ce modèle[577].

La nature des coefficients de rotation de Ricci utilisés dans le modèle de la rivière nous apparaît alors clairement, c'est la projection sur l'hypersurface à temps constant de la courbure extrinsèque (deuxième forme fondamentale).

[576] La valeur *-1* pour la composante *t* de n_μ résulte de l'orientation de n^μ vers les *t* croissants et de $n_\mu n^\mu = -1$.
[577] Rappelons que les calculs ont montré que pour les coefficients de rotation de Ricci $\Gamma^0_{ij} = \Gamma_0{}^i{}_j$.

Les coefficients de Ricci de l'équation géodésique de la rivière sont des tenseurs

Nous avons donc une interprétation géométrique claire du résultat présenté comme "miraculeux" dans le modèle de la rivière, en particulier cela montre le caractère tensoriel des $\Gamma^0_{i\,j}$, du fait de la relation $K_{ij}=\Gamma^0_{i\,j}$ puisque K_{ij} est un tenseur. Il n'est pas trivial qu'un sous ensemble des symboles de Christoffel soit un tenseur, car ceux-ci ne sont pas globalement les composantes d'un tenseur.

Équivalences entre le modèle de la "rivière" et le formalisme ADM

Nous avons noté l'identité entre l'espace-temps minkowskien tangent co-mobile de l'espace dans le modèle de la rivière et celui également minkowskien du formalisme ADM que les vecteurs de base spatiaux de l'hypersurface spatiale et le vecteur de type temps n^μ, qui y est normal, définissent.

Il convient donc de considérer la projection du tenseur de courbure extrinsèque qui est défini dans cette hypersurface dont on déduit les équations du mouvement dans le formalisme ADM pour le mettre en correspondance avec les paramètres définissant le mouvement dans le modèle de la rivière.

Nous avons bien noté que dans le formalisme ADM du fait du feuilletage 3D +1D c'est la variation de la métrique spatiale, exprimée totalement dans l'hypersurface spatiale qui devait être prise compte pour décrire la "courbure" (le terme représenté par la connexion dans l'équation géodésique) d'une géodésique puisque, comme nous l'avons dit, la coordonnée temporelle est linéaire et qu'il n'y a que les paramètres spatiaux qui varient.

Le fait de définir un espace local 4D de Minkowski en ajoutant la dimension temporelle par le vecteur n^μ ne change pas cela. Dans la rivière c'est dans l'équation géodésique, dans l'espace 4D de Minkowski, qu'on trouve les coefficients de rotation de Ricci égaux à K_{ij}.

Le formalisme ADM est donc équivalent et en propose une autre approche par la reconstruction de l'espace de Minkowski à partir de l'hypersurface spatiale et montre que les équations du mouvement ne dépendent nativement que de la variation spatiale, le long de la trajectoire, du tenseur métrique spatial dans la feuille.

Les paramètres régissant l'équation géodésique dans l'espace (courbe) de Painlevé de géodésiques non co-mobiles sont contrôlés par la courbure extrinsèque. Elle traduit comment les géodésiques normales à la surface, d'un faisceau, se comportent localement relativement par rapport à une géodésique de référence, ici la géodésique normale co-mobile de l'espace-temps, au centre du faisceau.

Convergence entre congruences et hypersurfaces

Cette phénoménologie est semblable à celle que nous avons évoquée lorsque nous avons traité des congruences (chapitre *13*). Complétons notre analyse en vérifiant que, puisque les vecteurs normaux à l'hypersurface sont des géodésiques, l'évolution de la congruence correspond au concept de courbure extrinsèque tel qu'il a été défini.

En coordonnées cartésiennes, avec

$$U_{ff}{}^{\mu} = (1, \beta^1, \beta^2, \beta^3),$$

qui n'est autre que le vecteur que nous avons appelé ici n^μ.

En posant

$$\beta^{\mu} = \beta\,(0, -\frac{x}{r}, -\frac{y}{r}, -\frac{z}{r}) \quad ,$$

où

$$\beta = \sqrt{\frac{2\,G\,M}{r}} \quad ,$$

dans l'étude des congruences de géodésiques (de type temps) on définit un tenseur

$$B^{\mu}{}_{\nu} = U_{ff}{}^{\mu}{}_{;\nu} \, .$$

qui permet de définir par sa version covariante :

$$B_{\mu\nu} = g_{\mu\lambda}\, B^{\lambda}{}_{\nu} = g_{\mu\lambda}\, U_{ff}{}^{\lambda}{}_{;\nu} = \quad U_{ff\,\mu\,;\nu} \, .$$

Cette relation, si on tient compte que $U_{ff}{}^{\mu} = n^{\mu}$, est identique à la relation *(18-13)*.

Ceci montre que :

$$K_{\mu\nu} = B_{\mu\nu} \, .$$

donc les relations :

$$B_{\mu\nu} = \text{⅓}.\theta.P_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu},$$

où :

$$P_{\mu\nu} = g_{\mu\lambda} P^{\lambda}{}_{\nu} = g_{\mu\lambda}\,(\delta^{\lambda}{}_{\nu} + U_{ff}{}^{\lambda}\, U_{ff\,\nu}) = g_{\mu\nu} + U_{ff\,\mu}\, U_{ff\,\nu} \, .$$

Avec le tenseur de projection :

$$P^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu} + U_{ff}{}^{\mu}\, U_{ff\,\nu},$$

qui sous forme covariante s'écrit

$$P_{\mu\nu} = g_{\alpha\mu} P^{\alpha}{}_{\nu} = g_{\alpha\mu}\, \delta^{\alpha}{}_{\nu} + g_{\alpha\mu}\, U_{ff}{}^{\alpha}\, U_{ff\,\nu} = g_{\mu\nu} + \; U_{ff\,\mu}\, U_{ff\,\nu},$$

ce qui est identique à la première forme fondamentale *(18-8)* si on tient compte que $\sigma = -1$.

Les conclusions que nous avons tirées des congruences de géodésiques, dans le contexte de la métrique de Painlevé, s'appliquent alors à notre analyse ADM et vice versa.

Nous voyons que ces approches qui paraissaient traiter de sujets indépendants convergent, car elles traitent du même concept:" la divergence de géodésiques".[578]

[578]Cela est décrit par la déviation géodésique qui est le concept fondamental de base, qui définit l'accélération relative $a^{\mu}=R^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma}T^{\nu}T^{\rho}S^{\sigma}$ d'une famille, paramétrée par *s*, de géodésiques de paramètre affin *t*. *S* est le champ de vecteurs qui pointent d'une géodésique vers l'autre et *T* celui des vecteurs tangents aux géodésiques. Nous

La masse (énergie) ADM

Définition

Dans le chapitre *16* nous avons évalué la masse (l'énergie) du trou noir en utilisant les équations données par le pseudo-tenseur de gravitation.

Nous avions trouvé que selon le référentiel nous obtenions des résultats différents.

Le formalisme ADM définit une masse par une intégrale à l'infini de manière similaire à ce que nous avons déjà utilisé.

Dans le document de *R. Arnowitt, S. Deser, C.W. Misner 2004* cette masse composante temporelle du 4-moment est définie par l'équation (5.1) p. 16

$$P^0 = \oint \left(g_{ij,\,j} - g_{jj,\,i} \right) dS_i \quad , \tag{a}$$

où dS_i est l'élément de surface spatiale à ∞.

D'autres définitions équivalentes existent. Carroll (2003, p. 253, équation 6.46), avec la métrique sous forme $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, donne

$$P^0 = E_{ADM} = \int d^2x \sqrt{\gamma^{(2)}}\, \sigma^i \left(\partial_j h^j i - \partial_i h^j\, j \right) \quad , \tag{b}$$

où, $\gamma^{(2)}$ est la métrique sur la 2-sphère à l'infini spatial. Les indices spatiaux ayant été élevés en utilisant δ_{ij} (la métrique spatiale à l'infini) ceci est équivalent à :

$$P^0 = E_{ADM} = \int d^2x \sqrt{\gamma^{(2)}}\, \sigma^i\, \Sigma_j \left(\partial_j h_{i\,j} - \partial_i h_{j\,j} \right) \quad . \tag{c}$$

On intègre sur la 2-sphère à l'infini et utilise les coordonnées cartésiennes dans tous les cas.

---

trouverions bien sûr les mêmes résultats. Ceci est fait dans Hamilton A. & Lisle J. 2006, équation *(86)* p. 13.

Forme cartésienne de la métrique de Schwarzschild

Rappelons que la métrique s'écrit sous forme matricielle[579].

$$\begin{pmatrix} -1+\frac{2m}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\frac{2mx^2}{(x^2+y^2+z^2)\left(-2m+\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)} & \frac{2mxy}{(x^2+y^2+z^2)\left(-2m+\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)} & \frac{2mxz}{(x^2+y^2+z^2)\left(-2m+\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)} \\ 0 & \frac{2mxy}{(x^2+y^2+z^2)\left(-2m+\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)} & 1+\frac{2my^2}{(x^2+y^2+z^2)\left(-2m+\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)} & \frac{2myz}{(x^2+y^2+z^2)\left(-2m+\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)} \\ 0 & \frac{2mxz}{(x^2+y^2+z^2)\left(-2m+\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)} & \frac{2myz}{(x^2+y^2+z^2)\left(-2m+\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)} & 1+\frac{2mz^2}{(x^2+y^2+z^2)\left(-2m+\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)} \end{pmatrix}$$

On en déduit immédiatement $h_{\mu\nu}, = g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}$.

Le calcul de $\Sigma_j\,(\partial_j h_{ij} - \partial_i h_{jj})$ donne le résultat suivant pour x^i :

$$\begin{pmatrix} \frac{4mx}{(x^2+y^2+z^2)\left(-2m+\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)} \\ \frac{4my}{(x^2+y^2+z^2)\left(-2m+\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)} \\ \frac{4mz}{(x^2+y^2+z^2)\left(-2m+\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)} \end{pmatrix}$$

Si on effectue $\Sigma_j\,(\partial_j g_{ij} - \partial_i g_{jj})$, cela donne (de façon évidente) la même chose.

Remarquons que ces termes sont identiques à ceux (les h^{00i}) que nous avions trouvé lors du calcul avec le pseudo-tenseur de gravitation dans ces coordonnées au chapitre *16*, alors :

$$E_{ADM} = \frac{1}{16\pi G}\oint\left(\partial_j h_{ji} - \partial_i h_{jj}\right)\frac{x^i}{r}(r^2)\sin(\theta)(d\theta)\,d\phi = \frac{4M}{16\pi G}\iint\sin(\theta)(d\theta)\,d\phi = M$$

Il est alors évident que l'intégrale (c) qui a la même forme mais où les h^{00i} sont remplacés par $\partial_j g_{ij} - \partial g_{jj}$ va donner le même résultat, ce qu'on vérifie simplement à savoir :

$$E_{ADM} = M$$

Forme cartésienne de la métrique de Painlevé.

Si on fait le même calcul avec la forme cartésienne de Painlevé[580], la métrique spatiale étant euclidienne $g_{ij} = \delta_{ij}$, alors $\Sigma_j\,(\partial_j g_{ij} - \partial_i g_{jj}) = \Sigma_j\,(\partial_j h_{ij} - \partial_i h_{jj}) = 0$. Il est évident qu'on va trouver :

$$E_{ADM} = 0.$$

[579] Dans les tableaux issus de Mathematica, *M* est noté *m*.

[580] On peut aussi le faire dans les autres formes cartésiennes de la métrique (Finkelstein-Eddington, Isotrope,..) on trouve des résultats différents mais on ne trouve de résultat nul que dans la forme de Painlevé.

Ce qui confirme les résultats que nous avions trouvé avec la méthode utilisant le pseudo-tenseur de gravitation, confirmant l'équivalence de l'approche ADM et de celle du pseudo-tenseur de Landau & Lifchitz.

Nous n'avons pas calculé les valeurs de P^i (composantes spatiales du quadrivecteur impulsion matière-gravitation). En formalisme ADM elles sont données par :

$$P^i = -2 \oint \pi^{ij} dS_j \quad .$$

Le terme π^{ij} est l'équivalent de h^{i0j} dans l'équation donnant P^i par le formalisme de Landau et Lifchitz, ce qui explique l'équivalence des π^{ij} et h^{i0j} que nous avions relevée au chapitre *16.*

Le Hamiltonien (caractéristique de l'énergie) calculé dans le formalisme ADM est nul dans cette forme (voir Annexe 9).

Cela confirme que dans cette forme la gravitation semble effacée, ce qui se manifeste par une masse (énergie) nulle dans ces coordonnées[581].

La forme de la métrique dans le formalisme ADM appliqué à la forme de Painlevé

Méthode

Avec comme nous l'avons vu, $g_{00} = N^2 - N_i N^i$, dans le formalisme *ADM,* du fait du feuilletage, on peut mettre la métrique sous la forme[582]:

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + g_{ij} (dx^i + N^i dt)(dx^j + N^j dt), \qquad (18\text{-}14)$$

C'est bien ce qu'on retrouve dans la forme de Painlevé avec $N = (-g^{00})^{-1/2} = 1$ et $N_i = g_{0i}$, donnés dans l'annexe *7* par exemple. Dans la forme de Painlevé $g_{ij} = \delta_{ij}$ on peut alors mettre *(A9-4)* sous la forme donnée dans le modèle de la rivière

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} (dx^\mu + N^\mu dt)(dx^\nu + N^\nu dt),$$

où

$$N^\mu = t^\mu - N.n^\mu, \qquad (18\text{-}15)$$

avec

$$n^\mu = N.t^{,\mu} = N.g^{\mu\nu} t;_\nu = N.g^{\mu\nu} \partial_\nu t,$$

$$N^\mu n_\mu = 0, \qquad (18\text{-}16)$$

ce qui fait que dans ce référentiel, $N^\mu = (0, N^i)$.

---

[581]Nous retrouvons bien le caractère "non covariant" de l'énergie de gravitation qui dépend de l'observateur. Notons que cela redevient cohérent, la masse gravitationnelle étant nulle dans tous les cas, si on considère non pas le trou noir ou le trou blanc séparément mais la somme des "flux" traversant l'ensemble des deux, ce qui est d'ailleurs conforme avec ce qu'on est en droit de s'attendre quand le tenseur énergie-impulsion est nul partout (sauf en un point où il est singulier).

[582]Lehner L. (2001) éq. (2 – 4), p.7.

19- Synthèse sur le caractère pseudo-minkowskien de la forme de Painlevé

Après avoir passé en revue comment le caractère pseudo-minkowskien pouvait être appréhendé à travers différentes approches nous tentons ici une synthèse. Nous récapitulons les propriétés originales de la solution dans la forme de Painlevé et proposons plusieurs approches pour caractériser la nullité du pseudo-tenseur.

Comme une solution de la Relativité générale est physique, sa représentation par une variété de géométrie non minkowskienne ne peut pas être rendue minkowskienne par un changement de coordonnées[583] quel qu'il soit.

Mais les développements que nous avons faits dans les chapitres *16* à *18* visaient à montrer que la forme de Painlevé met en évidence un certain nombre de propriétés non triviales de cette solution, conduisant à des simplifications spectaculaires et à des propriétés originales.

Ces propriétés, révélées en explorant différentes approches, ne sont évidemment pas indépendantes mais reflètent les différentes facettes du même phénomène physique.

Nous allons essayer, en synthétisant ces propriétés, de proposer un modèle aussi simple que possible de cette solution mais contenant tous les éléments nécessaires et suffisants à sa description.

Commençons par rappeler ces caractéristiques phénoménologiques particulières.

Des propriétés très spécifiques

La métrique

Rappelons que sous forme cartésienne, où $\boldsymbol{\beta}$ est le vecteur d'entraînement, elle s'exprime :

$$g_{\mu\nu} = \eta_{mn}(\delta^m{}_\mu - \delta_\mu{}^0\beta^m)(\delta^n{}_\nu - \delta_\nu{}^0\beta^n) = \eta_{mn}(e^m{}_\mu)(e^n{}_\nu)$$

avec :

$$e^m{}_\mu = \delta^m{}_\mu - \delta_\mu{}^0\beta^m,$$

La solution est à symétrie spatiale sphérique.

La métrique est stationnaire : $\partial_t g_{\mu\nu} = 0$.

La métrique est orientée. (Deux signes possibles pour g_{0i})

Les sections spatiales sont euclidiennes, $g_{ij} = \delta_{ij}$.

[583] Par changement de coordonnées, où les nouvelles coordonnées sont des fonctions scalaires des anciennes.

La forme de la métrique de Painlevé montrait de façon évidente des sections spatiales euclidiennes. L'analyse que nous avons faite nous a amené plus loin puisque, décrit dans cette forme, c'est l'espace-temps qui paraît plat pour un observateur de Painlevé, du fait de l'orthogonalité de ces hypersurfaces euclidiennes à la ligne d'univers géodésique suivie par l'observateur de Painlevé.

La quadri-vitesse covariante de l'observateur de Painlevé, U_μ est constante.

La coordonnée temporelle est égale au temps propre de l'observateur de Painlevé.

Le déterminant de la métrique est unitaire en coordonnées cartésiennes, $g = -1$.

La double divergence non covariante du tenseur métrique est nulle : $\Sigma_\rho\Sigma_\sigma\partial_\nu\partial_\mu g_{\mu\nu} = 0$, ainsi que celle du tenseur métrique inverse : $\partial_\nu\partial_\mu g^{\mu\nu} = 0$: contrainte de jauge.

Ceci traduit un caractère non trivial[584] de l'espace-temps vis-à-vis de l'expression de ce tenseur métrique puisque ce qui différencie la métrique de la métrique inverse c'est que cette dernière est définie dans l'espace tangent (plat) et l'autre est une forme linéaire sur la variété courbe.

Toutes ces propriétés ne sont pas indépendantes mais elles traduisent une grande originalité de cette forme de métrique.

La métrique inverse

La métrique inverse, également sous forme cartésienne, s'écrit

$$g^{\mu\nu} = \eta^{mn}(\delta_m{}^\mu + \delta_m{}^0\beta^\mu)(\delta_m{}^\nu + \delta_m{}^0\beta^\nu) = \eta^{mn}(e_m{}^\mu)(e_m{}^\nu),$$

avec $$e_m{}^\mu = \delta_m{}^\mu + \delta_m{}^0\beta^\mu \text{ où } \beta^\mu = -(2M)^{1/2}(x^2+y^2+z^2)^{-3/4}\{0, x, y, z\}.$$

La relation entre la métrique et la métrique inverse invoque une symétrie de parité $(\beta \leftrightarrow -\beta)$. l'élément inverse métrique peut aussi s'écrire sous la forme :

$$\partial_s{}^2 = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu + \partial_t{}^2 - V^\mu V^\nu\partial_\mu\partial_\nu = \delta^{ij}\partial_i\partial_j - V^\mu V^\nu\partial_\mu\partial_\nu.$$

Le terme $\partial_t{}^2$ ajouté annule le terme $-\partial_t{}^2$ de $\eta^{\mu\nu}$ introduit par $V^\mu V^\nu$, réduisant $\eta^{\mu\nu}$ à δ^{ij}.

La métrique inverse de Painlevé est la somme d'une métrique spatiale euclidienne *3D* et du produit tensoriel du quadrivecteur V, quadri-vitesse de l'observateur de Painlevé, de composantes :

$$V^\mu = (2M)^{1/2}(x^2+y+z^2)^{-3/4}\{2M^{-1/2}(x^2+y+z^2)^{3/4}, -x, -y, -z\}.$$

En coordonnées sphériques, où $\eta^{\mu\nu} = -\partial_t{}^2 + \partial_r{}^2 + \partial_\theta{}^2/r^2 + \partial_\varphi{}^2/r^2\sin^2\theta$, cela s'écrit

[584]Dans le cas général, c'est uniquement dans un espace plat que les composantes covariantes sont égales aux composantes contravariantes. Ici cela n'est vrai que dans un cas très particulier, mais pour ce cas particulier l'espace-temps peut être considéré comme plat. C'est le sens des coordonnées plates du modèle de la rivière ;

$$\partial_s{}^2 = \eta^{\mu\nu}\,\partial_\mu\partial_\nu + \partial_t{}^2 + V^\mu V^\nu \partial_\mu\partial_\nu = \delta^{ij}\,\partial_i\partial_j - [\partial_t - (2M/r)^{1/2}\,\partial_r]^2,$$

où la quadri-vitesse, respectivement en coordonnées contravariantes V^μ et covariantes V_μ vaut :

$$V^\mu = \{1, -(2M/r)^{1/2}, 0, 0\} \quad \rightarrow \quad V_\mu = \{-1, 0, 0, 0\}.$$

La métrique inverse de Painlevé prend une forme explicite dans ces coordonnées sphériques, exhibant les propriétés quasi-newtoniennes et le rôle déterminant de la vitesse newtonienne.

En particulier, sur une ligne d'univers où $\partial_r/\partial_t = (2M/r)^{-1/2}$, la métrique inverse se réduit à l'élément spatial, euclidien.

Si la métrique est la référence, cependant, cette approche néo-classique s'exprime plus naturellement dans l'espace tangent, de structure plate ce qui explique l'utilisation de la métrique inverse dans la plupart des relations de cette approche.

Si on considère la métrique inverse en coordonnées cartésiennes des formes de Painlevé, Kerr-Schild (sans rotation) et Schwarzschild par exemple, qui utilisent les mêmes coordonnées spatiales $x^i = (x, y, z)$, où $i = (1, 2, 3)$, le tenseur spatial qui y figure g^{ij} est identique dans ces trois formes.

Les composantes communes s'écrivent :

$$g^{ij} = \delta^{ij} - \beta^i\beta^j = \delta^{ij} - 4(2M)\partial^i(x^2+y^2+z^2)^{1/4}\,\partial^j(x^2+y^2+z^2)^{1/4}$$

Ceci implique que pour les trois formes l'expression $\partial_k\partial_l\lambda^{ijkl}$ est identique et si elle est nulle dans une forme elle l'est dans les trois.

Ajoutons que comme nous sommes dans une solution stationnaire $\partial_\rho\partial_0\lambda^{\mu\nu\rho0} = \partial_0\partial_\sigma\lambda^{\mu\nu0\sigma} = 0$.

La différence entre les valeurs de $\partial_\rho\,\partial_\sigma\,\lambda^{\mu\nu\rho\sigma}$ pour les formes de Painlevé, Kerr-Schild et Schwarzschild, par exemple, ne concerne que les termes $\partial_i\partial_j\lambda^{0vij} = \partial_i\partial_j\lambda^{\mu0ij}v$. Les métriques inverses ne diffèrent que par les termes $\lambda^{\mu\nu\rho\sigma}$ incluant g^{00}, g^{0i}, g^{i0}, soit respectivement :

Métrique	*Painlevé*	*Kerr Schild*	*Schwarzschild*
g^{00}	-1	$-(1+\beta^2)$,	$(-1+\beta^2)^{-1}$
$g^{0i} = g^{i0}$	$\beta^i = 2(2M)^{1/2}\partial_i(x^2+y^2+z^2)^{1/4}$	$\beta\beta^i$	0

La différence qui va déterminer la valeur du pseudo-tenseur ne s'opère que sur la partie spatio-temporelle et temporelle.

La méthode de résolution va donc séparer la partie spatiale du reste.

Nous remarquons que les expressions de $\lambda^{\mu\nu\rho\sigma}$ se composent de constantes, et d'expressions ne comportant que β et β^i, caractérisant le vecteur spatial. Autrement dit la phénoménologie est totalement et uniquement dépendante du vecteur spatial $\boldsymbol{\beta}$ de composantes β^i.

La région symétrique

Si on considère la solution analytique complète, la région en effondrement (trou noir) et la région en expansion (trou blanc) sont liées par une simple symétrie de parité: $(\beta \leftrightarrow -\beta)$.
En effet la métrique $g'_{\mu\nu}$ dans la région "trou blanc" s'écrit :

$$g'_{\mu\nu} = \eta_{mn} (\delta^m{}_\mu + \delta_\mu{}^0 \beta^m)(\delta^n{}_\nu + \delta_\nu{}^0 \beta^n).$$

Les tétrades associées à $g'_{\mu\nu}$ ont la même valeur que les tétrades inverses associées à $g_{\mu\nu}$.

Les mouvements géodésiques sont symétriques (parité $\beta \leftrightarrow -\beta$) dans les deux régions, ce qui est traduit par la symétrie évidente de parité de $\Gamma^0{}_{ij} = \partial_j \beta^i$ dans l'équation géodésique définie dans l'espace de Lorentz tangent (équation 18 du modèle de la rivière).

Bien entendu les expressions

$$g^{\mu\nu} = \eta^{mn} (\delta_m{}^\mu + \delta_m{}^0 \beta^\mu) (\delta_m{}^\nu + \delta_m{}^0 \beta^\nu)$$

et

$$g'_{\mu\nu} = \eta_{mn} (\delta^m{}_\mu + \delta_\mu{}^0 \beta^m)(\delta^n{}_\nu + \delta_\nu{}^0 \beta^n)$$

ne sont pas égales (ce que nous savons par un calcul direct), la différence résultant du fait que la sommation ne se fait pas de la même manière, et que de façon opératoire c'est la transposée de la tétrade inverse qui est utilisée dans $g'_{\mu\nu}$. Mais cela reflète des symétries qui invoquent la nullité du pseudo-tenseur de Lifchitz.

Le tenseur mixte de projection

On peut aussi faire observer que le tenseur mixte de projection qui s'écrit

$$P^\mu{}_\lambda = \delta^\mu{}_\lambda - \sigma n^\mu n_\lambda = \delta^\mu{}_\lambda + \delta^\mu{}_0 \, n_\lambda ,$$

car $\sigma = -1$ où $n^\mu = \{1, 0, 0, 0\}$, de type temps, que nous avons utilisé dans le formalisme ADM et qui permet de projeter un vecteur sur l'hypersurface spatiale (euclidienne dans la forme de Painlevé) orthogonale à n^μ, ce qui donne $n_\lambda = \{ 1 - \beta^2, \beta^x, \beta^y, \beta^z \}$, a une structure et une valorisation très voisine des tétrades inverses utilisées dans la forme de Painlevé.

Équation géodésique radiale entrante newtonienne

C'est un point plutôt confondant. Comme nous l'avons souligné ce caractère newtonien même s'il n'a pas été perçu explicitement par Painlevé à certainement dû l'influencer.

Quadri-impulsion de la matière et moment conjugué ADM

Le calcul de la quadri-impulsion $P\mu$ de la matière et du champ gravitationnel, selon le formalisme défini par le Landau-Lifchitz, par

$$P^{\mu}=\frac{1}{2c}\oint h^{\mu\nu\rho}\,df_{\nu\rho} \quad ,$$

où compte tenu du caractère stationnaire de la métrique, on pose $\nu = 0$, soit $h^{\mu 0\rho}$, nous a donné comme valeurs non nulles les termes de la forme $h^{i0j} = h^{j0i}$, soit seulement 6 valeurs différentes possibles et ces valeurs sont telles que $h^{i0j} = \pi^{ij}$,[585] où

$$\pi^{ij} = - g^{1/2}(K^{ij} - g^{ij} K),$$

est le moment conjugué du formalisme ADM, ce qui n'est pas trivial. En effet h^{i0j} est le super-potentiel de Freud dont le pseudo-tenseur $t^{\mu\nu}$ va se déduire par divergence sur le dernier indice alors que π^{ij}, est défini dans le contexte de l'analyse ADM comme substitut à la dérivée de la métrique et reflète la courbure extrinsèque dont on a retranché la trace. Les lettres grecques désignent les indices (de 0 à 3) des coordonnées dans l'espace-temps, les lettres latines les indices des coordonnées (de 1 à 3) dans l'espace seulement.

L'expression de P^i dans le cadre du formalisme ADM, qui s'écrit

$$P^{i}=-2\oint \pi^{ij}\,dS_{j} \quad ,$$

montre que ces deux entités qui parlent de la courbure liée au champ gravitationnel par des approches apparemment indépendantes sont équivalentes ce qui va nous fournir une autre piste pour déterminer les critères de nullité du pseudo-tenseur de Landau & Lifchitz.

Le tenseur de courbure extrinsèque K_{ij} est égal à Γ^0_{ij}, c'est-à-dire un sous ensemble de symboles de Christoffel, est un tenseur alors que dans leur globalité il n'en est pas un. De plus, ces valeurs de symboles de Christoffel sont égales aux valeurs de mêmes indices des coefficients de rotation de Ricci qu'on utilise dans un espace tangent, entre autres, dans l'équation géodésique définie dans cet espace tangent.

On sait également que ces coefficients de rotation de Ricci se simplifient au point de se ramener à des gradients spatiaux des composantes β^i du vecteur d'entraînement (spatial)

[585] À un facteur constant près. Rappelons que l'équation (19-5) est relative au formalisme de Landau & Lifchitz.

$$\Gamma^0_{ij} = \partial_i \beta,$$

comme cela a été montré au chapitre *17*.

Masse gravitationnelle nulle

Nous avons vu que le calcul de la masse gravitationnelle du corps central par différentes méthodes (formalisme Landau-Lifchitz, formalisme ADM) dans les coordonnées de Painlevé donnaient un résultat nul, attestant qu'aucun flux gravitationnel ne traversait le référentiel associé à l'observateur de Painlevé, ce qui corrobore le fait que la gravitation semble annulée dans ce référentiel, comme la nullité du pseudo-tenseur l'indiquait.

Tous ces points sont différentes facettes qui attestent de cette phénoménologie particulière.

Du modèle de la rivière émerge un espace de fond plat.

Nous avons vu et décrit au chapitre *17*, que dans le calcul d'une forme linéaire antisymétrique[586] comme Γ_{kmn} qui est le coefficient de rotation de Ricci caractérisant la courbure, on peut remplacer le produit de tétrades avec leurs inverses, $e^{l}{}_{\lambda}\, e_n{}^{\nu}$, éléments qui, rappelons-le, décrivent les relations entre les vecteurs de la base de Minkowski locale et la base de vecteurs dérivant localement des coordonnées générales associées à l'espace-temps courbe, par le produit $\delta^{l}{}_{\lambda}\delta_n{}^{\nu}$ qui caractérise une transformation en espace euclidien, alors que avec

$$e_m{}^{\mu} = \delta_m{}^{\mu} + \delta_m{}^{0}\beta^{\mu}$$

et

$$e^m{}_{\mu} = \delta^m{}_{\mu} - \delta_{\mu}{}^{0}\beta^m,$$

le produit :

$$e^{l}{}_{\lambda}\, e_n{}^{\nu} = (\delta^{l}{}_{\lambda} - \delta_{\lambda}{}^{0}\beta^{l})(\delta_n{}^{\nu} + \delta_n{}^{0}\beta^{\nu}) = \delta^{l}{}_{\lambda}\delta_n{}^{\nu} + \delta^{l}{}_{\lambda}\,\delta_n{}^{0}\beta^{\nu} - \delta_{\lambda}{}^{0}\beta^{l}\delta_n{}^{\nu} - \delta_{\lambda}{}^{0}\beta^{l}\delta_n{}^{0}\beta^{\nu},$$

correspondait à une transformation en espace courbe[587].

Nous en avions déduit que dans ce contexte seulement, ceci n'étant pas covariant, nous pouvions utiliser des coordonnées de type plat, en particulier pour l'équation géodésique, fondamentale, qui ne dépend en outre que des dérivées spatiales de Γ_{kmn}.

---

[586] Γ_{kmn}, qui se réduit dans cette application à Γ_{0ij}, antisymétrique sur ses indices *k, m* est construit à partir une combinaison antisymétrique sur les indices de d_{kmn}. Bien que d_{kmn} ne soit pas un tenseur, l'analyse ADM a montré que de façon surprenante $\Gamma^{0}_{i\,j}$, égal à K_{ij} (courbure extrinsèque projetée sur l'hypersurface spatiale) en était un, ce qui n'est pas trivial pour des coefficients de rotation de Ricci. Rappelons que comme on élève et abaisse les indices avec la métrique de Minkowski cela ne joue que pour le signe de la composante temporelle.

[587] Rappelons que la forme de la métrique de Painlevé peut s'écrire : $g_{\mu\nu} = \eta_{mn}\,(\delta^m{}_{\mu} - \delta_{\mu}{}^{0}\beta^m)(\delta^n{}_{\nu} - \delta_{\nu}{}^{0}\beta^n)$.

Analyse des caractères associés à la nullité du pseudo-tenseur.

Phénoménologie associée

Cette solution, dans le vide, se caractérise par un tenseur énergie-impulsion nul partout sauf en une singularité [588]. De plus, dans la forme de Painlevé cartésienne le pseudo-tenseur gravitation est identiquement nul[589].

Une forme de métrique où le pseudo-tenseur gravitation est identiquement nul décrit une phénoménologie d'un espace-temps où la gravitation semble neutralisée, même si dans la solution que nous considérons, la courbure, donnée par le tenseur de Weyl[590], n'est pas nulle.

Le caractère physiquement et géométriquement plat d'un espace-temps invoque un certain nombre d'attributs, que la forme de Minkowski est la seule à satisfaire totalement mais que d'autres espaces temps peuvent satisfaire partiellement de manière non covariante.

Les propriétés que nous avons énumérées ne sont pas toutes indépendantes. Si la nullité du pseudo-tenseur de gravitation semble en être la clé de voûte cette propriété est la conséquence de la forme particulière de la métrique que nous allons étudier sous différents angles à la fois formels et phénoménologiques.

La nullité du pseudo-tenseur est une propriété de la forme de la métrique.

Le pseudo-tenseur n'est pas identiquement nul.

Son expression générale $\partial_\rho \partial_\sigma \lambda^{\mu\nu\rho\sigma} = \partial_\rho \partial_\sigma (-g)(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma})/16\pi G$ dans le vide est une forme non antisymétrique sur les 2 derniers indices, donc $\partial_\rho\partial_\sigma\lambda^{\mu\nu\rho\sigma}$ n'est pas identiquement nul.

Pour qu'il puisse l'être, la métrique inverse $g^{\mu\nu}$, donc la métrique, doit avoir une forme particulière.

Pour que le pseudo-tenseur soit nul, la métrique doit être la somme d'une métrique plate et de l'auto- produit tensoriel d'un vecteur radial entrant

Commençons par cette propriété structurelle essentielle[591] de la métrique.

La forme de la métrique de Painlevé de déterminant cartésien unitaire *(-1)* s'écrit comme la somme d'une métrique minkowskienne, sur une surface, et du produit tensoriel d'un vecteur radial entrant principal V par lui-même, en coordonnées sphériques cela s'écrit :

[588]Ceci est d'ailleurs assez paradoxal, car la singularité contribue à définir certains paramètres de la variété sans y appartenir, (un flux non nul circule sur la frontière de la variété, comme dans le cas de l'espace anti-de Sitter).

[589] Notons qu'en coordonnées sphériques, pour la forme de la métrique de Painlevé, ce pseudo-tenseur n'est pas nul. Cela résulte des propriétés bien connues des coordonnées cartésiennes par rapport aux coordonnées sphériques, de déterminant non unitaire, singulières pour r = 0).

[590]Étant dans le vide le tenseur de Riemann se réduit au tenseur de Weyl.

[591]Rappelons que cette propriété est partagée par la forme de Kerr-Schild sans rotation dont nous avons montré la parenté avec celle de Painlevé.

$$ds^2 = -dt^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) + [(2M/r)^{1/2}dt + dr]^2,$$
$$ds^2 = -dt^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) + V_\mu V_\nu\, dx^\mu dx^\nu = \eta_{\mu\nu} - dr^2 + V_\mu V_\nu\, dx^\mu dx^\nu,$$

où

$$V_\mu = \{(2M/r)^{1/2}, 1, 0, 0\} \rightarrow \quad V^\mu = \{0, 1, 0, 0\},$$

sont les composantes covariantes et contravariantes dans la forme de Painlevé du vecteur ***V***.

La forme cartésienne

$$g_{\mu\nu} = \eta_{mn}(\delta^m{}_\mu - \delta_\mu{}^0\beta^m)(\delta^n{}_\nu - \delta_\nu{}^0\beta^n) = \eta_{mn}(e^m{}_\mu)(e^n{}_\nu)$$

avec

$$e^m{}_\mu = \delta^m{}_\mu - \delta_\mu{}^0\beta^m,$$

peut aussi écrire

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu - \frac{(xdx+ydy+zdz)^2}{x^2+y^2+z^2} + \left[\frac{(2M)^{1/2}}{(x^2+y^2+z^2)^{1/4}}dt + \frac{(xdx+ydy+zdz)}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}\right]^2, \qquad (19\text{-}1)$$

où $\eta_{\mu\nu}$ est le tenseur de Minkowski cartésien. Le $-dr^2$, sous forme cartésienne, est en caractère gras. Il annule les termes spatiaux du tenseur $V_\mu V_\nu$, ce qui annule son déterminant et préserve ainsi l'unitarité du déterminant total de la métrique puisque $det \mid \eta_{\mu\nu} \mid = -1$.

Le reste représente $V_\mu V_\nu\, dx^\mu dx^\nu$[592], où :

$$V_\mu = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}\{2M^{1/2}(x^2+y^2+z^2)^{1/4}, x, y, z\} \quad \rightarrow \quad V^\mu = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}\{0, x, y, z\}.$$

De déterminant unitaire sous forme cartésienne

Nous avons souligné au chapitre *13* la contrainte d'unitarité du déterminant de la métrique, $det\,(g_{\mu\nu}) = det\,(g^{\mu\nu}) = -1$, qui explique que dans la forme de Painlevé le terme correspondant à dr^2 n'est pas présent alors qu'il l'est dans la forme de Ker-Schild sans rotation.

C'est cette contrainte ajoutée à celles que nous avons énoncées au paragraphe précédent qui induisent toutes les propriétés particulières que nous avons soulignées.

[592]Nous avons explicité au chapitre *13* que la raison de l'absence du terme dr^2 et de son équivalent en coordonnées cartésiennes résultait de la contrainte de valeur unitaire du déterminant de la métrique.

Conditions analytiques décrivant la nullité pseudo-tenseur de Landau & Lifchitz

Nous avons calculé ce pseudo-tenseur dans plusieurs formes usuelles de métrique correspondant à cette solution. Nous n'avons trouvé que deux formes où il s'annulait : la forme cartésienne de Painlevé et celle de Kerr-Schild sans rotation.

Bien entendu, ceci n'est pas exhaustif, mais nous allons voir quel type de conclusions on peut en tirer. Un résultat général analytique conduirait à chercher la forme générale d'un tenseur métrique inverse qui satisfait à l'équation :

$$t^{ik} = \{c^4/16\pi G\}\{(2\Gamma^{n}_{lm}\Gamma^{p}_{np} - \Gamma^{n}_{lp}\Gamma^{p}_{mn} - \Gamma^{n}_{ln}\Gamma^{p}_{mp})(g^{il}g^{km} - g^{ik}g^{lm}) + g^{il}g^{mn}(\Gamma^{k}_{lp}\Gamma^{p}_{mn} + \Gamma^{k}_{mn}\Gamma^{p}_{lp} - \Gamma^{k}_{np}\Gamma^{p}_{lm} - \Gamma^{k}_{lm}\Gamma^{p}_{np}) + g^{kl}g^{mn}(\Gamma^{i}_{lp}\Gamma^{p}_{mn} + \Gamma^{i}_{mn}\Gamma^{p}_{lp} - \Gamma^{i}_{np}\Gamma^{p}_{lm} - \Gamma^{i}_{lm}\Gamma^{p}_{np}) + g^{lm}g^{np}(\Gamma^{i}_{ln}\Gamma^{k}_{mp} - \Gamma^{i}_{lm}\Gamma^{k}_{np})\} = 0$$

En considérant le tenseur métrique comme l'inconnue (le tenseur métrique inverse s'en déduit) ces équations sont un système de dix équations différentielles du premier ordre couplées très complexe. À supposer qu'il y ait une solution analytique donnant la ou les solutions satisfaisant à ce système, la résolution ne paraît pas évidente et laisse peu d'espoir d'aboutir par cette méthode. Pour la nullité du pseudo-tenseur, on peut se limiter au cas des solutions dans le vide[593], auquel cas il faut quand même résoudre le système de 10 équations différentielles suivantes :

$$(-g).t^{\mu\nu} = \partial_\rho[\partial_\sigma(\lambda^{\mu\nu\rho\sigma})] = 0,$$

où

$$\lambda^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{(-g)(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma})}{16\pi G},$$

soit

$$16\pi G(-g).t^{\mu\nu} = \partial_\rho\{\partial_\sigma[(-g)(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma})]\} = 0. \qquad (19\text{-}2)$$

Ces équations différentielles qui comportent des dérivées secondes, qu'on peut éliminer (elles peuvent être remplacées par une ou des fonctions (à trouver) de la métrique et de ses dérivées premières) puisqu'on sait que le pseudo-tenseur de gravitation ne comporte que des dérivées premières ne sont pas pour autant très évidentes à résoudre pour trouver les coordonnées dans lesquelles la métrique associée à la solution extérieure du corps central à symétrie sphérique satisfait l'équation *(19-2)*. Il suffit de développer le système de dix équations indépendantes, correspondant aux dix valeurs de $\mu\nu$ donnant des valeurs de $g^{\mu\nu}$ potentiellement différentes pour s'en convaincre.

$$\partial^2_t\lambda^{\mu\nu tt} + \partial^2_x\lambda^{\mu\nu xx} + \partial^2_y\lambda^{\mu\nu yy} + \partial^2_z\lambda^{\mu\nu zz} + \partial_x\partial_t\lambda^{\mu\nu xt} + \partial_y\partial_t\lambda^{\mu\nu yt} + \partial_z\partial_t\lambda^{\mu\nu zt} + \partial_t\partial_x\lambda^{\mu\nu tx} + \partial_t\partial_y\lambda^{\mu\nu ty} + \partial_t\partial_z\lambda^{\mu\nu tz}] + \partial_x\partial_y\lambda^{\mu\nu xy} + \partial_x\partial_z\lambda^{\mu\nu xz} + \partial_y\partial_z\lambda^{\mu\nu yz} + \partial_y\partial_x\lambda^{\mu\nu yx} + \partial_z\partial_x\lambda^{\mu\nu zx} + \partial_z\partial_y\lambda^{\mu\nu zy} = 0$$

Comme résoudre ce type d'équations ne paraît pas simple, après quelques considérations préliminaires, relatées en annexe *3,* chapitre *19*, d'analyse de la structure de $\lambda^{\mu\nu\rho\sigma}$ dans le cas particulier de la forme de Painlevé nous précisons ci-dessous comment la nullité va se révéler. Nous traiterons finalement le cas de la forme de Kerr-Schild sans rotation.

[593]Nous avons vu que cela résulte du fait que la divergence covariante serait égale à la divergence simple. On a posé c = 1. Il y a 10 équations au maximum compte tenu de la symétrie du tenseur métrique.

Les éléments structurants du pseudo-tenseur dans la forme de Painlevé

Le calcul du pseudo-tenseur à partir de l'expression $(-g).t^{\mu\nu} = \partial_\rho [\partial_\sigma (\lambda^{\mu\nu\rho\sigma})]$ fait en utilisant Mathematica, et donné dans le chapitre C de l'annexe *7*, nous montre que pour la forme de Painlevé, le résultat de la première opération de divergence qui donne $h^{\mu\nu\rho} = \partial_\sigma (\lambda^{\mu\nu\rho\sigma})$ ne donne que 18 composantes non nulles ce qui compte tenu des symétries correspond à 6 valeurs différentes.

Dans la suite, nous allons constater le rôle central joué par le "vecteur d'entraînement" donné ci-dessous en coordonnées sphériques

$$\beta^\mu = -\sqrt{\frac{2GM}{r}}(0,\ 1,\ 0,\ 0) \quad ,$$

ce qui donne en coordonnées cartésiennes

$$\beta^\mu = -\sqrt{\frac{2GM}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}\left(0,\ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) \quad .$$

C'est cette forme que nous allons considérer puisque que c'est dans ces coordonnées que le pseudo-tenseur va s'annuler.

Ce vecteur d'entraînement est un vecteur caractéristique structurant de la métrique puisque nous avons vu que celle-ci pouvait s'exprimer comme la somme d'un espace de Minkowski et du produit tensoriel d'un vecteur construit à partir de lui comme le montre l'équation *(5-4bis)* donnée en coordonnées sphériques[594] que nous reproduisons ci-dessous :

$$ds^2 = -dt^2 + \left(dr + \sqrt{\frac{2GM}{r}}\,dt\right)^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2(\theta)\,d\varphi^2\right) \quad .$$

[594]Qu'il est facile de convertir en coordonnées cartésiennes.

Tableau donnant le super-potentiel de Freud dans la forme cartésienne de Painlevé

h[2, 1, 2]	$-\frac{\sqrt{m}\,(4x^2+y^2+z^2)}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$	h[3, 2, 1]	$\frac{3\sqrt{m}\,x\,y}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$
h[2, 1, 3]	$-\frac{3\sqrt{m}\,x\,y}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$	h[3, 3, 1]	$\frac{\sqrt{m}\,(x^2+4y^2+z^2)}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$
h[2, 1, 4]	$-\frac{3\sqrt{m}\,x\,z}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$	h[3, 4, 1]	$\frac{3\sqrt{m}\,y\,z}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$
h[2, 2, 1]	$\frac{\sqrt{m}\,(4x^2+y^2+z^2)}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$	h[4, 1, 2]	$-\frac{3\sqrt{m}\,x\,z}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$
h[2, 3, 1]	$\frac{3\sqrt{m}\,x\,y}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$	h[4, 1, 3]	$-\frac{3\sqrt{m}\,y\,z}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$
h[2, 4, 1]	$\frac{3\sqrt{m}\,x\,z}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$	h[4, 1, 4]	$-\frac{\sqrt{m}\,(x^2+y^2+4z^2)}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$
h[3, 1, 2]	$-\frac{3\sqrt{m}\,x\,y}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$	h[4, 2, 1]	$\frac{3\sqrt{m}\,x\,z}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$
h[3, 1, 3]	$-\frac{\sqrt{m}\,(x^2+4y^2+z^2)}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$	h[4, 3, 1]	$\frac{3\sqrt{m}\,y\,z}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$
h[3, 1, 4]	$-\frac{3\sqrt{m}\,y\,z}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$	h[4, 4, 1]	$\frac{\sqrt{m}\,(x^2+y^2+4z^2)}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$

Le super-potentiel de Freud s'écrit : $\partial_\sigma \lambda^{\mu\nu\rho\sigma} = h^{\mu\nu\rho} = h^{0\nu\rho} + h^{i0j} + h^{ij0} + h^{i00} + h^{ijk}$

Ce tableau montre que dans la forme de Painlevé: $h^{0\nu\rho} = 0$, $h^{i00} = 0$, $h^{ijk} = 0$ et $h^{i0j} = -\,h^{ij0}$

Examinons les caractères qui font que certains termes sont nuls. Nous considérerons un terme générique, mais ce qui sera indiqué s'appliquera aux termes qui leur sont égaux ou opposés par symétrie ou antisymétrie.

La nullité de h^{i00} résulte du fait que les termes $\lambda^{i00\sigma}$ qui le généreraient par divergence sont nuls par construction.

Nous montrons, dans l'annexe *3*, chapitre *19*, comment la structure des termes λ^{ijkl} qui généreraient h^{ijk} par divergence implique que les h^{ijk} soient nuls.

Le terme $h^{0\nu\rho}$ peut se décomposer en h^{00i} et h^{0ij}. Leurs nullités résultent du fait que dans la forme de Painlevé $g^{ij} = \delta^{ij} - g^{0i}g^{0j}$ avec $g^{00} = -1$ et g^{0i} de la forme $g^{0i} = \partial_i f(x,y,z)$. Pour h^{0ij}, le développement de $\partial_\sigma \lambda^{0jkl}$ avec ces relations montre qu'il est de la forme $\partial_l \partial_k f(x,y,z) - \partial_k \partial_l f(x,y,z) = 0$. Pour h^{00i} elle résulte du fait que λ^{00ij} est constant (nul ou égal à ± 1), donc sa dérivée est nulle. Par contre, le calcul montre que ceci n'est pas vérifié pour h^{i0j}.

Ajoutons que dans la dernière relation de la ligne, comme la dérivée par rapport à la coordonnée $x^0 = t$ est nulle ($\partial_0 h^{ij0} = 0$), on peut ne retenir que h^{i0j} (9 valeurs possibles).

Après la première opération de divergence, pour montrer que le pseudo-tenseur de Landau & Lifchitz est nul dans cette forme, il reste à examiner pourquoi, ici, $\partial_j h^{i0j}$ est nul.

Le Super-potentiel de Freud de la solution peut être représenté par le rotationnel de vecteurs spatiaux ce qui implique que sa divergence (le pseudo-tenseur) est nulle

Les neuf valeurs de h^{i0j} permettent de définir trois vecteurs spatiaux $V(i)$[595]:

$$V_1 = \{(h^{101} = \partial_3 \lambda^{0232} - \partial_2 \lambda^{0233}),\ (h^{102} = \partial_1 \lambda^{0233} - \partial_3 \lambda^{0231}),\ (h^{103} = \partial_2 \lambda^{0231} - \partial_1 \lambda^{0232})\}$$
$$V_2 = \{(h^{201} = \partial_3 \lambda^{0312} - \partial_2 \lambda^{0313}),\ (h^{202} = \partial_1 \lambda^{0313} - \partial_3 \lambda^{0311}),\ (h^{203} = \partial_2 \lambda^{0311} - \partial_1 \lambda^{0312})\}$$
$$V_3 = \{(h^{301} = \partial_3 \lambda^{0122} - \partial_2 \lambda^{0123}),\ (h^{302} = \partial_1 \lambda^{0123} - \partial_3 \lambda^{0121}),\ (h^{303} = \partial_2 \lambda^{0121} - \partial_1 \lambda^{0122})\} \qquad (19\text{-}3)$$

Ils sont tels qu'on peut alors considérer h^{i0j} comme les composantes j d'un champ de vecteurs spatiaux tridimensionnels $V(i)$ dérivant d'un autre champ de vecteurs spatiaux tridimensionnels $W(i)$ par l'opérateur rotationnel :

$$V(i) = Rot\,[W(i)]. \qquad (19\text{-}4)$$

En rappelant que les composantes β^μ du vecteur d'entraînement sont

$$\beta^\mu = \{0, \beta^x, \beta^y, \beta^z\} = -[(2GM)^{1/2}(x^2+y^2+z^2)^{-3/4}]\{0, x, y, z\} = -\partial_\mu \Phi,$$

avec

$$\Phi = 2(2GM)^{1/2}(x^2+y^2+z^2)^{1/4}, \qquad (19\text{-}5)$$

β^μ est un vecteur spatial gradient d'une fonction de l'espace, de divergence non nulle égale à :

$$\partial_\mu \beta^\mu = 3(m)^{1/2}(x^2+y^2+z^2)^{-3/4}. \qquad (19\text{-}16)$$

[595]Du fait des symétries de $\lambda^{\mu\nu\rho\sigma}$, il y a d'autres possibilités donnant les mêmes valeurs pour les composantes $\lambda^{\mu\nu\rho\sigma}$ des vecteurs $V(i)$. Ce qui est objectif, ce sont les valeurs données par (19-7) pour $W(i)$ et (19-8) pour $V(i)$.

Dans le cas de la forme de Painlevé, les vecteurs *W(i)* cités valent par exemple[596]

$$W_1 = \{\ \lambda^{0231}, \lambda^{0232}, \lambda^{0233}) = \{0, \beta^z, \beta^y\} = \{0, \partial_z\Phi, \partial_y\Phi\},$$
$$W_2 = \{\ \lambda^{0311}, \lambda^{0312}, \lambda^{0313}) = \{\beta^z, 0, \beta^x\} = \{\partial_z\Phi, 0, \partial_x\Phi\},$$
$$W_3 = \{\ \lambda^{0121}, \lambda^{0122}, \lambda^{0123}) = \{\beta^y, \beta^x, 0\} = \{\partial_y\Phi, \partial_x\Phi, 0\}, \qquad (19\text{-}7)$$

ce qui donne

$$V_1 = \{(\partial^2_z\Phi - \partial^2_y\Phi),\ (\partial_x\partial_y\Phi - \partial_z 0), (\partial_y 0 - \partial_x\partial_z\Phi)\},$$
$$V_2 = \{(\partial_z 0 - \partial_y\partial_x\Phi), (\partial^2_x\Phi - \partial^2_z\Phi), (\partial_y\partial_z\Phi - \partial_x 0)\},$$
$$V_3 = \{(\partial_z\partial_x\Phi - \partial_y 0), (\partial_x 0 - \partial_z\partial_y\Phi), (\partial^2_y\Phi - \partial^2_x\Phi)\}, \qquad (19\text{-}8)$$

dont la divergence vaut

$$divV_1 = \{(\partial_x\partial^2_z\Phi - \partial_x\partial^2_y\Phi) + (\partial_x\partial^2_y\Phi) + (-\partial_x\partial^2_z\Phi)\} = 0,$$
$$divV_2 = \{(-\partial_y\partial^2_x\Phi) + (\partial_y\partial^2_x\Phi - \partial_y\partial^2_z\Phi) + (\partial_y\partial^2_z\Phi)\} = 0,$$
$$divV_3 = \{(\partial_z\partial^2_x\Phi) + (-\partial_z\partial^2_y\Phi) + (\partial_z\partial^2_y\Phi - \partial_z\partial^2_x\Phi)\} = 0.$$

La divergence des vecteurs *V(i)* de composantes $h^{i0j} = -h^{ij0}$ est bien nulle conformément à :

$$Div\{V(i)\} = Div\{(Rot[W(i)]\} = 0.$$

Nous avons étudié un ensemble de 3 vecteurs *V(i)* de 3 composantes chacun ce qui fait 9 valeurs de h^{i0j}. Les composantes de chaque vecteur *W(i)* sont associées à une même valeur de ν et à une même valeur de ρ mais on note que $i \neq \nu \neq \rho$ alors que σ est l'indice de la composante dans un vecteur. Par la relation $h^{i0j} = -h^{ij0}$ on obtient les 18 valeurs que donne le calcul par Mathematica pour la forme de la métrique de Painlevé.

Les vecteurs *W(i)* sont directement issus du vecteur d'entraînement (shift-vector): les valeurs des composantes non nulles sont les trois permutations de deux composantes non nulles parmi les trois de ce vecteur d'entraînement, dont la composante temporelle est nulle.

Nous voyons que nous travaillons (formellement) sur des vecteurs tridimensionnels. Ceci peut paraître surprenant dans un problème de relativité générale qui se traite de manière covariante en 4 dimensions sur des quadrivecteurs.

[596] Compte tenu des symétries de $\lambda^{\mu\nu\rho\sigma}$, on pourrait prendre d'autres valeurs.

Mais nous sommes dans une approche non conventionnelle puisque nous nous intéressons à une approche non covariante sur un pseudo-tenseur défini à partir de dérivées non covariantes.

Aussi les vecteurs spatiaux à trois dimensions dont nous parlons n'ont pas nécessairement de signification géométrique claire dans l'espace-temps de la relativité générale mais par contre ce qui est exposé ici à pour but de refléter des symétries et propriétés caractéristiques de la forme de Painlevé pour cette solution.

La forme de $\lambda^{\mu\nu\rho\sigma}$, avec les tétrades nous a montré que, compte tenu des symétries, l'expression $\partial_\sigma \lambda^{\mu\nu\rho\sigma} = h^{\mu\nu\rho}$ n'a jamais plus de 3 composantes indépendantes, par rapport à l'indice ρ, pour une valeur de $\mu\nu$ donnée, dans tous les cas, pas seulement dans la forme de Painlevé.

On peut alors les considérer comme les composantes d'un tri-vecteur, ce qui fait que nous pouvons utiliser les opérateurs mathématiques de gradient, divergence et rotationnel dans le contexte spatial, même si cela reste formel.

Ceci souligne que dans la structure apparemment compliquée de $\lambda^{\mu\nu\rho\sigma}$, c'est le vecteur d'entraînement "shift-vector", (élément très simple) qui porte toute l'information caractéristique de la gravitation (la courbure de l'espace-temps) dans cette forme de solution du trou noir à symétrie sphérique.

L'objectif de l'analyse qui précède a été de montrer comment la structure de $\lambda^{\mu\nu\rho\sigma}$, dans la forme de Painlevé, conduit à la nullité du pseudo-tenseur de gravitation.

Analyse nullité du pseudo-tenseur : forme de Kerr-Schild sans rotation

L'analyse que nous avons menée pour la forme de Painlevé est-elle utilisable pour cette autre forme de la métrique où nous avions également constaté la nullité du pseudo-tenseur ?

Nous avons montré comment les composantes de λ^{ijkl} s'annulaient à la première divergence dans la forme de Painlevé. Comme nous avons montré que ces composantes étaient identiques dans la forme de Kerr-Schild sans rotation, cela implique que cette propriété s'applique aussi à la forme de Kerr-Schild sans rotation.

Il reste à traiter le cas des composantes spatio-temporelles et de la composante temporelle.

Compte tenu des similitudes structurelles profondes des formes de métrique, qui implique la même phénoménologie vis-à-vis du pseudo-tenseur de gravitation de Landau & Lifchitz, puisque toutes deux sont la somme d'une métrique minkowskienne et du produit tensoriel d'un vecteur caractéristique par lui-même, le principe est sensiblement le même.

Par contre, le vecteur utilisé pour le produit tensoriel, à prendre en compte, n'est pas le vecteur d'entraînement $\boldsymbol{\beta}$ purement spatial[597] de la forme de Painlevé mais le vecteur de type nul

$$V^{\mu} = (2GM/r)(-1, 1, 0, 0)$$

(en coordonnées sphériques) de la forme de Kerr-Schild sans rotation.

Il apparaît (sous forme covariante V_{μ}) dans la forme de la métrique sous la forme suivante:

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) + (2GM/r)(dr + dt)^2$$

La nullité du pseudo-tenseur se réalise en coordonnées cartésiennes, comme dans le cas de Painlevé.

On doit donc considérer la forme cartésienne de ce vecteur nul qui s'écrit :

$$V^{\mu} = \frac{2GM}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\left(-1,\ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) .$$

Nous ne redonnerons pas tout le détail des calculs[598].

[597] Que nous avons décrit et dont nous avons donné la forme à plusieurs reprises.

[598] La feuille de calcul est la même que celle de Painlevé, simplement avec une métrique différente, voir annexe *10*, §*5* pour les formes de métrique de Kerr-Schild sans rotation.

Tableau donnant les composantes de $h^{\mu\nu\rho}$ dans la forme de Kerr Schild sans rotation

Le super-potentiel de Freud s'écrit : $\partial_\sigma \lambda^{\mu\nu\rho\sigma} = h^{\mu\nu\rho} = h^{0\nu\rho} + h^{i0j} + h^{ij0} + h^{i00} + h^{ijk}$

h[1, 1, 2]	$\frac{4mx}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$	h[3, 1, 2]	$-\frac{4mxy}{(x^2+y^2+z^2)^2}$
h[1, 1, 3]	$\frac{4my}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$	h[3, 1, 3]	$-\frac{4my^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$
h[1, 1, 4]	$\frac{4mz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$	h[3, 1, 4]	$-\frac{4myz}{(x^2+y^2+z^2)^2}$
h[1, 2, 1]	$-\frac{4mx}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$	h[3, 2, 1]	$\frac{4mxy}{(x^2+y^2+z^2)^2}$
h[1, 3, 1]	$-\frac{4my}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$	h[3, 3, 1]	$\frac{4my^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$
h[1, 4, 1]	$-\frac{4mz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$	h[3, 4, 1]	$\frac{4myz}{(x^2+y^2+z^2)^2}$
h[2, 1, 2]	$-\frac{4mx^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$	h[4, 1, 2]	$-\frac{4mxz}{(x^2+y^2+z^2)^2}$
h[2, 1, 3]	$-\frac{4mxy}{(x^2+y^2+z^2)^2}$	h[4, 1, 3]	$-\frac{4myz}{(x^2+y^2+z^2)^2}$
h[2, 1, 4]	$-\frac{4mxz}{(x^2+y^2+z^2)^2}$	h[4, 1, 4]	$-\frac{4mz^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$
h[2, 2, 1]	$\frac{4mx^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$	h[4, 2, 1]	$\frac{4mxz}{(x^2+y^2+z^2)^2}$
h[2, 3, 1]	$\frac{4mxy}{(x^2+y^2+z^2)^2}$	h[4, 3, 1]	$\frac{4myz}{(x^2+y^2+z^2)^2}$
h[2, 4, 1]	$\frac{4mxz}{(x^2+y^2+z^2)^2}$	h[4, 4, 1]	$\frac{4mz^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$

On constate qu'effectivement, comme indiqué, aucun terme du type h^{ijk} n'est présent.

La différence avec la forme de Painlevé est que comme le vecteur caractéristique est de type nul, cela induit une partie temporelle $h^{00i} = - h^{0i0}$ dans le super-potentiel de Freud $h^{\mu\nu\rho} = \partial_\sigma \lambda^{\mu\nu\rho\sigma}$ comme le tableau ci-dessus l'indique[599].

On peut ignorer tous les termes $h^{\mu\nu0}$ (la moitié de la liste) qui vont s'annuler dans le calcul de $t^{\mu\nu}$ puisque la divergence conduit à dériver par rapport à cet indice qui correspond au temps, et comme la solution est stationnaire ces dérivées sont nulles.

Pour les termes h^{0ij} , le même type d'argument que celui donné pour la forme de Painlevé s'applique.

Quant aux composantes spatio-temporelles de la forme $h^{i0,j}$, elles vont s'exprimer comme le rotationnel d'un vecteur *V(i)* (de composantes h^{ivj}, *j = 1* à *3*) comme dans le cas de Painlevé, ce qui garantit que la divergence du vecteur *3D,* dont elles sont les composantes, sera nul.

[599]Dans Mathematica les indices sont notés de 1 à 4 et non pas de 0 à 3.

Ici ces composantes vont combiner les composantes spatiales du vecteur caractéristique de la forme de Kerr-Schild

$$V^{\mu}=\frac{2GM}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\left(-1,\ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)\ ,$$

de la même manière que dans le cas de Painlevé pour construire trois vecteurs spatiaux du type

$$W^{j}_{(1)}=\frac{2GM}{x^2+y^2+z^2}\left(0,\ z,\ y\right)\ ,$$

W(2) et *W(3)* s'obtenant par le même type de permutation sur les indices *x, y, z* que dans le cas de Painlevé.

Les composantes "spatio-temporelles" du super-potentiel de Freud dans la forme de Schild sont le rotationnel de vecteurs spatiaux 3D.

Les vecteurs *V(i)* dont les composantes spatiales h^{ivj}, d'indice *j* sont données par les composantes correspondantes du tableau donné ci-dessus s'obtiennent par le rotationnel des vecteurs *W(i)* comme dans le cas précédent.

Les composantes "temporelles" du super-potentiel de Freud qui n'existaient pas dans la forme de Painlevé sont le gradient d'une fonction harmonique

En effet, pour les composantes temporelles h^{00j}, qui n'existaient pas dans la forme de Painlevé, il est facile de vérifier qu'elles sont le gradient de la fonction :

$$f(x, y, z) = 4GM\,(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2.}$$

Qui correspond (à un facteur 2 près) à la composante temporelle du vecteur caractéristique.

En prendre la divergence revient donc à prendre le laplacien de la fonction *f(x, y, z)* et comme la fonction f(x, y, z) ci-dessus est harmonique ce laplacien est nul.

Nous constatons, mais ce n'est pas une surprise, que les opérations sont pratiquement les mêmes que pour la forme de Painlevé, la seule différence étant liée à la différence de nature du vecteur caractéristique, nul dans un cas, de type temps dans l'autre

Nous avons montré que c'est la structure des formes de la métrique qui induit la divergence nulle du super-potentiel, donc la nullité du pseudo-tenseur qui en résulte.

Synthèse des propriétés remarquables entraînant la nullité du pseudo-tenseur

Nous avons montré que pour la méthode que nous utilisons (analyse en espace plat) dans ce type de solution, c'est la métrique inverse qui est la plus adaptée à la description du caractère pseudo-minkowskien, du fait qu'elle décrit la géométrie dans l'espace plat tangent.

Comme la double divergence sur $\rho\sigma$ du tenseur contravariant $\lambda^{\mu\nu\rho\sigma} = K(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma}-g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma})$ n'est pas trivialement nulle du fait qu'il n'est pas antisymétrique sur ces indices $\rho\sigma$, cette nullité ne peut résulter que d'une forme très particulière de la métrique inverse $g^{\mu\nu}$.

Nous avons montré que cette métrique inverse peut se mettre sous forme d'un tenseur égal à la somme algébrique du tenseur spatial euclidien δ^{ij} et du produit tensoriel $V^\mu V^\nu$ d'un quadrivecteur caractéristique radial V^μ par lui-même, quadri-vitesse de l'observateur de Painlevé[600], ce qui implique l'annulation de la double divergence de la métrique.

Mais ceci n'est pas suffisant et il faut de plus que la double divergence non covariante de la forme de métrique inverse soit nulle, ce qui implique que le vecteur V^μ soit radial et géodésique, avec tous les paramètres propres nuls comme conditions initiales à l'infini, pour annuler le pseudo-tenseur. Pour une géodésique de type temps, cette solution unique correspond au cas de l'observateur de Painlevé et pour une géodésique nulle, lumière, la nullité de V^μ impose que V^μ est celui qu'on trouve dans la forme de Kerr-Schild.

Ces propriétés confèrent à la métrique une structure spécifique, extraordinairement simple, qui permet de comprendre que les propriétés de cette métrique inverse vont être directement liées à ce vecteur quadri-vitesse géodésique. En effet cette forme, induit que le feuilletage de l'espace-temps dans ces coordonnées permet de le décomposer en hypersurfaces spatiales euclidiennes (à coordonnée temporelle constante) orthogonales à la ligne d'univers géodésique suivie par l'observateur repère, de quadri-vitesse V^μ, que nous avons appelé observateur de Painlevé, propriété que nous avions relevé au chapitre 5.

De façon opérationnelle, compte tenu de la conformité spatiale euclidienne, pour les formes de métrique associées à cette solution utilisant les mêmes coordonnées spatiales, cela se traduit par une identité de la partie spatiale de la métrique inverse. Ceci nous a incité, pour analyser la structure de cette métrique inverse, à décomposer le tenseur métrique inverse en un scalaire g^{00}, un 3-vecteur $g^{0i} = g^{i0}$ qui est le vecteur d'entraînement et le tenseur spatial g^{ij}.

Nous avons montré comment un ensemble de composantes significatives non nulles de $\lambda^{\mu\nu\rho\sigma}$ s'annulaient à la première divergence des termes $\lambda^{\mu\nu\rho\sigma}$ correspondants [601] et que pour ceux qui restaient, ils se révélaient être les composantes d'un vecteur issu d'un rotationnel d'un autre 3-vecteur, dérivé du vecteur d'entraînement, ce qui implique que la divergence suivante va les annuler.

C'est la structure très contrainte de $g^{\mu\nu}$ qui induit une structure particulière de $\lambda^{\mu\nu\rho\sigma}$ constituée uniquement d'éléments résultant de l'application d'opérateurs sur V^μ qui conduit à la nullité de la double divergence de $\lambda^{\mu\nu\rho\sigma}$.

---

[600] Ceci est démontré (par un simple calcul dans Mathematica) dans le cas où V^μ est de la forme $V^\mu = \{1, -grad(f(x^2+y^2+z^2)\}$, où $f(x^2+y^2+z^2)$ est une fonction quelconque. De plus, si $f(x^2+y^2+z^2) = 2.(2m)(x^2+y^2+z^2)^{1/4}$, ce qui est le cas dans la forme de Painlevé, les double divergences de la métrique et de la métrique inverse sont nulles. Dans la forme de Kerr-Schild c'est similaire mais en utilisant le vecteur nul caractéristique ce qui donnera $V^\mu = (2m(x^2+y^2+z^2)^{-1/2})^{1/2}\{-1, grad[(x^2+y^2+z^2)^{1/2}]\}$, voir dans le texte qui précède, la seule différence étant l'existence de composantes du type $\lambda^{00i\sigma}$ qui ne s'annulent pas à la première divergence.

[601] C'est lié aux relations entre les composantes de la métrique, voir le commentaire sur le super-potentiel de Freud.

Corpus 2 : analyse conceptuelle et épistémologique des éléments scientifiques

Ce corpus reprend le plan de l'analyse scientifique, mais ne nécessitant pas de connaissances préalables en relativité générale, il a pour vocation d'être compréhensible par un large lectorat.

Avec un minimum d'équations, après une description des difficultés conceptuelles de la théorie de la relativité générale pour bien fixer le cadre du développement des idées, il s'attache à décrire les concepts mis en œuvre dans l'approche scientifique pour rendre compte de la phénoménologie particulière de cette solution.

Les difficultés conceptuelles de la relativité générale

Avant d'analyser les concepts utilisés dans la présentation scientifique qui comporte certains aspects techniques incontournables dont nous nous attacherons à extraire la signification épistémologique, il convient de faire une introduction de la théorie de la relativité générale, qui est précisément la théorie de la gravitation relativiste.

Nous montrerons que la principale difficulté de cette théorie n'est pas technique ou mathématique mais conceptuelle.

Cette présentation est destinée à donner un sens précis aux arguments développés, non pas pour soutenir que la théorie est " exacte ",[602] mais pour bien faire comprendre ce que la théorie dit vraiment au niveau conceptuel et physique, pour éviter tout malentendu comme celui dont a été victime Painlevé par exemple.

Faisons donc un tour rapide[603] des principales difficultés rencontrées et des réticences et critiques qui lui sont faites, ce qui permettra d'apprécier les arguments et les difficultés en connaissance de cause.

Temps en physique

Nous commençons par un point qui, en général, est mal compris tant il heurte notre intuition.

Définissons ce qu'on considère comme temps physique, autrement dit un temps qui a une définition et une valorisation unique quel que soit le système de coordonnées choisi pour le décrire, quel que soit l'observateur susceptible de s'y intéresser, et qui doit, de plus, être vérifiable, par l'expérience, par n'importe quel observateur.

[602]Ce qu'elle n'est certainement pas. D'autres théories en chantier sont destinées à aller plus loin et ce processus est sans doute sans fin.

[603]Nous tenterons d'être aussi peu réducteur que possible, sachant que des ouvrages entiers ont été écrit sur le sujet.

Rappel newtonien

En mécanique newtonienne, le temps objectif absolu, indépendant de l'espace également absolu, est le paramètre dynamique de l'évolution d'un système de *N* corps défini par la position spatiale de ces corps et de leurs vitesses, lesquelles sont des vecteurs définis comme la dérivée de leurs positions par rapport au temps absolu, dans l'espace euclidien absolu.

Dans le formalisme lagrangien classique qui modélise le système par son énergie cinétique moins son énergie potentielle liée aux champs des forces en présence, ces paramètres définissent les coordonnées généralisées notées généralement (q_i, q'_i) qui vont permettre par application du "principe extrémal"[604] de définir sa dynamique (le mouvement de chacun des N corps entre deux états du système) dans cet espace absolu par rapport au temps absolu.

Formellement nous avons trois paramètres spatiaux associés aux trois dimensions de l'espace (trois degrés de liberté) et un paramètre dynamique.

L'apport magistral de Painlevé en mécanique newtonienne

Comme nous l'avons vu dans la première partie du document, Painlevé a magistralement montré dans son deuxième article (14 novembre 1921), à travers sa formulation covariante, qu'en munissant l'espace d'une géométrie non plus euclidienne mais conformément euclidienne tenant compte du potentiel (scalaire) lié au champ gravitationnel, on pouvait décrire le mouvement géodésique d'un corps sans faire appel au temps, le paramètre dynamique étant alors le paramètre affin de la géodésique dans cet espace non euclidien.

Nous avons montré que par un paramétrage particulier du paramètre affin, celui se révélait être précisément le temps absolu de la mécanique newtonienne, ce qui atteste entre autres de la pertinence de la solution proposée par Painlevé.

Si on considère le nombre de degrés de liberté dans cette approche pour déterminer le mouvement (géodésique) on se rend compte qu'il ne vaut que trois, associé aux trois dimensions de l'espace. Le reste est contraint par la physique, le potentiel gravitationnel dépendant du champ de forces détermine la géométrie conforme qui en découle, avec son paramètre affin, défini par le ds^2.

Même si dans un premier temps Painlevé ne la propose que pour la mécanique classique cette approche est formellement un progrès considérable, car en considérant le paramètre affin comme le paramètre dynamique, Painlevé converge vers le formalisme relativiste.

Nous avons cependant montré que la manière dont Painlevé veut l'étendre à la relativité générale va se révéler un échec, même si un résultat partiel non négligeable sera obtenu : la conformité des espaces-temps.

En relativité générale nous avons quatre degrés de libertés. Un modèle à trois degrés de liberté ne peut pas, en général, donner la solution d'un problème à quatre degrés de liberté sauf à en contraindre un par une relation entre eux, ce qui est le cas des géodésiques nulles (parcourues par la lumière).

[604] Aussi appelé principe de moindre action, principe variationnel.

Le lourd héritage de la relativité restreinte

Le temps en relativité générale va hériter de sa définition en relativité restreinte, car la relativité générale est une théorie relativiste de la gravitation admettant la relativité restreinte localement, dans un référentiel localement inertiel, comme limite.

Par continuité, elle hérite de la relativité restreinte pour ce qui concerne les concepts d'espace et de temps, à savoir qu'espace et temps font structurellement partie d'une seule entité physique appelée espace-temps (approche " covariante "), concept pas immédiat à notre esprit, dont la difficulté est encore aggravée par la nature " hyperbolique " de cet espace-temps, imposée conceptuellement par la vitesse finie de la lumière dont le rôle dans la causalité est essentiel.

Par approche covariante, il faut entendre qu'on ne doit considérer comme physique que des entités issues de la métrique caractérisant l'espace-temps et non pas issues de l'espace ou du temps séparément.

Un temps objectif et physique ne peut donc résulter que de cette structure spatio-temporelle.

Il va se déduire du ds^2 de la forme de la métrique spatio-temporelle par un paramétrage particulier. C'est donc un paramètre affin[605], d'une ligne d'univers de type temps caractérisée par un ds^2 négatif dans nos conventions, évaluée par intégration de $(-ds^2)^{1/2}$ le long de cette ligne d'univers, géodésique ou non, qu'on va appeler le temps propre[606], qui va correspondre à ce temps objectif et physique.

En tant que paramètre affin, il est le paramètre dynamique du phénomène (le mouvement sur la ligne d'univers).

Ce temps propre est une observable qui présente un caractère physique indiscutable puisqu'il peut, par exemple, être mesuré par l'horloge de l'observateur décrivant cette ligne d'univers.

Par nature hyperbolique, il faut comprendre que dans la forme bilinéaire quadratique de la relativité restreinte[607] qui définit la métrique, la coordonnée temporelle marque sa différence de nature avec l'espace par un signe différent[608] de celui de l'espace.

On parle de signature " lorentzienne " de la métrique à quatre dimensions de l'espace-temps qu'on formalise par (-, +, +, +), le premier signe se rapportant à la coordonnée temporelle t qu'on représente en premier aujourd'hui[609] et les autres à l'espace (x, y, z) par exemple.

Le qualificatif " hyperbolique " vient du fait que les cercles en métrique euclidienne à deux dimensions de signature (+, +) se transforment en hyperboles en métrique hyperbolique à deux dimensions de signature (-, +).[610]

---

[605]Comme dans l'analyse de Painlevé de sa formulation covariante le la mécanique newtonienne.

[606]Le terme temps propre désigne le temps " vécu " par l'opérateur sur sa ligne d'univers indiqué par son horloge. Il s'oppose au " temps impropre " terminologie tombée (heureusement) en désuétude qui désignait la valeur de la coordonnée temporelle relative à ce mouvement dans un autre référentiel. On voit que dans un cas on parle d'un paramètre affin, dans l'autre d'une coordonnée. Si un observateur dans un autre référentiel mesurait le paramètre affin il trouverait la même valeur, le ds^2 ne dépend pas des coordonnées pour un espace-temps donné.

[607]La métrique s'écrit $ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$.

[608]En général on lui affecte le signe " moins ".

[609]Ces conventions ont varié au cours du temps, à l'époque d'Einstein on mettait la coordonnée temporelle en dernier (x^4), on numérotait les 4 coordonnées de 1 à 4 alors qu'aujourd'hui on les numérote de 0 à 3.

[610]Il existe d'ailleurs une transformation " la rotation de Wick " qui réalise cela. Elle et son inverse sont entre autres utilisées pour résoudre certains problèmes (comme le paradoxe des jumeaux) en géométrie euclidienne, plus familière à notre esprit, et transposer le résultat du problème en relativité restreinte.

Il faut donc s'efforcer de raisonner covariant et hyperbolique et comme c'est un exercice périlleux et hautement contre intuitif, plus prudemment, on raisonne souvent de manière non covariante, en général sur des diagrammes géométriquement faux, mais connaissant les erreurs commises, il est possible d'en tirer des conclusions justes.

Alternativement à cette approche covariante des approches non covariantes (formalisme A.D.M par exemple) séparant espace et temps ont été développées essentiellement pour permettre des résolutions numériques dans les cas où il n'existait pas de solutions analytiques covariantes (il y en a assez peu) ou pour tenter de généraliser la théorie (gravitation quantique par exemple).

Plus formellement, la coordonnée temporelle et les coordonnées spatiales ne peuvent être considérées comme séparées, (approche non covariante), comme notre entendement nous le réclame, que dans des conditions très précises (réalisation d'un feuilletage adéquat).

Si ce n'est pas le cas, cette séparation ne peut que risquer de nous induire en erreur et au mieux elle ne peut être considérée que comme une approximation dans des conditions particulières (champ faible, faible vitesse, espace-temps stationnaires).

De plus, cette formulation n'est pas sans contrainte (choix d'une jauge) et pose des problèmes d'interprétation physique de l'espace et du temps résultant du feuilletage de l'espace-temps intervenant dans cette approche puisque dans le cadre de la théorie native de présentation covariante on ne considère comme physique que les entités quadridimensionnelles, ce que l'analyse des mesures et observations, destinées à vérifier la théorie, confirme.

La causalité en relativité restreinte

Le principe de causalité stipule qu'un événement A ne peut être la cause d'un événement B que si et seulement si l'information que l'événement A s'est produit est " connue " de l'événement B quand ce dernier se produit.

En relativité restreinte, comme le messager le plus rapide est la lumière, cela se traduit par le fait que la lumière issue du point-événement A a déjà atteint le point-événement B au moment où B se produit.

Le cône de lumière en relativité restreinte

Dans la métrique fixe de la relativité restreinte si $L = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ est la distance fixe[611] entre les point-événements A et B et $t_1 - t_0$ l'intervalle de temps coordonnée qui les sépare, la lumière parcourt une distance $l = c(t_1 - t_0)$ [612]pendant ce temps et la relation de causalité entre A et B s'écrit :

$$L \leq l \rightarrow (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \leq c(t_1 - t_0).$$

Le lieu géométrique des points atteints par la lumière au bout d'un temps t est une surface sphérique de rayon ct, un front d'onde qui progresse régulièrement dans l'espace à trois dimensions (x, y, z) avec le temps, et les événements en relation causale doivent être à l'intérieur de ce front d'onde.

Comme ce n'est pas très facile à représenter, en général on retire une dimension spatiale, considérant la progression de l'onde dans un plan (x, y), comme à la surface de l'eau, le front

[611]On note souvent, par une expression à la puissance ½, une racine carrée pour des motifs typographiques.
[612]On rappelle que c est la vitesse de la lumière.

d'onde est alors un cercle dont le rayon $r = ct$ croît linéairement avec le temps t qui est représenté sur un axe perpendiculaire au plan.

La figure obtenue donnant le domaine de causalité de l'événement A est un cône dont le sommet est le point événement A.

C'est le cône de lumière.

En général on trace les deux nappes du cône pour visualiser le passé de l'événement A (le lieu des événements qui ont pu causer A qui est l'intérieur du cône inférieur) et son futur (le lieu des événements dont il peut être la cause qui est l'intérieur du cône supérieur).

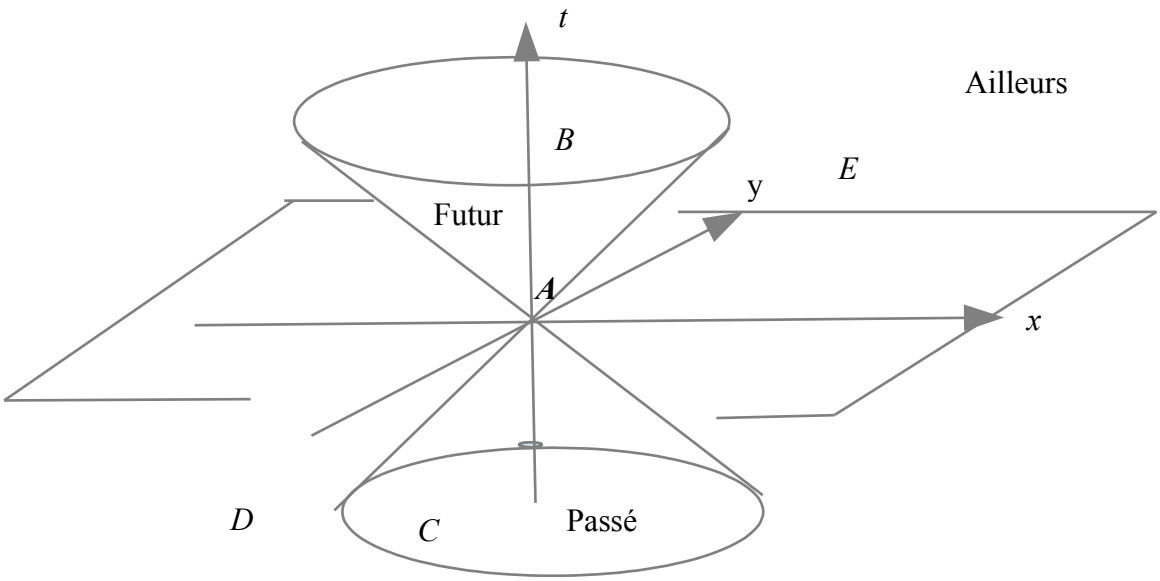
La surface du cône fait partie du domaine de causalité, mais des points événements à l'extérieur des deux nappes du cône issues de A n'ont pas de relations causales avec le point-événement A.

Il faut noter que cette relation causale est une relation d'ordre. Si A a pu être la cause de B, tous les observateurs en relativité restreinte, où qu'ils soient et quels que soient leurs mouvements verront toujours l'événement A avant (ou à la limite en même temps) que B.

Ceci n'est pas le cas pour des événements non liés par cette relation causale.

Ceci montre le rôle essentiel que la lumière va jouer dans la définition de la causalité et la structure causale qui peut être très complexe en relativité générale.

En effet en relativité générale, ce cône n'est pas global (valide pour tout l'espace-temps comme en relativité restreinte) mais seulement local, en espace-temps de Minkowski. La manière dont ces cônes locaux vont se positionner par rapport aux autres, ce qui se traduit par leur déformation dans les coordonnées globales de la relativité générale, va être significatif de la courbure de cet espace-temps.



Représentation du cône de lumière issu de A.

L'événement *B* est dans le " futur " de *A* (l'événement *A* peut être la cause de *B*), l'événement *C* est dans le " passé " de *A* (*C* a pu être la cause de *A*), *D* et *E* sont " ailleurs " sans lien causal avec *A*.

La représentation géométrique de la gravitation

Cette représentation est une manière de mettre en œuvre le principe d'équivalence[613] puisque, pour un corps d'épreuve, en définissant la géodésique de la géométrie[614] comme la ligne d'univers suivie par un corps soumis à la seule interaction gravitationnelle, elle rend celle-ci indépendante de sa masse.

Pour un corps qui contribue au champ, sa géodésique est plus complexe puisqu'on entre dans une structure non linéaire dynamique.

Inutile de préciser, que cette formulation si elle a été qualifiée " d'audacieuse " par certains n'a pas fait l'unanimité et qu'elle a été souvent décriée comme n'ayant rien à voir avec la physique.

L'utilisation d'espaces de Riemann courbes

Si on peut simplement se représenter des espaces à deux dimensions (des surfaces) courbes, comme la surface d'une sphère, c'est que notre esprit l'immerge dans notre perception tridimensionnelle euclidienne de l'espace.

Mais comment imaginer un espace courbe à trois dimensions. Nous n'avons pas de perception d'espace dont le nombre de dimensions est supérieur à trois.

Et que dire d'un espace-temps courbe à quatre dimensions et de nature hyperbolique sachant que l'espace-temps de Minkowski associé à la relativité restreinte, sans courbure, nous posait déjà des problèmes.

Cela amène à préciser ce qu'on appelle courbure en relativité générale.

Deux concepts de courbure

La courbure intrinsèque et la courbure extrinsèque.

Courbure extrinsèque

La courbure extrinsèque est la moins utilisée en relativité. Elle correspond à une approche non covariante de la théorie où on sépare espace et temps.

C'est aussi celle que nous avons évoquée ci-dessus de la surface de la sphère telle que nous la voyons immergée[615] dans l'espace euclidien à trois dimensions.

---

[613]On peut fonder d'autres théories relativistes sur ce même principe. Nous indiquons plus loin ce qui a inspiré Einstein à proposer cette représentation.

[614]Cette géodésique est définie par des propriétés purement géométriques (extremum de chemin par exemple). Cette géométrie est, elle-même, déterminée par des considérations de symétrie du champ gravitationnel et par la distribution de l'ensemble de la matière énergie

[615]Pour la surface sphérique à deux dimensions on peut l'immerger dans un espace euclidien à trois, mais en général pour immerger un objet courbe de dimension N il faut un espace euclidien de dimension 2N+1. Nash J. (54).

Courbure intrinsèque

La courbure intrinsèque correspond à l'approche covariante. Pour un espace courbe de dimension *N* elle définit cette propriété sans qu'il soit nécessaire de l'immerger dans un espace de dimension supérieure. Le tenseur de Riemann d'un espace de dimension *n*, est un tenseur à quatre indices, chacun variant de *0* à *n-1*, qui définit totalement la courbure de l'espace-temps de la relativité générale à quatre dimensions en n'utilisant que les quatre dimensions en question.

A partir du tenseur de Riemann on construit le tenseur de Ricci à deux indices, obtenu par une opération qui s'appelle la contraction qui en fait donne la "trace" du tenseur de Riemann, et le scalaire de Ricci qui à son tour est la trace du tenseur de Ricci.

Le tenseur de Ricci et le scalaire de Ricci, associés à la métrique permettent de construire le tenseur d'Einstein qui est celui qui figure dans l'équation d'Einstein.

Le membre de gauche de cette équation est le tenseur d'Einstein à quatre dimensions et à deux indices, un objet géométrique qui représente une courbure géométrique qui est une courbure intrinsèque à quatre dimensions, compte tenu de la nature du tenseur de Riemann et de ceux qui en sont déduits, et le membre de droite est un objet physique également à quatre dimensions et à deux indices, le tenseur énergie-impulsion de la matière-énergie.[616]

Cette notion de courbure intrinsèque a été d'abord introduite par Gauss (courbure des surfaces) pour des espaces à deux dimensions et étendue à un nombre de dimensions supérieures par Riemann.

Illustrons cela par la surface de la Terre ramenée au niveau de la mer et supposée parfaitement sphérique.

En prenant le pôle comme centre[617], traçons un cercle.

Il va correspondre à une latitude. Mesurons, comme le fait un géomètre, sa circonférence *l*.

Mesurons également comme un géomètre le segment de méridien de longitude *L* constante sur la surface de la Terre reliant le pôle au cercle de latitude tracé.

Une courbure peut s'observer en mesurant le rapport entre la circonférence *l* et le rayon mesuré *L* sur la sphère qui va être différent de 2π.

Ces paramètres, segment de méridien et longueur du cercle de latitude constante, sont des objets qui ont un caractère géométrique physique, car comme notre géomètre a pu le constater, ils sont mesurables.

Sur une sphère qui est un cas très simple, connaissant l'équation qui définit la surface d'une sphère, on sait comment on peut calculer la longueur d'une circonférence de latitude donnée à partir de la longueur d'arc de longitude constante la reliant au pôle, mais faisant cela, implicitement on fait référence au concept de métrique.

---

[616]Un facteur dimensionnel complète l'homogénéité de l'équation. Par ailleurs le tenseur énergie-impulsion étant à divergence covariante nulle, traduisant la conservation, dans l'espace-temps courbe, de ce flux de matière-énergie, cela impose que le tenseur d'Einstein caractérisant la courbure jouisse de la même propriété. Le tenseur de Ricci, tenseur de dimension quatre a deux indices aurait " syntaxiquement " pu convenir mais comme il ne jouissait pas de cette propriété, Einstein en a construit un " sur mesure " appelé tenseur d'Einstein noté $G_{\mu\nu}$ jouissant de cette propriété à partir du tenseur de Ricci $R_{\mu\nu}$, du scalaire de Ricci R et de la métrique $g_{\mu\nu}$:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} R\, g_{\mu\nu}.$$

[617]On peut prendre n'importe quel point de la sphère mais se référant à la Terre avec ses coordonnées de latitude et de longitude familières, c'est plus pratique, mais ce qui est dit est transposable à n'importe quel point.

Pour rester dans le concept de courbure intrinsèque les coordonnées à utiliser pour définir cette métrique ne doivent faire intervenir que des éléments appartenant à la surface sphérique. C'est ce que font exactement les coordonnées de latitude et de longitude qui déterminent parfaitement les points sur la Terre.

En relativité on utilise ces coordonnées angulaires sur la sphère, avec une convention différente pour la latitude associée à un angle θ mesuré depuis le pôle nord (il vaut 0 au pôle nord) il varie de 0 à π. La longitude φ a une origine arbitraire[618] et elle varie de *0* à 2π.

Pour un rayon *r* de la sphère[619], l'élément métrique différentiel s'écrit :

$$ds^2 = r^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\varphi^2)$$

La courbure associée qui ne fait intervenir que des éléments de la surface est appelée courbure intrinsèque.

La longueur d'une courbe d'équation $\varphi(\theta)$ par exemple s'obtient par intégration de *ds* le long de cette courbe.

Ceci se généralise aux espaces de dimensions supérieures en particulier à l'espace-temps de la relativité générale.

Plus précisément on définit la courbure *K* [620] de ce type de surfaces par:

$$K = (3/\pi) \text{ limite}_{L \to 0} (2\pi L - l)/L^3$$

La courbure intrinsèque et la courbure extrinsèque correspondent à des concepts différents et ne sont, en général, pas égales.

Un exemple frappant est celui de la surface du tore comme la chambre à air constituée d'un rectangle de caoutchouc dont on a soudé les bords opposés pour en faire un tube et ensuite soudé les extrémités du cylindre pour faire un tore qui, de façon surprenante, a une courbure intrinsèque nulle (sa surface a une géométrie de courbure intrinsèque nulle comme celle du plan dont il a hérité par construction) et une courbure extrinsèque non nulle ce qui paraît tomber sous le sens.

Ces exemples montrent combien il faut être prudent dans l'interprétation de la courbure.

Ces notions sur la courbure sont essentielles à la compréhension des espaces que nous considérons, mais elles ne sont qu'un élément dans la description de l'espace-temps.

[618]La preuve, elle se situe en Angleterre.
[619]qu'on peut mesurer à l'équateur par exemple dont la longueur vaut $2\pi r$.
[620]On peut vérifier que pour une sphère de rayon *r* cette courbure vaut $K = 1/r^2$.

La structure complexe de la représentation de l'espace-temps relativiste

Nous avions un seul espace-temps de Minkowski non courbe, en relativité restreinte, en relativité générale nous allons en avoir une infinité, tous étant disjoints les uns des autres.

En quoi ils sont disjoints et comment ils le sont, est précisément le fait de la courbure.

De nouveau, l'exemple d'une surface sphérique (qui est un authentique espace de Riemann à deux dimensions) va permettre d'illustrer ce que nous disons.

En chaque point *P* de la surface sphérique on peut faire passer un seul plan tangent[621], une surface euclidienne à deux dimensions.

Tous les plans tangents sur la sphère sont l'équivalent de tous les espaces de Minkowski de la relativité restreinte[622].

La sphère dont la courbure fait que tous ces plans sont différents et disjoints (ils n'ont pas de points commun sur la surface sphérique) a son équivalent à quatre dimensions dont la courbure intrinsèque est précisément définie par les tenseurs de courbure intrinsèques que nous avons cités, valorisés par la métrique.

Ceci illustre une difficulté inhérente à ce type de structure puisque des objets géométriques comme les vecteurs[623] par exemple, en un point de la variété, sont localisés dans l'espace tangent en ce point qui est un espace vectoriel.[624]

Comme les espaces vectoriels en deux points différents de l'espace-temps courbe sont disjoints, on ne peut pas, en l'état, comparer, additionner, en général faire des opérations sur des vecteurs qui sont dans des espaces vectoriels différents.

Cela implique, entre autres, que parler de la vitesse d'un objet lointain (qu'on modélise par un vecteur dans son espace vectoriel local) n'a en fait aucun sens rigoureux et, que dire cela, constitue ce que Wittgenstein appelle une " faute de grammaire ".

Pour permettre des comparaisons de vecteurs il faut alors procéder à ce qu'on appelle un " transport parallèle ", dans l'espace-temps courbe, d'un des vecteurs sur une ligne courbe de cet espace-temps, courbe reliant les deux points de l'espace courbe où sont localisés les vecteurs, dans des conditions bien précises (conservation de l'angle que le vecteur fait avec la courbe tout au long du transport) pour en amener un dans l'espace vectoriel de l'autre. Mais bien entendu cette méthode peut être considérée comme un pis-aller, car le résultat dépend du chemin suivi, qu'il faut alors bien préciser pour interpréter correctement l'opération.

Relations entre la métrique et la courbure.

À ce propos, précisons les relations entre métrique et les tenseurs de courbure (Riemann, Ricci et scalaire de Ricci entre autres).

Ces tenseurs sont constitués d'éléments qui ne font intervenir que la métrique, ses dérivées et son inverse.

---

[621] Un plan tangent à la sphère a un point et un seul commun avec cette surface sphérique.
[622] Étendu à quatre dimensions.
[623] Quand on ne précise pas, on sous-entend des vecteurs " contravariants " qui sont ceux qu'on utilise généralement en espace euclidien.
[624] Par définition de ce qu'on appelle en mathématiques une variété, localement, l'espace-temps est assimilable à un espace- temps plat qu'on peut munir d'une structure d'espace vectoriel.

Il semble donc que celle-ci doit être un prérequis aux tenseurs de courbure.

Mais comme cette métrique doit être relativiste, elle doit-elle même satisfaire à l'équation d'Einstein qui met en œuvre les tenseurs de courbure eux-mêmes valorisés par cette métrique et le tenseur énergie-impulsion.

En fait, ce qu'on introduit dans l'équation d'Einstein c'est une forme générique[625] de métrique a priori déjà éventuellement contrainte par des symétries inhérentes à la solution qu'on considère, dont plusieurs paramètres restent libres et que l'équation d'Einstein va contraindre.

Souvent ce n'est pas suffisant pour totalement déterminer la métrique et il faut ajouter des conditions aux limites comme la convergence des solutions avec la mécanique classique dans des conditions de champ faible, statiques et des vitesses faibles en cause devant celle de la lumière.

La métrique permet également de définir une connexion métrique qui décrit, par un ensemble de quatre matrices (*4x4*), les relations entre un espace de Minkowski et ses voisins immédiats.

En termes mathématiques, cette structure géométrique fait intervenir un fibré, dont la base est une variété différentiable munie en général d'une métrique et d'une connexion métrique (pour différentier les vecteurs, tenseurs etc ..), et dont la fibre est l'espace-temps de Minkowski tangent où les lois de la relativité restreinte s'appliquent.

Utilisation d'une métrique pseudo-riemannienne par convergence avec celle de la fibre

La métrique à utiliser va non pas être riemannienne (signature +, +, +, +) mais pseudo-riemannienne (-, +, +, +)[626] par compatibilité avec la métrique de Minkowski dans l'espace-temps tangent.

Cette spécificité ajoute un élément de complexité puisque en relativité restreinte nous avions déjà noté que même en espace plat cette structure hyperbolique n'était pas évidente à appréhender, alors lorsqu'elle se combine avec la courbure de l'espace- temps sa compréhension se complique encore.

Structure dynamique de l'espace-temps

Indépendamment des symétries éventuelles imposées *a priori* par la nature de l'espace-temps qu'on étudie, l'espace-temps est une structure dynamique qui dépend de la configuration de toute la matière et est donc sensible à des changements de configuration.

À la différence de la mécanique classique, toutes les masses (actives) de la matière-énergie contribuent à la géométrie de l'espace-temps et c'est à cet espace-temps que toutes les masses (passives) de cette matière-énergie se couplent.

Sous l'action de ce couplage la matière énergie et les champs évoluent ce qui modifie l'espace-temps et donc le couplage.

C'est ce phénomène non linéaire qui a dérouté bon nombre des collègues de Painlevé lors du débat.

[625]S'il n'y a pas de contraintes de symétrie *a priori*, la forme générique est la forme la plus générale du tenseur métrique (forme bilinéaire de dimension quatre avec une signature -, +, +, +). L'équation d'Einstein, en particulier le tenseur énergie-impulsion (distribution de matière-énergie) va contraindre des paramètres libres, ces contraintes pouvant être complétées par des conditions aux limites.

[626]On utilise aussi la convention opposée (+, -, -, -).

Invariance par difféomorphisme

Comme il n'y a pas d'espace-temps de référence (la courbure intrinsèque en atteste) tout espace-temps qui est dérivé d'un autre par difféomorphisme[627] (vis-à-vis des champs sur la variété) est en fait le même.

C'est d'ailleurs une caractéristique qui est prise en compte par exemple dans la gravitation quantique à boucles.[628]

[627]Deux ensembles M et N sont difféomorphes s'il existe une carte (une application entre chaque objet de M vers chaque objet de N) de classe C_1 et C_2 par morceaux et que cette carte est inversible.

[628]Rovelli C. (1997) Les théories conventionnelles ne sont pas invariantes par un difféomorphisme appliqué aux champs dynamiques. (Remarquons cependant que toute théorie des champs, convenablement formulée, est trivialement invariante par un difféomorphisme s'il est appliqué à chaque chose, mais ce n'est pas ce dont on parle ici). La relativité générale, au contraire est invariante, sous de telles transformations. Plus précisément, toute théorie relativiste, partage cette propriété. Donc l'invariance par difféomorphisme, n'est pas que la propriété du champ gravitationnel, c'est une propriété de la physique, une fois qu'on a pris en compte l'existence de la gravitation relativiste. Donc, on peut dire que le champ gravitationnel n'est pas particulièrement singulier sous cet aspect, mais que l'invariance par difféomorphisme est une propriété du monde physique, qui ne peut être écartée sauf dans l'approximation où la dynamique de la gravitation peut être négligée. Quelle est cette propriété ? Quel est le sens physique de l'invariance par difféomorphisme ? L'invariance par difféomorphisme correspond à l'implémentation technique d'une idée physique due à Einstein. Cette idée introduit une modification profonde des notions pré-relativistes de temps et d'espace. En physique non relativiste, on stipule que les objets physiques peuvent être localisés dans l'espace et le temps, celui-ci est défini comme une trame de fond par une structure non dynamique. Opérationnellement, cette trame d'espace-temps peut être définie par des systèmes d'objets physiques de référence, objets considérés physiquement dynamiquement découplés du système physique étudié. Ce concept n'est plus valide, lorsqu'on s'intéresse à la gravitation dans le cadre relativiste. En physique de la relativité générale, les objets physiques ne sont localisés dans l'espace et le temps que les uns par rapport aux autres. En conséquence, si nous déplaçons tous les objets dynamiques, ensembles, dans l'espace-temps, nous ne générons pas un nouvel état différent, mais une description mathématique équivalente du même état physique. C'est cela, l'invariance par difféomorphisme. En conséquence, un état physique en RG n'est pas localisé quelque part (sauf si une jauge appropriée est fixée). De façon imagée, la RG n'est pas de la physique qui se déroule sur une scène, c'est la théorie dynamique de (ou qui inclut) la scène. La gravitation quantique à boucles est une tentative d'implémentation de cette subtile notion relationnelle de localisation dans l'espace-temps dans une théorie quantique des champs. En particulier les excitations théoriques de base du champ quantique ne sont pas localisées quelque part (localisées par rapport à quoi ?), comme, disons, le sont les photons. Ce sont les excitations quantiques de la "scène" elle-même, pas des excitations sur une scène. Intuitivement, suite à cette discussion, nous pouvons maintenant comprendre pourquoi et comment la théorie des nœuds joue un rôle dans cette théorie. D'abord, nous définissons des états quantiques qui correspondent à des excitations de type boucles, du champ gravitationnel, puis en appliquant l'invariance par difféomorphisme, la localisation des boucles est évacuée et devient alors non pertinente. La seule information qui reste contenue dans la boucle est son "type de nœud", un nœud est une boucle non localisée. Alors les états physiques invariants par difféomorphisme sont étiquetés par des nœuds. Un nœud représente une excitation quantique élémentaire de l'espace. Il n'est pas ici ou là, car il est l'espace par rapport au quel, ici ou là sont définis. Un nœud est un quantum élémentaire d'espace. De cette manière, la gravitation quantique à boucles, lie la nouvelle notion d'espace et de temps introduite par la relativité générale avec la mécanique quantique. Comme nous l'illustrerons plus loin, l'existence de tels quanta élémentaires d'espace est concrétisée par la quantification du spectre d'entités géométriques.

Multiplicité des formes de métrique correspondant à un même espace-temps

Pour faire des calculs sur un espace-temps on est amené à définir une métrique, laquelle est d'ailleurs la variable dynamique, celle qu'on utilise dans le lagrangien en théorie des champs pour mettre en œuvre le principe variationnel.

La forme de cette métrique dépend du système de coordonnées choisi qui est libre ce qui entraîne la pluralité des formes de métriques sur la variété correspondant à un même espace-temps.

Ceci est vu comme une ambiguïté, car à la différence de coordonnées dans un espace de Minkowski qui est une structure fixe et qui finalement est complètement spécifié *a priori* sans avoir à définir un système de coordonnées, pour définir la courbure dans la variété différentiable, qui n'est pas définie, *a priori*, il faut introduire un certain nombre de paramètres (métrique par exemple qui permet alors de définir des connexions et d'autres entités ..) ce qu'on fait en choisissant un système de coordonnées.

Ce choix de coordonnées est libre mais en général il faut en faire un qui va alors fixer toutes les autres formes de métrique (toutes ces formes de métrique constituent une classe correspondant à une " métrique " formelle) pour la variété différentiable décrivant un certain espace-temps physique.

Rappelons qu'en relativité générale, le tenseur métrique symétrique possède en théorie dix composantes indépendantes mais que du fait qu'il existe des contraintes, le nombre d'équations indépendantes pour déterminer ces composantes, est au maximum de six.

Ceci est particulièrement évident dans le formalisme hamiltonien où comme nous l'avons indiqué, du fait de la divergence covariante nulle du tenseur d'Einstein (utilisé dans l'équation d'Einstein), seulement six composantes peuvent servir au calcul de l'évolution temporelle d'une hypersurface de type espace, les quatre autres ne sont que des contraintes sur cette hypersurface, d'où un choix de jauge (quatre contraintes supplémentaires si on veut résoudre le système, sans indétermination).

Choix d'une jauge

Un système de coordonnées est-il meilleur qu'un autre et, au cas où, en quoi est-il meilleur ?

Compte tenu de nos concepts " immédiats " d'espace et de temps on peut répondre par l'affirmative. C'est d'ailleurs une des thèses soutenues dans ce document où nous développons l'idée que la forme de Painlevé permet une meilleure compréhension de la phénoménologie relativiste de cette solution très particulière.

Mais la forme de Painlevé ne donne pas une autre solution que les autres formes qu'on peut utiliser et à ce titre on ne peut pas prétendre qu'elle soit " meilleure " et, selon la relativité, ce n'est pas le choix d'une jauge qui changerait quelque chose à cet état de fait.

Elle est " meilleure " en ce sens qu'elle propose une structure interne du continuum espace-temps, permettant la description covariante de la solution, agréable à notre esprit.

Le temps et l'espace sont de natures différentes, non seulement à notre esprit mais objectivement comme en atteste la signature de la métrique[629] (-, +, +, +). Le caractère dimensionnel différent du temps et de l'espace est homogénéisé par une constante dimensionnée (la vitesse de la lumière).

Mais il n'est pas interdit d'étudier, et nous le ferons très souvent, les caractéristiques de l'étreinte du temps et de l'espace dans ce continuum espace-temps.

Au risque d'être paradoxal, dans le développement des idées que nous exposons dans ce document, bien que clamant haut et fort que la voie royale est " covariante " nous n'aurons de cesse de faire le contraire et de montrer que le grand intérêt de cette forme est de présenter une approche non covariante, en toute conscience bien entendu, en nous attachant aux relations entre temps et espace considérés comme des entités indépendantes, plus adaptée à notre entendement, et en montrant que par certains aspects cette approche non covariante peut se confondre avec l'approche covariante.

Ceci explique un débat entre ceux qui s'attachent à décrire très précisément et formellement le continuum espace-temps en le décomposant en temps et espace (en réalisant un feuilletage) et ceux qui s'en tiennent à la version strictement covariante ignorant la structure interne de ce continuum et ne s'intéressent que à ce qui pourra être validé par l'expérience, ignorant certains paramètres internes du continuum, ce qui fait bondir les premiers.

Définition de ce qu'on peut considérer comme physique et établissement de critères pour la vérification expérimentale

Dans l'approche covariante, ce qui est physique ne peut résulter que de la métrique à quatre dimensions puisque les objets physiques (matériels, observateurs, ondes électromagnétiques, gravitationnelles, etc.) sont astreints à parcourir des lignes d'univers de type temps ou nul déterminés par la métrique à quatre dimensions.

Les observateurs et les observables sont donc dans cette catégorie et toute expérience et observation ne pourra concerner que ces objets, même si dans la validation d'un modèle d'autres éléments non covariants peuvent être " validés ".

S'appuyant sur l'orientation de la métrique dans la forme de Painlevé, nous avons qualifié de physique le fait que l'espace-temps soit orienté et en mouvement.

On peut objecter qu'on ne mesure pas l'espace-temps, en particulier le vide.

Mais ce mouvement ne se définit pas par rapport à un espace vide formel mais de manière relationnelle par les gradients des mouvements des corps d'épreuve soumis à la gravitation.

Description affine de l'espace-temps rendant compte des objets géométriques sans coordonnées et métrique

Si une métrique est généralement utilisée pour définir le tenseur métrique, pour autant celui-ci est un objet géométrique indépendant de cette métrique.

[629]Le signe associé à la coordonné temps est différent de celui associée aux coordonnées d'espace dans la forme " canonique " de la métrique.

Une variété différentiable est une structure d'accueil garantissant que les axiomes de variété sont respectés et que le calcul différentiel s'applique localement.

En munissant la variété du champ du tenseur métrique (sans avoir défini préalablement de coordonnées) cela particularise la variété.

On peut se demander " où " on implante ce champ, en quel point tel tenseur du champ est " localisé ".

La question n'a pas de sens, car les points de la variété, avant implantation du champ de tenseurs, sont équivalents.

Le champ n'est pas " quelque part " où chaque élément du champ serait en un point précis bien spécifié de la variété, ce " quelque part " serait fictif, car dans le champ de tenseurs, ils sont définis les uns par rapport aux autres de manière relative ou plutôt " relationnelle ".

Dans ce contexte l'invariance par difféomorphisme devient évidente.

Cette structure relationnelle imposée par le champ du tenseur métrique va caractériser la courbure de la variété et va fixer relativement les champs d'autres tenseurs et vecteurs qui sont liés au tenseur métrique (ils sont nombreux).

Cette structure devrait aussi permettre de définir les différents types de courbes appartenant à la variété.

En munissant la variété de ce champ, nous avons défini une " base " " physique " à laquelle on peut donc rattacher les objets " physiques " (ou non d'ailleurs) qui ont des liens avec ceux de la base[630].

Remarquons que ce tenseur métrique pouvant être la somme d'une structure fixe et du produit tensoriel d'un vecteur par lui-même, comme c'est le cas dans la forme que nous avons considérée, un champ de vecteurs pourrait définir la métrique à condition de pouvoir définir et réaliser dans cette variété affine l'opération de produit tensoriel et d'addition d'une structure fixe.

À défaut cela montre qu'il y a des liens entre des champs de vecteurs et des tenseurs.

Ceci n'est pas exhaustif mais a pour but de montrer une autre manière de présenter le problème qui peut éviter l'utilisation d'une forme de métrique particulière pour caractériser la solution avec la pluralité qu'elle invoque.

Pour les opérations de dérivation sans métrique on peut soit utiliser la dérivée de Lie par rapport à un champ de vecteurs ou la dérivée directionnelle sur une courbe de la variété.

On voit qu'une description de type affin devrait pouvoir être " fonctionnellement " complète en y insérant de manière relationnelle tous les objets dont nous avons besoin.

Pour autant son utilisation " opératoire " n'est pas forcément très simple.

Cas de la description par tétrades

Cette description permet, au moyen d'un champ de matrices 4x4, de décrire la métrique (dans un système de coordonnées implicite).

[630]Remarquons que c'est la méthode utilisée en astrométrie moderne où un " treillis " constitué de quelques centaines de quasars lointains réputés " fixes " fournit une base " relative " précise pour rattacher les objets astrophysiques.

On peut en déduire simplement la métrique, des connexions antisymétriques à partir de dérivées simples des tétrades et de leurs inverses (coefficient de rotation de Ricci) ce qui permet de définir une équation géodésique dans la fibre.

Celle-ci permet de relier de proche en proche les fibres entre elles en développant des calculs différentiels uniquement dans l'espace-temps de Minkowski local.

Une théorie peu appréciée par des mathématiciens

Dans la décennie 1960-1970, les mathématiciens ont été les grands acteurs des progrès réalisés dans la théorie.

Curieusement, Kip Thorne le souligne d'ailleurs dans son livre sur les trous noirs[631], les mathématiciens français, pourtant renommés, ne se sont pas intéressés à ce sujet, considérant peut-être que cela relevait plus de mathématiques appliquées que de recherche en mathématiques pures.

Nous avons montré que la covariance amenait à négliger certains éléments de la solution au motif qu'ils ne sont pas vérifiables par l'expérience. Ceci est de nature à déplaire aux mathématiciens qui, rigueur oblige, se doivent de présenter une solution exhaustive au problème. C'est sans doute une des raisons qui fait que cette théorie est critiquée par des mathématiciens de renom.

Les critiques portent sur son indétermination et la manière géométrique de traiter le problème, jugée pas vraiment rigoureuse.

Ces critiques sont-elles fondées ?

Peut-être que pour un mathématicien, le formalisme n'a pas toute la rigueur qu'on doit en attendre, mais on peut faire observer que, pour ce qu'on demande à la théorie, les " défauts reprochés " n'ont pas d'incidence sur le résultat.

On reproche également certaines interprétations (univers en expansion par exemple, trous noirs avec horizons, etc.).

S'agissant de physique, des expériences sont en mesure de trancher sur la validité de ces interprétations.

Il est vrai que dans ces cas extrêmes, ce n'est pas la formulation de la théorie qui est en cause mais sa validité puisque, n'oublions pas, cette théorie ne prend en compte que la gravitation à l'exclusion de toutes autres interactions, hypothèse valide à grande échelle mais qui ne l'est certainement pas pour des états très condensés de matière-énergie.

De plus la théorie n'est pas quantifiée ce qui serait à minima nécessaire pour traiter ces états très condensés (au voisinage du big-bang ou de la singularité centrale d'un trou noir).

Pour un trou noir, si la singularité centrale pose manifestement problème (on peut raisonnablement douter de son effondrement en une singularité ponctuelle), et devrait être

[631]Trous noirs et distorsions du temps " L'héritage sulfureux d'Einstein " K. Thorne (Trad. A. Bouquet et J. Kaplan) : p. 503 : " *Pourquoi est-ce un physicien britannique (Penrose) plutôt qu'un physicien américain, français ou soviétique qui introduisit les méthodes topologiques dans la recherche en relativité ? /...../ Les physiciens théoriciens français sont encore mieux formés en mathématiques que les Britanniques. Mais dans les années 60-70, les théoriciens français étaient, à ce point, imbus de rigueur mathématique (c'est-à-dire de perfection) et négligeaient tellement l'intuition physique, qu'ils ne contribuèrent guère à notre compréhension de l'effondrement des étoiles.* "

traitée par une autre théorie, l'horizon, autre caractéristique du trou noir, peut être traité, pour des objets de type astrophysique du moins, par la théorie de la relativité sans mettre en cause ses hypothèses.

Soulignons qu'il y a également un côté assez passionnel vis-à-vis de cette théorie du fait qu'elle malmène bon nombre de concepts jugés " primordiaux " de notre esprit.

C'est donc à une combinaison de difficultés conceptuelles que cette théorie va être confrontée, car parmi ces différents caractères qu'on va conférer au modèle, peu sont accessibles à notre intuition immédiate.

On comprend pourquoi cette théorie pourtant quasi centenaire, malgré ses succès expérimentaux, comporte toujours, aujourd'hui, de farouches détracteurs.

Comment en est-on arrivé là ?

Le niveau de complexité et de difficultés conceptuelles interpelle sur la démarche qui a conduit à l'élaboration de la théorie.

Il est peu probable qu'Einstein ait réalisé que la théorie allait soulever toutes ces difficultés conceptuelles et c'est heureux qu'il en soit ainsi. Sans doute que cela l'aurait dissuadé de poursuivre son travail.

Pour mener à bien une grande œuvre il faut parfois une bonne dose d'inconscience.

Nous allons voir qu'Einstein a construit sa théorie sur une réflexion qui peut paraître anodine mais dont la puissance heuristique devait être considérable, car une fois admise, elle a impliqué tout l'édifice que nous venons de passer en revue.

Ceci conforte un autre argument que nous avons défendu sur la puissance heuristique de certaines hypothèses qui ne s'évalue pas forcément *a priori*.

Démarche d'Einstein de 1907 à 1915

Einstein a commencé à s'intéresser au problème en 1907 dans un article assez général[632] ou il a tenté de proposer une première théorie (fausse) relativiste de la gravitation newtonienne.

On connaît son parcours erratique, une théorie scalaire en 1912, incorrecte, puis l'introduction de la géométrie riemannienne et la conception géométrique de l'espace-temps, l'Entwurf en 1913 en collaboration avec M. Grossman.

Les difficultés conceptuelles, auxquelles il se heurte, font qu'il faudra attendre novembre 1915 pour qu'il propose laborieusement sa théorie finale en deux temps.

La première version, qui comporte des restrictions, a été celle utilisée par Schwarzschild qui a conduit à sa solution originale qui ne traitait que de la région " statique " (extérieure à 'horizon).

Dans la deuxième version, publiée dans le même mois, il se rend compte que ces restrictions peuvent être levées.

[632]"Du principe de Relativité et des conséquences tirées de celui-ci ". Jahrbuch der radioaktivität und electronik vol IV p 411-462 (1907) à la demande de J. Stark.

Cette dernière version sera synthétisée dans un article magistral en 1916.

Comment Einstein a-t-il eu cette intuition qui a conduit à ce monument de la pensée scientifique qu'est la relativité générale dont nous avons montré l'extrême complexité conceptuelle.

Dans une conférence prononcée le 20 juin 1933 à Glasgow, Einstein s'explique sur son parcours[633], après un rappel sur le rôle que le principe de Mach a joué dans son analyse de l'inertie, Einstein dit que c'est le concept de trajectoire inertielle, une droite dans l'espace plat de la relativité restreinte qui l'a conduit à une formulation géométrique.

Ayant constaté ce lien entre la représentation géométrique et la phénoménologie physique pour l'étendre au cas de la gravitation il fallait un espace-temps ou les " droites ", en fait de manière plus générale les géodésiques, soient des courbes.

En effet, sous l'effet de la gravitation, la trajectoire inertielle n'étant plus une droite elle se devait d'être la géodésique d'une géométrie courbe (Riemann).

Cette remarque, à caractère phénoménologique, sous tendait la modélisation géométrique de la théorie avec toutes les implications qui en résultent.

Il est apparu par la suite qu'Einstein n'avait pas réalisé toute l'ampleur de ce qu'il venait de découvrir.[634]

Ceci est symptomatique de certaines découvertes majeures où la compréhension d'un détail d'un motif mystérieux permet d'en trouver la clé et d'en reconstituer l'ensemble[635].

Cela interpelle sur le processus qui mène à ces grandes découvertes.

Einstein a été guidé par son intuition dans sa quête d'une transposition géométrique de la mécanique newtonienne en une théorie relativiste convergeant avec celle-ci dans certaines conditions, et comme il n'était pas prisonnier du corset de connaissances qui lui auraient permis d'entrevoir les difficultés auxquelles il allait être confronté, il a osé !

Ceci conforte l'hypothèse que nous soutenons : les ruptures majeures dans la pensée scientifique sont souvent l'œuvre de scientifiques, hors de leur domaine d'excellence, ce qui plaide en faveur de l'interdisciplinarité.

La situation en 1921

Nous l'avons évoquée dans le document.

---

[633]Balibar F., Darrigol O., Eisenstaedt J., Pottier, Stachel J. (1993) A. Einstein, œuvres choisies T. 2 p.129.

[634]Il y a de nombreux exemples en relativité. À commencer par Painlevé qui n'a pas réalisé que sa solution non singulière sur l'horizon unissait en une seule région deux régions déconnectées dans la forme de Schwarzschild et qu'en changeant le signe du produit croisé il obtenait l'autre région symétrique. Gullstrand qui a proposé une solution semblable, peu de temps après, avait reçu le prix Nobel de médecine pour ses travaux sur l'œil. Lemaître comme nous le verrons ne s'est pas rendu compte qu'il avait trouvé de façon intégrée les quatre régions de la solution. Synge, qui présentait son travail comme une modeste contribution à la relativité générale, a trouvé en 1950 la solution que Kruskal trouvera plus de dix ans plus tard. Kruskal lui-même était un chimiste qui participait à un groupe de travail " clandestin " sur la relativité. Kerr a présenté sa solution sur les trous noirs en rotation sans réaliser l'importance de son travail, etc.

[635]Que dire des paléontologues qui à partir d'un fragment d'os reconstituent l'animal disparu.

Le moins qu'on puisse dire c'est que les idées n'étaient pas très claires, comme on l'a vu. Les relativistes étaient plutôt sur la réserve suite aux découvertes de singularités auxquelles ils ne s'attendaient pas.

Les non relativistes ne comprenaient pas ce que la formulation géométrique impliquait. Ceci explique que le dialogue ait été difficile.

Après cette longue exposition des difficultés conceptuelles inhérentes à la théorie qu'il convient de garder à l'esprit tout au long de l'analyse des concepts invoqués dans la présentation scientifique commençons l'analyse de l'exposé scientifique.

La forme de Painlevé déduite de celle de Schwarzschild

Si la forme de Schwarzschild établie en 1916[636] a été la première solution exacte de la relativité générale, cela n'est pas fortuit.

Schwarzschild se demandait ce que donnerait cette nouvelle théorie si on l'appliquait au système solaire.

Schwarzschild était un astronome éminent et célèbre formé en mécanique newtonienne, aussi, bien qu'utilisant correctement les équations de la relativité générale, il l'a fait, sans doute inconsciemment, sans se dégager des concepts fondamentaux de la mécanique classique.

Il a donc cherché une solution à symétrie sphérique, ce qui lui a posé problème, car la version préliminaire des équations d'Einstein qu'il utilisait imposait que la valeur du déterminant du tenseur métrique soit égale à *(-1)*, condition que les coordonnées sphériques ne satisfont pas.

Il a contourné le problème en créant des coordonnées de type polaire qu'il a utilisées pour établir une forme de métrique statique[637] c'est-à-dire indépendante du temps avec une condition supplémentaire que Painlevé appellera " réversibilité ".

Cette contrainte l'a conduit à une solution décrivant uniquement la région à l'extérieur de " l'horizon " telle qu'elle est définie dans des solutions plus générales (comme celle de Droste qui va suivre rapidement).

L'horizon n'existe donc pas dans sa solution, seule est représentée une région de l'espace-temps qui peut être décrite (entre autres) par un champ statique.

Rappelons qu'il existe encore une école (minoritaire)[638] qui soutient que cet horizon apparu dans des versions ultérieures de la solution, qui est une hypersurface à une distance $r = r_s$ bien déterminée du centre de symétrie ($r_s = 2GM/c^2$ en coordonnées sphériques) où M est la masse du corps contenue dans la région où $r < r_s$, est un artefact et n'a pas à être considéré physiquement et qu'on doit s'en tenir à la version originale de Schwarzschild.

Dans ce document nous nous en tiendrons à la position généralement admise, par la communauté scientifique, de l'existence d'un horizon.

Cet horizon, lorsqu'il est apparu dans les travaux de Droste comme une singularité, a été un véritable cauchemar pour Einstein et les relativistes. Rien, *a priori* ne prédisait l'existence,

[636]Schwarzschild, avec les coordonnées choisies qui rappelons le résultent de l'utilisation d'équations préliminaires d'Einstein (il est parti un peu trop tôt), a établi une forme limitée à l'extérieur de l'horizon. La forme qu'on connaît aujourd'hui sous le nom de forme de Schwarzschild est due à Droste (1916), cité dans J. Eisenstaedt (1982), p. 167.

[637]Dans les solutions indépendantes du temps on distingue les solutions statiques et stationnaires, critères qui sont formellement définies par des conditions mathématiques comme nous l'avons indiqué dans la partie scientifique du document.

[638]Voir Zahid Zakir (1999), critiqué par Senovilla J. (2006)

qu'Einstein a quasiment toujours niée, d'un tel objet, et on s'est interrogé longtemps (certains s'interrogent encore) sur son existence et, à défaut, sur son caractère physique.

Pourtant, comme nous l'avons indiqué, la forme de Painlevé aurait dû les rassurer puisqu'elle n'est pas singulière sur cet horizon.

Comme elle n'a pas été comprise cela n'a pas été le cas et Einstein et ses disciples ont plutôt tenté de montrer qu'une telle situation correspondant à un corps effondré aussi dense[639] ne pouvait pas exister et que de toute façon un effondrement de matière sous l'effet de la gravitation ne pouvait pas conduire à un tel résultat.

Le fait que la forme ne soit pas singulière sur l'horizon signifie-t-il que cet horizon n'existe pas ?

C'est un point que nous aborderons lorsque nous discuterons de sa nature physique.

Construction de la forme de Painlevé à partir de celle de Schwarzschild

Comme indiqué en tête de chapitre l'objectif est de montrer qu'on peut déduire simplement la forme de métrique qu'a proposée Painlevé à partir de celle de Schwarzschild, ce qui atteste qu'elles sont équivalentes. Ce procédé va révéler certaines propriétés très particulières de cette forme de Painlevé.

La méthode consiste à s'intéresser à une géodésique radiale particulière, suivie par un observateur en chute libre radiale, que nous appellerons observateur de Painlevé, tel que si cet observateur est parti de l'infini, à l'infini sa vitesse était nulle.

Sa vitesse actuelle est liée à sa chute radiale vers le corps central.

Cette approche est " covariante ", une géodésique ayant un caractère physique elle est indépendante du système de coordonnées qui la décrit. On peut donc la calculer dans la forme de Schwarzschild.

On calcule dans la forme de Schwarzschild les paramètres covariants décrivant son mouvement radial à savoir ce qu'on appelle la quadri-vitesse[640].

Le résultat non trivial est que la forme covariante (celle qui s'applique dans l'espace courbe) de cette quadri-vitesse est le gradient d'une fonction scalaire des coordonnées t et r de la forme de Schwarzschild que noterons $T(t, r)$.

Remarquons que cette nouvelle coordonnée temps est une fonction d'une coordonnée temporelle et d'une coordonnée d'espace (la coordonnée radiale).

Dans un contexte newtonien une telle situation ne se conçoit même pas : le temps ne peut pas dépendre de l'espace.

En relativité générale comme nous l'avons indiqué, est physique ce qui résulte de l'application de la métrique spatio-temporelle.

---

[639]La notion de densité est à préciser puisque la théorie indique un effondrement produisant une singularité ponctuelle. Mais en supposant que la condition minimum d'existence de l'horizon soit respectée (masse juste contenue sous l'horizon) cette " densité " peut être très faible si le corps est très massif (cas de trous noirs hyper-massifs où la densité ainsi définie peut être inférieure à celle de l'air).

[640]Quadri-vitesse, car il y a quatre dimensions (espace-temps) et qu'en formulation covariante toutes doivent être traitées sur le même pied. Les dérivées des quatre coordonnées s'expriment donc par rapport au paramètre affin. Voir le chapitre *5* pour son expression, sachant que le paramètre affin de la géodésique est le temps propre de cet observateur qu'on note τ.

Les coordonnées en elles-mêmes, temps ou espace, n'ont pas de caractère physique mais ne sont que de simples intermédiaires de calcul.

Seul importe et sera invariant un temps objectif et physique qui, pour tous les objets matériels à qui on peut attacher un " observateur " (qui peut être un dispositif de mesure), est le temps propre mesuré par cet " observateur ".

Remarquons que sa nature n'est pas celle d'une coordonnée, car il résulte de l'application de la métrique quadridimensionnelle combinant les quatre coordonnées temps et espace, mais qu'il est un paramètre affin.

Quoi qu'il en soit, cette fonction scalaire $T(t, r)$ peut donc être considérée comme la nouvelle coordonnée temps, en lieu et place de t qui est celle utilisée dans la forme de Schwarzschild, les trois autres coordonnées spatiales restant inchangées, sachant que les coordonnées sont des fonctions scalaires définies sur l'espace-temps courbe (la variété).

En effet à la différence des vecteurs et des tenseurs qui pour être comparés doivent être transportés parallèlement, aucune contrainte de ce type ne s'applique pour les fonctions scalaires.

Les coordonnées permettent de repérer les points de l'espace-temps courbe[641] (la variété) et définir une fonction scalaire revient à définir un scalaire en chacun de ces points ce qui est toujours possible, les points singuliers ne faisant pas partie de l'espace-temps[642].

La forme de Schwarzschild présente une singularité (la valeur de la métrique devient infinie) pour une valeur bien précise[643] de la coordonnée $r = 2GM/c^2$.

La singularité sur l'horizon est une singularité " fictive "

Nous montrons que si on substitue dans la forme de Schwarzschild cette nouvelle coordonnée T à l'ancienne t on obtient une nouvelle forme de métrique, celle donnée par Painlevé dans son premier article[644], qui n'est plus singulière sur l'horizon (ne devient pas infinie pour la valeur $r = 2GM/c^2$).

Ceci montre que cette singularité n'a aucun caractère physique puisqu'elle peut être éliminée par un changement de coordonnées, alors que si elle avait un caractère physique , c'est-à-dire si elle résultait de manière covariante de la forme complète de la métrique à quatre dimensions, comme nous l'avons explicité au début du chapitre, elle devrait exister dans toutes les formes obtenues par tous les changements de coordonnées possibles.

Dans son article de 1932 Lemaître la qualifie de " fictive ". Il explique que c'est parce qu'on a imposé une forme statique au champ gravitationnel que cette singularité se produit.

Son interprétation est particulièrement brillante et il faut reconnaître qu'à cette époque personne n'avait fait preuve d'autant de lucidité à cet égard.

---

[641]Il faut souvent plusieurs systèmes de coordonnées (un atlas) pour définir tous les points de l'espace-temps.

[642]On utilise ce qu'on appelle en mathématiques un " ensemble ouvert " ensemble qui ne contient pas de frontière (on peut s'en approcher autant que l'on veut, mais la frontière ne fait pas partie de l'ensemble).

[643]On pose très souvent $c = 1$ ce qui revient à faire un choix d'unité et également $G = 1$ pour simplifier les notations. Alors $2GM/c^2$ devient $2GM$ ($c = 1$) et $2M$ ($c = 1$, $G = 1$). Rappelons que c désigne la vitesse de la lumière et G la constante de la gravitation de Newton.

[644]Au signe du produit croisé près. En fait Painlevé a donné la forme symétrique (le " trou blanc ") mais personne ne s'en est aperçu.

Il existe des méthodes pour s'assurer qu'une singularité est "physique " ou non en calculant des scalaires caractéristiques de cet espace-temps puisque si l'un d'entre eux est nul dans une forme il l'est dans tous.

Bien entendu la relation entre *T* et *t* qui fait intervenir *r*

$$T = t + 2GM\left(\sqrt{\frac{2r}{GM}} + ln\left(\frac{\sqrt{r}-\sqrt{2GM}}{\sqrt{r}+\sqrt{2GM}}\right)\right),$$

présente une singularité puisqu'on conçoit bien qu'on ne peut éliminer une singularité que par une relation incorporant elle-même une singularité.

Nous montrons également que pour cette géodésique radiale particulière que nous attacherons à l'observateur de Painlevé, la coordonnée temporelle *T (t, r)* ainsi définie a la même valeur[645] que le temps propre de l'observateur de Painlevé.

Mais insistons bien, avoir la même valeur ne signifie pas qu'elles soient égales ce qui supposerait, en plus, qu'elles aient la même nature.

Cependant on conçoit qu'une telle relation montre que la représentation du phénomène gravitationnel dans cette forme de métrique de Painlevé, que nous avons définie à partir de l'observateur de Painlevé[646], est certainement très particulière et bien adaptée à la description de la phénoménologie considérée.

En effet nous partions de la forme de Schwarzschild

$$ds^2 = -\left(1-2\frac{GM}{r}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{1-\frac{2GM}{r}} + r^2\left(d\theta^2 + sin^2\theta\, d\varphi^2\right),$$

dont les sections spatiales

$$ds^2 = d\sigma^2 = \frac{dr^2}{1-\frac{2GM}{r}} + r^2\left(d\theta^2 + sin^2\theta\, d\varphi^2\right),$$

étaient non euclidiennes et la ligne d'univers de l'observateur associé, orthogonale à la section spatiale, non géodésique, et nous avons obtenu, par cette transformation, la forme de Painlevé

$$ds^2 = -\left(1-\frac{2GM}{r}\right)dt^2 + 2\sqrt{\frac{2GM}{r}}\,dr.dt + dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + sin^2\theta\, d\varphi^2\right),$$

[645]En fait, elle est proportionnelle, l'égalité s'obtenant par un paramétrage particulier.

[646]Bien qu'il n'y ait pas de règle stricte, souvent on associe un observateur à une forme en considérant l'observateur dont la ligne d'univers (pas nécessairement géodésique) est orthogonale à la section spatiale (la forme de métrique pour *t = constante* donc *dt = 0*). Ainsi l'observateur de Schwarzschild est statique (à coordonnées spatiales constantes) et sa ligne d'univers non géodésique.

où les sections spatiales (pour t = *constante* donc $dt = 0$)

$$d s^2 = d \sigma^2 = d r^2 + r^2 \left(d \theta^2 + sin^2 \theta \, d \varphi^2 \right) ,$$

sont euclidiennes et où la ligne d'univers, orthogonale aux sections spatiales, est une géodésique.

Manifestement la description offerte par la forme de Painlevé est plus conforme à notre entendement même si, rappelons-le, seule la forme complète quadridimensionnelle a un sens physique, pour autant sa structure interne spatio-temporelle n'est pas sans intérêt, en particulier pour comprendre à quelle interprétation newtonienne, où temps et espace sont indépendants, cela peut correspondre.

En effet, quelle peut être la signification d'une telle " simplification " structurelle ?

On peut évoquer le rasoir d'Occam stipulant que pour décrire les lois de la nature les lois les plus simples à notre entendement sont en général celles qu'il faut privilégier.

Cette assertion heuristique n'a pas valeur de principe et on ne peut pas s'empêcher d'y voir un lien avec la thèse que la réalité physique n'est qu'une production de notre esprit et que dans ces conditions nous la modelons à notre image. On peut tout autant prétendre que si cela est exact c'est parce que notre esprit a été modelé par la réalité physique. Bref cela rejoint la boutade d'Einstein disant que si le monde était comme cela (signe très compliqué), son esprit serait de même, de sorte que cela lui paraîtrait le plus simple.

Quoi qu'il en soit, nous sommes fondés à penser que cette forme, particulièrement simple à notre esprit, va certainement nous être d'une grande utilité pour appréhender la phénoménologie d'une telle solution de la relativité générale.

La suite de l'analyse va montrer d'autres caractères originaux et nous conforter dans cette voie, mais, avant de les aborder, puisque nous avons utilisé la géodésique comme pivot de notre démonstration, eu égard à son caractère physique, rappelons en termes fonctionnels comment elle se situe dans le contexte relativiste.

Coordonnées, forme de la métrique et observateur

Pour obtenir la forme de Painlevé nous avons utilisé une propriété non triviale pour opérer une transformation pour que la coordonnée temporelle de cette forme soit le temps propre de l'observateur de Painlevé (en chute libre radiale depuis l'infini sans vitesse initiale).

En général, ce type de contrainte conduit à une forme d'équation géodésique, où l'observateur est à coordonnées fixes, solution dynamique qui dépend du temps[647].

Dans la forme globale stationnaire de Painlevé, l'observateur de Painlevé, comme ce sera attesté par l'équation géodésique dans ces coordonnées, est en mouvement.

Mais on peut aussi considérer que le mouvement de l'observateur de Painlevé dans la forme de Painlevé n'est qu'illusoire[648], car il est en fait co-mobile de l'effondrement de cet espace (c'est l'espace qui est en mouvement stationnaire), à l'image des solutions de Friedmann, comme Lemaître l'avait affirmé, dont cet espace-temps n'est qu'une version particulière vide.

Quand nous parlons d'observateurs " statiques " et d'observateurs en " chute libre "[649], ceci se définit à partir de critères s'appuyant sur la forme de la métrique. Les observateurs " statiques " sont à coordonnées spatiales constantes le long de leur ligne d'univers alors que ceux en " mouvement " (chute libre par exemple) voient leurs coordonnées spatiales varier le long d'une ligne d'univers.

De même lorsque nous parlons de formes de la métrique, dynamiques, statiques ou stationnaires selon qu'elles dépendent ou non de la coordonnée temporelle, comme une forme de la métrique dépend des cordonnées choisies qui sont comme nous l'avons dit arbitraires, on va trouver pour un même espace-temps des formes de métriques " statiques, stationnaires ou dynamiques ".

Tout ceci montre combien ces qualificatifs ne sont pas structurants et sont à considérer avec circonspection.

Du caractère " dynamique " des géodésiques en relativité générale

Sur un diagramme cartésien d'axe *r, t,* en mécanique newtonienne standard, la courbe représentant une géodésique unidimensionnelle *r(t)* est une fonction dont le paramètre affin n'a pas de sens physique[650] puisque ce sont les coordonnées *r* et *t* qui sont physiques.

En relativité, la courbe représentant l'équivalent *r(t)* ou *t(r)*, par un diagramme cartésien de Minkowski, décrit une simple fonction scalaire où en général le paramètre affin physique est

[647]Ce que la forme de Lemaître donne cf chapitre *14*.
[648]C'est cette particularité qui expliquera comme nous le verrons la nullité du pseudo-tenseur de gravitation dans la forme de Painlevé
[649]Nous aurions pu aussi considérer d'autres types d'observateurs.
[650]Sauf dans la formulation newtonienne géométrique de Painlevé, où le paramètre affin a un sens physique.

non représenté, sauf à le représenter explicitement, en plus, comme nous le ferons par un réseau d'isochrones.

En effet, en relativité, les géodésiques [651] sont des courbes spatio-temporelles entrelaçant les coordonnées de temps et d'espace à travers une relation métrique[652].

La représentation paramétrique $x^{\mu} = f_{\mu}(\lambda)$, de la courbe géodésique atteste de l'équivalence, au niveau du traitement, des quatre coordonnées.

La dynamique s'évalue par rapport au paramètre affin λ (dérivées des coordonnées par rapport à λ) qui est le temps propre τ pour les géodésiques de type temps.

Les géodésiques, satisfaisant à des équations aux dérivées partielles du second ordre bien définies, sont des courbes particulières caractéristiques de l'espace-temps.

Quelquefois, lorsque la symétrie de l'espace-temps est significative (c'est le cas dans la solution que nous considérons), on peut séparer analytiquement les équations différentielles par rapport au temps propre.

Les constantes du mouvement associées, relatives à l'espace et au temps séparément, définissent des équations différentielles indépendantes ce qui permet leur intégration.

Mais dans le cas le plus général, où de telles symétries n'existent pas, ceci n'est pas possible analytiquement.

Par ailleurs le caractère temporel qu'on attribue à la coordonnée t est relatif à son signe dans la métrique imposé par sa signature (-, +, +, +) mais nous avons vu comment on peut définir des coordonnées de type temps à partir d'un " mélange " d'autres coordonnées de type temps et d'espace. Aussi ce caractère temporel n'a rien d'absolu.

Le caractère temporel objectif est déterminé par le type du paramètre affin λ (résultant du ds^2) invariant et réputé physiquement mesurable), qui n'est pas une coordonnée comme nous l'avons déjà indiqué, conformément à certaines règles et conventions utilisées en relativité.

Ceci vaut également pour les coordonnées d'espace qui n'ont pas de caractère spatial absolu.

Rappelons que dans le modèle mathématique (la variété) représentant cet espace-temps, les géodésiques, appartenant à la variété, ont un caractère géométrique objectif totalement indépendant de toute description à travers un système de coordonnées.

Elles ne dépendent que de la géométrie de l'espace-temps, nous verrons dans la suite comment la connaissance des géodésiques nous renseigne sur cette géométrie d'espace-temps.[653]

---

[651]Notons qu'un mouvement non géodésique nécessite une force dont la nature est extérieure à la description de l'espace-temps, sinon elle est intégrée dans le concept de géodésique de l'espace comme lorsqu'on traite des solutions avec charge électrique et rotation (Kerr-Newmann) où l'équation géodésique prend en compte non seulement la gravitation, mais la rotation et la charge électrique et s'applique à des particules de test chargées ou non. En cas de mouvement par réaction une force est nécessaire pour séparer la masse de test en plusieurs masses animées d'un mouvement relatif mais la conservation de l'impulsion implique que, instantanément, le centre de masse et les masses considérées suivent des mouvements géodésiques.

[652]Sauf cas particulier où la symétrie le permet, comme dans la solution que nous considérons, ces coordonnées ne peuvent pas se séparer analytiquement. Nous avons discuté des conditions de séparabilité dans au chapitre *3*.

[653]Ceci est encore vrai (et souvent encore plus significatif) pour la lumière qui est nécessairement une géodésique, à la différence d'une ligne d'univers de type temps qui peut ne pas être une géodésique.

Caractère newtonien de la forme de Painlevé

On peut mettre la métrique de Painlevé sous la forme

$$d s^2 = -d t^2 + \left(d r + \sqrt{\frac{2GM}{r}}\, d t \right)^2 + r^2 \left(d\theta^2 + sin^2(\theta)\, d\varphi^2 \right),$$

qui montre explicitement, qu'un observateur animé d'un mouvement radial vers la singularité centrale tel que $dr/dt = - (2GM/r)^{1/2}$, qui annule le premier terme entre parenthèses, voit un espace-temps minkowskien (celui de la relativité restreinte)

$$d s^2 = -d t^2 + r^2 \left(d\theta^2 + sin^2(\theta)\, d\varphi^2 \right).$$

Dans le cas d'un mouvement radial où les coordonnées angulaires θ, φ sont constantes, ce qui implique que $d\theta = 0$ et $d\varphi = 0$, cette équation se réduit à :

$$d s^2 = -d\tau^2 = -d t^2 \quad ,$$

ce qui est caractéristique d'un mouvement inertiel.

Notons que la vitesse ainsi définie qui est un rapport de coordonnées n'est pas une vitesse " covariante " qui s'écrirait $dr/d\tau$.

On peut vérifier que cette valeur correspond exactement à la vitesse d'un tel mouvement défini en mécanique newtonienne avec la coordonnée temporelle t et spatiale radiale r réputés avoir toutes deux un caractère physique (en mécanique classique).

La vitesse de coordonnées en relativité générale est donc égale à celle en mécanique newtonienne pour cette géodésique et comme dans ce cas, en relativité générale, la cordonnée temporelle t est égale au temps propre τ cela implique que $dr/d\tau = - (2GM/r)^{1/2}$, ce qui implique que cette composante de la vitesse relativiste (la quadri-vitesse) est aussi égale à la vitesse newtonienne.

Calculons l'équation géodésique radiale en mécanique classique.

L'intégration de $dr/dt = -(2GM/r)^{1/2}$ est immédiate, cela donne :

$$r^{1/2}\, dr = -(2GM)^{1/2}\, dt \rightarrow t = -(2/3)(2GM)^{-1/2}\, r^{3/2} \rightarrow r = -\{[(3/2)(2GM)^{1/2}]\, t\}^{2/3}.$$

On a posé la constante d'intégration égale à zéro pour simplifier (dans un cas concret elle est déterminée par les conditions aux limites).

La constante de gravitation est la même, la masse (gravitationnelle) également la même par construction de la métrique ainsi que la coordonnée *r* par définition géométrique.

Dans ce cas précis où le temps, coordonnée relativiste, est égal au temps propre et comme le temps newtonien est " universel " donc en particulier égal au temps propre également universel on compare bien des choses comparables et on est fondé d'affirmer que les vitesses physiques sont égales.

Ceci valide conceptuellement la comparaison de la forme relativiste de Painlevé avec la solution newtonienne, car bien que nous ayons évoqué une approche non covariante, dans une partie du calcul, nous nous en sommes libérés en utilisant le fait que pour cette géodésique particulière la coordonnée temporelle avait la même valeur que le temps propre ce qui permet une présentation relativiste covariante physique qu'on peut bien conceptuellement comparer à la solution physique de la mécanique classique.

Comme nous le verrons cette propriété n'est valide que pour cette géodésique particulière et il ne faut pas en tirer des conclusions trop générales.

Cependant nous montrerons que dans la description de la phénoménologie cette classe de géodésiques joue un rôle très privilégié et qu'il ne faut pas en minimiser la portée.

De même lorsque nous parlons de géodésique radiale c'est une manière générique d'adresser une classe doublement infinie de géodésiques (par variation indépendante de θ et φ) qui possèdent cette propriété, classe qui engendre tous les points de l'espace-temps.

Ne nous étonnons pas que dans ces conditions la forme de Painlevé possède des caractères newtoniens aussi particuliers.

Ce n'est pas une simple coïncidence comme on peut s'en douter et nous en étudierons les fondements structurels.

Nous avons exprimé la métrique dans des coordonnées de type sphérique pour la partie spatiale, compte tenu de la symétrie sphérique spatiale du problème posé, mais nous aurons l'occasion de découvrir que les coordonnées cartésiennes pourtant réputées ne pas être les mieux adaptées à un problème à symétrie sphérique vont finalement se révéler bien plus instructives et utiles dans la conduite de l'analyse de la solution que les coordonnées sphériques.

La forme de Painlevé " généralisée " : ajout d'une vitesse initiale non nulle

Si au lieu de supposer que la vitesse est nulle à l'infini nous supposons une vitesse quelconque, on définit alors une famille, dont la géodésique de Painlevé est un membre, dont la métrique plus complexe présente des sections spatiales qui ne sont plus euclidiennes.

Nous appellerons cette famille de formes " forme de Painlevé généralisée "

Par contre comme le fait d'ajouter une vitesse initiale ne modifie pas la dynamique d'un système (ne concerne pas les accélérations, n'ajoute qu'une constante d'intégration) nous verrons que la phénoménologie globale est peu modifiée.

Si nous supposons que la vitesse initiale est celle de la lumière, ce qui n'est possible que pour la lumière, nous obtenons alors une forme très intéressante qui est celle que Finkelstein trouvera beaucoup plus tard[654].

[654]Finkelstein (1958).

Le trou noir est la solution générique de la solution

Les métriques définies pour le trou noir sont également valides à l'extérieur de toute masse à symétrie sphérique (étoiles ou planètes idéalisées) mais dans ce cas seule une partie de la phénoménologie s'exerce.

Aussi, même si on peut douter de son existence physique, nous définirons le trou noir, qui invoque toute la diversité de la phénoménologie de la région décrite par la forme de Painlevé, comme forme générique.

Un commentaire circonstancié précisera ce qu'on peut raisonnablement considérer comme physique qu'on doit pouvoir vérifier par des expériences ou des observations.

En quoi la contribution de Painlevé est magistrale

Pour être complet il faut rappeler que la solution mathématique rigoureuse (l'extension analytique maximale) au problème montre qu'il existe une région symétrique hypothétique en " expansion " (le trou blanc).

En fait, c'est d'ailleurs cette solution en " expansion " que Painlevé décrit dans son article mais il ne s'en est pas rendu compte[655].

Nous avons " corrigé " le signe du produit croisé *dr*.*dt* pour que cela corresponde à l'espace-temps en " contraction " (le trou noir), car ce qui importe c'est la structure de la solution.

Mais ceci montre que, dès 1921, sa proposition était quasiment complète puisque l'orientation de sa forme de la métrique nécessaire pour que la région s'étende en deçà de l'horizon en éliminant la singularité sur l'horizon, avait pour conséquence l'existence de deux solutions correspondant à deux régions, une pour chaque orientation possible.

Ces deux régions couvrent l'extension analytique maximale. Certes, elles ne sont pas intégrées en une seule comme Synge l'a proposé en 1950 et puis Kruskal en 1960 et quelques autres après lui, mais tous les éléments nécessaires à la description complète de cet espace-temps étaient présents.

Il faudra attendre 37 ans pour que Finkelstein en 1958 trouve une solution aussi performante où l'absence de singularité sur l'horizon résulte de deux orientations possibles, dans la forme de la même famille que celle de Painlevé où le " boost " initial est, non pas égal à zéro, mais égal à la vitesse de la lumière.

Nous pouvons mesurer ce que le déni de sa solution a pu représenter comme perte pour la science.

[655] À noter que Lemaître qui pourtant n'avait pas eu connaissance des travaux de Painlevé, commet la même " erreur " : Lemaître (1932) p. 201 au-dessus de l'équation (11.6).

Un univers qui émerge du néant ?

La solution analytique maximale implicite dans la forme de Painlevé décrit des régions symétriques en phénoménologie telles, que si au lieu d'être disjointes elles étaient superposées, le résultat serait le néant !

Remarquons que la plupart des lois de la nature mettent en œuvre des symétries et qu'à ce titre cette propriété n'a rien d'exceptionnel mais analysons, ce cas, de plus près.

La propriété énoncée se manifeste également quand, comme nous le verrons, on calcule la masse gravitationnelle (active) d'un trou noir par l'intégrale de Komar où par d'autres méthodes qui toutes calculent cette masse par un flux, car on ne peut pas la calculer par une intégration de la matière, nulle partout sauf en un seul point, où elle est singulière.

Pour avoir une chance de trouver une masse non nulle il faut considérer chaque région séparément. Pour une forme statique on va trouver que la masse vaut M dans la région trou noir et $-M$ dans l'autre région, le signe étant conventionnel, mais ce qui ne l'est pas c'est qu'elles sont de signes opposés. Si on considère la région correspondant à l'extension maximale, la somme est nulle.

Ceci suggère que ce type de solution peut être considéré comme résultant de la dissociation du néant qui se séparerait en deux entités contraires.

Finkelstein se demande d'ailleurs dans son article de 1958 comment il se fait que nous soyons dans une région (en contraction) plutôt que dans l'autre puisque les équations sont symétriques.

Il invoque le caractère non linéaire des équations comme source possible de cette brisure de symétrie (à partir d'instabilités ?).

Quoi qu'il en soit l'existence de ces régions symétriques est assez déroutante.

D'un point de vue physique, l'existence de la région symétrique d'un trou noir ne peut pas exister si celui-ci résulte d'un effondrement de matière.

En effet il ne faut pas oublier que la solution mathématique est idéalisée et décrit des trous noirs et des trous blancs éternels.

En général, on considère que même dans notre monde physique imparfait ces solutions idéales sont utilisables, mais dans des cas extrêmes on peut en douter, car pour que cette symétrie existe, il faut que la solution existe depuis toujours et pour toujours.

Soulignons que les calculs de masse par la même méthode de flux que celle citée, mais dans la forme de Painlevé pour un observateur de Painlevé, montrent que la masse ainsi calculée est nulle dans chaque région.

Le résultat global est le même, mais ici la symétrie de phénoménologie pour la masse se confond avec l'identité, reste simplement l'orientation de l'espace qui, elle, est symétrique.

Nature de la coordonnée T de la forme de Painlevé et la structure de l'espace-temps

Nous examinons la signification physique (en fait géométrique) du fait (non trivial) que, dans cette solution, la quadri-vitesse covariante U_μ est le gradient d'une fonction scalaire *T(t, r)* [656]ce qui nous a permis de construire la forme de Painlevé à partir de celle de Schwarzschild.

Nous avons affirmé que dans la forme de Painlevé les géodésiques radiales suivies par l'observateur de Painlevé étaient orthogonales (au sens de la relativité) aux sections spatiales euclidiennes. Si le caractère euclidien des sections spatiales est évident, leur orthogonalité avec la géodésique radiale de Painlevé l'est moins.

On peut le vérifier simplement par le calcul en faisant le produit scalaire de la quadri-vitesse de l'observateur de Painlevé avec un vecteur quelconque appartenant à la section spatiale mais il est plus instructif d'en analyser la raison.

Elle résulte du fait que la quadri-vitesse (covariante) de l'observateur de Painlevé, exprimée dans l'espace courbe (sur la variété) est le gradient de la fonction scalaire *T (t, r)* où *t* et *r* sont les coordonnées de la forme de Schwarzschild. Rappelons que les coordonnées angulaires du système de coordonnées sphériques n'interviennent pas, puisque pour une géodésique radiale elles sont constantes.

Cette propriété a une double implication géométrique.

– D'une part la ligne d'univers correspondante à la nouvelle coordonnée *T* ainsi définie est orthogonale (en fait son quadrivecteur tangent) aux sections spatiales à *T = constante* qui sont les sections spatiales (euclidiennes) de la forme de Painlevé.

– D'autre part cette ligne d'univers est géodésique.

Ce type de propriétés n'est pas trivial : la forme de Schwarzschild et bien d'autres n'y satisfont pas.

Ceci correspond à la possibilité de " feuilleter " (découper l'espace-temps en section spatiales que l'on appelle " feuilles " à valeur de *T = constante*) d'espace-temps. Ces " feuilles ", espaces euclidiens à trois dimensions, sont assemblées entre elles orthogonalement[657] en tout point, aux géodésiques des observateurs de Painlevé, pour reconstituer l'espace-temps

Ceci nous donne un moyen de décrire correctement et rigoureusement un objet covariant (l'espace-temps) avec nos concepts habituels d'espace et de temps.

Nous montrons que quand nous introduisons un " boost " (forme de Painlevé généralisée) cette propriété se conserve moyennant le remplacement de l'égalité par la proportionnalité.

[656]Tiré de Martel K. & Poisson E. (2000)
[657]Orthogonalement au sens de la relativité.

La coordonnée temporelle T est égale au temps propre de l'observateur de Painlevé

Nous montrons ici comment le temps propre de l'observateur de Painlevé est égal (en valeur) de façon non triviale à la coordonnée temporelle de la forme de la métrique.
Nous en donnons la démonstration rigoureuse dans la partie scientifique, mais nous l'avions déjà évoqué et montré par la forme de la métrique.

Nous considérons également le cas de la forme de Painlevé généralisée, avec un " boost " non nul à l'infini, qui ne s'en distingue que par l'application d'un facteur constant qui est le facteur de Lorentz de la relativité restreinte lié au " boost " qui distingue les formes.

La quadri-vitesse covariante de l'observateur de Painlevé dans cette forme est constante et égale à l'unité

Nous montrons que la vitesse covariante (quadri-vitesse covariante) de l'observateur de Painlevé qui régit le décalage spectral observé, est constante et réduite à sa plus simple expression, permettra de comprendre ce qui a pu motiver ses propos contestés.

Le calcul fait au chapitre *6* montre que le vecteur quadri-vitesse de l'observateur de Painlevé en coordonnées covariantes prend la forme non triviale[658]:

$$U_\mu = U^\nu g_{\mu\nu} = (-1,0,0,0). \qquad (6\text{-}2)$$

Ce quadrivecteur " covariant " n'a qu'une composante, la composante temporelle, qui est constante (indépendante des coordonnées), la quadri-vitesse radiale étant nulle.

Ceci diffère de la vitesse contravariante[659] U^μ, car comme l'équation *(6-1)* de l'exposé scientifique

$$U^\mu = \left(1, -\sqrt{\frac{2GM}{r}}, 0, 0\right), \qquad (6\text{-}1)$$

l'indique, la composante de quadri-vitesse radiale est égale à $(2GM/r)^{1/2}$.

Ceci, comme nous l'avons indiqué, est la quadri-vitesse de chute libre covariante $dr/d\tau$ égale à la vitesse de coordonnée dr/dT, elle-même égale à la vitesse de chute libre newtonienne dr/dt.

[658]Rappelons que μ est l'indice variant de *0* à *3* qui désigne la composante du quadrivecteur. La composante *0* est la composante temporelle et les composantes de *1* à *3* sont les composantes spatiales.
[659]Un vecteur " contravariant " est défini dans l'espace vectoriel localement tangent à l'espace-temps lui-même représenté géométriquement par une variété. La base de vecteurs également " contravariants " qui porte les composantes de ce vecteur est dans ce même espace-temps. À ce titre un vecteur " contravariant " correspond au vocable de vecteur tel qu'on l'utilise usuellement. Un vecteur " covariant " est dans l'espace vectoriel dual aussi appelé espace cotangent, celui des formes linéaires sur l'espace vectoriel des vecteurs contravariants. C'est en fait une forme linéaire. Le terme covariant, pour un vecteur, prête à confusion avec la covariance des lois physiques, aussi il convient de bien noter le contexte dans lequel ce terme est utilisé.

Un paradoxe qui résulte de la courbure de l'espace-temps

Cela peut paraître très surprenant que cette que quadri-vitesse " covariante " de l'observateur de Painlevé ne fasse intervenir que la coordonnée temporelle alors que le phénomène de chute libre radiale se traduit par une variation (une diminution) manifeste de la valeur de la coordonnée radiale *r,* comme la quadri-vitesse contravariante donnée par *(6-1)* le montre.

C'est une manifestation de la courbure de l'espace-temps qu'il est difficile de se représenter mentalement.

En, effet, rappelons que U^μ sont les composantes d'un vecteur défini localement dans l'espace-temps tangent dont les vecteurs de base $\partial_\mu = dx^\mu/d\lambda$ sont localement tangents aux coordonnées x^μ définies sur la variété alors que $U_\mu = g_{\mu\nu} U^\mu$ est une forme linéaire (vecteur covariant), s'appliquant localement sur les composantes U^μ , forme linéaire qui est définie sur la variété elle-même[660] (espace cotangent).

La valeur constante de U_μ signifie géométriquement que la géodésique de l'observateur de Painlevé de paramètre affin τ est la coordonnée T (courbe) sur la variété, donc que $T = \tau$.

Description, de cette propriété originale, utilisant le feuilletage de l'espace-temps.

Nous avons longuement exposé les difficultés conceptuelles de la relativité générale au début de ce chapitre, en particulier la difficulté de se représenter des espaces courbes. Nous en avons une illustration ici.

Notre esprit serait-il infirme au point de nous rendre inaccessible ce type de concept ?

Si cela semble poser des difficultés pour appréhender directement et synthétiquement cette géométrie courbe, nous ne sommes pas pour autant à court de ressources pour y accéder.

En effet, nous avons montré que la géodésique suivie par l'observateur de Painlevé était orthogonale aux sections spatiales (des hypersurfaces spatiales à trois dimensions) caractérisées par $T = constante$.

Ces hypersurfaces de l'espace courbe, résultant d'un feuilletage, sont formellement bien définies dans l'espace-temps courbe (sur la variété), dans le système de coordonnées choisi $(T, r, \theta\ \varphi)$.

Le mouvement de l'observateur sur sa géodésique qui est défini par un critère géométrique d'orthogonalité aux hypersurfaces à $T = \tau = constante$, bien définies, dans cet espace courbe (la variété) , est déterminé uniquement par son paramètre affin τ qui est égal à T.

La trajectoire (ligne d'univers) de la géodésique s'identifie donc à la coordonnée T.

En effet, on voit que dans cette définition dans l'espace-temps courbe (sur la variété) seule la coordonnée T égale au paramètre affin τ intervient et que la coordonnée r sur l'hypersurface n'est pas impliquée dans la définition de la géodésique.

[660]En effet on peut définir des fonctions sur la variété, entre autres des formes linéaires.

Signification physique de cette quadri-vitesse covariante constante

Autrement dit, lorsque la géodésique coupe orthogonalement les hypersurfaces prédéfinies, la coordonnée *r,* dans l'hypersurface minkowskienne tangente au point d'intersection, varie comme la quadri-vitesse contravariante le montre.

Mais, dans la description interne à l'espace-temps courbe (sur la variété dans l'espace cotangent) ceci étant inhérent à la courbure, (contenu dans la courbure) seule la progression du paramètre affin sur la courbe (la géodésique de l'observateur de Painlevé) qui est le gradient de la fonction scalaire *T* de l'espace-temps (fonction scalaire sur la variété) est invoquée.

Nous voyons comment nous contournons notre déficience de perception synthétique de l'entité espace-temps en définissant sa structure interne (décomposition structurée de l'espace-temps en temps et espace) et en raisonnant alors avec nos concepts immédiats de temps et d'espace.

Ce sera un problème récurrent lorsque nous expliciterons, par des diagrammes, des phénoménologies en espace-temps courbes, car nous nous heurtons à une quadruple difficulté de représentation.

> D'une part ces diagrammes sur une feuille sont à deux dimensions, ce qui, ici, n'est pas trop gênant compte tenu de la symétrie sphérique qui réduit les degrés de liberté à deux pour les géodésiques radiales.
>
> La présentation n'est pas covariante, les axes *(x, y)* : degrés de liberté du diagramme, sont associés aux coordonnées. La courbe représentée est une fonction entre les coordonnées donc de nature non covariante.
>
> Sur ces diagrammes, la géométrie est euclidienne de signature *(+, +)* et non pas lorentzienne de signature *(+, -)*. Ceci pose déjà problème en relativité restreinte.
>
> De plus la géométrie de la feuille de papier est plane et non pas courbe, difficulté complémentaire liée à la relativité générale.

Il faudra interpréter ces diagrammes en tenant compte de toutes ces difficultés.

Nous verrons comment on peut incorporer certains éléments dans le diagramme qui vont nous aider à les interpréter correctement.

Caractère restrictif de cette propriété.

Compte tenu des conditions que nous avons évoquées pour que cette propriété soit présente on conçoit que dans la forme de Schwarzschild, il n'existe pas d'observateur qui la possède.

Cette relation qui est satisfaite pour la forme de Painlevé est donc restrictive.[661]

Soulignons que cette propriété est trivialement vérifiée dans le référentiel propre inertiel de cet observateur de Painlevé, dont la forme globale nativement géodésique et diagonale de Lemaître[662] (forme quadratique) donne la métrique.

Dans cette forme de Lemaître, qui dépend du temps, U^μ n'a une seule composante, la composante temporelle, qui est constante et égale à 1[663].

La contrainte d'invariant métrique $U^\mu U_\mu = -1$, implique que le quadrivecteur covariant U_μ n'a qu'une seule composante, la composante temporelle, égale à -1, de signe opposé à celle de U^μ compte tenu de la signature de la métrique.

La courbure semble " effacée " du fait qu'on est dans le référentiel inertiel attaché à l'observateur de Painlevé.

La forme de Painlevé et celle de Lemaître donnent deux descriptions complémentaires de la même phénoménologie, chacune en montrant un visage spécifique.

Cependant, à la différence de la forme " géodésique " de Lemaître, la forme donnée par *(6-2)* de la quadri-vitesse n'est pas triviale dans une forme stationnaire globale comme celle de Painlevé (ne dépendant pas du temps), où U^μ n'a pas cette propriété.

Mais le lien avec la forme géodésique de Lemaître résulte du fait que la forme de Lemaître et celle de Painlevé utilisent la même coordonnée temps, ce qui implique que le feuilletage temps-espace définit le même espace à trois dimensions physique mais dans des coordonnées différentes.

Cas de la forme de Painlevé généralisée

Ces conclusions s'étendent au cas de la forme de Painlevé généralisée avec comme seule modification que la valeur de la composante temporelle du quadrivecteur vitesse, qui est la seule non nulle et qui reste constante ne vaut plus *(-1),* est affectée par le " boost " caractérisé par le paramètre p et vaut :

$$U_\mu = \{ -p^{-1/2}, 0, 0, 0\} \qquad (6\text{-}2bis)$$

[661]On retrouve cette valeur de U_μ, de façon triviale, dans la forme de Lemaître (non stationnaire) puisqu'elle est attachée au référentiel de l'observateur de Painlevé. Mais bien sûr notre remarque s'applique à cet espace-temps. Dans la métrique de Robertson-Walker on trouve aussi une vitesse covariante de ce type.

[662]Nous décrirons cette forme au chapitre *14*. Dans cette forme géodésique ce qu'on désigne par la coordonnée t est en fait le temps propre τ, par construction puisque l'observateur au repos dans cette forme est géodésique. Autrement dit le terme quadratique temporel de la métrique s'écrit : $-dt^2$.

[663]Tout ceci se retrouve également dans la solution cosmologique décrit par la métrique de Robertson-Walker qui jouit des mêmes propriétés géométriques : elle dépend du temps et $U^\mu = \{ 1, 0, 0, 0\}$, $U_\mu = \{-1, 0, 0, 0\}$.

La forme de Painlevé et le référentiel d'émission (réception) des photons.

Pour un rayon lumineux on est amené à utiliser un paramétrage affin particulier, puisque le temps propre, identiquement nul pour la lumière, n'est pas utilisable[664]. À la différence d'une particule matérielle dans lequel l'observateur associé (chevauchant la particule) peut opérer des mesures d'énergie ou de fréquence par exemple, il n'existe pas pour la lumière de référentiel[665] puisque aucun observateur physique ne peut chevaucher des photons.

Pour un rayon lumineux se propageant sur une géodésique $x^{\mu}(\lambda)$ définie dans la forme de la métrique de Painlevé, le paramétrage λ est défini par[666]:

$$p^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{d\lambda}.$$

Dans cette équation, p^{μ} est l'impulsion du photon[667]. La fréquence d'un photon d'énergie[668] $E = \omega$ (en posant $h = 1$), mesurée par un observateur de vitesse U_{μ}, dans cette forme vaut : [669]

$$E = \omega = - \frac{dx^{\mu}}{d\lambda} U_{\mu} . \qquad (6\text{-}3)$$

La mesure de l'énergie du photon dans le référentiel associé à un observateur s'obtient en " projetant " (au sens géométrique) le quadrivecteur nul associé au photon sur le référentiel de cet observateur.

Ce référentiel est défini, dans le système de coordonnées choisi où sont décrites à la fois la géodésique du photon et la ligne d'univers de l'observateur, par la quadri-vitesse de l'observateur.

On peut s'étonner que la projection d'un vecteur nul sur un autre vecteur (de type temps puisqu'il est associé à un observateur réel) ne soit pas nulle.

Ceci est lié à la nature hyperbolique de la métrique représentée par sa signature (-, +, +,+).

En effet, si en géométrie euclidienne de signature (+, +, +, +) pour qu'un vecteur soit nul, compte tenu qu'on additionne tous les termes liés aux composantes linéairement indépendantes, il faut que tous ces termes soient nuls, ce n'est plus le cas en géométrie

[664]Au chapitre *4* nous avons cité un des articles de E. Cartan (27 mars 1922) qui précise qu'annuler la forme de la métrique, qui prive l'espace-temps d'une notion de distance objective et physique en la posant nulle, définit un espace (optique) conforme. Nous verrons comment on peut procéder dans ce cas, lorsque nous traiterons du décalage spectral. Ceci est nécessaire pour bien comprendre de quoi nous parlons, car les géodésiques nulles ne peuvent pas être traitées exactement de la même manière que les géodésiques de type temps.

[665]Qu'on qualifie souvent de référentiel " repos " où l'observateur est " immobile et où seul le temps (propre) s'écoule. Ce référentiel local étant en tout point tangent à la ligne d'univers.

[666]Ce paramétrage est souvent utilisé pour les géodésiques nulles. On définit le paramètre affin par un paramètre physique : l'impulsion du photon. C'est la démarche inverse du cas des géodésiques de type temps où c'est le paramètre affin, dérivé du ds^2 qui n'est pas nul, qui définit une grandeur physique (le temps propre). Sur une géodésique de type nul, définie et parcourue par la lumière, comme le ds^2 est nul une telle démarche n'était pas possible. Sans préjuger de la nature de λ, il définit une échelle relative de distance affine, de nature conforme, adaptée au calcul du décalage spectral qui est un rapport. Mais la géodésique dépend de l'énergie du photon.

[667]Il faut définir comment l'impulsion est définie (mesurée), nous l'indiquerons plus loin.

[668]L'énergie est conservée sur une géodésique dans un espace-temps stationnaire ou statique.

[669]Ce paramétrage est également valable pour une particule de masse unitaire.

minkowskienne, où la signature montre que les termes relatifs à la composante temporelle vont se retrancher.

Donc, si la propriété de nullité de toutes les composantes reste trivialement vraie, de plus un vecteur est nul quand sa composante résultante spatiale est égale (en module) à sa composante temporelle (multipliée par la vitesse de la lumière), ce qui correspond à un objet se déplaçant à la vitesse de la lumière.

La composante résultante spatiale et la composante temporelle d'un vecteur nul, qui dans un plan complexe seraient orthogonales, ne se projettent pas de la même manière sur le référentiel de type temps de l'observateur, ce qui fait que cette projection n'est pas nulle.

On peut se demander comment on définit la valeur intrinsèque de p^μ puisque nous venons de dire il n'y a pas de référentiel associé au photon. Notons que cette définition n'est pas nécessaire si, dans les calculs, on n'utilise pas cette valeur intrinsèque. C'est le cas, par exemple, quand on s'intéresse au décalage spectral, dont le résultat ne fait intervenir que des rapports des valeurs des paramètres invoqués[670], entre deux points différents.

Pour l'observateur de Painlevé, comme $U_\mu = \{-1, 0, 0, 0)$ cela donne partout :

$$\omega = \frac{dt}{d\lambda}$$

Résultat très simple, qu'on retrouve à l'infini pour la forme de Schwarzschild où, entre autres, U_μ tend vers $U_\mu = \{-1, 0, 0, 0\}$. Comme à l'infini, dans cette forme, on converge vers la relativité restreinte, ne peut-on pas considérer que la valeur de p^μ, définie par la même expression pour l'observateur de Painlevé, peut être qualifiée de « native » ?

Painlevé n'avait sans doute pas fait ce calcul, mais des considérations générales sur la nature de sa solution lui en avait fait présager les conséquences. Cela donne un sens physique à l'impulsion p^μ du photon sur une géodésique radiale puisque, partout, l'observateur de Painlevé peut en mesurer la valeur " native ".

La lumière décrivant une géodésique tout comme l'observateur de Painlevé, bien que ces géodésiques soient de types différents (nulle pour la lumière, temporelle pour Painlevé), il n'est pas étonnant qu'il y ait ce lien particulier entre eux.

Ce décalage décrit la variation de fréquence (la variation de p^μ), dans l'espace-temps de cette solution, mesurée par les observateurs de Painlevé, co-mobiles de l'effondrement de cet espace-temps, autrement dit la variation de cette impulsion (fréquence du photon) par rapport à l'espace-temps lui-même.Nous reviendrons en détail sur ces interprétations[671].

[670]Cela est imposé par la phénoménologie de type conforme des géodésiques nulles. Pour une particule massive, le paramètre affin de l'impulsion est physique (le temps propre τ) et la masse m est un invariant. Pour harmoniser les notations, on définit alors l'impulsion par unité de masse. La forme de p^μ, montre qu'au paramètre affin τ sur la géodésique temporelle, correspond un paramètre affin de longueur d'onde λ pour la géodésique nulle.

[671]Cela nous laisse soupçonner ce qui a pu inspirer les propos de Painlevé au sujet du décalage spectral.

Hyper-surfaces, à temps propre de l'observateur de Painlevé constant, dans la forme de Schwarzschild

Il est souvent utile d'utiliser un diagramme pour illustrer et expliciter certaines propriétés de la phénoménologie étudiée.

Comme le problème que nous étudions est à symétrie sphérique, la coordonnée radiale d'espace *r,* est significative de l'espace à trois dimensions.

Ce sera le paramètre de l'axe des *x* dans un diagramme de Minkowski où l'autre coordonnée (l'autre degré de liberté) sera la coordonnée temporelle *t* qui sera le paramètre utilisé en ordonnée sur l'axe des *y.*

Ce diagramme cartésien est très utilisé mais, comme nous l'avons déjà indiqué, son interprétation nécessite de prendre en compte que la métrique, à deux dimensions qu'il définit sur le plan qu'il détermine, est euclidienne de signature *(x, y) = (+, +)* alors que la métrique relativiste à deux dimensions est minkowskienne de signature *(x, y) = (+, -)*.

Mais en respectant quelques règles, comme, entre autres, la condition d'orthogonalité entre deux vecteurs à deux dimensions (*x, y*) en un même point qui s'exprime non pas par l'orthogonalité géométrique sur la figure mais par une symétrie par rapport au cône de lumière local, que le carré de la longueur ne vaut pas ($x^2 + y^2$) mais ($x^2 - y^2$), cela sera parfaitement utilisable et très utile.

Ce diagramme représente une illustration non covariante de la phénoménologie puisque les axes correspondent à des coordonnées, ce qui fait que les courbes ne décrivent que des fonctions entre coordonnées alors qu'une description covariante doit représenter des fonctions des coordonnées par rapport au paramètre affin, le temps propre.

Pour remédier à cela on ajoute la représentation du temps propre, associé à une phénoménologie donnée en traçant des courbes à temps propre constant (des isochrones), comme on fait pour des courbes de niveau sur une carte IGN.

Nous verrons que ceci est représentatif de la courbure et que moyennant une petite gymnastique intellectuelle cela va nous aider à mieux comprendre la phénoménologie exposée, car ce faisant, nous pourrons également représenter ce phénomène particulier de manière covariante.

Les isochrones de la forme de Painlevé

Commençons par montrer à quoi ces isochrones ressemblent et leurs liens avec certains " objets ", des vecteurs caractéristiques par exemple, de la géométrie relativiste.

Cela permettra de mieux les interpréter dans l'analyse des phénomènes illustrés.

Les hypersurfaces à T = *constante*[672] réalisent un feuilletage de l'espace-temps par ces hypersurfaces et définissent des champs de quadrivecteurs U^μ orthogonaux aux hypersurfaces.

Si V^ν est un vecteur quelconque appartenant à l'hypersurface définie par $T = T_i$ = *constante,* l'orthogonalité s'écrit :

$$U^\mu \, g_{\mu\nu} \, V^\nu = 0.$$

Comme l'équation *(5-3)* de la partie scientifique l'indique, la coordonnée T est une fonction scalaire de r et t (en coordonnées de Schwarzschild).

On en déduit une fonction $t(r, T_i)$, qui va être représentée par une courbe, caractérisant chacune une isochrone de valeur $T = T_i$.

Ceci va produire un réseau de courbes sur un diagramme de Minkowski à deux dimensions en coordonnées *(r, t)* de Schwarzschild.

On constate qu'elles sont asymptotiques à la verticale à $r = 2M$, conformément à la forme de métrique de Schwarzschild.

Le caractère fictif de cette divergence qui peut paraître étrange sera explicité dans les chapitres suivants.

Leur intersection avec la géodésique radiale entrante, non représentée sur la figure *6*, suivie par l'observateur de Painlevé dans le plan *(t, r)* permettra de baliser son temps propre τ puisque $T = \tau$ sur cette géodésique.

Sur la figure *6* de la partie scientifique, reproduite ci-dessous, le réseau de courbes isochrones de l'observateur de Painlevé correspondant à ces hypersurfaces est tracé sur un diagramme de Minkowski dans les coordonnées *(r, t)* de la forme de Schwarzschild, pour des valeurs de T, régulièrement espacées de $\Delta T = M = ½$:

$$T_0,\ T_0 - \Delta T,\ T_0 - 2.\Delta T,\ \ldots\ldots,\ T_0 - i.\Delta T,\ \ldots.,\ T_0 - n.\Delta T.$$

Sur la figure *6*, la manière dont ces courbes sont géométriquement espacées traduit la courbure de la géométrie.

[672] La valeur des isochrones $T = T_i$ est déterminée par le temps pour $r = 0$. Sur les géodésiques radiales entrantes, il est plus simple de repérer les temps T par le temps t à " l'arrivée ", car $r = 0$ est un point caractéristique.

En particulier, elles permettent de représenter la quadri-vitesse U^{μ}, en direction[673] (orthogonales localement à l'isochrone) et en module, la valeur est inversement proportionnelle à l'espacement sur la figure des isochrones, comme sur une carte la pente est d'autant plus forte que les " courbes de niveau " sont rapprochées et " l'altitude " atteinte correspond au temps propre écoulé.

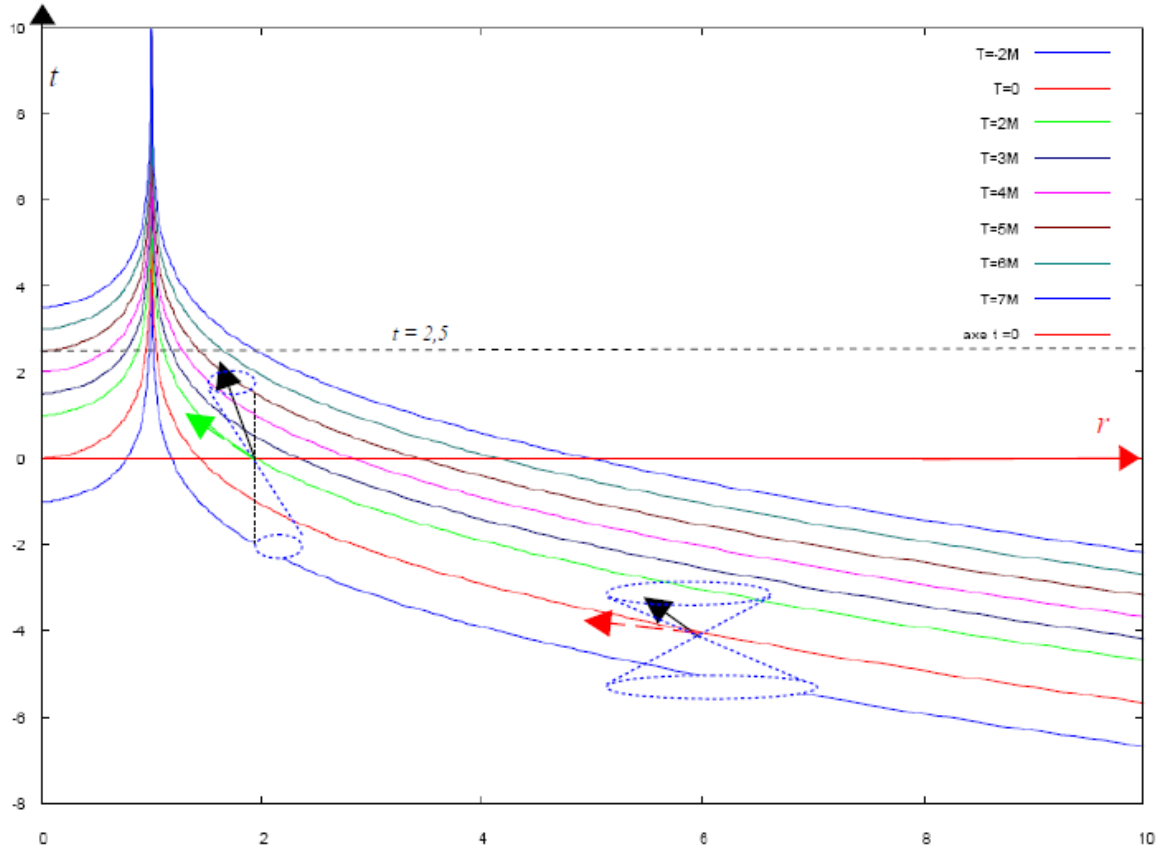


***Figure 6**:[385] Courbes T = constante , cônes de lumière et vecteurs caractéristiques tracés sur un diagramme cartésien en coordonnées de Schwarzschild[386].*

À titre d'illustration, cette quadri-vitesse U^{μ} (flèche noire) est représentée en deux points.

Des cônes de lumière, qui donnent la propagation locale de la lumière radiale dans les deux directions entrante et sortante, sont représentés pour permettre de représenter l'orthogonalité au sens relativiste (symétrie par rapport à ce cône de lumière).

Sur le diagramme *(figure 6)* les isochrones dans la forme de Schwarzschild sont des droites horizontales (on en a tracé une pour $t = 2,5 = 5M$).

Notons que, pour $r \rightarrow \infty$, les coordonnées temporelles des formes de Painlevé et Schwarzschild convergeant asymptotiquement, les isochrones dans la forme de Painlevé tendent vers une asymptote horizontale.

Hyper-surfaces isochrones dans les formes de Schwarzschild et de Painlevé

[673]La quadri-vitesse est orthogonale aux courbes *T = constante,* orthogonale en RR, c.a.d symétrique par rapport au cône de lumière sur la figure est évidemment tangente à la géodésique, mais celle-ci n'est pas représentée.

On montre comment les isochrones de temps propre de l'observateur de Painlevé révèlent la courbure temporelle en visualisant l'écoulement de son temps propre, par référence à la coordonnée temporelle de la forme de Schwarzschild et induisent que la géométrie des sections spatiales est euclidienne. On rappelle que sur cette figure, compte tenu de la symétrie sphérique, chaque point de coordonnée spatiale r est représentatif d'une sphère de rayon r, de centre $r = 0$.

Isochrones dans la forme de Schwarzschild

Les courbes à t = *constante* régulièrement espacées en coordonnées de Schwarzschild sont des droites régulièrement espacées parallèles à l'axe des abscisses dans ces coordonnées de Schwarzschild. Ces courbes caractérisent des hypersurfaces spatiales qui dépendent de la coordonnée temporelle. Dans ces hypersurfaces spatiales r est une coordonnée sans caractère physique qui n'est pas homogène dans cette forme de la métrique (la section spatiale n'est pas euclidienne).

Isochrones dans la forme de Painlevé

Les isochrones (courbes) régulièrement espacées de la forme de Painlevé[674] déterminent d'autres sections spatiales (hypersurfaces) puisque la coordonnée temporelle est différente.

La nature très différente de ces courbes, un réseau de droites parallèles régulièrement espacées dans un cas et un réseau de courbes dont l'espacement est variable, traduit une courbure manifeste entre les deux coordonnées temps. Ceci est caractéristique de la différence des hypersurfaces spatiales entre les deux formes.

Comme les formes de métrique le montrent, cette non linéarité relative entre les coordonnées temporelles des deux formes corrige la non uniformité de la coordonnée r de la section spatiale de la forme de Schwarzschild puisque les sections spatiales (à T constant) dans la forme de Painlevé sont euclidiennes. L'étrangeté de la fonction T, fonction de (t, r) n'est qu'apparente, car elle est liée à la représentation dans des coordonnées de Schwarzschild.

Si le diagramme était représenté en coordonnées de Painlevé, comme nous le ferons plus loin, ce serait les isochrones de Schwarzschild qui seraient représentées par des courbes et celles de Painlevé par des droites parallèles. Ce qui est significatif, c'est la comparaison entre les deux représentations.

Indépendamment de ce caractère relatif, il ressort que ce sont les coordonnées (t, r) de la forme de Schwarzschild qui sont moins représentatives de la nature physique du phénomène, car contre toute apparence, la relativité générale, théorie géométrique de la gravitation, va donc prendre une forme beaucoup plus simple exprimée dans les coordonnées de Painlevé, malgré la présence d'un terme non quadratique dans la métrique, du fait des propriétés géométriques particulières que cette représentation révèle.

[674]Rappelons d'ailleurs que, au chapitre *3*, nous avons dérivé la solution de Painlevé de la forme de Schwarzschild par un changement de coordonnée qui en éliminait la singularité sur l'horizon. Ce passage "obligé" par la forme de Schwarzschild est-il incontournable? Nous verrons que non, quand nous exposerons la méthode qu'a utilisée Lemaître qui établit une solution native sans singularité directement à partir des équations d'Einstein et où la singularité est introduite dans la transformation de coordonnées nécessaire pour retrouver la forme de Schwarzschild. Cette démarche permettant d'obtenir la forme de Painlevé et montrant que la singularité sur l'horizon dans la forme de Schwarzschild résulte d'un choix de coordonnées est beaucoup plus élégante et convaincante que la démarche inverse que nous avons utilisée jusqu'ici.

Géodésiques radiales et hypersurfaces isochrones, dans la forme de Schwarzschild

L'étude des géodésiques est fondamentale pour déterminer la géométrie de l'espace-temps puisqu'elles la caractérisent. Nous commençons par leur étude dans la forme de Schwarzschild, sachant que ces géodésiques ayant un caractère géométrique intrinsèque les résultats de type géométrique trouvés seront valides dans tous les référentiels.

En particulier, malgré les divergences des paramètres, nous montrons le caractère fictif de la singularité sur l'horizon en montrant que le temps propre d'un observateur reste fini même si la représentation de la géodésique, dans ce diagramme, diverge sur l'horizon.

Dans les coordonnées *(t, r)* de la forme de Schwarzschild, l'équation de la géodésique radiale parcourue par l'observateur de Painlevé, sous forme *t(r)*, que nous établissons dans la partie scientifique du document en posant $2GM/c^2 = 1$ pour simplifier

$$t = \tau_0 - (2/3) r^{(3/2)} - 2\left(\sqrt{r} + (1/2) ln\left(\frac{\sqrt{r}-1}{\sqrt{r}+1}\right)\right),$$

montre une divergence pour la valeur $r = 2GM/c^2 = 1$, correspondant à une hypersurface qu'on appelle l'horizon. Ceci est mathématiquement lié au logarithme dont l'argument s'annule, ce qui conduit à une valeur infinie de ce logarithme.

Nous savons les soucis que cette divergence, mal comprise, a causés à Einstein et aux relativistes qui étaient incapables d'en donner une justification physique.

Rappelons que la valeur T_i des isochrones s'évalue pour $r = 0$, seul point non arbitraire de la géodésique qui est infinie dans la direction correspondante à la croissance de la coordonnée *r*.

Bien entendu c'est la valeur relative des T_i des différentes isochrones qui est physique, l'une d'entre elles étant conventionnellement prise comme référence $T_0 = 0$.

Sur la géodésique entrante le temps propre croît dans le sens du mouvement vers $r = 0$ et comme cette valeur est en général finie, il va être négatif au-delà d'une certaine valeur de *r*, ceci étant arbitraire, car c'est l'intervalle de temps propre entre deux points de la géodésique qui est physique.

Nous avons vu sur la figure *6* que l'équation des isochrones *t(r)* correspondant à une valeur constante de la coordonnée temporelle *T* de la forme de Painlevé, soit $T = T_i$, présentait également une singularité pour la même valeur de $r = 2GM/c^2$.

Nous avons donc deux courbes qui divergent pour la même valeur.

La question qui se pose alors est : la courbe représentant la géodésique, bien que divergente sur l'horizon est-elle (sur le diagramme) toujours en dessous[675] de la courbe également divergente sur l'horizon correspondant à une valeur déterminée finie T_j de la coordonnée *T*, elle-même égale au temps propre de l'observateur de Painlevé décrivant la géodésique ?

[675] Sa valeur de *t,* est-elle inférieure pour une même valeur de *r* à celle d'une courbe T = constante ?

Autrement dit, le temps propre de l'observateur de Painlevé, sur sa géodésique qui est une courbe qu'on peut représenter sur un diagramme comme celui de la figure *6*, qui est donné par l'intersection de cette courbe géodésique avec les isochrones T_i est-il tel qu'il y a des courbes isochrones T_j de valeur finie que sa géodésique ne coupe jamais ?

Si tel est le cas, cela signifie que son temps propre reste toujours en dessous d'une valeur finie, donc qu'il traverse l'horizon en un temps fini, inférieur à la valeur limite de ces isochrones non intersectées, contrairement à ce que le diagramme pourrait laisser supposer.

On montre qu'il en est bien ainsi et que ceci prouve que l'observateur atteint l'horizon en un temps propre (son temps propre) fini.

On montre également qu'il ne s'arrête pas là et continue vers la singularité centrale qu'il atteint, en un temps propre fini.

La figure *8-1* de la partie scientifique reproduite ci-dessous,

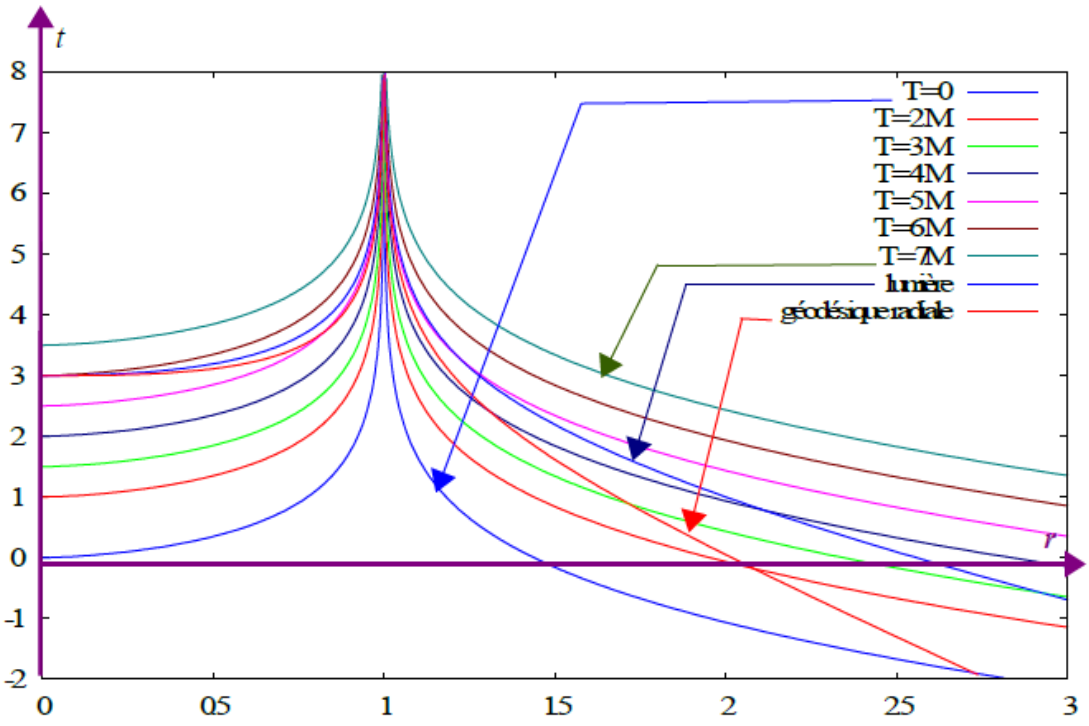


Figure 8 : *L'observateur de Painlevé atteint la singularité en un temps fini*

montre comment la géodésique radiale de Painlevé coupe les isochrones $T = 0$ à $T = 5M = 2{,}5$, mais ne coupe jamais l'isochrone $T = 6M = 3$.

Équation géodésique radiale dans la forme de Painlevé : ce qu'elle révèle

Nous faisons la même analyse, du point de vue dual du précédent, dans le système de coordonnées de la forme de Painlevé ce qui, à travers un formalisme beaucoup plus simple, met en évidence certains caractères newtoniens et évacue tous les problèmes délicats de divergence que nous avions rencontrés dans l'analyse précédente.

Après avoir étendu l'analyse au cas de la forme de Painlevé généralisée, nous étudions les cônes de lumière qui montrent simplement dans cette forme comment un observateur, en chute libre radiale, traverse l'horizon. La simplicité de la représentation conforte la meilleure adéquation de la forme de Painlevé à la description de cette solution de la relativité générale.

On retrouve la forme newtonienne

L'établissement de l'équation géodésique radiale entrante est quasiment direct du fait de l'égalité de la coordonnée temporelle T et du temps propre τ.

On montre un résultat qui serait surprenant si nous ne l'avions pas constaté auparavant : l'équation est newtonienne.

Elle s'écrit :

$$d^2r/dT^2 = d^2r/d\tau^2 = -GM/ r^2.$$

Basculement des cônes de lumière dans la forme de Painlevé

Toute ligne d'univers de type temps, qu'un observateur matériel est contraint de suivre doit se trouver à l'intérieur "cône" local de lumière en tout point de la ligne d'univers, ceci ne faisant qu'exprimer que, quelle que soit la direction et l'endroit, la vitesse locale d'un observateur est inférieure à la vitesse de la lumière.

On rappelle que par cône de lumière il faut entendre la représentation en supprimant une dimension spatiale d'un hyper-cône de lumière qui traduit localement cette propriété.

Le terme "localement" est important, car si en relativité restreinte compte tenu de la métrique fixe ce cône structure l'espace-temps entier, en relativité générale compte tenu de sa courbure ce cône n'est valide que localement.

En étudiant comment ces "cônes" de lumière varient en ouverture et en orientation sur une géodésique radiale dans les coordonnées considérées on peut en déduire des propriétés des lignes d'univers de type temps.

Dans la forme de Schwarzschild en s'approchant de l'horizon les cônes se ferment. Ceci a pour conséquence qu'une ligne d'univers de type temps, dans ces coordonnées ne peut pas franchir l'horizon.

Dans la forme de Painlevé c'est différent, car si l'ouverture du cône est aussi sujette à modification, il ne se ferme pas sur l'horizon et comme il bascule au fur et à mesure qu'on s'en rapproche, il est possible que des lignes d'univers de type temps à l'intérieur de l'horizon puissent franchir dans cette représentation l'horizon dans le sens entrant.

La manière dont les cônes de lumière évoluent le long d'une géodésique radiale est caractéristique de la manifestation de la courbure de l'espace-temps dans ces différents systèmes de coordonnées.

Comme la figure *9* ci-dessous le montre :

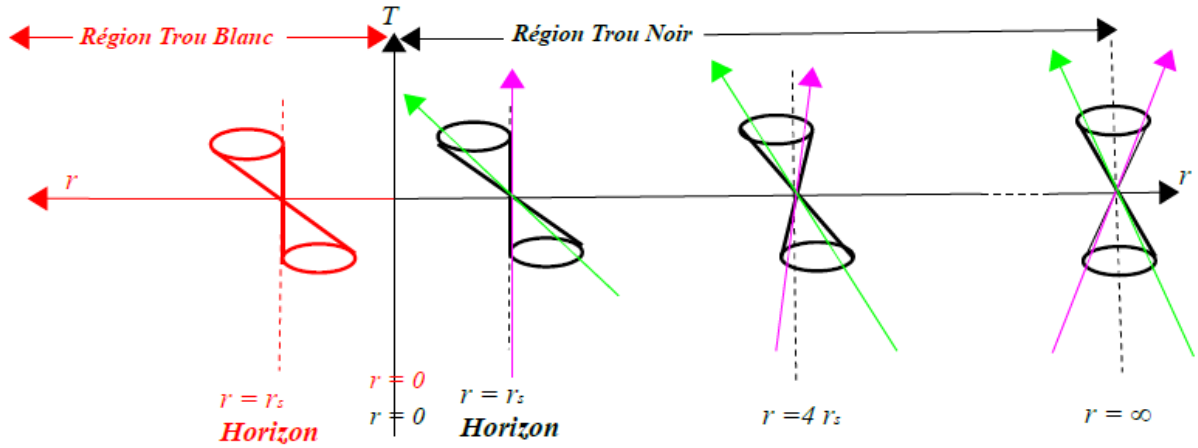


Figure 9 : *Cônes de lumière entrant et sortant sur l'horizon dans la forme de Painlevé.*

Ce basculement, qui se poursuit sous l'horizon[676] (voir figure 12-2), est tel que, pour le trou noir, une ligne d'univers de type temps franchissant l'horizon dans le sens sortant ne peut pas exister, et que toute ligne d'univers temporelle, en deçà de l'horizon, va être contrainte, par la géométrie du cône, à progresser dans le sens des *r* décroissants.

Ceci traduit le caractère non statique de la région sous l'horizon, contraignant tous les corps physiques et même la lumière à percuter la singularité centrale.

On dit que cette singularité est causalement dans leur futur.

[676]Non représenté sur ce diagramme pour ne pas le surcharger.

La géodésique circulaire révèle une différence phénoménologique essentielle

Nous avions indiqué, lorsque nous avions souligné le caractère newtonien de la géodésique radiale entrante, que ce caractère était spécifique à cette géodésique radiale particulière. La géodésique circulaire va nous le montrer.

Nous ne ferons pas l'étude de toutes les équations géodésiques, mais il est intéressant de faire remarquer que pour *r = constante* les formes des métriques de Painlevé et celle de Schwarzschild sont identiques, ce qui veut dire en particulier que dans ce cas les coordonnées temporelles sont égales ce qui, compte tenu que les autres cordonnées sont identiques, va donner le même temps propre orbital.

Le calcul de la période peut s'évaluer en temps coordonnée ou en temps propre.

Temps propre pour décrire une orbite complète

Le calcul fait en annexe *3*, chapitre *10* montre que le temps propre vaut :

$$\tau = \frac{2\pi r\sqrt{(r-3GM)}}{\sqrt{GM}} . \qquad (10\text{-}12)$$

Le caractère relativiste se manifeste dans cette équation qui est différente de l'équation newtonienne, ce qui est dû, comme nous le verrons, au moment angulaire *L* qui n'est pas nul.

Notons que pour $r = 3GM$ le temps propre τ est nul.

Cette orbite correspond à la "sphère de photons", où la vitesse de satellisation est celle de la lumière.

Pour $r < 3GM$, le temps propre, non défini, montre qu'il n'existe pas de géodésique circulaire de type temps, ce qui est bien compatible avec ce que nous avons montré au chapitre précédent. En effet, sous l'horizon la coordonnée *r* doit nécessairement décroître, donc des géodésiques, de type temps, circulaires ne peuvent pas exister.

La limite est supérieure pour les orbites circulaires du fait du mouvement orbital tangentiel qui introduit un terme supplémentaire dans la métrique.

Mais il existe encore des orbites circulaires non géodésiques de type temps pour $r > 2GM$.

Pour r tendant vers l'infini *(10-12)* tend vers :

$$\tau = \frac{2\pi r\sqrt{r}}{\sqrt{GM}} \cdot \qquad (10\text{-}13)$$

Ce qui est le temps de révolution en mécanique newtonienne (lois de Kepler). C'est bien compatible avec la convergence des deux théories dans ces conditions, qui résulte des hypothèses faites par construction de la forme relativiste.

Par contre l'équation *(10-12)* confirme que l'équation reliant temps propre (paramètre affin temps sur la trajectoire) et rayon est différente de la loi de Kepler *(10-13)* dans le cas général.

Temps coordonnée pour décrire une orbite

La période de révolution de l'orbite T exprimée en temps coordonnée vaut :

$$t = \frac{\tau\sqrt{r}}{\sqrt{r-3GM}} \rightarrow T = \frac{2\pi r\sqrt{r}}{\sqrt{GM}} \cdot \qquad (10\text{-}14)$$

<u>On retrouve la loi de Kepler</u>!

Mais la différence entre les théories c'est qu'en mécanique classique la coordonnée temporelle est identifiée à un temps absolu physique alors qu'en relativité, c'est une simple coordonnée, car ce qui est physique c'est le temps propre de l'observateur.

Pourquoi la coordonnée temporelle est-elle différente du temps propre dans la forme de Painlevé pour ce type de géodésique, à la différence de la géodésique radiale ?

L'identité des descriptions par la forme de Painlevé et celle de Schwarzschild est significative d'une différence de phénoménologie par rapport à la géodésique radiale où elles étaient dissociées.

L'observateur associé à la forme de Schwarzschild est à coordonnées spatiales constantes.

Ici la coordonnée angulaire φ n'est pas constante, mais les autres, θ et en particulier r dont le champ gravitationnel est dépendant compte tenu de la symétrie sphérique, le sont.

Il n'est donc pas surprenant que cette géodésique possède des caractères donnés par la forme Schwarzschild.

L'équation *(10-14)*, ci-dessus, nous suggère que la différence entre temps propre et temps coordonnée est la manifestation d'un boost, impliquant un facteur de Lorentz.

Reste à déterminer le type de boost et par rapport à qui il s'exerce. On peut se demander pourquoi cet effet de dissociation entre la coordonnée temporelle et le temps propre ne se manifeste pas dans la géodésique radiale ?

Si on calcule ce boost en ne considérant que la vitesse tangentielle[677] qui vaut $v = (GM/r)^{1/2}$ sur l'orbite circulaire, par rapport à celle (nulle) d'un observateur sur une géodésique circulaire à l'infini, la valeur n'est pas celle donnée par *(10-14)* et cela est normal, car les mouvements relatifs ne sont pas de simples translations.

Une hypothèse, qui va dans le sens de ce que nous avons soutenu, est que dans la géodésique radiale le mouvement est fictif, l'observateur est co-mobile de l'espace-temps en effondrement radial.

Pour la géodésique circulaire ce n'est plus le cas, la coordonnée radiale est fixe et il y a un en plus mouvement relatif transverse par rapport à cet espace-temps en effondrement.

Dans cette hypothèse, nous avons donc deux effets orthogonaux à combiner.

Si on combine l'effet de la vitesse tangentielle $(GM/r)^{1/2}$ et celui orthogonal de la vitesse radiale $(2GM/r)^{1/2}$, en considérant alors l'espace en effondrement comme référence, on obtient une vitesse de boost de :

$$V = \{[(GM/r)^{1/2}]^2+[(2GM/r)^{1/2}]^2\}^{1/2} = \{(GM/r)+(2GM/r)\}^{1/2}= (3GM/r)^{1/2}$$

[677]Vitesse de coordonnée égale à la vitesse newtonienne vaut *(GM/r) ½*. Le facteur de Lorentz vaut *[r/(r-Gm)]½*.

Ceci produit un facteur de Lorentz de ralentissement du temps de :

$$[r/(r-3GM)]^{1/2}.$$

C'est bien celui qu'on retrouve comme facteur de boost dans l'équation *(10-14)*.

Ce simple calcul nous révèle la nature de cette relation entre la coordonnée temporelle et le temps propre de l'observateur décrivant cette géodésique circulaire qui semblait émerger mystérieusement des calculs.

Cela montre aussi l'intérêt de considérer la phénoménologie de l'espace en effondrement comme référence, ce qui conforte son caractère physique et non pas les coordonnées qui sont arbitraires.

On peut poursuivre l'analyse en utilisant les constantes du mouvement qui sont liées aux symétries de l'espace-temps[678] de la solution autour du corps unique à symétrie sphérique.

En reportant ces constantes du mouvement dans la forme de métrique[679], il apparaît clairement que le champ gravitationnel ne dépend que de la coordonnée radiale *r*.

En effet, on obtient directement l'équation différentielle suivante

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\,r}{d\,\lambda}\right)^2 + V(r) = \frac{1}{2}E^2\,,$$

où E est l'énergie totale par unité de masse (conservée) et où on a défini un potentiel

$$V(r) = \frac{1}{2}\epsilon - \epsilon\frac{GM}{r} + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{GML^2}{r^3} \quad , \qquad (10\text{-}23)$$

où L désigne le moment angulaire qui est conservé.

[678] À chaque symétrie est associée un invariant,(une quantité conservée). Ainsi à l'invariance par rapport au temps correspond la conservation de l'énergie, à celle de l'invariance par rotation la conservation du moment angulaire, etc. Voir la partie scientifique pour plus de précisions sur leur définition (géométrique : vecteurs de Killing) et la manière dont on les utilise.

[679] Le plus simple est de le faire en coordonnées de Schwarzschild, mais en coordonnées de Painlevé, c'est identique.

Dans ce cas de champ gravitationnel à potentiel central, défini par (*10-23*), il est une fonction scalaire comme en mécanique classique.

Pour les géodésiques nulles $\epsilon = 0$, sinon il vaut *1*.

Ces équations sont sous forme néo-classique où le premier terme correspond à une " énergie cinétique " et où V est le potentiel gravitationnel ne dépendant que de la coordonnée radiale *r*.

Mais la variable dynamique (servant à la dérivation pour décrire le mouvement) est le temps propre, paramètre affin à caractère physique en relativité générale et non pas le temps réputé physique de la mécanique classique.

Si nous rapprochons l'équation *(10-23)* de celle de la mécanique newtonienne nous constatons que le dernier terme n'existe pas en mécanique newtonienne.

Mais si le moment angulaire L est nul (cas de géodésiques radiales) alors les équations relativistes et classiques étant identiques les phénoménologies sont les mêmes.

C'est ce que nous avons constaté dans le cas de la géodésique radiale où $L = 0$.

Analyse épistémologique de la différence entre distance spatiale géométrique et distance observable dans la forme de Painlevé

Bien que les grandeurs qui ont caractère physique indéniable soient issues de la forme spatio-temporelle à quatre dimensions de la métrique, la notion de distance spatiale étant une notion commune en géométrie, on peut se demander si la relativité peut en donner une définition objective qui peut avoir un sens physique, même si contrairement à la définition commune, il ne sera pas possible de la mesurer au moyen d'un mètre matériel.

La distance spatiale définie par la géométrie de la forme de la métrique

La métrique, en relativité générale, définit une section spatiale à temps constant[680], une hypersurface, qui permet de calculer géométriquement cette distance.

Mais nous avons vu que, pour un espace-temps donné, cette section spatiale dépend du feuilletage réalisé.

Si les coordonnées temporelles sont différentes, comme c'est le cas entre la forme de Schwarzschild et celle de Painlevé, les sections spatiales de l'espace-temps, à valeur de coordonnée temporelle constante, vont être différentes et rien ne garantit qu'entre deux points *A* et *B,* ayant les mêmes coordonnées spatiales dans les deux formes, on va trouver le même résultat pour la distance spatiale.

La partie scientifique donne un exemple où effectivement on trouve des valeurs différentes.

Ceci n'a rien de paradoxal dans le contexte de la relativité générale.

Comme cette section spatiale est définie à temps constant, cette notion de distance " instantanée " ne dépend pas du mouvement éventuel entre les points A et B dans l'espace-temps considéré.

Cette définition de distance a le mérite d'être bien définie à défaut d'être universelle.

Si nous disposions d'un média se déplaçant à vitesse infinie sa mesure serait possible sans ambiguïté, mais il faut dire que, dans ce cas, la relativité générale ne serait pas ce qu'elle est.

[680] En désignant la coordonnée temporelle par *t,* il suffit de poser *dt = 0,* dans la métrique pour l'obtenir.

Une méthode “ physique : la distance radar (la télémétrie)

Si nous sommes dans un univers “ statique ” on peut définir une mesure physique rigoureuse entre deux objets par “ télémétrie ”. On parle aussi de distance “ radar ” pour des raisons historiques.

La distance Terre Lune est mesurée par télémétrie laser en utilisant les réflecteurs catadioptriques posés sur la Lune.

Si la Terre et la Lune étaient immobiles, on mesurerait le temps entre l’émission d’un éclair et sa réception après réflexion, on diviserait par deux et on multiplierait par la vitesse de la lumière (assumée constante) pour obtenir la distance.

L’exemple ne correspond pas exactement aux hypothèses puisque on ne peut pas considérer que les objets concernés sont statiques. Pendant le trajet de la lumière, la Lune décrit son orbite qui de plus est une ellipse, la Terre tourne, mais prenant en compte les paramètres du mouvement qu’on connaît, on peut obtenir, avec une excellente précision, la valeur de cette distance, d’autant que toutes ces vitesses sont faibles par rapport à la vitesse de la lumière.

Cette méthode de télémétrie est d’autant plus intéressante qu’elle est covariante et qu’elle tient compte de la courbure éventuelle de l’espace puisque les photons suivent des géodésiques de l’espace-temps, dont la définition relève de la forme complète de la métrique.

En effet, cette méthode mesure indirectement la “ longueur ” d’une géodésique. Elle suppose la constance de la vitesse de la lumière localement sur la géodésique, hypothèse assumée par la relativité générale.

Cette mesure faite par un observateur particulier et associée à cet observateur est une expérience qui a donc un caractère universel et son résultat est unique et universel.

Par contre si la cible est sensiblement mobile, sans qu’on en connaisse les paramètres, pendant la mesure, le temps de parcours à l’aller est différent de celui du retour, et cela se complique et il faut d’autres informations (recourir à un modèle d’espace-temps) pour en tirer quelque chose.

Inversement ce type d’expérience permet de discriminer les différents modèles envisagés.

Sur ce principe de mesure de distance par le temps de parcours de la lumière on fait des expériences et observations où, même en cosmologie standard, où l’univers est dynamique, en partant d’observables comme le décalage spectral, la distance de luminosité, on tire des informations très précieuses sur sa phénoménologie.

La relativité générale est en rupture ontologique avec la pensée newtonienne

La mécanique newtonienne

Au chapitre *3* nous avons discuté de différences physiques et structurelles entre les théories de Newton et d'Einstein. Le débat animé à l'Académie des Sciences, que nous avons évoqué, a illustré comment l'école newtonienne a pu être troublée par ces différences.

Nous avons apporté quelques compléments au chapitre *5* lorsque nous avons réfléchi sur la nature physique des géodésiques.

Ce chapitre nous amène à prolonger notre réflexion sur la vision relativiste.

Dans la mécanique newtonienne, l'observateur est totalement découplé des phénomènes étudiés, dans un espace et un temps absolu, par rapport auquel tous les observateurs peuvent objectivement se situer. Sa vision de la physique est d'un point de vue extérieur au système.

Il dispose de son horloge absolue et de son mètre invariable, ce qui fait que des grandeurs géométriques comme des distances ont un caractère physique objectif qu'on peut mesurer (théoriquement) objectivement.

Ceci est encore valide en relativité restreinte, mais de façon plus restrictive dans le référentiel galiléen d'un observateur, car l'espace-temps est une structure non dynamique où des mesures de longueur par des mètres invariables et de temps par des horloges ont un sens physique, même si des observateurs différents peuvent trouver des résultats différents.

Lorsqu'on énonçait des lois concernant des distances et des temps, par exemple les lois de Kepler donnant la période en fonction de la distance au soleil et de sa masse, on supposait qu'on pouvait vérifier directement, en mesurant indépendamment la distance au Soleil[681](par des règles rigides, du moins en principe) et la période orbitale par des horloges, que ces grandeurs obéissaient à ces lois.

Mais, en fait, on mesurait l'évolution de la position d'un astre sur la sphère céleste par rapport à d'autres supposés fixes, son éclat, son diamètre apparent, un effet Doppler, et on disposait de bases supposées connues permettant l'usage de la trigonométrie.

Ces observables qu'on va retrouver en relativité, étaient interprétées dans le cadre de la théorie de Newton, en supposant que l'espace était non dynamique et euclidien, ce qui permettait d'en déduire des distances " physiques ".

Cela était indépendant de l'observateur, du moins on savait objectivement le rendre indépendant[682], puisqu'il est " à l'extérieur du système " dans un espace absolu, caractère identifiable par tous les observateurs possibles en appliquant les corrections liées aux paramètres de ces observateurs.

C'est le sens du postulat I posé par Painlevé dans son article cité au chapitre *2*.

[681]Il serait théoriquement possible de le mesurer avec son mètre, même si ce n'est pas le cas, en pratique.
[682]L'astrométrie donne des exemples de règles de changement entre les référentiels utilisés pour unifier la description..

La relativité générale

En relativité générale, l'observateur est situé dans un espace-temps minkowskien tangent à la variété représentant l'espace-temps, chaque observateur étant en général dans des conditions intrinsèquement dépendantes du point de la variété où il se situe, défini par ses coordonnées sur la variété, et de paramètres physiques locaux (dans l'espace tangent) qui peuvent lui être propres (boosts, rotation,..).

Les observateurs ne sont pas dans le même espace-temps physique, ainsi la vitesse d'un objet, en un autre point distant, de l'espace-temps est quelque chose qui n'est pas objectivement et formellement défini même si on peut en donner conventionnellement une définition via un transport parallèle.

Le lien entre les opérateurs dans ces différentes situations se fait via la " métrique " globale qu'on définit sur la variété, qui décrit comment ces différents espaces " physiques " minkowskiens, sont liés entre eux (les symboles de Christoffel en décrivent les relations locales).

Les mesures faites vont être propres à chaque observateur qui a son temps propre particulier qui est en général différent de celui des autres. La métrique du modèle (encore faut-il trouver un moyen de la valider par des expériences) permet de prédire les relations entre les observations faites par différents observateurs d'un même phénomène.

Bien entendu, sur Terre par exemple, en astrométrie, on va définir des classes d'observateurs (terriens) en pratiquant les corrections qu'on connaît pour tenir compte de leurs paramètres propres, qui seraient sensiblement différents, de manière à harmoniser les résultats des observations et parler un langage commun pour établir une physique universelle.

Espace-temps, observateurs, observables en relativité générale

Pour décrire correctement la phénoménologie il faut considérer les observateurs, dont la localisation importe, dans le système qui est l'espace-temps décrit par la variété.

Se projeter intellectuellement hors du système est toujours possible, mais pour vérifier la conformité des résultats d'expériences locales, faites de l'intérieur du système, avec les prédictions de la théorie, on ne pourra pas ignorer la localisation et les autres paramètres des observateurs.[683]

Si la description géométrique (le modèle), par une forme de la métrique, de l'espace-temps, donnée par la théorie fait que les grandeurs données par cette géométrie ne sont, en général, pas mesurables directement et n'ont pas en général de signification physique, elles caractérisent cependant formellement totalement une solution et permettent de calculer et donc prédire des trajectoires physiques avec les paramètres des observables, associées à un observateur dans cette forme de la métrique. Ainsi, en cosmologie, bien qu'on utilise la métrique pour calculer la relation, entre la distance de luminosité d_L et le décalage spectral z (observables) d'un objet de luminosité connue dans un type d'univers, elle n'y figure pas.

Incidemment, notons que si la relativité générale n'est pas quantifiée, ces observables sont de nature quantique, les raies spectrales dont on observe le décalage spectral étant issues d'un phénomène de nature quantique, quant au flux lumineux il est constitué de photons.

[683]On peut faire remarquer que c'est aussi vrai en mécanique newtonienne, mais la structure d'espace et de temps donnée *a priori* rend le procédé objectif. En relativité, il n'y a pas d'espace-temps *a priori*, et ce sont les expériences qui le valident, donc le procédé est plus complexe et plus hasardeux.

La métrique a joué le rôle d'un intermédiaire de calcul, la relation finale ne contenant que des observables et les données correspondant aux hypothèses physiques faites sur la nature de l'univers considéré, par exemple, les paramètres Ω_i associés aux différents fluides le constituant. Ceci atteste que le choix d'une forme particulière de la métrique est arbitraire.

En effet, pour valider (ou invalider) certaines hypothèses il faut des observables caractéristiques et indépendantes en nombre suffisant, les comparer avec ce que prédisent les différentes géométries, pour discriminer les différentes théories et modèles en concurrence pour représenter les phénomènes étudiés.

C'est ainsi qu'on procède par ajustement, comme nous l'avons déjà indiqué, entre les prédictions des théories pour des observables pertinemment choisies et leur valeur mesurée par des observateurs [684](test d'hypothèse).

On peut alors en déduire la valeur de certaines grandeurs géométriques prédites par la théorie sélectionnée, mais sans pouvoir le vérifier par une mesure directe[685]. Nous verrons, en détail, dans l'annexe 3 au chapitre *21* dans un exemple concret comment Gautreau et Hoffmann[686] proposent de " connaître ", par une méthode théorique astucieuse mais dans le cadre d'une métrique donnée, la coordonnée *r* dans le problème du corps central à symétrie sphérique.

Ces grandeurs n'ayant pas vraiment de caractère physique, puisque il est impossible de les mesurer directement par des moyens physiques, quel intérêt leur connaissance présente ?

Comme ne sont vérifiables que les valeurs des observables ainsi décrites, se pose le problème de ce qui doit être considéré comme représentant l'univers physique. Il y a débat sur ce sujet dans la communauté scientifique puisque, *a contrario* de ce que la relativité générale prescrit dans son approche covariante, certains[687] considèrent que pour donner un sens physique à la solution on doit aussi prendre en compte la structure spatio-temporelle de la forme de métrique, approche non covariante, et que dans ce cas, pour en donner une description précise le choix d'une jauge s'impose.

Une théorie physique idéale serait-elle un modèle qui ne devrait décrire que des lois vérifiables expérimentalement[688] et devrait-on se limiter à cela ?

Il semble que non, puisque, par exemple, certaines notions de distance en cosmologie, comme la distance de Hubble, font appel à des concepts géométriques qui ne sont pas vérifiables directement. Cela est d'ailleurs une source de confusion fréquente.

Mais si cela nourrit notre imagination cela ne risque-t-il pas de nous induire en erreur en nous écartant des sentiers balisés de la physique ?

La rigueur épistémologique peut être parfois en conflit avec la curiosité de l'esprit humain.

[684]Notons que cela est l'essence même d'une théorie qui part d'hypothèses *a priori* et dont on juge la pertinence par l'adéquation entre ses prédictions d'observables et ce qu'on en observe physiquement.
[685]La distance de Hubble (donnée de type espace) en cosmologie standard est un exemple caractéristique.
[686]Gautreau & Hoffmann B. (1978)
[687]En général, des mathématiciens contestant la formulation de la RG, A. Lichnerowicz, M. Mizony, J.M Souriau.
[688]Selon Pierre Duhem (La théorie physique, son objet, sa structure: 1906) " Une théorie physique n'est pas une explication. C'est un système de propositions mathématiques, déduites d'un petit nombre de principes qui ont pour but de représenter aussi simplement, aussi complètement et aussi exactement que possible un ensemble de lois expérimentales ".

Sachant qu'une théorie est d'autant plus puissante qu'elle prédit des phénomènes que même leurs concepteurs n'avaient pas imaginés[689], la création scientifique incite parfois à laisser temporairement la rigueur logique de côté et de ne la reconsidérer qu'une fois les nouvelles idées établies.

En relativité générale, le modèle paraît sur-représenter la description physique et ne doit-on pas n'en retenir que les objets physiques,[690] associés aux observables qu'il permet de décrire, comme étant l'univers, c'est-à-dire ses éléments fondamentaux qui en régissent les lois ?

Ceci peut être perçu comme un affaiblissement de la connaissance, mais en fait c'est plutôt un raffinement sur la nature de cette connaissance.

On distingue bien alors le modèle formel, adapté à la manière dont notre cerveau appréhende la science, et ce qui peut en être vérifié physiquement ce dernier se rapportant à une connaissance ayant un caractère physique par des observateurs internes au système.

Autrement dit, le modèle géométrique sert au calcul des observables associées à l'objet étudié, mais comme des intermédiaires dans un calcul, certains éléments géométriques ne se retrouvent pas à la fin.

Cela nous suggère une similitude, du moins au niveau de la méthode, avec la mécanique quantique où l'état d'un système est déterminé par une fonction d'onde (ici la géométrie de la solution) mais ou les observables résultent de l'application d'opérateurs associés aux grandeurs qu'on veut mesurer.

Bien entendu la relativité générale n'a ni le caractère probabiliste ni le caractère non continu de la mécanique quantique, mais cela montre que cet aspect de la phénoménologie n'est pas propre à la relativité générale.

La méthode utilisée pour valider le modèle est en fait un test d'hypothèses plausibles, auxquels plusieurs modèles peuvent satisfaire et dont la liste est préalablement donnée ce qui ne garantit pas l'exhaustivité.

Dans le modèle newtonien il y avait confusion entre les deux concepts que la relativité sépare : le modèle était physique, mais c'était un leurre, en fait on supposait implicitement (explicitement comme l'a fait Painlevé dans son postulat I) que l'espace était euclidien et que la notion de distance était mesurable (en principe) sans ambiguïté par des règles rigides.

En relativité générale, le fait de bien discerner les deux aspects avec ses conséquences associées, en particulier le rôle et la position de l'opérateur au cœur du système, apparaît alors comme une clarification et non pas comme une régression. Mais cela ne va pas sans se heurter aux habitudes de pensée héritées de l'approche newtonienne. C'est de cela que Painlevé n'a pas su se libérer totalement.

[689]Comme, par exemple, la déviation des rayons lumineux par les masses, les trous noirs, la cosmologie dynamique en expansion, etc. pour la théorie de la relativité générale.

[690]Dans sa critique de l'espace absolu pour expliquer l'expérience de pensée des seaux de Newton, Einstein déclarait que seuls les éléments physiques observables pouvaient générer d'autres événements physiques observables et que le recours à un espace absolu fictif n'était pas recevable pour expliquer un tel phénomène.

Incomplétude de la relativité générale ?

Rappelons également que la relativité générale définit des espaces-temps dynamiques (par leur géométrie) à partir de l'équation d'Einstein.

Cette équation a besoin d'une métrique générique (*a priori* et paramétrée) pour s'exprimer.

Cette métrique va incorporer les symétries et paramètres *a priori* que la nature du problème traité nous incite à imposer que nous allons contraindre par les équations d'Einstein pour qu'elle satisfasse aux hypothèses de la relativité générale.

La géométrie de cet espace-temps est caractérisée par la connaissance du tenseur de Riemann $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ à quatre indices en tout point, ce tenseur se calculant à partir de la métrique et de ses dérivées seulement.

Mais c'est seulement le tenseur d'Einstein, qui en est la " trace à divergence covariante nulle ", dans l'équation d'Einstein $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - ½ R$[691] qui va être contraint par la matière énergie via le tenseur d'énergie-impulsion $T_{\mu\nu}$.

Ceci résulte du fait que le tenseur énergie-impulsion $T_{\mu\nu}$ est un tenseur à deux indices et que l'équation d'Einstein, comme toute équation, doit être homogène pour être valide.

Einstein s'en explique brièvement lorsqu'il propose son équation.

Mais ceci est source d'indétermination. En effet le tenseur de Riemann $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ (à 256 composantes), compte tenu de ses symétries, dans le cas le plus général possède 20 composantes " indépendantes "[692], soit vingt degrés de liberté.

Le tenseur de Ricci $R_{\mu\nu}$, tenseur symétrique à 16 composantes possède 10 composantes indépendantes, dix degrés de liberté.

On voit que la matière énergie via l'équation d'Einstein ne peut contraindre que ces dix degrés de liberté par rapport aux vingt du tenseur de Riemann.

En soit, cela est parfaitement possible, mais montre que la matière-énergie ne contraint que partiellement la courbure de l'espace-temps.

---

[691] Le tenseur d'Einstein, pour qu'il soit à divergence covariante nulle comme le tenseur énergie-impulsion, a été construit par Einstein à partir de $R_{\mu\nu}$ qui est le tenseur de Ricci, qui est la contraction (trace du tenseur de Riemann) mais qui n'est pas à divergence covariante nulle et R le scalaire de Ricci qui est la contraction du teneur de Ricci.

[692] Cela peut se réduire si l'espace-temps qu'il décrit possède lui-même des symétries.

Par contre, il semble que nous soyons face à une indétermination puisque dans le tenseur de Riemann qui rappelons le caractérise la courbure de l'espace-temps, dix degrés de liberté ne sont pas contraints et semblent donc libres.

Ces dix composantes " libres " sont contenues dans un autre tenseur à quatre indices, le tenseur de Weyl $C_{\mu\nu\rho\sigma}$ à *256* composantes, partie sans trace du tenseur de Riemann qui, en général, possède *10* composantes indépendantes, dix degrés de liberté, complémentaires de ceux du tenseur de Ricci.

Ceci résulte du fait que le tenseur de Riemann peut s'écrire comme une composition du tenseur de Weyl et de tenseurs formés de combinaisons linéaires du tenseur et scalaire de Ricci et de la métrique[693].

Dans cette décomposition, le tenseur de Weyl[694] $C_{\mu\nu\rho\sigma}$ représente la partie sans trace du tenseur de Riemann (ses contractions sur ses indices deux à deux est nulles). L'équation qui donne l'expression du tenseur de Riemann ainsi décomposée est assez complexe.

Nous savons que dans le vide, comme c'est le cas pour la solution que nous étudions, le tenseur de Riemann se réduit au tenseur de Weyl $C_{\mu\nu\rho\sigma}$ avec seulement 10 composantes indépendantes au maximum, puisque le tenseur énergie-impulsion étant nul, le tenseur d'Einstein et celui de Ricci sont nuls.

Le tenseur de Weyl ne figurant pas dans l'équation d'Einstein, il semble qu'il ne soit pas contraint et qu'on puisse définir de manière totalement arbitraire ses dix degrés de liberté. Bien que nous soyons libres du choix des coordonnées, ce qui correspond à quatre degrés de liberté, ceci correspondrait quand même à une indétermination majeure.

De plus, ceci semble en contradiction flagrante avec les déclarations d'Einstein qui affirme que la géométrie de l'univers est totalement déterminée par la répartition de matière-énergie.

En fait, on peut montrer[695] que le tenseur de Weyl, dont la structure est régie par l'identité de Bianchi, est indirectement contraint par autre une équation[696] différentielle du premier ordre entre le tenseur de Weyl et le tenseur énergie-impulsion et sa trace qui va donner des solutions dépendant de la répartition de matière-énergie en fonction de conditions aux limites.

---

[693] $R_{\mu\nu\rho\sigma} = S_{\mu\nu\rho\sigma} + E_{\mu\nu\rho\sigma} + C_{\mu\nu\rho\sigma}$ où $S_{\mu\nu\rho\sigma} = R(g_{\mu\rho}.g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho})/n(n-1)$ est la partie scalaire, $E_{\mu\nu\rho\sigma} = 2(g_{\mu[\rho}S_{\sigma]\nu} - g_{\nu[\rho}S_{\sigma]\mu})/(n-2)$, est la partie avec trace partielle où $S_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}R/n$ et $C_{\mu\nu\rho\sigma}$ est la partie sans trace (tenseur de Weyl). On rappelle que les crochets dans les expressions symbolisent l'opération d'antisymétrie sur les indices qui y sont contenus. *R* est le scalaire de Ricci et *n* le nombre de dimensions de l'espace-temps.

[694] Le tenseur de Weyl en quatre dimensions s'écrit *:* $C_{\rho\sigma\mu\nu} = R_{\rho\sigma\mu\nu} + \frac{1}{3}g_{\rho[\mu}g_{\nu]\sigma}R - g_{\rho[\mu}R_{\nu]\sigma} + g_{\sigma[\mu}R_{\nu]\rho}$.

[695] Voir Carroll (2003) p. 169-170

[696] Cela se déduit de l'identité de Bianchi. L'équation est : $\nabla^{\rho} C_{\rho\sigma\mu\nu} = 8\pi G(\nabla_{[\mu}T_{\nu]\sigma} + \frac{1}{3}\, g_{\sigma[\mu}\nabla_{\nu]}T)$, T est la trace de $T_{\mu\nu}$.

Cette équation s'apparente à une équation de propagation d'ondes gravitationnelles du fait de son analogie avec les équations de Maxwell.

Sans entrer plus dans les détails, nous voyons que l'interprétation et la signification des équations de la relativité est plus complexe qu'il n'y paraît d'autant que les phénoménologies associées à ces différents constituants ne sont pas les mêmes, ce qui va se traduire localement par une déviation géodésique de nature différente selon que de la matière est localement présente ou est distante.

Ainsi, une boule de poussière inertielle voit sa taille (son volume, mais pas sa forme) varier en fonction de la dérivée seconde du tenseur de Ricci, alors que sa forme varie (se déforme en ellipsoïde par exemple), mais à volume constant, sous l'effet du tenseur de Weyl.

À noter que le tenseur de Weyl est un tenseur conforme, qui est invariant par un changement de jauge local. Il a la même valeur pour une métrique $g_{\mu\nu}$ et une autre métrique conformément équivalente $f^2(x^\lambda)g_{\mu\nu}$, où $f(x^\lambda)$ est une fonction arbitraire non nulle de l'espace-temps.

Nous avions souligné que Painlevé avait défini une métrique conformément équivalente à la métrique euclidienne dont le tenseur de Weyl est nul, le facteur conforme étant le potentiel gravitationnel, lorsqu'il avait proposé sa formulation covariante de la gravitation newtonienne.

Ceci montre que l'information qui va caractériser la structure d'un espace-temps vient de deux sources différentes interagissant de manière complémentaire et différenciée.

Cet espace-temps étant défini, on peut le peupler, *a posteriori*, d'observateurs passifs, qui ne contribuent pas à la dynamique de l'espace-temps, mais qui sont dans cet espace-temps, en fait dans l'espace de Minkowski tangent en tout point, donc soumis aux contingences d'une exploration de l'intérieur (marginalement et localement).

Ce point est important, les observateurs ne font pas partie de l'espace-temps qui résulte des équations d'Einstein, même s'ils y sont soumis.

C'est donc d'un couplage (non dynamique) entre un espace-temps donné et des observateurs (leurs horloges par exemple) dont nous parlons.

Aussi nous devrons être circonspects lorsque nous parlerons de paramètres physiques qui sont propres aux observateurs comme leur temps propre par exemple.

La causalité concerne les observateurs

Ce couplage entre espace-temps et observateurs s'applique pour tous les observateurs (et événements si on considère qu'on associe un observateur à un événement).

A chaque observateur (matériel) est associé un référentiel dans son espace tangent.

Tous ces espaces tangents sont disjoints : l'espace-temps associé à un observateur n'a pas de point commun avec celui associé à un autre observateur différent.

Comment se fait la liaison entre ces espaces tangents ?

C'est l'espace-temps courbe, décrit par la métrique, qui permet de les mettre en relation les uns avec les autres.

Mais nous savons qu'en espace courbe le résultat de cette mise en relation dépend du chemin suivi dans l'espace courbe.

Par exemple la lumière va suivre des géodésiques de l'espace-temps courbe (sur la variété) entre l'espace-temps de Minkowski tangent où est situé l'observateur générant un événement et l'autre espace-temps de Minkowski tangent où est situé l'observateur observant cet événement.

Par contre rien ne prouve que cette géodésique soit unique, d'ailleurs il existe des situations où ce n'est pas le cas (sur une hyper-sphère par exemple).

Pourtant le cas de la lumière comme messager est le plus simple.

Rappelons à quoi s'applique la causalité. Elle s'applique à des événements. Tel événement a ou n'a pas d'influence sur tel autre. À chaque événement on peut associer un observateur avec son référentiel.

On se sert de la métrique[697] pour définir la causalité mais elle ne concerne pas l'espace-temps mais les observateurs (qu'on a associé aux événements). Il faut considérer leurs lignes d'univers pour déterminer si un lien de causalité existe[698], mais est ce suffisant ?

Dans beaucoup de cas la ligne d'univers suffit, car il y a redondance totale entre les informations portées par la ligne d'univers (par exemple le temps propre) et celles qu'on pourrait définir éventuellement dans un espace interne associé à l'observateur (où on peut définir son temps propre).

Il existe des cas, comme des boucles temporelles dans l'espace-temps qui peuvent exister en relativité générale, où cette redondance n'est pas totale et où une définition du temps propre d'un observateur dans un espace-temps interne qui lui serait associé permettrait de résoudre certains paradoxes.

Comme nous le savons les objets avec leurs propriétés et caractéristiques propres ne font pas partie de la description de l'espace-temps, donnée par la relativité générale, ils ne sont que contraints par cet espace-temps.

Il convient donc d'être très circonspect sur la définition qu'on donne de la causalité. Nous aurons l'occasion de préciser ce point.

[697]Nous avons développé ce point au chapitre *3*. C'est l'annulation de la forme métrique qui munit l'espace-temps d'une structure conforme (E.Cartan1922c) qui régit la causalité.

[698]Au chapitre 3 nous avions discuté du déterminisme de l'espace-temps, représenté par une variété dans son extension spatio-temporelle. Nous avions indiqué que les observateurs parcouraient des chemins sur cette variété et que la phénoménologie qu'ils découvraient étaient liée à cette exploration particulière d'un univers totalement déterminé. La combinatoire infinie des interactions entre 2 lignes d'univers ré-introduit un élément de liberté.

Prise en considération des mouvements non géodésiques

Les équations de la relativité générale définissent un espace-temps par ses points ce qui autorise *a priori* toutes les lignes d'univers possibles dont les points appartiennent à la variété, de type temps pour des observateurs[699].

En l'absence d'interaction autre que la gravitation les observateurs suivent des géodésiques (des lignes) qui dépendent de la géométrie de l'espace-temps et de paramètres propres initiaux. La définition de ces géodésiques, est partie intégrante de la théorie puisque ce critère géométrique est issu du caractère géométrique de la théorie.

On peut d'ailleurs générer tous les points de la variété représentant l'espace-temps de manière structurée par des congruences de géodésiques comme nous le montrerons au chapitre *13*.

On peut aussi coupler d'autres interactions qui obéissent à la même symétrie (électromagnétisme par exemple) en couplant les équations qui les régissent (équation d'Einstein et équations de Maxwell par exemple[700]).

L'exemple d'une masse unique à symétrie sphérique possédant une charge électrique non nulle, générant un champ électrique à symétrie sphérique, est une extension des solutions " géodésiques " prenant en compte une autre interaction, l'interaction électromagnétique.

Si la particule de test est non chargée, ces " géodésiques " qui ne prennent en compte que le tenseur énergie-impulsion symétrique de la gravitation et de l'électromagnétisme vont être modifiées par rapport au champ de la même masse sans charge, du fait de l'énergie du champ électrique qui s'ajoute, mais la géodésique ne dépendra pas de la masse (le principe d'équivalence reste valide).

Par contre elles peuvent dépendre de la masse (indépendante de la charge électrique), c'est à dire prendre en compte l'effet du tenseur électromagnétique antisymétrique si la particule de test (jouant le rôle d'observateur) est chargée.

Le couplage est alors décrit dans le lagrangien associé à la solution.

On qualifie, par extension, de " géodésique " les solutions de la ligne d'univers caractérisant le mouvement dans ces dernières conditions, mais on voit qu'au niveau épistémologique cela correspond à deux phénoménologies différentes puisque pour une particule de test non chargée le principe d'équivalence est conservé mais que pour une particule de test chargée il ne l'est pas.

Aussi, stricto sensu, ne doit-on pas considérer que la relativité générale ne définit intrinsèquement que des solutions géodésiques où seule la gravitation faisant intervenir le tenseur énergie-impulsion symétrique généré par la matière et l'énergie, ce qui n'interdit pas des extensions mais en étant bien conscient (et en en tenant compte) que ces extensions s'appliquent sur un espace-temps mais ne contribuent pas à sa dynamique.

Le cas d'une particule de test chargée, dans une solution avec masse centrale électriquement chargée, s'il correspond à une phénoménologie différente du cas de la particule de test non chargée, ne résulte pas d'une modification de l'espace-temps généré par la masse centrale chargée, mais est lié au couplage de la particule avec le tenseur antisymétrique de l'interaction électromagnétique.

---

[699] Notons que cela est différent de la lumière qui ne peut que suivre des géodésiques du fait d'une contrainte supplémentaire (le ds^2 est nul).

[700] Un cas typique est donné par les solutions trouvées par B. Carter pour les espaces temps de la famille de Kerr-Newmann. Le Lagrangien dont dérivent les équations du mouvement vaut: $L = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} x'^{\mu} x'^{\nu} + \varepsilon A_{\mu} x'^{\mu}$, où A_{μ} est le potentiel électromagnétique covariant et ε la charge de la particule.

En toute rigueur, on ne devrait pas considérer comme une géodésique de l'espace-temps le mouvement d'une particule chargée dans un champ gravitationnel généré par une masse unique chargée à symétrie sphérique. Ajoutons que cela se généralise au cas où on ajoute une rotation au corps central (solution de Kerr-Newmann).

Le fait qu'on sache établir les équations différentielles régissant le mouvement pour ces particules chargées (Voir Carter B. 1968) n'implique pas nécessairement que ce soit une géodésique de l'espace-temps.

De façon plus générale, soumis à la seule interaction gravitationnelle éventuellement étendue, comment des lignes d'univers (réputées possibles) non géodésiques selon les critères indiqués peuvent-elles se produire ? Un mouvement non géodésique n'est pas totalement déterminé par la géométrie (et certaines conditions initiales) mais est simplement contraint par elle.

L'exemple typique est celui d'une fusée qui transfère de " l'impulsion " localement pendant un certain temps et qui va, pour la charge utile, conduire à un mouvement non géodésique et parcourir une ligne d'univers possible (courbe sur la variété), même si pour le centre de masse à chaque instant le mouvement est géodésique.

On voit bien que la source physique du phénomène, supposée ne pas perturber l'espace-temps, est totalement périphérique à cet espace-temps et qu'il va sans doute falloir considérer certains paramètres de cet objet (comme le temps propre des astronautes par exemple) comme propres à l'objet donc attachés à l'objet dans un espace-temps interne.

Une confusion peut venir du fait que la mesure de la ligne d'univers de type temps donne le temps propre écoulé. Cela est vrai localement, du fait du couplage susmentionné, mais c'est sensible aux intégrations hasardeuses le long d'un chemin s'il est une boucle.

Il peut exister des situations qui conduiraient à des paradoxes douteux de violation de causalité si on applique cela sans discernement. En effet cette violation doit s'évaluer pour l'observateur ou entre observateurs, sur leurs lignes d'univers.

L'espace-temps donné par la Relativité n'est qu'un cadre géométrique qui peut comporter des boucles mais qui ne les parcoure pas.

En tant qu'observateurs, nous sommes à l'intérieur du système (en fait nous sommes, partie négligeable pour la gravitation de ce système) et même si notre esprit nous permet de nous projeter à l'extérieur via le modèle que nous en faisons n'oublions pas que physiquement nous sommes dedans et que le résultat des vérifications expérimentales que nous pouvons obtenir doit s'apprécier de ce point de vue.

Mais en étudiant ce que ces observateurs peuvent connaître de l'espace-temps qui les héberge, en particulier, les distorsions ou limitations éventuelles auxquelles ils sont soumis, nous qui sommes par la pensée "à l'extérieur" du modèle (mais dans l'univers physique) nous pouvons nous projeter en eux et en déduire à quelles limitations physiques et à quelles distorsions notre connaissance du monde est soumise du fait que nous avons les deux points de vue.

Ainsi apparaît la dualité entre l'information portée par le modèle (la théorie) qui procède à une externalisation de la vision de l'univers par précisément la création de ce modèle, c'est une des capacités de notre esprit dont il faut connaître la portée et les limites et dont il faut d'ailleurs se méfier, et l'information disponible (et utile) physiquement du fait que notre projection intellectuelle à l'extérieur de l'univers ne nous en projette pas pour autant physiquement à l'extérieur.

Nous sommes à l'intérieur et ce que nous pouvons en connaître c'est de l'intérieur.

Caractère physique de l'espace-temps

De ce constat, ne pouvons-nous pas en induire que l'espace-temps n'est immatériel que dans notre esprit c'est-à-dire dans le modèle.

Mais faire ceci, n'est-ce pas réintroduire l'éther?[701]

Compte tenu que l'essentiel de la connaissance physique de l'univers se fait via des messagers tels que des rayonnements de nature électromagnétique ou autre de portée infinie (bosons de masse nulle) est-il absurde de considérer que ces messagers, insensibles à l'échelle des phénomènes mais porteur de leurs relations[702], tissent la trame physique de cet univers ?

Le cas du modèle standard de la cosmologie fournit une solution type des équations d'Einstein. L'espace-temps homogène et isotrope constitué de fluides de type matière énergie fournit un référentiel matériel privilégié pour écrire les équations de la relativité ce qui permet de déterminer totalement l'espace-temps, conformément au principe de Mach si cher à Einstein: " l'inertie de cet espace-temps résulte du fluide de matière-énergie qui le constitue ".

En particulier le décalage spectral du rayonnement de fond cosmologique (à 2,7K), constituant de l'univers, qui est la manifestation de l'expansion dans le modèle standard de la cosmologie ne peut- il pas être assimilé à une référence d'échelle relative donnée par la fréquence des photons pavant cet univers[703] ?

On peut objecter que des messagers qui peuvent être des particules ou même des objets plus complexes peuvent être observés, sujet aussi à perte d'énergie cinétique propre mais ils caractérisent moins bien la texture de l'espace-temps par leur distribution sporadique.

Par ailleurs des solutions dans le vide comme celle que nous étudions (problème à un corps) dans ce document ne semblent pas répondre à ce critère, encore que la singularité centrale privilégie un référentiel à symétrie sphérique pour cet espace-temps.

Cette solution avait chagriné Einstein qui pensait qu'un seul corps ne pouvait pas avoir d'inertie, puisque selon lui, en application du principe de Mach, l'inertie résulte de l'interaction entre les masses, ce qu'il exprime dans une lettre à Schwarzschild du 9 janvier 1916.[704]

Certaines solutions dans le vide (univers de De Sitter) avaient également posé problème à Einstein qui avait été amené à reconsidérer le principe de Mach.

Mais comme par la suite, il est apparu que la relativité générale n'était que partiellement compatible avec le principe de Mach[705], Einstein ne s'en est plus réclamé.

---

[701]L'éther fait l'objet de polémiques diverses et variées, depuis Poincaré qui ne le considérait pas comme nécessaire mais éventuellement comme accessoirement utile. La position d'Einstein, du moins au début, était un rejet sans appel. Aucun caractère physique ne pouvait être attribué à l'éther.

[702]Les géodésiques nulles (lumière) sont particulières en ce sens qu'elles satisfont à la contrainte $ds^2 = 0$, correspondant à un espace conforme, et ont donc un degré de liberté de moins que des géodésiques de type temps par exemple. Ces géodésiques jouent un rôle important dans la détermination des symétries des espaces temps (géodésiques nulles principales). Elles délimitent le cône de lumière qui détermine la causalité. E. Cartan 1922c

[703]Nous avons indiqué que dans la définition du paramètre affin d'une géodésique nulle, la longueur d'onde du rayonnement intervenait, au moins de manière conforme, préservant les rapports et les angles de phénomènes.

[704]Cité dans Eisenstaedt J. " The early interpretation of the Schwarzschild solution 1915-1923 "

[705]Ce principe empirique se laisse difficilement mettre en équation, comme la tentative infructueuse de théorie scalo-tensorielle de Brans et Dicke qui tente de s'y conformer le montre. Mais le sujet est toujours d'actualité, voir les travaux de Julian Barbour (2003), entre autres. Concernant l'univers de De Sitter, nous en avons discuté.

Le terme non quadratique de la forme de Painlevé. Causalité, temps, mouvement

Nous avons déjà discuté dans la première partie de cette phénoménologie particulière sous l'horizon qui montrait l'existence de lignes d'univers, dont des géodésiques, de type temps alors que dans la forme de la métrique de Painlevé toutes les coordonnées sont de type espace.

Nous avions donné les conditions qui permettaient à de telles lignes d'univers d'exister.

La partie scientifique en donne une présentation formelle à laquelle on peut se référer pour plus de précisions.

Nous nous attachons à montrer ici ce qui permet une telle phénoménologie.

Lignes d'univers temporelles et cône de lumière.

Un point délicat à comprendre est que, localement, l'observateur inertiel de Painlevé voit l'univers minkowskien.

Son cône de lumière local, celui qu'il perçoit localement, est celui de la relativité restreinte qui est fixe.

Nous avons, par contre, montré que dans les coordonnées générales reflétant la courbure de l'espace-temps, la géométrie du cône de lumière variait considérablement au gré de cette courbure.

Comment concilier ces deux points de vue ?

Pour expliciter cela, il faut s'intéresser au cône de lumière.

Nous avons vu, sur la figure *9* du chapitre *9*, comment dans les coordonnées " globales " de la forme de Painlevé, de symétrique à l'infini dans le diagramme *(r, t)* il bascule en s'approchant de l'horizon et est orienté vers les *r* décroissants sous l'horizon.

Une ligne d'univers de type temps se trouve nécessairement à l'intérieur du cône de lumière.

Celui-ci, bien qu'incliné, n'étant pas fermé sous l'horizon des lignes d'univers de type temps mais en mouvement vers la singularité centrale peuvent exister, ce que nous avons caractérisé.

Le diagramme assez rudimentaire de la figure *9* est complété par la figure ci-dessous " exacte " qui réalise un zoom autour de $r = 2GM = r_s$, où la variation du cône de lumière est importante et significative.

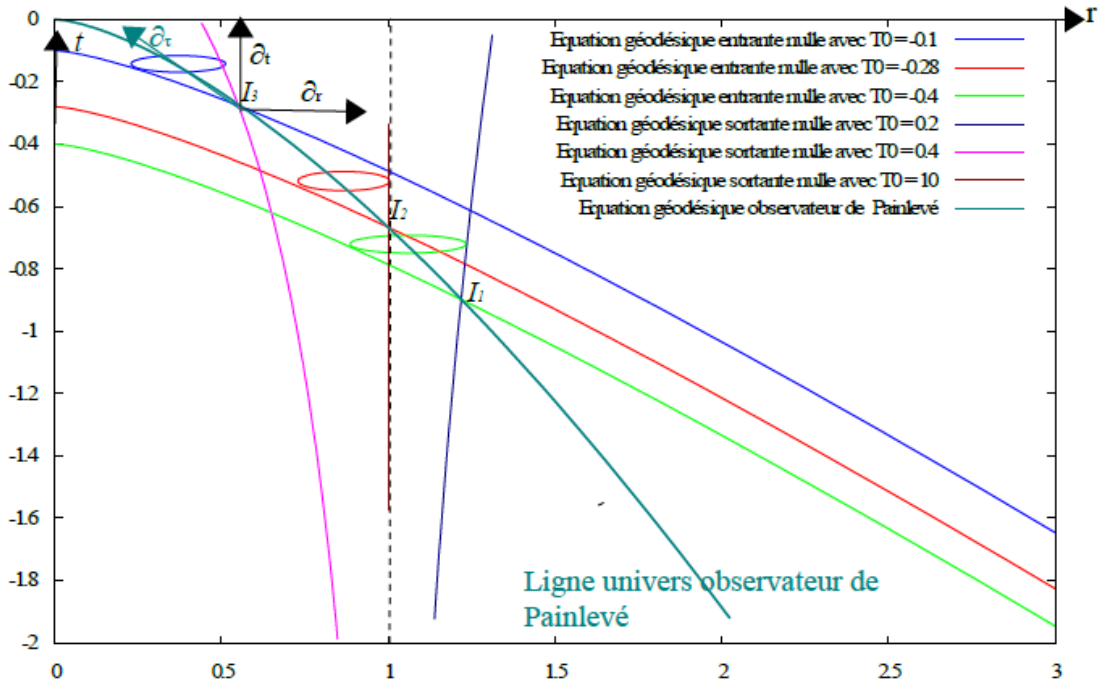


Figure- 12-2 [429]*:Les géodésiques nulles entrantes et sortantes aux points d'intersection I_1, I_2, I_3 avec la géodésique entrante de Painlevé sont représentées. On voit comment le cône de lumière, représenté par les tangentes aux géodésiques nulles, bascule sur l'horizon à r =1.*

Incidemment ce diagramme montre qu'un observateur sous l'horizon continue à recevoir de la lumière venant de l'extérieur de l'horizon.

Quel critère physique est fondamental : le temps, le mouvement ou la causalité ?

Ces comportements paradoxaux nous interpellent sur les relations entre le temps, le mouvement, l'espace et la causalité en relativité générale.

Essayons d'en tirer quelques enseignements complémentaires à ceux que nous avons déjà évoqués dans des chapitres antérieurs.

Sous l'horizon, le mouvement est indissociable du temps

Sous l'horizon, on peut naïvement se poser la question, puisque nous avons une situation où toutes les coordonnées sont de type espace mais où une ligne d'univers temporelle physique peut exister.

Cela n'est- il pas contradictoire ?

Rappelons que le paramètre physique qui, quand on parcourait selon une orientation donnée une ligne d'univers suivie par un observateur, ordonnait les états différents du système était le temps propre et que les coordonnées n'avaient en général aucun caractère physique.

Cependant elles ne sont pas sans utilité dans cette phénoménologie, car elles permettent de définir le cône de lumière qui délimite la topologie des régions où les lignes d'univers sont de type temps.

Formellement, c'est l'existence du produit *dr.dt* dans la métrique qui, comme nous l'avons déjà indiqué, implique que, sur cette ligne d'univers sous l'horizon, l'observateur soit en mouvement vers la singularité.

Ce mouvement entrant implique que $dr < 0$ et $dt > 0$ le produit *dr.dt* est donc négatif.

Il est donc de type temps.

Si sa valeur absolue est supérieure à celle de la partie de la métrique de type espace alors le ds^2 est de type temps et la trajectoire concernée de type temps également.

On peut donc dire que physiquement, sous l'horizon, c'est le mouvement[706] qui permet à un corps matériel d'exister.

La causalité et le temps propre d'un observateur sont-ils indissociables ?

Géométriquement, sous l'horizon, il faut qu'il y ait mouvement pour qu'une ligne d'univers soit dans le cône de lumière, alors qu'une ligne d'univers statique donc tangente à la coordonnée *t* est à l'extérieur du cône de lumière.

C'est ce que montre la figure *12-2* pour le cône de lumière en I_3 sous l'horizon.

Ce même diagramme montre que la ligne d'univers de l'observateur de Painlevé est à l'intérieur de tous les cônes de lumière représentés, y compris en I_3 sous l'horizon.

Un critère topologique dans un espace conforme pour la causalité

Propriétés structurelles

C'est le bon critère pour l'existence de lignes d'univers de type temps, qui rejoint celui régissant la causalité, ce qui est cohérent, car c'est bien la causalité qui est le critère générique qui doit impérativement être respecté pour une physique " raisonnable ".

Ce critère de type conforme[707] est moins contraignant que celui déduit de la métrique, car si une métrique y satisfait toutes celles qui s'en déduisent par une transformation conforme y satisfont par construction d'une transformation conforme puisque cela consiste à multiplier la métrique par une fonction scalaire ce qui est sans effet si on contraint la métrique à être nulle.

[706]Même si ce mouvement est géodésique et par exemple co-mobile de l'effondrement de l'espace-temps, il y a dynamique, car la situation de l'observateur évolue physiquement. On peut faire observer qu'à l'extérieur de l'horizon, un observateur statique peut exister. Cela montre bien que le caractère physique du temps propre de cet observateur ne saurait être attaché à l'espace-temps lui-même, même si sa ligne d'univers a la même mesure que ce temps, mais à l'observateur lui-même. Ceci peut se traiter en incorporant le temps propre de cet observateur (qui n'appartient pas à l'espace-temps) dans un espace local interne associé à l'opérateur.

[707]Nous avons vu, lors de l'examen des C.R.A.S, que E. Cartan avait défini la structure d'un tel espace-temps.

Même si la proposition de Painlevé de caractériser par l'équation *([6bis])* les géodésiques relativistes par le principe de moindre action sur la partie spatiale de la métrique affectée d'un facteur conforme n'est pas valide en général, comme elle l'est pour les géodésiques nulles cela montre que la structure causale des deux espaces différents concernés est la même.

Le critère de causalité peut donc être décrit dans un espace " conforme " et un certain type de causalité définit un espace conforme avec sa structure topologique associée. Nous avons vu au chapitre *4* comment E. Cartan[708] avait appréhendé le problème en soulignant comment précisément la lumière satisfaisant à la nullité du ds^2 définissait un espace conforme.

Ceci est important, car la lumière joue un rôle très particulier en relativité.

Sa vitesse étant constante par rapport à tous les référentiels son caractère particulier unique inciterait à en faire un référentiel privilégié, sauf qu'il serait alors singulier (son paramètre affin est nul) et donc inexploitable.

Comment alors exprimer son rôle dans la causalité ?

En fait un critère topologique permet de traiter ce problème, puisque pour tout référentiel physique de type temps[709] on sait qu'il doit être localement à l'intérieur du cône de lumière en tout point.

Les deux nappes du cône de lumière définissant passé et futur, l'extérieur définissant " l'ailleurs ".

Dans un espace conforme, on peut procéder comme E. Cartan le recommande et en traçant en tout point les géodésiques nulles, on structure l'espace-temps (sans métrique) et on y définit une topologie qui permet de définir et contraindre la causalité.

Les rayons lumineux sont en effet des géodésiques d'une classe très particulière, non seulement elles divisent l'espace-temps en régions et régentent la causalité, mais elles " tissent " la structure de l'espace-temps, en définissent en quelque sorte le squelette qui va supporter sa phénoménologie.

De plus, il existe en chaque point quatre directions nulles principales dans un espace à quatre dimensions comme celui de la relativité générale, révélatrices des symétries de la solution, qui ont des propriétés très spécifiques, comme le souligne E. Cartan dans l'article que nous avons cité en référence.

C'est donc dans un cadre pré-structuré que, avant même de définir une métrique particulière, la causalité va s'effectuer ce qui définit des classes de solutions, chaque classe d'espace-temps ayant en commun une structure causale[710].

[708]Cartan E. (1922c)

[709]On ne considère pas les lignes d'univers de type espace.

[710]Ainsi, en cosmologie, la solution de l'univers " cylindrique d'Einstein " dont la partie spatiale est une hypersphère statique est conformément équivalente à la solution de De Sitter, cf. Carroll (2003) p. 325. Elle

E. Cartan reconnaît d'ailleurs que dans le cas d'une masse unique, les quatre directions principales dans l'espace-temps de la relativité générale se réduisent à deux (doubles), résultat qui sera retrouvé plus tard par Petrov (1954) et Pirani (1957) dans leur classification des solutions dans l'espace-temps de la relativité générale, ceci correspondant à la classe D.

À noter que E. Cartan a bien reconnu que cette " classe D " s'appliquait au cas d'une masse unique et s'il ne cite que la solution de Schwarzschild c'est parce que c'était la seule reconnue à l'époque, mais qu'elle est également valide pour toutes les solutions où le champ est généré par une seule masse, ceci incluant les solutions de Kerr et Kerr-Newmann.

À ce titre son article était hautement précurseur et il est dommage qu'il n'ait pas eu le retentissement qu'il méritait. C'est, comme nous l'avons vu, un caractère qu'on peut reprocher aux comptes rendus de l'Académie des Sciences qui s'adressent au cercle restreint d'une élite.

Causalité, tenseur de Weyl et théorie de jauge.

Dans le cas d'une masse unique, si on s'intéresse à la solution à l'extérieur de la masse (dans le vide) ce qui est le cas des formes de métrique que nous envisageons, alors la courbure de l'espace est totalement définie en chaque point par le tenseur de Weyl qui est également de nature conforme : il est invariant par une transformation de jauge de la métrique du type $g'_{\mu\nu} = f^2(x^\mu)\, g_{\mu\nu}$.

Ceci n'est pas trivial et montre alors un lien étroit entre la structure causale et la géométrie de l'espace-temps.

Quand on sait que Weyl s'était intéressé à ce tenseur dans le cadre de ses travaux sur les " symétries de jauge " (indépendante d'un facteur d'échelle local) dont le concept allait aboutir plus tard aux classes de théories qu'on appelle " théories de jauge " on perçoit que tout cela est interdépendant.

La relativité générale peut être formalisée comme une théorie de jauge dans tous les cas d'ailleurs[711], pas seulement dans le vide où le tenseur de Riemann se réduit au tenseur de Weyl, puisque c'est une propriété liée à l'invariance par difféomorphisme qui permet de définir un groupe de Lie et une algèbre de Lie associée aux transformations infinitésimales.

M. Lachièze Rey[712] relate la formalisation de la relativité générale dans le contexte des relations entre la physique et les espaces fibrés en considérant que dans la variété modélisant géométriquement l'espace-temps, la base est l'espace-temps courbe et la fibre est l'espace-temps tangent muni des symétries de l'espace-temps de Minkowski (groupe de Poincaré).

---

appartient à la même classe qui caractérise les espaces temps à symétrie maximale à courbure spatio-temporelle constante et positive. Ceci montre que des espaces temps avec des phénoménologies manifestement différentes peuvent tout de même avoir en commun leur structure causale.

[711] Baulieu L. p.42-46. L'auteur traite de l'invariance par reparamétrage (changement de coordonnées) qui est le point de vue " passif " de l'invariance alors que le difféomorphisme est le point de vue actif. Ce sont deux aspects du même procédé révélant la symétrie de jauge.

[712] Lachièze Rey M. (2003) p. 256.

Cette concordance de dépendances, pas très simple à expliciter n'est pas fortuite. Ce sont les différentes facettes, à différents niveaux d'analyse d'une phénoménologie, révélées par des approches différentes.

Il faut quand même signaler que le rôle structurel important des géodésiques lumière a été cependant bien été pris en compte par certains, en particulier par Synge[713], qui en fera un bon usage pour étudier la phénoménologie de la solution de Lemaître (Voir figure *14-3* chapitre *14*) et pour la comparer à une solution innovante qu'il proposait précisément au problème de Schwarzschild.

Cependant, l'importance de cette approche n'est pas toujours soulignée, mais elle montre comment le rôle structurel de la lumière vis-à-vis de la causalité, dont on perçoit le caractère très particulier, s'exerce dans l'espace-temps par la topologie qu'elle définit qui régit la causalité.

Dans le schéma de construction de variétés, où partant d'un ensemble le plus général on ajoute diverses contraintes pour aboutir à une variété pseudo-riemannienne, l'importance de cette étape est rarement soulignée.

Le référentiel local de l'observateur indissociable de la physique

En considérant le référentiel inertiel local de Lorentz (minkowskien), co-mobile de l'observateur de Painlevé (défini par une tétrade), que nous avons dans l'exemple représenté en deux dimensions (pour les vecteurs de base ∂_r et ∂_τ) en I_3 sur la figure *12-2*, on note que la coordonnée temporelle locale (le temps propre local de l'observateur) et son vecteur de base tangent (représenté en turquoise, comme la géodésique suivi par l'observateur de Painlevé) sont dans le cône de lumière local.

Sur le diagramme les vecteurs tangents aux coordonnées globales de Painlevé (∂_r et ∂_t) sont orthogonaux alors que ∂_r et ∂_τ, tangents aux coordonnées locales, ne le sont pas.

Mais nous savons que cette représentation euclidienne est fausse puisque la métrique minkowskienne est " hyperbolique " et que le critère d'orthogonalité s'exprime par la symétrie par rapport au cône de lumière comme nous l'avons signalé à maintes reprises.

Comparaison des groupes de symétrie attachés aux formes de Schwarzschild et Painlevé

Rappelons que le caractère statique et isotrope de la forme de Schwarzschild, à l'extérieur de l'horizon, correspond au groupe des invariances par translation dans le temps et par rotation spatiale associé à ces coordonnées.

Il est prolongé en s'inversant partiellement au franchissement de l'horizon (les coordonnées r et t inversant simultanément leurs signes), par un espace-temps intérieur " homogène " (invariant par translation dans l'espace) et isotrope mais non statique.

Ces propriétés sont liées aux coordonnées utilisées, donc n'ont pas nécessairement de sens physique.

Selon les mêmes critères, la forme de Painlevé possède des propriétés différentes : la stationnarité[714] et l'isotropie de l'espace 3D sont toujours respectées mais ces coordonnées ne deviennent pas homogènes sous l'horizon, où les 4 dimensions sont de type espace et où la coordonnée t, alors quatrième dimension de type espace, n'est pas homogène (dépend de r).

[713]Synge (1950)

[714]Sous l'horizon, il n'y a pas de coordonnée de type temps. Ajoutons que la comparaison n'est pas forcément simple, car dans un cas la base de vecteurs est orthogonale alors qu'elle ne l'est pas dans l'autre cas.

Cela n'interdit pas pour autant le mouvement d'objets physiques, car le produit *dr.dt* dans la forme de la métrique permet au ds^2 d'être de type temps, donc de s'exprimer sous la forme d'un $c^2d\tau^2$ négatif caractérisant l'existence d'un temps propre sur une ligne d'univers.

Illustrons géométriquement cette possibilité sur un diagramme à deux dimensions *(τ, r),* ce qui est significatif compte tenu de la symétrie sphérique, représentant la base minkowskienne locale, de l'observateur, définie par les vecteurs ∂_r et ∂_τ (en noir).

Les vecteurs de base globaux (en couleur) sont ∂_r et ∂_t. Nous nous plaçons du point de vue de l'observateur local de Painlevé.

On a tracé le cône de lumière fixe dans le référentiel local minkowskien balisé par la base de vecteurs ∂_r et ∂_τ orthonormés au sens de la relativité restreinte, attaché à l'observateur pour permettre de caractériser les lignes d'univers de type temps.

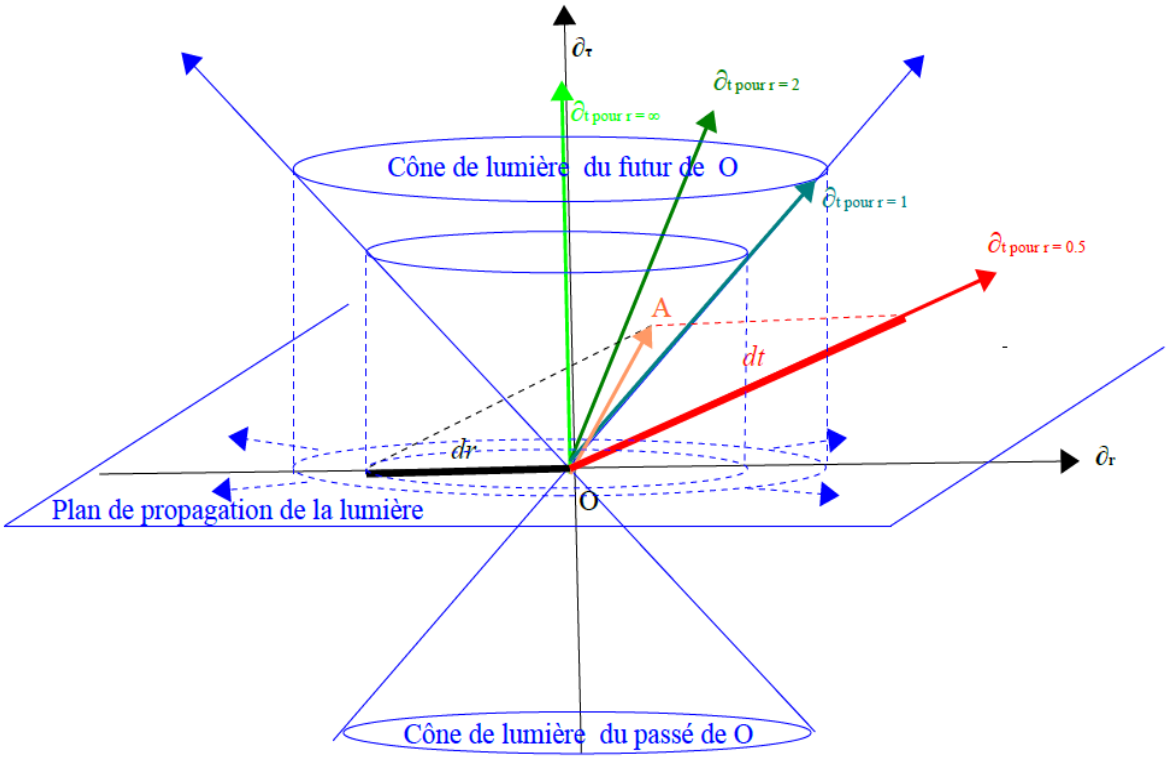


Figure 12-3. *Diagramme schématique[438] représentant les vecteurs de base des coordonnées de Painlevé pour 4 valeurs de r (∞, 2, 1, ½) dans la base locale inertielle de Lorentz (∂_r, ∂_τ).*

Illustration, dans le référentiel de l'observateur, de la variation du type des coordonnées globales (on a posé *$2GM/c^2 = 1$*).

Les vecteurs spatiaux de la base locale et globale restent colinéaires, mais on voit que le vecteur de base de la coordonnée temporelle globale ∂_t tourne vers la droite à partir de $r = \infty$, par rapport au vecteur de base temps local ∂_τ.

Les flèches bleues à 45° délimitent le cône local de lumière (son intérieur est le lieu d'existence des lignes d'univers de type temps). Rappelons que dans cette représentation, l'espace a été réduit à deux dimensions. La lumière se propage dans un plan. Les cercles en

pointillés dans ce plan sont les fronts d'onde dont le rayon augmente avec le temps qui est la coordonnée verticale, comme le diagramme le montre pour deux valeurs.

Pour $r > 1$, on voit que ∂_t est dans le cône de lumière, il peut y avoir des observateurs statiques[715] sur des lignes d'univers de type temps.

Pour $r = 0,5$, ∂_t est à l'extérieur du cône de lumière, donc il n'est pas possible d'avoir des observateurs statiques sur des lignes d'univers de type temps mais si on construit un vecteur OA tel que $dr < 0$ et $dt > 0$ on voit qu'une ligne d'univers tangente en O à ce vecteur peut être de type temps.

Par contre cela n'est pas possible si on impose $dr \geq 0$ et $dt > 0$.

Ceci est une illustration géométrique simple du phénomène qui paraissait bien étrange.

Lorsqu'on inverse le point de vue, si on se donne comme référence les coordonnées globales et qu'on trace le cône de lumière dans ces coordonnées, alors la géométrie du cône de lumière local est variable reflétant la courbure de l'espace-temps, comme les figures *9* et *12-2,* que nous avons précédemment données, le montrent.

[715] Leur ligne d'univers est localement tangente en O au vecteur ∂_t.

Congruences de géodésiques : description covariante de l'espace-temps

Jusqu'à présent nous avons modélisé l'espace-temps par une variété définie par un ensemble de points, repérés dans un système de coordonnées.

Dans ce cadre, par des diagrammes de Minkowski non covariants, nous avons étudié, par leurs relations entre leurs coordonnées, certains objets caractéristiques de l'espace-temps, comme les géodésiques que nous avons considérées individuellement.

Pour réintroduire de la covariance, nous avons complété certains diagrammes par les isochrones relatives à une classe particulière d'observateurs, les observateurs de Painlevé par exemple, ce qui permettait de déduire certaines propriétés intrinsèques de ces géodésiques par rapport à la structure ainsi définie résultant d'un feuilletage de l'espace-temps par le temps propre de ces observateurs, dont la représentation dépendait du système de coordonnées sélectionné.

Si, comme la relativité le revendique, le système de coordonnées est arbitraire, cela nous a cependant permis d'induire que, compte tenu de notre perception non covariante de l'espace-temps, l'intelligibilité de la représentation dans un système de coordonnées en dépend.

Afin de se détacher du caractère arbitraire des coordonnées de la représentation, nous sommes fondés à étudier la classe de géodésiques, non plus à travers les paramètres individuels de l'objet qu'est la géodésique dans le système de coordonnées mais à travers le comportement relatif collectif de cette classe de géodésiques.

Formellement, ceci introduit la notion de congruences de géodésiques.

Cette méthode covariante, plus structurée, ne s'appuie que sur des objets auxquels on peut conférer un caractère physique indépendamment de tout système de coordonnées.

Ce type d'analyse conceptuellement différente, a été mis en œuvre plus tardivement que celui que nous avons exposé jusque-là.

Il a permis, en clarifiant la structure covariante de l'espace-temps, de lever des verrous auxquels la théorie se heurtait et a ouvert la voie à de nouvelles solutions et surtout il nous propose une perception nativement covariante, accessible à notre esprit, de l'espace-temps solution du problème que nous considérons.

L'analyse scientifique en expose certains aspects auquel le lecteur pourra se reporter, pour plus de détails, et montre que cela conduit à une piste pour construire une forme de métrique s'appuyant sur des critères géométriques intrinsèques représentatifs de la structure de l'espace-temps de la solution considérée.

Nous ne présenterons pas ici, les aspects scientifiques qui sont traités au chapitre *13*, mais allons nous attacher à en décrire les attributs essentiels.

La congruence de géodésiques

Elle est liée à la notion de classe de géodésiques.

En effet, pour qu'un ensemble de géodésiques, soit représentatif de l'espace-temps qui les contraint, encore faut-il qu'elles aient des relations entre elles pour en déduire en quoi l'espace-temps les contraint.

Si, on prend des géodésiques quelconques, il sera difficile d'extraire de leur comportement des informations au sujet de l'espace-temps, qui les contraint. C'est propre à tout test, où pour arriver à une conclusion, sur un effet perturbateur, il faut une population homogène.

Par contre on pourra utilement étudier des différences entre différentes congruences.

Nous avons vu que l'observateur de Painlevé en chute libre radiale définissait une classe intéressante de géodésiques compte tenu de la symétrie spatiale sphérique de la solution.

Il y a une infinité de géodésiques radiales. Cette congruence va recouvrir tous les points-événements de la variété, ce qui signifie que par chaque point-événement il passe une de ces géodésiques.

Ceci offre une autre manière structurée de « construire » une variété.

Caractérisation de la phénoménologie de la congruence

Pour étudier le comportement collectif nous devons calculer le comportement relatif des géodésiques infiniment voisines de cette famille.

À cet effet on va arbitrairement en prendre une et considérer le faisceau de géodésiques infiniment voisines en étudiant sa section normale à la géodésique de référence du faisceau, par exemple les géodésiques voisines dont la section spatiale normale est au départ sur un cercle centré sur la géodésique de référence.

S'écartent-elles ou se resserrent-elles, lorsqu'on parcourt la géodésique de référence, et au cas où, dans quelle direction ?

Se déforment-elles en une autre figure (anisotropie) ?

Tournent-elles autour du centre ?

Autant de propriétés qui vont caractériser (localement) l'espace-temps.

Ainsi des astronautes, en vol inertiel, dans une capsule spatiale sans hublot, pourraient constater ce phénomène en observant l'évolution d'une boule de poussière, initialement sphérique, dont chaque grain suit une géodésique. Le volume de la boule varie-t-il, sa forme change-t-elle, se-met-elle à tourner ?[716]

Toutes ces observations de géodésiques les informeraient sur la structure de l'espace-temps.

Ceci montre que la description phénoménologique de cette méthode permet de s'abstraire de toute référence à un système de coordonnées et est donc nativement covariante[717].

Géodésiques de type temps

Le calcul fait dans la partie scientifique définit un tenseur caractérisant la phénoménologie d'une congruence qui peut être décomposé de la façon suivante :

[716]La variation de volume est liée à un tenseur de Ricci non nul, donc de la matière-énergie environnante. La déformation de la sphère en ellipsoïde traduit une masse distante et en donne la direction par son grand axe.
[717]Même si pour des calculs pratiques on est amené à les faire dans un système de coordonnées.

$$B_{\mu\nu} = \frac{1}{3} . \theta . P_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu} . \qquad (13\text{-}3)$$

Dans cette relation *(13-3)* :

θ [718], est un scalaire qui définit l'expansion de la congruence,

σ est un tenseur symétrique de trace nulle qui définit son anisotropie (cisaillement),

ω est un tenseur antisymétrique qui définit sa rotation.

Nous avons là trois paramètres à caractère purement géométrique, qui sont simples à comprendre, qui nous renseignent sur la structure de l'espace-temps dont ces géodésiques sont le squelette.

Ceci ne fait que traduire que le tenseur de Riemann, qui caractérise totalement la courbure de l'espace-temps, dépend des coordonnées et que cette déviation entre les géodésiques est la manifestation de sa variation en fonction de ces coordonnées.[719]

Trous noirs de Schwarzschild : congruence de géodésiques radiales de Painlevé

Le calcul fait dans la partie scientifique montre que la congruence de géodésiques radiales entrantes dans la solution de Schwarzschild (qui engendre tous les points de cet espace-temps) se caractérise par le fait qu'elle est sans rotation, sans anisotropie et est sujette à une expansion θ négative proportionnelle à $r^{-3/2}$.

Cas des géodésiques nulles

Nous avons traité de la congruence relative aux observateurs de Painlevé dont la géodésique est de type temps.

Les géodésiques nulles sont un cas particulier essentiel, car elles possèdent un degré de liberté de moins que les géodésiques temporelles, car nous avons la contrainte $ds^2 = 0$.

Elles définissent le cône de lumière qui contient les géodésiques temporelles, déterminant ainsi la causalité. Elles jouent un rôle structurel, pas toujours très simple à expliciter, dans la théorie à différents autres titres.

Soulignons que la lumière a toujours un mouvement géodésique, propriété non triviale, qui résulte de la nullité du "temps propre" de la lumière sur sa ligne d'univers, ce qui entraîne un paramétrage particulier de ces géodésiques[720] puisqu'on ne peut pas utiliser ce temps propre comme paramètre affin[721].

L'étude de ces congruences de géodésiques nulles va se révéler très utile à la compréhension des solutions dans le vide, d'une classe d'espaces temps à laquelle le trou noir à symétrie sphérique appartient.

[718] Attention à la notation, θ n'est pas la coordonnée angulaire mais le facteur d'expansion.
[719] Ceci est défini par l'équation de déviation géodésique qui montre la valeur de l'accélération caractérisant la séparation entre géodésiques voisines est proportionnelle au tenseur de Riemann.
[720] Adapté de S. Carroll (2003) chapitre *3.4*.
[721] Voir le chapitre *13* de la partie scientifique pour les détails.

Classification de Petrov-Pirani

Dans la solution, dans le vide, que nous étudions nous savons que le tenseur de Riemann se réduit au tenseur de Weyl décrivant un espace-temps conforme qu'on peut caractériser par les géodésiques nulles.

Étudier les symétries des familles de géodésiques nulles va permettre de classer les espaces-temps en différents types.

C'est cette démarche, qui s'est révélée fructueuse, que nous allons brièvement présenter

Comme un espace-temps vide est caractérisé par le tenseur de Weyl (tenseur conforme), nous allons en chercher les symétries.

Nous avions déjà exploité des symétries géométriques *a priori* de la solution comme la symétrie sphérique spatiale, l'indépendance par rapport au temps.

Le tenseur de Weyl, à quatre indices, étant un objet spatio-temporel totalement représentatif de l'espace-temps dans le vide, il va en révéler des symétries qui vont induire une classification géométrique des espaces-temps offrant un autre éclairage sur leurs structures permettant de progresser dans la compréhension des solutions.

Cette classification[722] a été effectivement à la source de progrès importants dans le développement de la théorie de la relativité générale.

Une manière très efficace pour étudier des symétries d'un tel objet formel est de le considérer comme un opérateur s'appliquant sur des tenseurs à deux indices et d'en chercher les valeurs propres, c'est-à-dire les valeurs pour lesquelles l'opérateur appliqué sur un tenseur à deux indices produit un tenseur proportionnel.

Ces valeurs propres λ vont déterminer les niveaux de symétrie de ce tenseur.

À ces valeurs propres on va associer des directions principales nulles, qui comme le terme "principal" le suggère révèlent certains aspects fondamentaux de la structure de l'espace-temps.

Ces directions principales nulles, qui sont des vecteurs nuls, entrent utilement dans la composition de plusieurs objets fondamentaux utilisés en relativité générale, comme la métrique et les tenseurs de Killing.

On peut avoir de 1 à 4 valeurs propres différentes dont les combinaisons donnent :

[722] Rappelons le remarquable article de E. Cartan (C.R.A.S) T 174 (1922) p. 857-860 qui préfigure cette classification

Type I : quatre directions principales nulles,

Type II : une direction double et deux directions simples principales nulles,

Type D : deux directions doubles nulles,

Type III : une direction triple une direction simple principale nulles,

Type N : une direction quadruple principale nulle,

Type O : le tenseur de Weyl s'annule.

Interprétation physique

En Relativité Générale les différents types de Petrov-Pirani peuvent s'interpréter physiquement, la classification résultante étant quelquefois appelée la classification des champs gravitationnels.

En particulier, les régions de type D sont associées aux champs gravitationnels d'objets massifs isolés, comme les étoiles. Cela correspond au cas que nous étudions.

Les deux directions nulles principales définissent les congruences nulles radiales entrantes et sortantes de l'objet qui est la source du champ.

Le tenseur gravito-électrique (tenseur de marée) dans une région de type D ressemble beaucoup à son cousin newtonien décrit par un potentiel gravitationnel de type coulombien.

Un tel champ de marée se traduit par une élongation dans la direction radiale et par une compression dans les directions orthogonales. Les valeurs propres ont le profil (*-2,1,1*).

Par exemple une sonde spatiale en chute libre vers le Soleil subit une élongation radiale et une compression dans les directions orthogonales.

Le champ de marée décroît en $O(r^{-3})$, comme en mécanique Newtonienne où r est la distance à l'objet.

À ces valeurs propres dont le nombre (de 1 à 4) dépend des symétries de l'espace-temps, on peut associer des congruences de vecteurs nuls (quatre différentes dans le cas de symétrie minimum, jusqu'à une valeur quadruple dans le cas le plus symétrique) et l_μ, n_μ , dans notre cas.

À la recherche d'une solution représentative inspirée de la méthode

On peut s'inspirer de la démarche structurée qu'avaient fait Kerr et Schild (1964) dans l'étude des trous noirs de la famille de Kerr, car l'espace-temps que nous étudions en est un cas particulier (sans charge, ni moment cinétique angulaire).

Ils avaient recherché des solutions de forme de tenseur métrique qui s'exprimaient comme la somme du tenseur de la métrique de Minkowski et du produit d'une fonction scalaire par le produit tensoriel d'un vecteur covariant nul par lui-même (en espace-temps de Minkowski).

Reste à déterminer quel pourrait bien être ce vecteur nul.

Comme nous nous intéressons à la région "trou noir" de la solution "dite de Schwarzschild[723]" notre intuition nous oriente vers le vecteur nul principal radial entrant

$$l_\mu = \{1, 1, 0, 0\},$$

qui est un vecteur nul de façon évidente en espace de Minkowski et qui est le seul qui répond à la question.

Nous aurons l'occasion de retrouver ce vecteur nul dans des structures que nous étudierons.

[723]Il s'agit d'une appellation générique qui désigne l'espace-temps défini par cette forme de la métrique dans ce système de coordonnées particulier et par conséquent dans tous les systèmes de coordonnées qui se déduisent des premières par une transformation par une fonction scalaire des coordonnées. Par exemple quand on déclare que le théorème de Birkhoff montre que la solution de Schwarzschild est l'unique solution du problème du corps à symétrie sphérique, dans le vide, c'est ainsi qu'il faut le comprendre.

La forme de Painlevé établie et superbement ignorée par Lemaître dans un article fondamental de Cosmologie

Si on peut douter que Painlevé ait vraiment compris l'intérêt de sa découverte, il n'en est pas de même pour Lemaître[724] qui, au terme d'une démonstration magistrale sur des solutions cosmologiques, a considéré que celle du trou noir à symétrie sphérique en était un cas particulier.

Lemaître, à la différence de Painlevé, travaillait sur la relativité depuis de nombreuses années, il avait déjà publié des articles remarquables, en particulier en cosmologie.

Après quelques relations assez difficiles avec Einstein qui trouvait sa conception de la cosmologie « abominable » et qui ne goûtait guère la réhabilitation de sa constante cosmologique qu'il venait d'abjurer, Einstein avait fini par reconnaître publiquement l'excellence de la proposition de Lemaître en 1933.

L'article que nous analysons, où la solution que nous étudions a été traitée comme une annexe de sa réflexion sur la cosmologie, fait la synthèse de ses travaux.

Il est vrai que ce qui frappe, à la lecture de l'article de Lemaître, c'est la limpidité du discours. À une époque où les conceptions cosmologiques sont encore très confuses, son article emprunt d'une grande rigueur conceptuelle et formelle déroule méthodiquement un exposé des arguments et de leurs attendus dans une logique implacable qui rendrait le propos presque banal, si ce n'était, qu'à la fin, on réalise qu'il vient de fonder la cosmologie moderne.

Le chapitre de la partie scientifique, où nous nous attachons également à développer les points qu'il a laissé dans l'ombre, compte tenu de l'objectif qu'il s'était donné, suit le plan de Lemaître et est volontairement peu technique pour inciter à sa lecture, les équations n'étant présentes que pour étayer le propos.

Nous avons eu l'occasion d'indiquer que, si souvent on considère la solution de Schwarzschild comme "native" et qu'on dérive les autres par un changement de coordonnées[725], cela n'a pourtant rien d'incontournable.

Painlevé l'avait fait, en son temps, comme son article du 14 novembre 1921 en atteste, mais on sait le sort qui lui a été réservé.

Fort de sa connaissance approfondie de la relativité générale, Lemaître va apporter, avec cette assurance que Painlevé n'avait pas eu le temps d'acquérir, une contribution essentielle à la compréhension de la nature de la solution proposée par Painlevé.

---

[724]Voir annexe *5* pour un résumé de sa contribution à la relativité générale, en particulier la cosmologie. Voir ses publications les plus remarquables dans les références : Lemaître (1927- 1931 - 1932- 1933).

[725]Qui peut éliminer la singularité sur l'horizon en étant lui-même singulier sur cet horizon.

En effet dans son article “l’univers en expansion”[726] manifestement consacré à la cosmologie Lemaître va dériver directement à partir des équations d’Einstein, sur la base de quelques hypothèses contraignant ces équations, des formes non singulières sur l’horizon pour le “problème de Schwarzschild”.

On peut se demander ce que de telles solutions viennent faire dans un article de cosmologie !

Traditionnellement, on distingue la métrique de Robertson-Walker d’un univers type Friedmann, dont la section spatiale est totalement homogène et isotrope de celle de Schwarzschild pour les trous noirs, dont la section spatiale n’est pas homogène[727].

Mais si on regarde de plus près on constate qu’elles ont le même nombre de symétries. La section spatiale est isotrope dans les deux cas et dans un cas c’est le temps qui est homogène alors que dans l’autre c’est la coordonnée radiale.

On sait que les solutions de type “trou noir” et de type “univers cosmologique de Friedmann” se correspondent via cette dualité.

Dans le cas de la cosmologie c’est l’espace qui disparaît à $t = 0$, dans le trou noir c’est le temps qui disparaît à $r = 0$. De plus dans la forme de Schwarzschild, sous l’horizon, pour parachever la correspondance, le temps devient de type espace et l’espace de type temps, autrement dit, devient un univers de Friedmann, ce qui montre que le clivage entre les deux solutions n’est pas aussi rigide qu’il y paraît[728].

Lemaître proposera cette forme diagonale, pour le trou noir, qui a la même structure que celle de Robertson-Walker dans le cas particulier d’un univers critique de courbure spatiale nulle.

Lemaître montre, sous certaines hypothèses, que les formes cosmologiques et celle du corps unique à symétrie spatiale sphérique dérivent d’une même forme générique (diagonale à symétrie sphérique[729]) simplement en particularisant certains paramètres physiques de la forme générique.

La solution au problème de Schwarzschild va répondre à cette définition et, en tant qu’univers vide, elle va faire partie des solutions qu’il va développer.

Alors qu’aujourd’hui on établit la forme générique de la métrique de Robertson-Walker sur des critères purement géométriques[730], sans faire référence à l’équation d’Einstein, Lemaître, bien que mathématicien, va utiliser des critères physiques comme les paramètres du tenseur énergie-impulsion, en complément de critères géométriques et de l’équation d’Einstein.

De plus il comprend bien que la singularité sur l’horizon dans les coordonnées de Schwarzschild est une singularité fictive comme il le déclare au début du chapitre *11*.

---

[726]Lemaître (1927) avait publié en 1927 un article fondamental sur la cosmologie. Un article en anglais, Lemaître (1931), à la demande d’Eddington s’en inspirant en a été fait. Il n’y traite pas de la solution de Schwarzschild. L’article que nous étudions, Lemaître (1932), fait la synthèse des travaux de Lemaître à cette époque. Il a été repris in extenso en 1933, Lemaître (1933). Il faut aussi signaler que Friedman (1922) avait déjà étudié la solution.

[727]Par exemple, on peut faire remarquer que dans la forme de Painlevé, qui certes n’est pas diagonale, la section spatiale est euclidienne, c’est-à-dire homogène et isotrope comme celle de la forme de Robertson-Walker.

[728]D’ailleurs, pour étudier l’effondrement d’une boule de poussière en trou noir, on raccorde un univers de Friedmann à un univers de Schwarzschild défini dans la forme diagonale de Lemaître, ce qui n’est pas sans poser toutefois quelques problèmes conceptuels, en général rarement évoqués.

[729]La forme de Painlevé n’est pas diagonale, Lemaître l’utilise comme un intermédiaire dans sa démarche.

[730]On utilise le fait que le tenseur de Riemann spatial 3D à symétrie maximum est proportionnel à la métrique. On utilisera l’équation d’Einstein pour calculer, à partir du tenseur énergie-impulsion les paramètres génériques.

"*Les équations de l'univers de Friedmann admettent pour une masse non nulle, des solutions où le rayon de l'univers tend vers zéro. Ceci est en opposition avec le résultat généralement admis qu'une masse donnée ne peut avoir un rayon plus petit que* $2GM/c^2$,[731] *soit 2M en unités naturelles*[732]. *Ce résultat*[733] *se déduit de la solution du problème extérieur de Schwarzschild. Nous nous proposons de montrer que la singularité du champ n'est pas réelle et provient simplement de ce qu'on a voulu employer des coordonnées pour lesquelles le champ est statique.*[734] "

Comme on a établi qu'un effondrement pouvait être total pour la solution de Friedmann, il doit en être de même pour la solution de Schwarzschild, donc un effondrement de matière n'a aucune raison de s'arrêter avant d'atteindre l'horizon du trou noir (le rayon de Schwarzschild).

Selon lui, les relativistes qui répugnent à considérer cette hypothèse [735] doivent se tromper.

L'argument est en fait heuristique et Lemaître n'est pas exempt de contradictions, car dans son article qui traite essentiellement du modèle cosmologique fermé hypersphérique qui après une phase d'expansion devrait se contracter sans limite selon la théorie, il suppose au chapitre *12* qu'il est limité dans son effondrement par l'impénétrabilité des noyaux de la matière. C'est la notion d'atome primitif de masse *M*, somme de tous les protons de l'univers, qu'il estime à 10^{78} compactés dans un rayon *r* égal à dix fois la distance Terre-Soleil, selon son calcul. Notons que comme $r < 2GM/c^2$, c'est un trou noir, point que Lemaître ne relève pas.

Par ailleurs, il ne prend pas en compte le fait que les univers fermés de Friedmann et celui de Schwarzschild sont géométriquement différents.

Et rien ne prouve, *a priori*, que ce qui se produit dans l'un se produit dans l'autre.

C'est pourtant cette approche visionnaire, dont on a pas apprécié tout l'intérêt à l'époque, qui va naturellement le conduire à ses solutions.

Pour établir sa solution, en physicien avisé, Lemaître va rechercher et établir les invariants propres à cette solution à partir des équations de conservation décrivant la variation locale, par rapport aux coordonnées temporelles *t* et radiales χ d'une combinaison des paramètres de la matière et de la géométrie de l'espace-temps. Rappelons que cette coordonnée spatiale χ est l'angle de développement (la latitude sur une sphère).

---

[731] C'est la valeur correspondant à l'horizon du trou noir.

[732] En posant $G=1$ et $c=1$.

[733] La valeur du rayon de Schwarzschild.

[734] On ne peut être plus clair. Aujourd'hui comme nous l'avons indiqué, pour ces formes ne dépendant pas du temps, on distingue les formes statiques et le formes stationnaires. Quoi qu'il en soit, Lemaître est le premier dans l'histoire à reconnaître clairement le caractère fictif de la singularité à l'horizon. La singularité est fictive, dans le sens où l'espace-temps est régulier (sa courbure ne devient pas infinie) et un observateur peut la traverser, mais l'horizon s'il n'est pas singulier, a une réalité physique intrinsèque. Elle joue le rôle d'une membrane unidirectionnelle séparant deux régions ayant des propriétés géométriques différentes. Comme le dit T. Damour dans l'article sur la RG dans l'encyclopédie Universalis (1995) "En effet, si la région extérieure à un trou noir est bien stationnaire au sens usuel, c'est-à-dire admet un groupe d'invariance de la métrique correspondant à des translations "dans le temps ", la région intérieure, quant à elle, admet (par prolongement) un groupe d'invariance de la métrique, mais ce groupe y correspond maintenant à des translations "dans l'espace", ce qui veut dire que la région intérieure est homogène mais non stationnaire". Ce caractère intrinsèque se traduit par des propriétés qui se retrouvent dans toutes les formes de cette métrique, la rupture unidirectionnelle du lien causal de l'intérieur vers l'extérieur, ce qui est heureux, car l'horizon se comporte comme un bouclier étanche (en RG classique) vis-à-vis de la singularité centrale et de ses effets inconnus.

[735] Einstein tentera encore de montrer qu'un tel effondrement est impossible en 1939 : Einstein A. (1939).

La solution cosmologique de Friedmann

Lemaître établit la solution cosmologique de Friedmann, pour un univers fermé en introduisant implicitement la condition d'homogénéité, en définissant une forme pour cette fonction de masse $m(\chi)$ qui traduit la proportionnalité de la masse au volume.

Par contre, dans la solution de Schwarzschild, la masse étant ponctuelle, elle est indépendante de la coordonnée χ, ce qui va donner une autre forme de la métrique, nouvelle cette fois, qu'il va particulariser, en supposant *a priori*, la géométrie spatiale euclidienne[736].

À ce stade, il faut noter un certain "flou" dans la démarche de Lemaître, puisque pour la solution cosmologique de Friedmann, il se réfère (à tort comme nous l'avons dit) toujours à la solution fermée *(14-6)*, qui est la seule qu'il développe complètement.

Pourtant, c'est avec la solution de Friedmann critique à section spatiale euclidienne, que Lemaître ne fait qu'évoquer dans son document, qui correspond à un univers infini, que phénoménologiquement, le lien structurel avec la solution de Schwarzschild existe.

Considérons ce cas, avec la même masse *m* pour faire correspondre les deux solutions.

Phénoménologies comparées des solutions de Friedmann et de Schwarzschild

Considérons un observateur quelconque dans la solution de Friedmann critique,[737] situé en O, qui observe le mouvement des particules sur une sphère S**,** de rayon χ*,* dont il est le centre.

Il voit leur mouvement ralenti [738] par l'action gravitationnelle de la masse contenue dans la sphère S. On peut choisir $\chi = \chi_m$ [739] de s,orte que cette masse soit égale à *m*.

Comme χ_m est une coordonnée co-mobile comme l'équation *(14-7)* de la partie scientifique le montre, cette masse va rester égale à *m* à χ_m constant.

Mais pour les particules à la surface de la sphère, compte tenu du théorème de Birkhoff, la phénoménologie du mouvement (par rapport à O) serait inchangée si au lieu d'une sphère S de matière homogène de masse *m*, la masse était concentrée au centre de symétrie.

La solution cosmologique, avec $\chi = \chi_m$, présente exactement la même phénoménologie que la solution de Schwarzschild, mais ici inversée dans le temps ($t \rightarrow -t$), car dans un cas nous avons une expansion (ralentie par la matière) et dans l'autre cas une contraction accélérée[740].

---

[736]Dans la forme de Lemaître, ceci n'est pas évident. C'est évident dans la forme de Painlevé (tenseur de Riemann spatial *3D =0*). Comme ces deux formes utilisent la même variable temporelle *T*, les sous variétés définies par *T=constante* sont les mêmes et elles sont donc toutes deux euclidiennes.

[737]La solution étant homogène, tous les observateurs se valent, un observateur est représentatif de tous.

[738]Nous verrons que Lemaître donne une solution qui contient l'expansion et la contraction.

[739]La solution pour χ est unique, l'univers étant critique nous n'avons pas de degré de liberté sur la densité.

[740]Si on considère le cas où la condition de vitesse initiale nulle pour un mouvement géodésique radial s'applique en un point quelconque et non pas seulement à l'infini, généralisation de la solution de Lemaître au problème de Schwarzschild, la relation $r = R/2(1 + cos\eta)$, $\tau = (R^3/8M)^{1/2} (\eta + sin\ \eta)$ qui lie le temps propre $\boldsymbol{\tau}$ et la coordonnée *r* est de type cycloïdal, avec un facteur d'échelle différent pour τ et *r*, à la différence de la solution également cycloïdale de Friedmann type poussière $r = a/2(1 + cos\eta)$, $\tau = a/2 (\eta + sin\ \eta)$. Cf. Misner C.W. &

La solution cosmologique critique de Friedmann correspond à la région en expansion [741] de la solution de Lemaître.

Horizon trou noir et horizon des événements dans la solution de Friedmann Lemaître

Par analogie avec le trou noir, définissons un « horizon » comme l'hypersurface située à une distance ***r*** de l'observateur, aujourd'hui, telle que $rH_0 = c$. Alors cet horizon fuit « maintenant, au sens cosmologique » l'observateur à une vitesse égale à celle de la lumière, comme dans le cas du trou noir.

En reportant on obtient

$$\frac{8\pi G\rho_0 r^2}{3} = 2G\left(\frac{4\pi r^2\rho_0}{3}\right) = \frac{2G.M}{r} = 1,$$

d'où on déduit $r = 2GM$, comme pour un trou noir statique.

L'analyse de Lemaître suggère de mettre en relation ces « horizons » pourtant dissemblables.

L'horizon de la solution de Schwarzschild, qui est statique ou stationnaire, est à coordonnée radiale constante, dont l'origine est la singularité centrale. Il est le même pour tous les observateurs situés à l'extérieur de l'horizon. Il peut être traversé dans un sens par des observateurs. On peut lui attribuer un caractère physique et il régit la causalité.

Dans le cas des solutions Friedmann Lemaître qui sont homogènes et non stationnaires cet « horizon » dépend de l'observateur et du temps et ne régit pas physiquement la causalité.

En cosmologie, on définit un horizon causal, aujourd'hui, qui est en général différent de celui d'hier et de celui de demain, par la distance (aujourd'hui) de la source du signal lumineux le plus ancien, compte tenu de l'âge de l'univers, qui nous a pu nous atteindre aujourd'hui.

Cette définition, qui est rigoureuse, nécessite cependant de connaître intégralement la dynamique de l'univers entre l'instant d'émission du photon et sa réception. Le rôle de l'inflation primordiale, dans la causalité entre les régions éloignées de l'univers, modifie les données du problème, ce qui fait, qu'en pratique, un horizon physique de causalité n'est pas vraiment simple à définir rigoureusement dans le modèle standard cosmologique.

Ajoutons que ces deux formes[742] ont également en commun d'avoir des sections spatiales euclidiennes (isotrope et homogène), mais alors que l'une est dynamique, l'autre est stationnaire[743] : mais ne peut-on pas considérer la stationnarité comme un cas particulier (un cas dégénéré) du caractère dynamique, car dans "stationnaire" il y mouvement, même s'il est toujours le même.

Thorne K. & Wheeler J.A.(1973) Gravitation p.664. Cependant, ce facteur d'échelle est identique si $R=2M$ solution radiale de Novikov, dont la solution de Lemaître est un cas particulier ($r_{max} = \infty$), et celle de Friedmann sont identiques. Gautreau-Hoffmann (1978) traite aussi ce type de phénoménologie mais à des fins différentes.

[741]Nous anticipons ici sur l'extension de la solution de Lemaître sur la solution de Schwarzschild. La solution de Lemaître montre une région en contraction et une région en expansion. La solution de Lemaître est un cas particulier (vitesse nulle à l'infini) de la solution de Novikov, qui exprimée sous forme paramétrique, montre la relation cycloïdale entre *temps propre* et *r* comme dans celle de Friedmann.

[742]Rappelons que Lemaître a posé une condition de pression nulle : il 'agit donc de la solution sans pression.

[743]On peut noter que la forme de la métrique de Lemaître, "duale" de celle de Painlevé, que nous allons citer, qui est dynamique est encore plus proche de la forme de la métrique de Robertson-Walker critique.

La forme de "Painlevé" de la solution cosmologique homogène et isotrope

En utilisant la coordonnée *r,* où $dr = d\chi(1-kr^2)^{1/2}$, la métrique de Robertson-Walker peut s'écrire :

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-k\,r^2} + r^2\left(d\,\theta^2 + \sin^2(\theta)\,d\,\varphi^2\right)\right] \quad .$$

Cette forme est quadratique et diagonale, les coordonnées spatiales sont appelées co-mobiles.

Un observateur à coordonnées co-mobiles constantes est géodésique. Il est co-mobile de "l'expansion" du fluide cosmique. La section spatiale, euclidienne, est affectée d'un facteur $a^2(t)$, une fonction, qui dépend du temps, qui décrit l'expansion de l'univers.

Nous allons utiliser un argument similaire[744] à celui qu'a utilisé Painlevé pour dériver sa forme à partir de la forme quadratique diagonale de Schwarzschild.

Dans le cas critique, qui est celui qui nous intéresse, il est facile de montrer, à partir de l'équation de Friedmann qui donne $H = 2/3t$, que cette expression[745] s'écrit :

$$ds^2 = -dt^2 + \left[dR - \left(2\,R/3\,t\right)dt\right]^2 + R^2\left[\left(d\,\theta^2 + \sin^2(\theta)\,d\,\varphi^2\right)\right] \quad .$$

Une forme semblable à celle de Painlevé où l'observateur géodésique de Painlevé défini par ($dR = 2Rdt/3t$) est en fait co-mobile du fluide, donc est le même que celui de la forme de Robertson-Walker. Les sections spatiales, euclidiennes comme dans la métrique de Robertson-Walker, mais ne dépendant pas du temps, ne décrivent pas un espace en expansion.

Quid du caractère physique de la phénoménologie d'expansion de l'univers ?

Nous avons deux représentations qui semblent donner deux descriptions incompatibles de l'expansion de l'univers. Alors l'expansion de l'univers est-elle physique ou non ?

Ce paradoxe est dû à la description non covariante du phénomène.

Ces formes n'utilisent pas le même système de coordonnées aussi nous ne pouvons les comparer phénoménologiquement que sur des critères indépendants des coordonnées, par exemple des congruences de géodésiques que nous avons étudiées au chapitre précédent.

Nul doute, que la description des congruences de géodésiques suivies par les observateurs co-mobiles du fluide cosmique serait la même dans les deux formes, réconciliant les deux points de vue. Simplement, le caractère dynamique de cet espace-temps s'exprime différemment dans les deux formes. Dans la forme de Painlevé, la dynamique est décrite par la section temporelle qui dépend du temps. La partie scientifique décrit comment Lemaitre établit l'équation géodésique, avec constante cosmologique, à partir de la métrique.

[744]Hypothèse que nous formulons sur la méthode (non révélée par Painlevé) qu'il a utilisée pour dériver sa forme. Point développé au chapitre *21* § "la phénoménologie qui a pu motiver les propos de Painlevé".

[745]Dérivé de la forme plus générale, donnée dans Mizony M. et Lachièze Rey M. (2004). Notons que *R* (comme *r*) n'est pas une observable.

L'équation géodésique de la solution de Schwarzschild par Lemaître

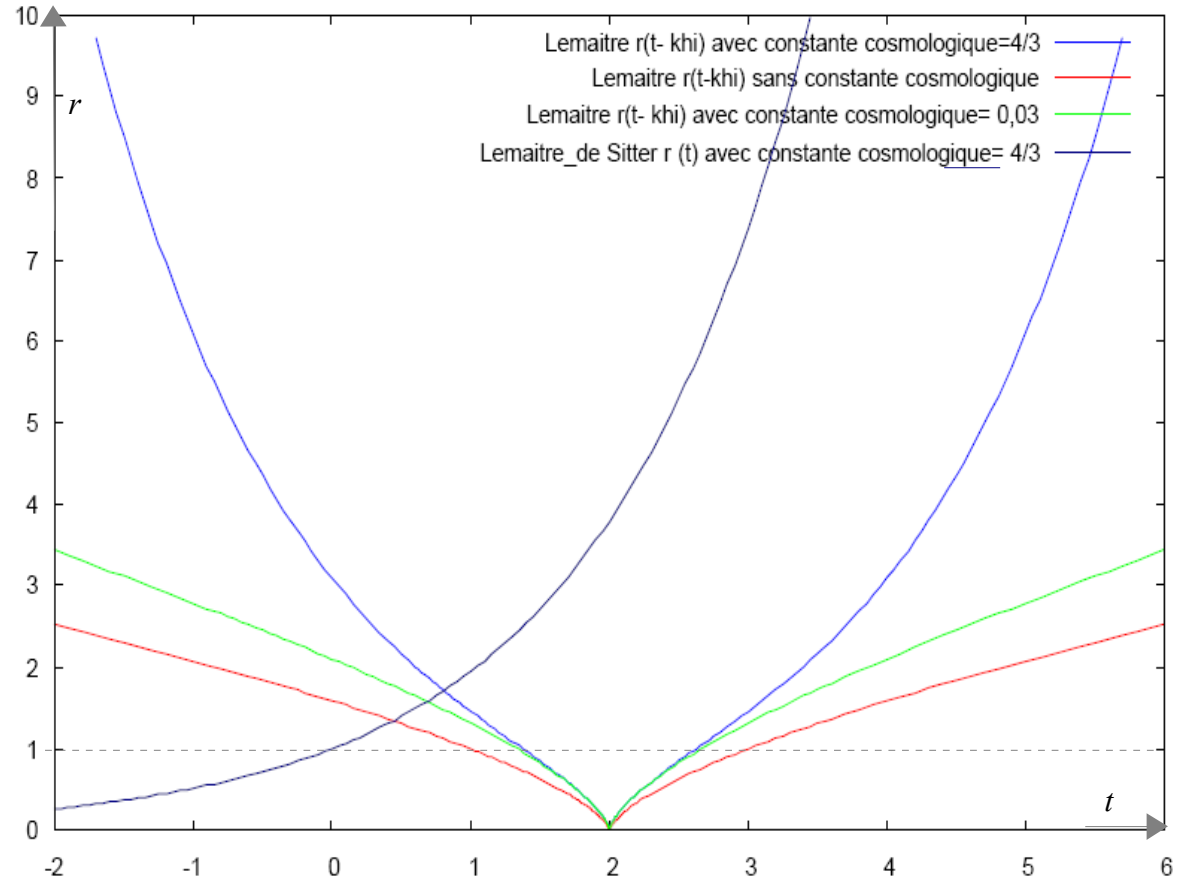


Figure 14-1. *Courbes tracées*[746] *pour l'équation géodésique, avec les valeurs suivantes des paramètres: G= c =1, 2M =1, χ =2, et 3 valeurs de la constante cosmologique : λ = 4/3, λ = 0.03, λ = 0, et pour la solution de De Sitter avec M =0, λ = 4/3.*

On a tracé l'horizon (ligne pointillée horizontale à $r = 1$). On voit que dans cette forme de la métrique la géodésique radiale entrante traverse l'horizon sans discontinuité, à la différence du cas des coordonnées de Schwarzschild. Étudions la variation de $r(t-\chi)$ lorsque t augmente.

Prenons, par exemple, la courbe correspondant à l'équation pour $\lambda = 4/3$ (bleu clair). Lorsque t varie de $-\infty$ à $t = \chi$, on voit que $r\,(t-\chi)$ diminue jusqu'à atteindre la valeur 0.

Ceci correspond à une contraction de l'univers au sens cosmologique, ou à une chute libre de l'observateur de Lemaître [747] (pour $t < \chi$) vers la singularité dans la solution de Schwarzschild.

Pour $t > \chi$ l'univers est en expansion, l'observateur de Lemaître est expulsé.

Comme $r = 0$ est une singularité, on ne peut pas passer continûment de la région de contraction à la région d'expansion. Ce sont donc des régions infinies disjointes.

Nous voyons que les équations de Lemaître décrivent bien la solution analytique complète de Schwarzschild. Dommage qu'il ne se soit pas attaché à souligner ce point.

---

[746]En utilisant le logiciel Maxima. Remarquons la discontinuité de la dérivée de $r(t-\chi)$ pour $t = \chi$, $(r = 0)$.

[747]L'observateur de Lemaître est en chute libre radiale vers $r = 0$, dans la solution de Schwarzschild, sans vitesse initiale à l'infini, sans rotation. À cet observateur on attache un référentiel de coordonnée χ = *constante* dans la forme de Lemaître. Lorsque nous y ferons référence dans la suite du texte c'est avec cette définition.

La métrique hybride de Lemaître de la solution de Schwarzschild

À partir des équations que Lemaître a établies, en imposant que les sections spatiales soient euclidiennes il obtient une métrique spécifique pour la solution de Schwarzschild, sans singularité autre que celle à *r = 0 :*

$$ds^2 = -A^2\left(r^3 + 8r_0^3\right)\frac{d\chi^2}{r} - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right) + c^2 dt^2 \quad . \qquad (14\text{-}11)$$

Cette forme est sensiblement différente de la forme décrivant l'univers de Friedmann critique, malgré les liens qui les unissent au niveau de l'équation du mouvement.

Cette forme de la métrique de Schwarzschild établie par Lemaître présente manifestement un caractère hybride (coordonnées *t, χ, θ, φ* et une fonction *r(χ, t)* de ces coordonnées).

Comme nous l'avons déjà indiqué, Lemaître peut éliminer une des variables parmi *t, χ* et *r.* Comme *t* est égal au temps propre, il est judicieux de le conserver.

Il reste deux choix à Lemaître, utiliser (*t, r, θ, φ*) ou (*t, χ, θ, φ*), ce qui fait que *(14-11)* va se décliner en deux formes, toutes deux non singulières sur l'horizon.

La forme de la métrique de Painlevé Lemaître

Le premier choix conduit à une forme non dynamique, en fait stationnaire, mais comme la distinction entre statique et stationnaire n'existait pas à l'époque, ceci interpelle l'argument de Lemaître au sujet de la relation entre la staticité et le caractère singulier à l'horizon.

Lemaître retrouve directement la forme que Painlevé [748] avait proposée en 1921 :

$$ds^2 = dt^2\left[1 - \frac{2M}{r} \pm \frac{\lambda r^2}{3}\right] - dr^2 \pm 2\sqrt{\frac{2M}{r} - \frac{\lambda r^2}{3}}\, dr dt - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right) \quad . \quad (14\text{-}12)$$

Par une transformation singulière de coordonnées qui introduit la singularité à l'horizon dans celle de Schwarzschild, Lemaître montre l'équivalence de sa forme *(14-12)* avec celle de Schwarzschild.

[748] Painlevé (1921). Lemaître l'étend au cas où $\lambda \neq 0$, Chazy (1922) l'avait fait pour la forme de Schwarzschild. Le signe ± indique 2 cas, sortant = + et entrant = -, le signe choisi est le même pour toute l'équation. Lemaître ne cite que le premier. Rappelons que le rayon de courbure *R* associé à la constante cosmologique λ vaut $R = (3/\lambda)^{1/2}$. Pour la solution de Schwarzschild c'est évidemment le cas du trou noir (entrant) qui est traité. On a posé *G =1* et *c =1*.

La forme de la métrique de Lemaître

L'autre qui s'obtient en utilisant l'équation géodésique radiale établie par Lemaître

$$r=\left(\frac{3}{2}\sqrt{2\mathrm{M}}(\chi-t)\right)^{(2/3)} \quad ,$$

est dynamique et entièrement nouvelle, elle s'écrit :

$$ds^2=dt^2-\left(\frac{4M}{3(t-\chi)}\right)^{(2/3)} d\chi^2-(2M^{2/3})\left(\frac{3(t-\chi)}{2}\right)^{(4/3)}\left(\sin(\theta)^2 d\varphi^2+d\theta^2\right) \quad . \textit{(14-16)}$$

Elle est appelée "forme de Lemaître" [749], et correspond à l'équation du mouvement et c'est manifestement celle qui a ses faveurs. Nous avons posé $c = 1$ comme d'habitude.

Cette forme de métrique est structurellement équivalente à la forme de Robertson-Walker.

Elle est quadratique, diagonale, sa section temporelle vaut dt^2, ce qui correspond au temps propre d'un observateur, dit de Lemaître, à coordonnées spatiales constantes.

La section spatiale dépend du temps comme celle de Robertson-Walker.

Nous voyons que la similitude phénoménologique entre les deux solutions se traduit dans les équations ce qui montre bien qu'elle n'a rien de fortuit.

Pour l'observateur en chute libre radiale la coordonnée χ est constante.

L'observateur de Lemaître est le même que l'observateur de Painlevé que nous avons cité précédemment simplement ils sont représentés dans des systèmes de coordonnées "duaux" l'un de l'autre qui dérivent d'une même forme générique *(14-11)*.

[749] Lemaître n'établit cette forme que pour $\lambda \rightarrow 0$. Le cas avec constante cosmologique quelconque ferait intervenir des intégrales elliptiques et n'est pas traité ici. Bien que cela ne soit pas évident les sections spatiales sont euclidiennes, comme nous l'avons montré. Cette forme semble dynamique bien que la variable dynamique soit en fait $ct - \chi$. Elle est invariante par translation (homogène) si $ct = \chi$, c.a.d à $r = cste$. On voit la similitude avec la forme de Robertson-Walker, les deux sont des formes géodésiques à symétrie sphérique et sont homogènes, mais (14-16) pas directement par rapport à une coordonnée mais à une différence de deux.

Étude comparative croisée des formes de Schwarzschild et Painlevé

À ce stade nous avons acquis suffisamment d'éléments pour procéder à une comparaison de la description du paradoxe de l'horizon dans les deux formes de métriques. Nous avons placé les deux diagrammes sur la même page pour mettre en évidence la différence de représentation.

Les figures *15-1* et *15-2* donnent deux représentations de la même géodésique de Painlevé qui atteint la singularité au temps propre[750] $\tau = T = 5$.

On définit un point de synchronisation initial à $t = t_0 = T = T_0$, où l'observateur de Schwarzschild, statique, et celui de Painlevé, en chute libre, sont présents simultanément, situé très loin de l'horizon à $r = r_0 >> 2M$,[751] pour qu'on puisse assimiler ce point à l'infini.

Sur la figure *15-1,* en coordonnées de Schwarzschild, la géodésique de l'observateur de Painlevé considéré est la courbe en magenta surlignée en trait épais interrompu ($R = 5$)[752] coupant les isochrones de temps propre, de cet observateur de $\tau = T = -1$ à $\tau = T = 5$.

Elle diverge sur l'horizon, comme toutes les courbes sur ce diagramme. Du fait de cette divergence le diagramme, illisible autour de l'horizon, n'est pas utilisable sans calcul, pour déterminer la position de la géodésique de Painlevé par rapport aux isochrones $T = cste$.

Sur la figure *15-2*, en coordonnées de Painlevé, la géodésique de l'observateur de Painlevé est la courbe continue bleue, en trait épais, qui ne diverge pas sur l'horizon. Comme $\tau = T$, la coordonnée T représente le temps propre de l'observateur de Painlevé et la courbe représente directement l'équation géodésique sous la forme $\tau(r) = T(r)$.

On voit qu'on atteint $r = 0$ en un temps fini, si on est parti d'un point $r = r_0$, à distance finie, mais tel que $r_0 >> 2Gm/c^2$, pour que les hypothèses faites soient valides.

Le diagramme montre que lorsque cette géodésique, atteint l'horizon, à un temps propre inférieur à 5, elle a coupé toutes les isochrones de l'observateur de Schwarzschild jusqu'à l'isochrone $t = \infty$. nous en avons représenté quelques-unes.

Le diagramme montre que $T < t$ pour $r < r_0$, en particulier en s'approchant de l'horizon où t tend vers l'infini, alors T reste inférieur à 5, ce qui est bien cohérent avec la phénoménologie qui indique que l'observateur distant statique resté en $r = r_0$ ne voit jamais l'observateur de Painlevé atteindre l'horizon alors que celui-ci l'atteint effectivement en un temps propre fini.

Dans un chapitre précédent, lorsque nous avions utilisé un diagramme, du type de la figure *15-1,* en coordonnées de Schwarzschild pour expliquer le phénomène, il avait fallu recourir au calcul pour vérifier que le temps propre de l'observateur de Painlevé restait fini du fait de la divergence de toutes les courbes sur l'horizon, ce qui rendait le diagramme inutilisable.

Ici, ce n'est pas nécessaire, la figure en coordonnées de Painlevé, beaucoup plus simple, illustre de manière évidente le phénomène paradoxal. Cela traduit la meilleure adéquation de cette forme pour décrire des phénomènes dont le caractère paradoxal n'est lié qu'à un mauvais choix de coordonnées.

---

[750]Rappelons que l'origine du temps propre, dont la valeur est fixée arbitrairement, ici à 5, est le temps propre de l'observateur quand il atteint $r = 0$. Pour comparer les géodésiques des observateurs de Painlevé, on note les temps relatifs à l'arrivée. Sur la géodésique le temps propre diminue quand r augmente.

[751]On pose $G = 1, c = 1$.

[752]Où $2GM/c^2 = 1$. À titre d'illustration, des géodésiques d'autres observateurs sont représentées sur la figure.

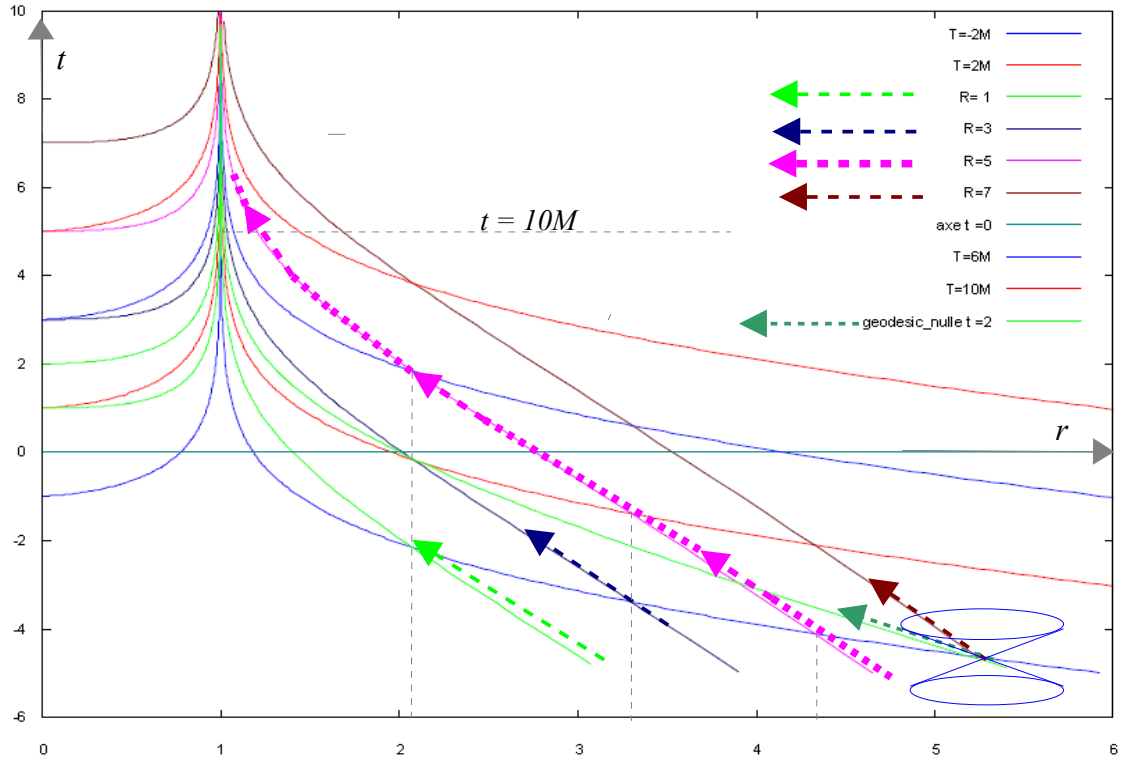


Figure 15-1[753]*. Systèmes de coordonnées représentées dans le plan* ***r, t*** *(Schwarzschild)*

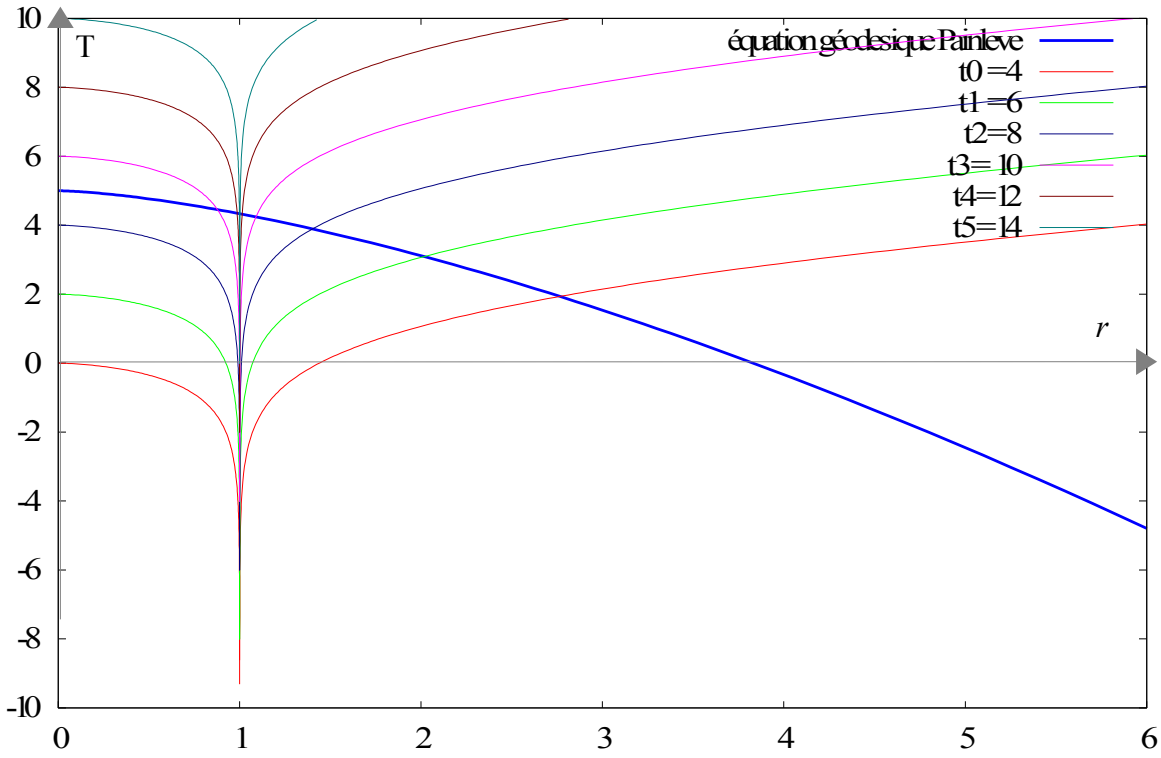


Figure 15-2 [754]***.*** *Toutes les isochrones du temps t d'un observateur de Schwarzschild, viennent "tangenter" l'horizon en r =1. L'isochrone t = + ∞ est une droite verticale à r =1.*

[753]Diagramme réalisé avec le logiciel Maxima. Unités utilisées : *2M = 1, G = 1, c =1.*
[754]Diagramme réalisé avec le logiciel Maxima. Unités utilisées : *2M = 1, G = 1, c =1.*

Espace-temps localement plat et pseudo-tenseur de gravitation

Espace-temps localement plat

La métrique pour décrire la géométrie de l'espace-temps

Dans les chapitres précédents, nous nous sommes principalement attachés à définir la géométrie de l'espace-temps global par une variété.

Nous avons utilisé différentes métriques pour sa description ce qui nous a permis d'en apprécier la pertinence relative.

Ces métriques, que nous venons de rappeler, nous ont servi à calculer certaines hypersurfaces et géodésiques caractéristiques et en déduire une phénoménologie associée.

Nous nous sommes donc intéressés à cerner les éléments caractéristiques de la structure de l'espace-temps lui-même, en particulier ses symétries.

Nous avons indiqué que l'espace-temps était un fibré dont la base était la variété représentant l'espace-temps courbe et la fibre un espace-temps minkowskien dans lequel l'observateur se situe.

Mais, même si nous avons évoqué, à propos du cône de lumière, le couplage de la géométrie globale avec la géométrie locale, c'est intrinsèquement à la structure géométrique propre de la variété, constituant la base de ce fibré, que nous avons consacré l'essentiel de nos analyses.

Quand nous cherchons à valider une théorie en comparant ses prédictions avec le résultat d'expériences ou d'observations, nous faisons intervenir un observateur avec son référentiel attaché, dans lequel il se trouve avec ses instruments et son laboratoire.

Ce référentiel est un espace localement plat. C'est pourquoi quand on parle de physique, ces espaces localement plats sont fondamentaux et de surcroît, incontournables pour interpréter correctement les résultats des observations qui peuvent varier d'un observateur à l'autre.

La métrique comme opérateur pour mettre les observateurs en cohérence

Le chapitre *16*, de la partie scientifique s'attache à décrire un autre aspect associé à la métrique, une fonction d'opérateur.

D'un point de vue physique l'intérêt d'une métrique globale est de permettre de comparer des observations d'événements, faites par différents observateurs dans leurs référentiels locaux associés "plats" ce qui permet d'en garantir la cohérence.

Il faut rappeler que différents observateurs, en différents points d'un espace-temps courbe ne sont pas dans le même espace vectoriel, donc que leur perception de la physique est géométriquement déconnectée.

Tout l'arsenal de la géométrie différentielle utilisée localement, ne vaut que localement.

C'est par la forme de la métrique et ses objets dérivés qu'une connexion entre ces espaces vectoriels différents va être possible, de manière réductrice par rapport à la connexion interne dans un même espace vectoriel, mais permettant tout-de-même de mettre en correspondance des situations et observations entre des observateurs différents, garantissant ainsi la cohérence de la description.

En particulier, la "connexion métrique", via quatre matrices de seize coefficients, décrit les relations géométriques entre deux espaces infiniment voisins plats autrement dit "l'assemblage" entre espaces plats différents.

Rappelons que sans cette métrique globale, l'espace-temps serait une Tour de Babel où les différents observateurs, dans leurs référentiels plats locaux, seraient incapables de donner un sens commun à leurs observations.

Si un espace-temps plat local n'est pas nécessairement géodésique, comme le cas d'un laboratoire ou observatoire terrestre en atteste, bien entendu les espaces-temps localement plats "géodésiques" (tangents à la variété en un point) qui peuvent être munis d'une métrique locale dont la dérivée covariante est nulle, jouissent d'un statut particulier privilégié. D'où l'intérêt de la forme de Painlevé dont l'observateur associé inertiel répond à cette définition.

En, effet, les géodésiques en relativité générale sont l'équivalent des droites en relativité restreinte[755]. C'est cette propriété qui explique pourquoi la forme de Painlevé, qui répond à ces critères, rend compte de façon la plus simple de la phénoménologie de cet espace-temps, comme le chapitre suivant en donnera une description imagée.

Son référentiel, balisé par une base de quatre vecteurs orthonormés, constituée des trois vecteurs spatiaux orthonormés de la forme de métrique de Painlevé complétés par le vecteur temps propre, est un espace-temps plat tangent lui-même encore plus particulier et privilégié[756], car il n'existe pas qu'un seul espace plat tangent à une variété en un point.

Tout cela ne va pas sans donner un certain nombre de définitions et critères d'existence de telles solutions et de méthodes pratiques pour construire des référentiels de ce type

C'est l'objet de la première partie du chapitre *16* de la partie scientifique auquel on peut se reporter pour plus d'information.

[755]Rappelons qu'Einstein indique que c'est ce qui l'a motivé dans sa formulation de la théorie.
[756]Il définit des coordonnées normales de Riemann qu'on peut déterminer par la carte exponentielle..

Une approche non covariante de la relativité générale : le pseudo-tenseur de Landau & Lifchitz d'énergie-impulsion de la gravitation.

Nous verrons que, bien que la relativité générale, telle qu'elle a été conçue par Einstein soit covariante, différentes approches non covariantes ont été tentées avec des succès divers.

Bien qu'elles aient été construites sur des motivations différentes, il ne faudra pas s'étonner de retrouver dans ces approches non covariantes des constituants communs.

Ainsi le tenseur à quatre indices $\lambda^{\mu\nu\rho\sigma}$, essentiel dans cette méthode définie par Landau et Lifchitz (1951), va se retrouver, réduit à ses indices spatiaux, en tant que super-métrique dans les travaux de De Witt sur la quantification de la gravitation.

L'objectif poursuivi par Landau et Lifchitz était de reformuler la théorie de la relativité générale comme une théorie des champs standard dans un espace minkowskien non dynamique.

Pour prendre en compte la contrainte obligée de divergence covariante nulle du tenseur énergie impulsion de la relativité générale qui tenait compte de la courbure de l'espace-temps, dans le cadre de leur théorie il fallait introduire quelque chose qui devait se substituer à cette courbure exprimant sous forme géométrique l'effet de la gravitation.

Il fallait donc modéliser la gravitation comme un champ dans un espace de Minkowski, sachant que, *a contrario* des champs de matière-énergie, ce ne pouvait pas être par un tenseur[757] puisque la gravitation pouvait être annulée par un changement de coordonnées adéquat.

L'idée de modéliser la gravitation par un pseudo-tenseur n'est pas nouvelle, puisque dans sa communication de 1916 Einstein[758] avait déjà utilisé cette méthode pour tenter de la caractériser.

Le pseudo-tenseur qu'il avait défini était différent de celui proposé par Landau et Lifchitz qui possède certaines propriétés qui le font préférer à celui d'Einstein, mais l'idée de tenter de modéliser séparément la gravitation par un champ était déjà présente dans les esprits.

Définition de ce pseudo-tenseur

Avant de calculer ce pseudo-tenseur $t^{\mu\nu}$ d'énergie-impulsion du champ gravitationnel[759] rappelons en d'abord quelques caractéristiques essentielles[760].

L'équation de conservation de la relativité générale $T^{\mu\nu}{}_{;\nu}$, divergence covariante qui tient compte de la courbure, ne satisfait pas, sauf de façon triviale quand $T^{\mu\nu} \equiv 0$[761], l'équation de conservation dans le référentiel tangent local qui s'écrirait $T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0$ (divergence ordinaire).

[757]Un tenseur non nul ne peut pas être annulé par un changement de coordonnées.
[758]Einstein (1916)
[759]C'est ainsi qu'il est appelé par Landau & Lifchitz § 96.
[760]Un pseudo-tenseur ressemble à un tenseur, mais il ne satisfait pas aux lois de transformations des tenseurs lors des changements de coordonnées. C'est un objet géométrique moins structuré et contraint qu'un tenseur.
[761]L'équation de conservation covariante $T^{\mu}{}_{\nu;\mu} = 0$ s'écrit $T^{\mu}{}_{\nu;\mu} = g^{-1/2}\partial_\mu([-g^{1/2}][T^{\mu}{}_{\nu}]) - \frac{1}{2}\partial_\nu(g_{\mu\lambda})T^{\mu\lambda} = 0$. Elle montre que, dans le vide, $\partial_\mu T^{\mu}{}_{\nu}=0$, car $T^{\mu}{}_{\nu} \equiv 0$ (sauf pour la singularité que nous excluons en $r = 0$ où $T^{\mu}{}_{\nu} \equiv\infty$). C'est un cas particulier, mais qui nous intéresse, car il correspond au cas de la solution décrite par la métrique de Painlevé. Pour autant la nullité de ces deux divergences n'implique pas la nullité du pseudo-tenseur.

La relativité générale étant une théorie covariante on peut se demander l'intérêt que présente une divergence non covariante. Ceci peut être motivé par le fait que toutes les mesures physiques, par un observateur, se font dans son référentiel tangent local de géométrie plate.

Pour définir une grandeur qui obéit à cette loi de divergence ordinaire nulle il faut introduire un élément constitutif de la gravitation qui va représenter la différence entre les deux lois.

En vertu du principe d'équivalence, la gravitation (localement nulle dans un référentiel chute libre) ne peut pas être représentée par un tenseur (si c'était le cas on pourrait l'intégrer dans le tenseur énergie-impulsion), mais par un pseudo-tenseur à deux indices $t^{\mu\nu}$ qui se comporte cependant comme un tenseur pour les transformations linéaires de coordonnées, comme son expression à partir des seuls symboles de Christoffel et de la métrique inverse le montre.

La gravitation étant représentée par la géométrie, Landau et Lifchitz furent amenés à construire ce pseudo-tenseur uniquement à partir du tenseur métrique pour qu'il dérive uniquement de la géométrie.

Ils ont souhaité qu'il soit symétrique, pour respecter la conservation du moment angulaire.

Comme par un changement de coordonnées on peut annuler localement l'effet de la gravitation en se plaçant dans un référentiel localement inertiel dont les dérivées premières de la métrique sont nulles, ce pseudo-tenseur qui représente la gravitation devra y être nul[762].

Ceci impose qu'il ne devra comporter que des dérivées premières de la métrique qui sont précisément annulées dans ce référentiel (pas de dérivées secondes).

Mais si cette contrainte est suffisante pour annuler le pseudo-tenseur, elle n'est pas nécessaire, comme nous le verrons, car il existe des coordonnées où il est nul, sans que les dérivées premières de la métrique dans ces coordonnées le soient (contrainte plus faible)[763].

Enfin on impose que la quadri-divergence (non covariante) de sa somme avec le tenseur énergie-impulsion soit nulle, cela nous amène à construire $(T^{\mu\nu}+t^{\mu\nu})$ [764], tel que :

$$\partial_\nu(-g[T^{\mu\nu}+t^{\mu\nu}]) = 0. \qquad (16\text{-}16)$$

Où g est le déterminant de la métrique et $t^{\mu\nu}$ un pseudo-tenseur d'énergie-impulsion de la gravitation. Cette relation n'est pas covariante du fait de la présence de $t^{\mu\nu}$ et des dérivées simples. Notons la position des indices qui privilégie une approche dans le plan tangent.

Landau et Lifchitz ont montré qu'il n'y avait qu'une solution, définie dans le *§ 96* du Landau & Lifchitz, qui satisfaisait toutes ces exigences ($G^{\mu\nu}$ est le tenseur d'Einstein contravariant, $g^{\mu\nu}$ la métrique inverse et G la constante de gravitation), qui s'écrit :

[762]C'est d'ailleurs ainsi qu'il est introduit dans le Landau & Lifchitz (théorie des champs) édition 5 §96.
[763]C'est le cas de la forme de Painlevé, nous tenterons de caractériser à quelle phénoménologie elle correspond.
[764]Les auteurs font observer que la définition d'un pseudo-tenseur satisfaisant cette équation et à la conservation de quantités résultant de son intégration sur l'espace-temps, cf. éq. 96.11 du Landau & Lifchitz, n'est pas unique, (le pseudo-tenseur non symétrique d'Einstein y satisfait) mais que le choix fait qui ne contient que des dérivées premières du tenseur métrique est de plus symétrique ce qui permet la conservation du moment cinétique.

$$t^{\mu\nu} = - \frac{G^{\mu\nu}}{8\pi G} + \frac{\partial_\rho[\partial_\sigma(-g)(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma})}{(-g)16\pi G} .$$

Méthode de construction du pseudo-tenseur de gravitation par Landau et Lifchitz

Pour proposer leur pseudo-tenseur, Landau et Lifchitz vont particulariser une solution.

Leur méthode consiste à calculer le tenseur énergie-impulsion dans des coordonnées localement inertielles[765] (définies dans la partie scientifique correspondant au chapitre) où les dérivées premières du tenseur métrique $g'_{\mu\nu}$ s'annulent, en utilisant l'équation d'Einstein, $R^{\mu\nu} - ½g^{\mu\nu}R = 8\pi GT^{\mu\nu}$, où le membre de gauche se calcule à l'aide de la métrique et de ses dérivées.

Le résultat représente alors le tenseur énergie-impulsion $T'^{\mu\nu}$ qui s'écrit dans ces coordonnées inertielles :

$$16\pi G(-g)\,T'^{\mu\nu} = \partial_\rho[\partial_\sigma(\lambda^{\mu\nu\rho\sigma})]. \qquad (16\text{-}16bis)$$

Nous voyons apparaître un nouveau terme $\partial_\rho[\partial_\sigma(\lambda^{\mu\nu\rho\sigma})]$ qui est simplement le résultat du calcul dans ces coordonnées inertielles[766].

Remarquons que ainsi défini, dans l'espace tangent où toutes les dérivées premières de la métrique sont nulles, le tenseur d'Einstein, égal à un facteur dimensionnel près au tenseur énergie-impulsion, est représenté par sa partie "irréductible" ne comportant que des dérivées secondes de la métrique.

Un tenseur à quatre indices de même forme que celui de Riemann supersymétrique et celui de la super-métrique de Witt apparaît

Ceci nous suggère de définir dans des coordonnées quelconques générales le tenseur

$$\lambda^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{(-g)(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma})}{16\pi G}, \qquad (16\text{-}17)$$

dont la forme est similaire[767] (en permutant les indices) au tenseur de Riemann décrivant l'espace-temps le plus symétrique (*R* est le scalaire de Ricci et *n* la dimension),

[765]Nous utilisons les lettres avec ' pour dénoter les tenseurs dans ces coordonnées inertielles.

[766]Linet B. p.121-122 montre que comme cela consiste à ignorer les dérivées premières, ici nulles, dans le tenseur de Ricci $R^{\mu\nu}$, le tenseur d'Einstein est de la forme $G^{\mu\nu} = ½(-g)^{-1}\partial^2_{\rho\sigma}[(-g)(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma})] + .$, les.. désignant $t^{\mu\nu}$.

[767]Attention (16-18) est un tenseur de Riemann que pour certains espaces à symétrie maximum. Pour une métrique quelconque d'un espace-temps quelconque, le tenseur (16-18) n'est pas le tenseur de Riemann associé. Comme l'espace-temps que nous étudions n'est pas à symétrie maximum, les relations entre (16-17) et (16-18), si on utilise la même métrique dans les deux, ne valent que pour des propriétés résultant des symétries (20 composantes indépendantes). On peut ajouter d'autres contraintes (ici tenseur de Ricci nul) mais elles n'impliquent pas que la forme (16-17) ne comporte que 10 composantes indépendantes, car ce n'est pas un tenseur de Riemann.

$$R^{\mu\nu\rho\sigma} = R\frac{(g^{\mu\rho}.g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho})}{n(n-1)} = \frac{(16\pi G.R)}{(-g)n(n-1)}\lambda^{\mu\rho\sigma\nu}, \qquad (16\text{-}18)$$

qui est représentatif des espaces *4D* à symétrie maximum où la courbure spatio-temporelle est constante sur la variété, ce qui n'est vérifié que pour les espaces-temps de Minkowski, De Sitter et anti-De Sitter.

Donc *(16-17)* et *(16-18)* apparaissent être des formes remarquables dans ce type d'espace-temps, l'un squelette de la courbure décrite par le tenseur de Riemann dont on dérive d'autres tenseurs par contraction (Ricci, Scalaire de Ricci), l'autre générateur d'une deuxième entité indépendante : le pseudo-tenseur énergie-impulsion de la matière et du champ gravitationnel.

La forme compliquée du pseudo-tenseur dans le cas général.

Revenons à la relation (*16-16bis*). Le passage en coordonnées quelconques fait que cette relation (*16-16bis*) n'est plus vérifiée.

On introduit alors le pseudo-tenseur de gravitation pour tenir compte de la rupture d'égalité et la rétablir :[768]

$$(-g)(T^{\mu\nu}+t^{\mu\nu}) = \partial_\rho[\partial_\sigma(\lambda^{\mu\nu\rho\sigma})]. \qquad (16\text{-}19)$$

On rappelle que le pseudo-tenseur est nul par construction dans le référentiel inertiel.

Cette équation *(16-19)* est valide en coordonnées quelconques. Si on remplace $T^{\mu\nu}$ par sa valeur déduite de l'équation d'Einstein, $R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = 8\pi G\, T^{\mu\nu}$, on obtient finalement :

$$t^{\mu\nu} = -\frac{G^{\mu\nu}}{8\pi G} + \frac{\partial_\rho[\partial_\sigma(-g)\,(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma})}{(-g)16\pi G}. \qquad (16\text{-}20bis)$$

Sachant que $R^{\mu\nu}$, $g^{\mu\nu}$, R ont déjà des valeurs compliquées, l'équation *(16-20bis)* montre que la valeur du pseudo-tenseur gravitation s'exprime de façon assez complexe.

Attention, si la propriété de nullité de ce pseudo-tenseur, commune à la forme de Painlevé (forme globale) et à la forme locale attachée au référentiel inertiel de Lorentz dont les coordonnées, comme nous l'avons indiqué ne dérivent pas de celles d'une forme globale, est malgré leur différence de nature, significative de propriétés communes qu'il conviendra de caractériser pour trouver la solution au problème, nous voyons que dans un cas cela résulte de la nullité de tous les termes alors que dans l'autre c'est l'expression globale qui est nulle, ce qui est une condition beaucoup moins forte.

Ceci corrobore la différence de nature entre les géométries décrites par les formes locales et globales.

[768] Le tenseur énergie-impulsion n'est pas défini dans les mêmes coordonnées dans *(16-16bis)* et *(16-19)*.

Par ailleurs, s'il est facile de calculer ce pseudo-tenseur quand on donne la métrique et vérifier s'il est nul ou non, exprimer analytiquement la condition que doit satisfaire la forme de la métrique pour que ce pseudo-tenseur soit identiquement nul nécessite la résolution d'un système d'équations différentielles, résolution qui ne paraît pas évidente *a priori*.

Cas particulier de ce pseudo-tenseur quand le tenseur énergie-impulsion est nul

Dans le cas où $T^{\mu\nu} \equiv 0$, l'équation *(16-16)* montre que l'expression entre crochets se réduit à $t^{\mu\nu}$ qui peut alors se calculer de façon beaucoup plus simple par double dérivation non covariante d'un tenseur générique de rang quatre *(16-17),* appelé $\lambda^{\mu\nu\rho\sigma}$ dans l'article (ici on pose $c = 1$), construit à partir des seuls produits de la métrique :

$$(-g)(t^{\mu\nu}) = \partial_\rho[\partial_\sigma(\lambda^{\mu\nu\rho\sigma})] \qquad (16\text{-}21)$$

C'est ce cas que nous allons étudier puisque nous considérons une solution dans le vide.

Il peut sembler étonnant de s'intéresser au pseudo-tenseur dans ce cas puisque comme le tenseur énergie-impulsion est nul, nous sommes dans le cas où la divergence covariante et non covariante sont égales et que c'était parce qu'elles étaient différentes dans le cas général qu'on avait introduit le pseudo-tenseur.

Mais, que le tenseur énergie-impulsion soit nul, ne veut pas dire que la gravitation est nulle.

Le pseudo-tenseur est parfaitement défini dans ce cas, il caractérise le champ gravitationnel et rien n'impose qu'il soit nul comme nous allons le voir.

Calcul du pseudo-tenseur de Landau-Lifchitz dans différentes formes de métrique

Le calcul du pseudo-tenseur, fait dans les formes de métrique suivantes,

Painlevé en coordonnées cartésiennes,

Painlevé en coordonnées sphériques,

Painlevé généralisé avec boost en coordonnées cartésiennes,

Painlevé généralisé avec boost en coordonnées sphériques,

Schwarzschild en coordonnées cartésiennes,

Schwarzschild en coordonnées sphériques,

Lemaître en coordonnées sphériques,

Isotrope en coordonnées cartésiennes,

Isotrope en coordonnées sphériques,

Finkelstein-Eddington en coordonnées cartésiennes,

Finkelstein-Eddington en coordonnées sphériques,

Kerr-Schild en coordonnées cartésiennes,

Kerr-Schild en coordonnées sphériques,

montre que les deux seuls cas où le pseudo-tenseur de Landau-Lifchitz est nul sont les formes de Painlevé et de Kerr-Schild en coordonnées cartésiennes.

La partie scientifique montre que ces deux formes partagent la caractéristique commune d'avoir une forme de métrique très particulière.

Chacune de ces formes de métrique est la somme d'une métrique plate (de Minkowski) et du produit tensoriel d'un vecteur radial entrant par lui-même, propriété structurelle qui conditionne cette phénoménologie.

Dans le cas de la forme de Painlevé ce vecteur radial est de type temps, c'est celui qui correspond à la quadri-vitesse de l'observateur de Painlevé.

Dans le cas de la forme de Kerr-Schild ce vecteur radial entrant est le vecteur principal de type nul donné par la classification de Petrov-Pirani.

Nous verrons que cela est particulièrement manifeste dans la forme de métrique inverse, qui caractérise totalement le pseudo-tenseur dans le cas où le tenseur énergie-impulsion est nul.

Le fait que la nullité du pseudo-tenseur se produise uniquement dans des formes cartésiennes est lié à la régularité de ce type de coordonnées et à la valeur unitaire du déterminant[769] qui intervient en facteur et par ses dérivées dans la définition du pseudo-tenseur.

Ce point très important fait l'objet d'un développement particulier dans la partie scientifique.

[769]Les coordonnées sphériques sont singulières pour $r = 0$ et leur déterminant est différent de -1.

Phénoménologie caractérisée par la nullité du pseudo-tenseur de Landau-Lifchitz

Calcul de la quadri-impulsion matière-gravitation du trou noir dans différentes formes

Landau et Lifchitz définissent un quadrivecteur P^{μ} qu'ils appellent la quadri-impulsion de la matière et de la gravitation dans le cadre de leur théorie.

Le chapitre *16* de la partie scientifique montre que, en utilisant ce quadrivecteur dans le cas particulier que nous considérons, on trouve que l'énergie du trou noir est nulle dans la forme cartésienne de Painlevé.

Comme cette énergie représente la masse gravitationnelle du trou noir, on en déduit, que dans ce formalisme, cette masse du trou noir est nulle.

Cela peut sembler paradoxal et contradictoire avec ce que donne un autre calcul fait dans d'autres circonstances, utilisant la forme de métrique de Schwarzschild au moyen de l'intégrale de Komar, méthode largement utilisée qui trouve une masse égale à M, ce que semble-t-il, on est en droit d'attendre pour cette masse centrale et pour son énergie.

En fait cela n'a rien de contradictoire, car la gravitation étant représentée par un pseudo-tenseur elle peut parfaitement être nulle dans certains référentiels et non nulle dans d'autres.

C'est d'ailleurs ce que d'autres calculs faits pour le même problème par d'autres méthodes, ADM par exemple, toutes aussi respectables, confirment.

Dans ces problèmes, la gravitation engendrée par la masse active qui génère le champ est évaluée en termes de flux traversant une surface, d'une grandeur caractérisant la gravitation, différente selon la méthode utilisée, ce flux étant évalué dans la forme de métrique qu'on utilise[770].

Ce flux étant conservatif, on peut le calculer sur n'importe quelle surface entourant la masse centrale.

On positionne cette surface à l'infini où la géométrie devient minkowskienne et où de type de surface enveloppant la masse centrale peut être la surface d'une sphère ordinaire, ce qui permet de calculer simplement, par passage à la limite, le flux traversant cette sphère

En métrique de Schwarzschild, où l'observateur associé à la forme de métrique est statique et ressent donc la gravitation, car pour rester statique dans un champ gravitationnel il faut être accéléré sinon on tombe dans le champ gravitationnel vers le centre, un flux gravitationnel le traverse. Le flux gravitationnel étant non nul, il ne peut être généré que par une masse non nulle.

Mais pour un observateur co-mobile qui ne ressent aucune force gravitationnelle (on néglige l'effet de marée) aucun flux ne traverse la surface qui lui est associée, donc pour lui, il n'y a pas de masse centrale générant le flux.

Le chapitre *16* de la partie scientifique expose ces éléments de manière plus détaillée et circonstanciée. Ici nous nous sommes attachés à en expliciter la phénoménologie.

[770]L'observateur associé est celui de Painlevé, dont la géodésique est orthogonale, comme les lignes de flux gravitationnel, à la surface spatiale de cette sphère à l'infini. Cela est manifeste dans l'expression (une intégrale) du calcul de la masse gravitationnelle dans le formalisme ADM.

Un modèle où la forme de Painlevé révèle un caractère pseudo-minkowskien

Introduction

Nous avions exposé l'approche de Lemaître considérant l'espace-temps de la solution de Schwarzschild comme un espace-temps cosmologique en "expansion"[771], conception élégante qui rend bien compte de la phénoménologie, que nous avions largement promue.

Cet espace-temps étant vide, vérifier qu'il est en expansion nécessite des marqueurs[772] (particules de test avec observateurs fictifs) pour le matérialiser. On n'observe pas le phénomène d'expansion du vide lui-même, mais ses effets sur des objets rajoutés, n'intervenant pas dans la dynamique du système qu'on laisse livrés à eux-mêmes pour qu'ils suivent les géodésiques de cet espace-temps vide.

Ceci caractérise une expansion intrinsèque, car ce qu'on observe, c'est le mouvement relatif de ces marqueurs, nul besoin d'une référence absolue. Tout observateur associé à une particule verrait les autres particules et en particulier ses voisines se déplacer par rapport à lui, ce qui est bien en phase avec le concept covariant de congruence de géodésiques que nous avions analysé.

En cela, le modèle présenté dans ce chapitre est particulièrement pertinent, puisqu'il se place de ce point de vue.

Parler d'expansion du vide peut être critiquable, car ce qu'on observe ce sont les effets et tout autre explication qui entraînerait les mêmes effets serait tout autant acceptable.

Simplement cette explication se raccorde, à la limite, parfaitement comme l'exposé de Lemaître le revendique, avec le modèle cosmologique où l'expansion est en général bien acceptée.

La critique est elle-même contestable, car en mécanique quantique la notion de vide se distingue bien de la notion d'absence de toute chose (le vide n'est pas le néant qui n'aurait aucune propriété), il possède des propriétés multiples qu'on peut caractériser.

Même en restant au niveau d'une théorie classique non quantifiée, le vide de cet espace-temps a une structure caractérisée par le tenseur de Weyl comme nous l'avons vu. Il se différencie d'autres vides, il est clair que ce n'est pas le néant qui n'aurait aucun attribut.

De façon générale, l'analyse des expériences et observations pour qualifier des phénomènes physiques auxquels on attribue une certaine « réalité physique » montre que, généralement, ce sont les effets du phénomène qu'on appréhende et pas l'objet ou le système d'objets, eux-mêmes, générant le phénomène.

En physique, l'intérêt qu'on porte à un objet, à un système n'est pas de savoir de qu'il est, mais comment il se comporte quand on interagit avec lui d'une certaine manière.

Cet aspect des choses est particulièrement manifeste en physique quantique où quand on veut appréhender les constituants ultimes de la physique on voit qu'on en est réduit à les désigner par des vocables tels que « quarks » auxquels on attribue des « couleurs », des « saveurs », des « charmes ».

[771] En expansion négative pour la région qu'on décrit usuellement mais aussi stationnaire.
[772] Sans marqueurs, on peut dire ce que l'on veut, comme c'est du vide on ne peut rien vérifier.

En fait, on a reconnu différentes classes de caractères ayant eux-mêmes différents attributs, à travers des phénomènes, qu'on associe à des objets réputés intervenir dans ces phénomènes, qu'on est réduit à dénombrer, à identifier, à classer et dont, dans le meilleur des cas, on peut extraire des relations de symétries (au sens large) ce qui est indispensable pour en déduire des lois.

Il est symptomatique, à cet égard, de constater que le fondement des théories modernes de jauge reposant sur des symétries est bien conforme à ce schéma.

Ce débat n'est certainement pas clos, mais il avait pour but de montrer que la conceptualisation, d'un vide dynamique par un fluide en mouvement relatif, n'est pas plus extravagante qu'une autre.

Quoi qu'il en soit, ce concept de vide, modélisé par un fluide (incompressible dans ce modèle) en mouvement conditionnant le comportement des objets s'y trouvant, est porté à son paroxysme dans proposition puisque, pour l'imager, les auteurs le comparent à une rivière.

Qui plus est, la description de la phénoménologie se fera du point de vue de l'observateur dans cette rivière, en établissant les équations locales que l'observateur local sera en mesure de vérifier.

C'est une nouvelle rupture avec les paradigmes en vigueur où on cherche, en général, à avoir une vue synthétique de l'espace-temps pour en déduire le comportement local (approche top-down), où en fait on essaie d'avoir une vision en se projetant intellectuellement à l'extérieur du système, ce que notre esprit permet en réalisant un modèle, objet caractéristique de l'espace-temps, qu'on peut alors considérer dans son intégralité.

Cette approche, depuis l'intérieur du système qui rappelons le correspond à la situation physique dans laquelle nous nous trouvons, à l'inverse de la précédente, va se révéler très féconde précisément à travers la représentation par la forme de Painlevé.

Elle va permettre de mettre en évidence un certain nombre propriétés qui à travers cette forme vont dénoter une structure très simple et très surprenante de cet univers.

Description du modèle

Dans ce chapitre une manière de conceptualiser les trous noirs, que les auteurs du modèle[773] ont appelé « le modèle de la rivière » où on matérialise cet espace-temps particulier, de façon imagée, en le considérant comme un fluide incompressible s'écoulant dans un espace (opératoire) euclidien, est présentée.

L'objet de ce modèle est d'offrir une image intuitive des trous noirs, dont les éléments de base sont suffisamment simples pour les rendre conceptuellement accessibles à non spécialistes.

Dans ce modèle, l'espace lui-même coule comme un fluide incompressible dans un espace de fond plat, tandis que les objets dans le fluide se déplacent conformément aux règles de la relativité restreinte.

[773]Hamilton A. & Lisle J. (2006). Cette introduction fait de larges emprunts à leur article.

Pour un trou noir de Schwarzschild la rivière coule radialement vers le trou noir à la vitesse newtonienne de libération, atteignant la vitesse de la lumière à l'horizon.

Sous l'horizon la rivière coule à une vitesse supérieure à la vitesse de la lumière[774], entraînant tout sur son passage.

Le modèle illustre pourquoi, sous l'horizon, la lumière ne peut pas s'échapper des trous noirs et pourquoi une étoile ne peut pas être statique sous l'horizon.

Il illustre comment un objet étendu peut être étiré longitudinalement par l'accélération interne de la rivière et compressé transversalement par la convergence du flot.

Cela explique pourquoi un objet qui tombe vers l'horizon du trou noir apparaît à un observateur extérieur se geler et la lumière qu'il émet de plus en plus décalée vers le rouge lors de son approche de l'horizon.

Plus l'objet approche de l'horizon plus les photons perdent leur énergie pour remonter un « courant » de plus en plus rapide pour tenter d'atteindre l'observateur extérieur.

Bien que de motivation pédagogique, le modèle est développé formellement afin de montrer qu'il est parfaitement conforme aux lois physiques et à la relativité restreinte et générale.

La dynamique des objets[775] est donc décrite dans cet espace-temps tangent minkowskien "localement" inertiel (référentiel de Lorentz local[776]), la "rivière" ne fournissant qu'un paramètre "d'entraînement" caractérisé par un vecteur spatial 3D euclidien, appelé "vitesse de la rivière"[777], défini en chaque point de l'espace de la solution de Schwarzschild en coordonnées de Painlevé.

Cela amène à définir une autre approche formelle pour établir des équations du mouvement, car comme les lois relativistes ne s'appliquent que dans le fluide, pour respecter ces lois ces équations vont être établies localement, dans le référentiel attaché à un observateur co-mobile du mouvement du fluide espace-temps.[778]

Nous savons qu'un tel observateur existe et que c'est précisément celui que nous avons appelé « l'observateur de Painlevé ».

Son référentiel local sera défini par quatre vecteurs orthonormés au sens de la relativité restreinte, à savoir les trois vecteurs spatiaux orthonormés, de la section spatiale euclidienne de la forme de la métrique de Painlevé, et le vecteur de type temps tangent à sa ligne d'univers géodésique, normé et orthogonal à cette section spatiale.

Nous utiliserons les outils d'analyses spécifiques à cette méthode (coefficient de rotation de Ricci au lieu des symboles de Christoffel par exemple) qui sont légèrement différents de ceux utilisés lorsqu'on travaille dans les coordonnées globales mais qui sont liés par les relations entre la métrique globale et cette base locale.

---

[774]Vitesse de coordonnées, cela sera précisé plus loin.

[775]On utilise uniquement le temps propre de cet espace tangent minkowskien pour toutes les opérations, en particulier les dérivées.

[776]Le référentiel de Lorentz local s'obtient par un changement de coordonnées globales qui annule les dérivées premières de la métrique au point local considéré. Nous le désignons aussi sous le vocable "base tétradique".

[777] Terme discutable, car il supposerait conceptuellement une notion de temps, une vitesse étant une dérivée par rapport au temps (newtonien dans ce cas), alors que le vecteur est défini dans un espace vectoriel, spatial et que le temps newtonien n'est pas considéré dans les opérations. À la rigueur ce pourrait être un concept de temps newtonien absolu fossile puisque rien ne change.

[778]Cette approche rappelle celle des astronautes dans leur vaisseau observant le mouvement géodésique d'une boule de poussière. Ils sont dans leur référentiel local et ils peuvent exprimer le mouvement géodésique des différentes poussières sous l'effet du gradient du champ dans ce référentiel.

Il faut en effet repérer le référentiel local dans les coordonnées globales. Comme la base locale est dans un espace vectoriel, ceci se fait simplement en décrivant les quatre vecteurs de base orthonormés du référentiel local dans la base, en général non orthonormée, constituée par les vecteurs localement tangents aux coordonnées globales ou vice-versa.

Cette description est réalisée par une matrice (*4x4*), chacun des quatre vecteurs d'une base ayant quatre composantes dans l'autre, appelé respectivement tétrade inverse et tétrade.

Compte tenu de la structure de la forme de Painlevé, dont la section spatiale est euclidienne, ceci permet, après alignement des bases à l'infini (où l'espace-temps physique est minkowskien) de conserver cet alignement pour les vecteurs spatiaux. La seule différence réside dans la composante temporelle qui ne va pas rester orthogonale aux autres vecteurs de sa base pour les coordonnées de Painlevé, comme sa forme de métrique en témoigne.

Cependant la relation entre les deux référentiels va être très simple, ce qui va conduire à des simplifications considérables dans les calculs entraînant la propriété fondamentale qui a été signalée, à savoir que la connexion qui régit l'équation géodésique s'exprime uniquement à partir de gradients spatiaux dans l'espace de fond « euclidien », défini par la section spatiale de la forme de Painlevé, avec toutes les simplifications que cela implique.

Au-delà de l'aspect pédagogique que cela peut avoir, les particularités de cet espace-temps, spécifiquement dans les coordonnées de Painlevé, conduisent à certaines simplifications et à l'émergence d'un concept d'espace de fond plat qui ne sont pas triviales, comme l'article le montre.

Les paramètres caractérisant le mouvement géodésique, décrit dans la base lorentzienne locale, ne vont dépendre que du vecteur d'entraînement [779](purement spatial), ce qui justifie les revendications du modèle : le mouvement est bien caractérisé par le produit, au sens formel, des caractéristiques euclidiennes de la "rivière" par celles d'un mouvement minkowskien dans la rivière.

Le chapitre *17* de la partie scientifique analyse, en s'attachant à expliciter et compléter les éléments qui contribuent à éclairer les arguments développés dans notre projet, les propriétés structurelles qui autorisent un tel niveau de simplification, qui ne s'appliquent qu'à certains types d'espace-temps[780].

Ces propriétés ne sont mises en exergue que par des formes particulières de métrique, spécifiquement celle de Painlevé pour l'espace-temps généré par un corps unique à symétrie sphérique, à l'extérieur de ce corps.

Cette approche atteste du regain d'intérêt que connaît actuellement la forme de la métrique de Painlevé qui s'était déjà manifesté par la publication de plusieurs articles récents[781].

En conséquence, le modèle de la "rivière"[782] définit une base minkowskienne de vecteurs $\boldsymbol{\gamma_m}$ (balisant le référentiel de Lorentz local) et la base globale de vecteurs $\boldsymbol{g_\mu}$ de l'espace-temps courbe défini dans les coordonnées de la forme de Painlevé**.**

[779]Et de ses dérivées purement spatiales (gradients).

[780]Nous avons souligné au chapitre *3* l'importance la structure conforme de ce type d'espace-temps révélée par Painlevé. En plus de ce cas, les auteurs montrent que la méthode s'applique à la solution de Kerr. (Corps unique).

[781]Martel K. & Poisson E. (2000), Doran C. (2000).

[782]A.Hamilton & J. Lisle, 2006. Les équations ont été renumérotées et la présentation est différente.

Bien que ce modèle fasse appel à un espace newtonien, il est radicalement différent du modèle Newtonien envisagé par Michell (1784) et par Laplace (1799).[783]

L'image d'un espace s'écoulant comme une rivière dans un trou noir peut troubler certains par son caractère « matériel » rappelant les théories incorporant un éther.

Pourtant ce caractère matériel n'est pas plus substantiel que dans l'image cosmologique familière d'un espace en expansion.[784]

Relation avec d'autres modélisations

Dans le formalisme ADM (1962), que nous exposerons au chapitre suivant, on considère des observateurs repères appelés « FIDO's » dont les lignes d'univers sont orthogonales aux hypersurfaces définies, à temps constant, ce qui est le cas des observateurs de Painlevé comme nous l'avons montré.

Le vecteur d'entraînement[785] dans le formalisme ADM est précisément la vitesse de ces FIDO's par rapport aux coordonnées spatiales.

Dans un article fructueux bien que initialement passé inaperçu, Unruh (1981) a souligné que les équations qui régissent la propagation des ondes sonores dans un fluide dont la pression est une fonction de la densité et sans rotation sont les mêmes que celles d'un champ scalaire sans masse se propageant dans une certaine métrique de la relativité générale.

Unruh a montré que ceci impliquait que les horizons sonores devraient émettre un rayonnement de Hawking de la même manière que les horizons des trous noirs, et il indiqua que cette analogie avec ces « trous muets » qui pourrait être testés en laboratoire pourrait permettre de valider l'hypothèse du rayonnement de Hawking.

L'article de Unruh a ouvert la voie à une activité florissante traitant de la « gravitation analogique », dans laquelle un fluide qui s'écoule conformément à des champs de vitesse spécifiés simule un espace-temps de la relativité générale.

L'objectif premier des travaux sur la gravitation analogique est d'essayer de comprendre et d'expérimenter dans un futur pas trop éloigné la gravité quantique via son analogue sonique.

En général on considère que l'analogie avec les fluides et rivière ne s'applique qu'à une classe limitée d'espaces temps de la relativité générale, ceux qui, à un facteur « conforme » près, peuvent s'exprimer en termes de vecteurs d'entraînement (la vitesse de la rivière) dans un espace de fond plat.

Le vecteur d'entraînement à trois dimensions et le facteur conforme offrent 4 degrés de liberté, alors qu'au moins 6 degrés de liberté sont requis pour spécifier un espace-temps quelconque (le tenseur métrique a 10 composantes, mais seulement 6 sont indépendantes du fait de la possibilité de transformation de coordonnées sur les 4 dimensions).

[783]Que nous avons mentionné à propos des astres « obscurs » aussi appelé astres « occlus ».
[784]Voir aussi l'article précurseur de Lemaître (1932) [43] comme nous l'avons déjà signalé.
[785]Shift-vector en anglais.

En corollaire, on pensait qu'une géométrie relativiste générale, pour admettre un équivalent fluidique devait avoir, à un facteur conforme près, des sections spatiales euclidiennes, à temps constant, comme c'est le cas dans la forme de la métrique de Painlevé.

Caractères newtoniens invoqués

Ceci conduit à attribuer une signification différente à ce qu'on a appelé l'espace de fond plat dans lequel la rivière s'écoule.

C'est l'équation, établie dans l'article, qui stipule que les coefficients de connexion, exprimés dans un référentiel inertiel local co-mobile du flot de la rivière sont égaux au gradient ordinaire (non covariant) du champ[786] de la rivière qui va décrire mathématiquement la caractéristique essentielle du modèle de la rivière.

Le fait que les coefficients de connexion exprimés dans la base tétradique soient égaux à un gradient ordinaire[787] définit ce que nous voulons dire par espace de fond plat dans le modèle de la rivière. Cette caractéristique semble être une propriété particulière des trous noirs stationnaires.

L'exposé mathématique formel, du chapitre *17* de la partie scientifique, qui s'en tient à l'essentiel, pour comprendre les caractéristiques remarquables évoquées, même réduit aux parties concernées par notre propos, étant assez technique, la plupart des calculs ont été reportés dans l'annexe *3*, chapitre *17*.

Cet exposé mathématique ne considère que les trous noirs à symétrie sphérique, et s'attache à justifier l'hypothèse que la forme de la métrique de Painlevé peut être interprétée comme représentant une rivière d'espace tombant radialement vers le centre à la vitesse β.

Il démontre deux caractéristiques qui sont l'essence du modèle de la rivière pour les trous noirs sphériques.

D'une part que la rivière d'espace peut être considérée comme se déplaçant de manière galiléenne dans un espace de fond galiléen[788].

D'autre part que lorsqu'un objet en chute libre se déplace dans le flot de la rivière d'espace, sa quadri-vitesse, ou plus généralement n'importe quel quadrivecteur attaché à l'objet en chute

[786]Le champ de la rivière est un « bivecteur » défini à cette occasion par cette équation. L'application des équations génériques définissant le mouvement géodésique dans ce modèle, dans cette forme de Doran, conduit à des expressions qui se simplifient considérablement, ce qui reste conduisant à une équation qui est celle du gradient d'une expression. C'est évidemment l'existence d'un tel champ, ce qui n'est pas trivial, (divine surprise.) qui permet de caractériser la rivière, qui est la caractéristique essentielle du modèle.

[787]Notons que la quadri-vitesse (covariante) d'un observateur de Painlevé, en coordonnées de Schwarzschild (t, r), est le gradient d'une fonction scalaire t_{ff} de t et r (t_{ff} est le temps propre de l'observateur de Painlevé). La symétrie sphérique de la solution permet de définir un champ scalaire spatio-temporel t_{ff} (t,r) qui définit complètement cet espace-temps.

[788]Non physique, comme cela sera explicité plus loin.

libre peut être considéré comme subissant une suite de boosts infinitésimaux de Lorentz induits par la variation de vitesse du flot d'un endroit à un autre.

Comme la rivière coule selon un mode galiléen, il est possible, et à l'intérieur de l'horizon c'est le cas, de se déplacer plus vite que la lumière par rapport au fond euclidien, sans que cela viole les postulats de la relativité restreinte. En effet, les objets dans la rivière se meuvent conformément aux lois de la relativité restreinte et ne peuvent donc pas se déplacer plus vite que la lumière par rapport au flot[789] qui représente l'espace physique alors que l'espace de fond euclidien est opératoire et fictif (non accessible à l'expérience).

Qu'entend-on vraiment par « espace de fond plat » ?

Qu'entendons-nous par « plat » dans ce contexte. C'est l'équation, qui stipule que le coefficient de connexion (coefficient de rotation de Ricci dans le formalisme local) est égal au gradient spatial « plat » du champ de la rivière, qui est la clé de voûte du modèle.

Le fait que le gradient soit une dérivée partielle ordinaire en coordonnées cartésiennes justifie qu'on qualifie de plat l'espace de fond.

Cette équation acquiert un sens physique, car elle se prolonge dans l'équation du mouvement (équation géodésique dans la base locale) des objets évoluant dans la rivière.

L'équation du mouvement donne une image physique des objets, se déplaçant dans le fluide espace-temps, ballottés au gré de la variation des courants ce qui se traduit par des boosts de Lorentz comme nous l'avons décrit.

Dire que l'espace-temps de fond est plat dans le modèle de la rivière ne signifie pas que sa métrique $g_{\mu\nu}$ est plate.[790]

Les règles et horloges immergées dans la rivière d'espace ne mesurent pas des distances et des temps dans l'espace de fond, mais les distances et des temps relativement au flot lui-même étiré et tordu par les effets de marée.

La présence de ces effets de marée est la signature d'une courbure, aussi on comprend pourquoi la métrique mesurée par les règles et les horloges, va être non plate.[791]

Soulignons que l'espace de fond plat, tel que nous l'avons défini, n'est pas observable. C'est une construction mathématique purement formelle dont le seul but est de faire émerger une structure originale et utile.

[789]On attribue un caractère physique à ce flot, puisque les observateurs, la lumière et les particules réelles se déplacent par rapport à lui selon les lois de la relativité restreinte.
[790]Ce qui n'est pas le cas, la métrique de Kerr n'est pas plate.
[791]C'est une autre manière d'incorporer l'information de courbure.

Une approche hamiltonienne non covariante : le formalisme ADM

Introduction

La formulation géométrique, atypique, de la relativité générale fait figure d'exception dans le paysage de la physique moderne, où les théories sont formulées essentiellement dans le cadre de la théorie des champs.

Cela a interpellé bon nombre de physiciens qui ont tenté d'en proposer une formulation dans ce cadre.

Nous avons vu que Landau et Lifchitz s'y étaient essayés, dans un cadre limité, non dénué d'intérêt comme le recours que nous avons fait au pseudo-tenseur qu'ils avaient défini en atteste.

Non seulement cela a permis de promouvoir la forme de Painlevé qui avait la particularité d'avoir un pseudo-tenseur nul, un peu à contre courant de ce que la relativité revendique, mais cela a aussi permis de montrer comment cela se manifeste dans ce formalisme et comment cela peut s'expliquer physiquement. À ce titre le formalisme ADM confirmera cette analyse.

Pour autant cette exigence de covariance n'est pas un carcan dont on ne peut pas se libérer et toute approche qui permet d'avoir une compréhension plus claire de l'espace-temps n'est pas interdite, à condition de ne pas faire de généralisations hâtives et hasardeuses.

L'intérêt d'une formulation conforme à la théorie des champs s'est précisé, d'une part quand les progrès du calcul numérique ont permis d'envisager des solutions numériques pour des problèmes sans solutions analytiques et d'autre part quand on a commencé à s'intéresser à la quantification de la théorie d'Einstein, en vue de bâtir une théorie quantique de la gravitation.

En l'état, la relativité générale n'est pas renormalisable, aussi les méthodes de quantification, utilisées avec succès dans d'autres théories, sont inapplicables.

Cela a motivé des travaux visant à l'exprimer sous une forme hamiltonienne conformément à la théorie des champs, travaux dont nous donnons un exemple, l'approche ADM[792], que nous allons étudier sous un aspect qui précisément abonde dans le sens que nous défendons et qui n'est pas sans lien avec le modèle de la rivière que nous avons présenté, en particulier par le rôle joué par le vecteur "d'entraînement"[793].

Description des fondements de la méthode ADM

Dans cette approche, pour résoudre (numériquement) l'équation d'Einstein (en fait le système de dix équations non linéaires aux dérivées partielles du second ordre) dans le cas où une solution analytique directe (ce qui est rare, car cela suppose un haut niveau de symétrie qui permet de simplifier le système) n'est pas possible, on procède à un feuilletage de l'espace-temps en hypersurfaces de type espace, la variable dynamique étant alors la coordonnée temporelle.

Cela brise la covariance de la théorie où aucune coordonnée[794] ne joue un rôle privilégié, puisque dans ce cas la structure qu'on construit est de type *3D+1D* au lieu de *4D*.

[792]Voir Arnowitt R. Deser S. Misner C.W (2004) pour l'exposé de la méthode et Lehner L. (2001) pour des compléments.

[793]"Shift-vector" en anglais, dont la nature est explicite dans l'approche ADM

La méthode, développée formellement par les auteurs, garantit que, sous réserve de respecter certaines conditions discutées en détail dans le document, on obtient le résultat attendu.

À partir d'une hypersurface spatiale initiale nous allons déduire, pas à pas, par itération les hypersurfaces voisines en fonction de la variation de la coordonnée temporelle.

L'assemblage de toutes ces hypersurfaces va constituer un mille-feuille représentatif de l'espace-temps. Dans l'annexe *9*, nous indiquons le principe général de la méthode.

Nous nous référerons en particulier, au vecteur n^{μ} qui est localement le vecteur unitaire de type temps normal (orthogonal et normé) à l'hypersurface spatiale (géodésique dans la forme de Painlevé), au scalaire N et au vecteur spatial N^{i} qui sont respectivement le pas temporel (lapse) qui règle l'empilage des feuilles voisines spatiales et les composantes du vecteur d'entraînement *3D* qui règle l'ajustement spatial des feuilles voisines entre elles.

Comparaison générale du formalisme ADM et du modèle de la rivière

L'approche ADM[795] présente des similitudes avec le modèle de la rivière, en particulier par le rôle joué par le "vecteur d'entraînement"[796].

Mais, si des similitudes existent, on peut noter une différence fondamentale d'approche entre le modèle de la rivière et la méthode ADM.

La méthode ADM fait un feuilletage *3D+1D* alors que la rivière utilise les espaces de Minkowski 4D tangents à des géodésiques co-mobiles de l'effondrement de l'espace.

Mais dans notre cas comme les feuilles, hypersurfaces spatiales, sont euclidiennes, rien ne nous empêche de compléter cet espace spatial par une dimension temps orthogonale à cet espace, ce que donne d'ailleurs naturellement localement le vecteur n^{μ}.

Comme n^{μ} est un vecteur "constant" en module, si on le choisit comme vecteur de base de la coordonnée temporelle locale, nous définissons un espace-temps local minkowskien local qui est le même que celui défini localement dans la rivière.

La méthode va se révéler très utile à la compréhension de la solution particulière que nous étudions dans la forme de Painlevé.

Après avoir rappelé les concepts géométriques sur lesquels cette méthode s'appuie (courbure extrinsèque) nous montrons, dans la partie scientifique, comment on la met en œuvre dans la forme de Painlevé.

---

[794]Bien que le temps se caractérise par un signe différent de celui de l'espace dans la forme de la métrique. Quelques éléments généraux donnant le principe de la méthode ADM sont donnés en annexe *9*.

[795]ADM sont les initiales des auteurs de la méthode: **Arnowitt R. Deser S. Misner C.W.** Pour ne pas paraphraser les articles fondamentaux, l'introduction au problème est adaptée de "Carroll S., Lecture notes on general relativity, Chapitre 4, Gravitation. Nous avons gardé la numérotation des équations de l'auteur. Ce texte donne quelques informations simples qui justifient la démarche adoptée, complémentaires de celles de l'article fondamental de **Arnowitt R. Deser S. Misner C.W** (2004). Pour de plus amples informations sur la mise en œuvre de ce formalisme, se reporter aussi à "Lehner L. (2001). Numerical relativity"

[796]"Shift-vector" en anglais, dont la nature est explicite dans l'approche ADM.

Principe de la méthode

Dans cette approche[797], pour résoudre (numériquement) l'équation d'Einstein (en fait le système de dix équations non linéaires aux dérivées partielles du second ordre) dans le cas où une solution analytique directe[798] n'est pas possible, on procède à un feuilletage de l'espace-temps en hypersurfaces de type espace, la variable dynamique étant alors la coordonnée temporelle.

Comme nous l'avons souligné, cela brise la covariance de la théorie où aucune coordonnée[799] ne joue un rôle privilégié, puisque dans ce cas la structure qu'on construit est de type *3D+1D* au lieu de *4D,* mais la méthode, développée formellement par les auteurs, garantit que, sous réserve de respecter certaines conditions discutées en détail dans le document, on obtient le résultat attendu.

Solutions de l'équation d'Einstein

Avant de rentrer dans les détails, regardons de plus près le problème des conditions initiales en Relativité générale.

En mécanique classique de Newton, le comportement d'une particule est régi par :

$$f = m\,\boldsymbol{a}.$$

Si la particule est soumise à un potentiel (champ d'énergie) $\Phi(x)$, la force est, $f = -\nabla\Phi$, et la particule obéit à :

$$m\,\frac{d^2x^i}{dt^2} = -\partial_i\Phi \qquad (79)$$

L'accélération subie par la particule de masse m est proportionnelle au gradient spatial, c'est-à-dire à la variation spatiale de ce potentiel gravitationnel.

C'est une équation différentielle du deuxième ordre pour $x^i(t)$, qu'on peut réécrire comme un système de deux équations du premier ordre en introduisant l'impulsion ***p :***

$$\frac{dp^i}{dt} = -\partial_i\Phi$$

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{p^i.}{m} \qquad (80)$$

[797]Voir Arnowitt R. Deser S. Misner C.W (2004) pour l'exposé de la méthode et Lehner L. (2001) pour des compléments.

[798]Ce qui est rare, car cela suppose un haut niveau de symétrie qui permet de simplifier le système.

[799]Bien que le temps se caractérise par un signe différent de celui de l'espace dans la forme de la métrique. Quelques éléments généraux donnant le principe de la méthode ADM sont donnés en annexe *9*.

Le problème des valeurs initiales est simplement la procédure spécifiant l'état de départ (x^i, p^i) qui sert de condition aux limites et pour qui *(80)* doit avoir une solution unique.

On peut considérer que *(80)* permet, lorsque on a les coordonnées et l'impulsion à l'instant t, d'évoluer de façon infinitésimale dans le temps vers l'état à $t + \delta t$ et par itération de cette procédure obtenir la solution complète.

Problème des conditions initiales et de leur évolution en relativité générale

Essayons de formuler le problème correspondant en Relativité Générale.

Les équations d'Einstein $G_{\mu\nu} = 8\,\pi G T_{\mu\nu}$ sont bien sûr covariantes. Elles ne particularisent pas une notion de temps préférentiel qui servirait de base à l'évolution du système.

Cependant nous pouvons identifier une hypersurface de type espace (une "tranche" Σ), spécifier les données initiales sur cette hypersurface et voir si on peut évoluer uniquement à partir d'elles vers l'hypersurface du futur, hypersurface, car l'espace-temps étant à quatre dimensions, une tranche d'espace à temps constant, sera à trois dimensions, le terme surface étant réservé habituellement aux surfaces à deux dimensions.

Comme la métrique est notre variable fondamentale, notre premier propos sera de considérer les valeurs[800] $g_{\mu\nu}/\Sigma$ de la métrique sur notre hypersurface comme les coordonnées[801] et les dérivées[802] par rapport au temps $\partial_t g_{\mu\nu}|\Sigma$ (conformément à certaines coordonnées de temps spécifiées) comme étant l'impulsion, tous deux définissant l'état.

Il y a aussi des coordonnées et une impulsion pour les champs matériels que nous ne considérerons pas explicitement.

En fait les équations $G_{\mu\nu} = 8\pi\, GT_{\mu\nu}$ *i*nvoquent les dérivées secondes de la métrique par rapport au temps, car la connexion invoque les dérivées premières de la métrique et le tenseur d'Einstein les dérivées premières de la connexion, donc il semble qu'on soit sur la bonne voie.

Par ailleurs l'identité de Bianchi nous dit que $\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$.

[800]Valeurs qui s'évaluent dans une forme de la métrique à sélectionner selon des critères explicités dans Lehner L. (2001) p.5-6 ("Suitable coordinates").

[801]Coordonnées généralisées au sens de celles utilisées dans l'approche Hamiltonienne qui va être mise en œuvre. La coordonnée temporelle va jouer un rôle spécifique du fait de la décomposition 4D en 3D+1D. La construction du Lagrangien associé à la méthode, le choix des variables canoniques permettant le traitement Hamiltonien du problème et les critères de choix sont formellement traités dans **Arnowitt R. Deser S. Misner C.W** (2004)

[802]En fait, dans le formalisme ADM, on choisit le tenseur qui caractérise le courbure extrinsèque de l'hypersurface spatiale à 3 dimensions imbriquée dans l'espace-temps à 4 dimensions, appelée seconde forme fondamentale, car elle a une interprétation géométrique naturelle.

On peut réécrire cette équation comme suit :

$$\partial_0 G^{0\nu} = -\partial_i G^{i\nu} - \Gamma^{\mu}{}_{\mu\lambda} G^{\lambda\nu} - \Gamma^{\nu}{}_{\mu\lambda} G^{\mu\lambda}. \qquad (81)$$

Un examen attentif du membre de droite ne révèle aucune dérivée du troisième ordre par rapport au temps, donc il ne peut pas y en avoir dans l'autre membre.

Donc bien que $G^{\mu\nu}$ dans sa généralité invoque des dérivées secondes par rapport au temps, pas la composante spécifique $G^{0\nu}$. Sur les dix équations correspondant aux dix composantes indépendantes de l'équation d'Einstein, les quatre représentées par

$$G^{0\nu} = 8\pi G T^{0\nu}, \qquad (82)$$

ne peuvent pas être utilisées pour calculer l'évolution des données initiales $(g_{\mu\nu}, \partial_t g_{\mu\nu})\Sigma$.

Contraintes sur les données initiales

Elles sont en fait des contraintes sur les données initiales.

Nous ne sommes pas libres de spécifier n'importe quelle combinaison de la métrique et de ses dérivées par rapport au temps sur l'hypersurface Σ, car elles doivent satisfaire les relations *(82)*. Les équations restantes

$$G^{ij} = 8\pi G T^{ij}, \qquad (83)$$

représentent les équations d'évolution dynamique pour la métrique. Bien sur nous n'avons que six équations pour les dix fonctions inconnues $g_{\mu\nu}(x^{\sigma})$, donc la solution va inévitablement impliquer une quadruple indétermination.

Elle correspond aux quatre degrés de liberté que nous avons préalablement évoqués correspondant au choix des quatre fonctions de coordonnées de l'espace-temps.

En étudiant l'équation *(83),* on trouve que certaines composantes ne comportent pas de dérivées secondes par rapport au temps. C'est un exercice simple mais laborieux. En fait on trouve des termes $\partial^2_t g_{ij}$ dans *(83)*, mais pas de termes $\partial^2_t g_{0\nu}$.

Donc un “état” en Relativité générale va consister en une spécification des composantes de type espace de la métrique $g_{ij}|\Sigma$ et de leurs dérivées premières par rapport au temps $\partial_t g_{ij}|\Sigma$ sur l’hypersurface Σ, à partir de laquelle nous allons déterminer la future évolution en utilisant *(83),* limitée par une ambiguïté incontournable concernant les composantes g_{0v}.

Cette situation est précisément analogue à celle de l’électromagnétisme, où nous savons qu’il n’y a pas suffisamment de données initiales pour déterminer l’évolution de façon unique, car il y a toujours la possibilité de réaliser une transformation de jauge.

Le choix d’une jauge permet de lever cette indétermination. Ce point assez technique est discuté dans l’annexe *9*.

Ces principes étant posés, la partie scientifique traite le problème sous l’angle formel en donnant les hypothèses et en les utilisant pour les résultats.

En particulier l’application du formalisme ADM au calcul de la masse gravitationnelle dans la forme de la métrique de Painlevé, à laquelle est implicitement associé l’observateur de Painlevé dont la géodésique est orthogonale aux hypersurfaces spatiales qui sont également traversées orthogonalement par le flux gravitationnel, confirme bien qu’elle est nulle.

Synthèse sur le caractère pseudo-minkowskien de la forme de Painlevé.

Après avoir passé en revue comment le caractère pseudo-minkowskien pouvait être appréhendé à travers différentes approches nous tentons ici une synthèse.

Nous récapitulons les propriétés originales de la solution dans la forme de Painlevé et proposons plusieurs approches pour caractériser la nullité du pseudo-tenseur.

Rappelons que, comme une solution de la Relativité générale est un espace-temps physique, sa représentation par une variété de géométrie non minkowskienne ne peut pas être rendue minkowskienne par un changement de coordonnées[803] quel qu'il soit.

Ceci est corroboré par le fait que ces propriétés ne se manifestent phénoménologiquement que dans une forme particulière. Si, sous un certain angle de vue elle dévoile ces caractères, cela ne préjuge pas qu'ils soient universels.

Les développements que nous avons faits dans les chapitres *16* à *18* visaient à montrer que la forme de Painlevé met en évidence un certain nombre de propriétés non triviales de cette solution, conduisant à des simplifications spectaculaires et à des propriétés originales. Ces propriétés révélées en explorant différentes approches ne sont évidemment pas indépendantes mais reflètent les différentes facettes du même phénomène physique.

L'objet du chapitre scientifique *19* est de faire un inventaire des phénoménologies particulières révélées par cette forme, facettes d'une structure d'espace-temps, de les analyser de façon à en extraire ce qu'il y a de fondamental et, en synthétisant ces propriétés, de proposer un modèle aussi simple que possible de cette solution mais contenant tous les éléments nécessaires et suffisants à sa description.

Bien entendu, s'agissant de propriétés spécifiques à cette forme, le caractère non covariant de la démarche va être omniprésent.

À ce titre les approches non covariantes, comme le pseudo-tenseur de Landau- Lifchitz, le modèle de la rivière, le formalisme ADM séparant espace et temps ce qui rend la description aimable à notre esprit, vont converger dans leurs conclusions.

Nous verrons également, que le fait que ce soit la métrique inverse et non pas la métrique elle-même qui intervient le plus souvent et de la manière la plus claire et convaincante est intimement liée à cette approche non covariante puisqu'elle propose une description des phénomènes, duale, de celle de la métrique, mais dans l'espace tangent minkowskien, ce qui plus adapté à en montrer les caractères minkowskiens.

Nous en extrairons la propriété fondamentale structurante qui conditionne toute la phénoménologie.

[803]Par changement de coordonnées, où les nouvelles coordonnées sont des fonctions scalaires des anciennes.

Synthèse des propriétés remarquables entraînant la nullité du pseudo-tenseur

Nous avons montré dans la partie scientifique que pour la méthode que nous utilisons (analyse en espace plat) dans ce type de solution, c'est la métrique inverse qui est la somme d'une métrique spatiale euclidienne et du produit tensoriel du quadrivecteur associé à l'observateur de Painlevé qui est la plus adaptée à la description du caractère pseudo-minkowskien, du fait qu'elle décrit la géométrie dans l'espace plat tangent.

S'il ne faut pas confondre forme de métrique, qui permet de décrire et calculer géométriquement les lignes d'univers de n'importe quel observateur, avec observateur qui est défini par une ligne d'univers spécifique, la forme de métrique de Painlevé telle qu'elle est constituée montre ses relations étroites avec l'observateur de Painlevé puisque sa courbure est uniquement définie par les caractéristiques de cet observateur (sa quadri-vitesse). Cet observateur de Painlevé est appelé observateur repère, car dans cette forme de métrique sa ligne d'univers (géodésique) est orthogonale aux sections spatiales (à temps constant).

Comme le pseudo-tenseur de Landau-Lifchitz, double divergence sur $\rho\sigma$ du tenseur contravariant $\lambda^{\mu\nu\rho\sigma} = K(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma}-g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma})$, non antisymétrique sur ces indices $\rho\sigma$, n'est pas trivialement nul, cette nullité résulte d'une forme particulière de la métrique inverse $g^{\mu\nu}$, dont nous avons décliné les contraintes dans la partie scientifique. L'analyse structurelle du pseudo-tenseur de Landau Lifchitz nous a incité à le décomposer en un scalaire t^{00}, un tri-vecteur $t^{0i} = t^{i0}$ et une partie spatiale t^{ij}.[804]

Nous avons montré que cette propriété de la forme de Painlevé était également satisfaite dans la forme de Kerr-Schild[805]. Ces deux formes partagent la même structure spécifique, extraordinairement simple, qui permet de comprendre que les propriétés de cette métrique inverse vont être directement liées au vecteur associé à l'observateur de Painlevé dans un cas et au vecteur nul associé à la direction principale nulle dans l'autre.

Cette nullité du pseudo-tenseur trouve sa justification physique à travers la nullité de la masse gravitationnelle (active), évaluée en termes de flux, calculée dans cette forme de métrique, dans le formalisme associé au pseudo-tenseur par l'intégrale de la quadri-impulsion totale matière-énergie-champ gravitationnel et dans le formalisme ADM.

Rappelons que la différence entre une divergence simple et une divergence covariante est que cette dernière tient compte de la courbure de l'espace qui est réelle dans cette solution et qui fait qu'une partie du flux peut être non accessible par l'observateur dans son référentiel (minkowskien). Mais quand le flux gravitationnel traversant le référentiel associé à cet observateur géodésique de Painlevé, qui ne ressent pas la gravitation (co-mobile de l'espace comme nous l'avons montré dans la partie scientifique), est nul, ce que montrent ces formalismes, cette différence s'évanouit.

Cette phénoménologie peut paraître étrange mais la manière et les motivations qui ont poussé Landau et Lifchitz à définir ce pseudo-tenseur peuvent apporter quelques éclaircissements sur son interprétation physique : à cet effet, examinons leur analyse.

[804]Voir le chapitre de la partie scientifique relative au commentaire du super-potentiel de Freud.

[805]Dans la forme de Kerr-Schild c'est similaire mais pour les géodésiques nulles radiales (parcourues par la lumière), au lieu des géodésiques de type temps radiales pour la forme de Painlevé, mais ce que nous disons pour la forme de Painlevé vaut pour celle de Kerr-Schild (voir dans le texte qui précède).

Comme les équations de conservation sont nativement covariantes en relativité générale, c'est la divergence covariante du tenseur énergie impulsion qui est nulle et non pas la divergence ordinaire (en espace plat).

En relativité générale la gravitation est représentée (géométriquement) par la courbure de l'espace temps.

Landau et Lifchitz ont souhaité représenter la gravitation comme un champ pour traiter le problème en théorie des champs (en espace plat). Par contre, compte tenu que la gravitation pouvait être localement annulée par un choix particulier de cordonnées, ils ne pouvaient pas la représenter par un tenseur mais par un pseudo-tenseur (ce que Einstein avait déjà fait en son temps mais avec une autre proposition).

Comme dans le référentiel localement inertiel de Lorentz les dérivées premières de la forme de métrique (non analytique) sont nulles, cela implique que l'équation de divergence covariante se réduit à une équation de divergence simple.

Ils ont calculé la valeur du tenseur énergie-impulsion dans ces coordonnées de « Lorentz , en annulant toutes les dérivées premières de la métrique dans les éléments du calcul, à savoir le tenseur de Riemann et ses contractions (Ricci et scalaire de Ricci) et l'équation d'Einstein. Ne restait dans ces termes que la partie « irréductible » associée aux dérivées secondes qui ne sont pas annulables.

Ils ont obtenu la valeur du tenseur énergie-impulsion dans ces coordonnées, satisfaisant à l'équation de conservation « covariante » de la relativité générale réduite à une conservation simple dans ce référentiel particulier où les dérivées premières de la métrique sont nulles.

Partant ensuite du constat que dans un système de coordonnées non inertiel cette équation n'était plus satisfaite, ils ont introduit alors un facteur correctif, sous forme d'un pseudo tenseur représentant le champ gravitationnel, à ajouter au tenseur impulsion-énergie, pour la satisfaire.

Ainsi la condition de divergence covariante du tenseur énergie-impulsion était équivalente à la condition de divergence simple de la somme du tenseur énergie impulsion et du pseudo-tenseur de gravitation, la dite somme n'étant, alors, plus un tenseur.

La nullité de ce pseudo-tenseur traduit alors une absence d'effet gravitationnel. Notons que dans le cas de la solution dans le vide que nous considérons, le tenseur énergie-impulsion est nul, ce qui n'implique pas pour autant que le pseudo-tenseur le soit, comme le calcul le montre puisque le champ gravitationnel est bien présent et ressenti, du moins dans certains systèmes de coordonnées.

Le calcul permet de vérifier que ce pseudo-tenseur peut s'exprimer en fonction de la métrique (et inverse) et de leurs dérivées premières uniquement.

Ceci implique que dans le référentiel localement inertiel le pseudo tenseur est nul du fait que tous ses termes sont nuls, ce qui est une condition très forte, mais ces coordonnées de Lorentz ne sont pas analytiques, alors que dans les coordonnées analytiques de Painlevé seule l'expression globale du pseudo-tenseur est nulle, ce qui est une condition plus faible.[806]

La nullité du pseudo-tenseur résulte de la forme particulière de la métrique donc de la métrique inverse qui s'en déduit qui est la somme du tenseur spatial euclidien et du produit tensoriel du quadrivecteur géodésique (radial) de l'observateur de Painlevé par lui-même.

[806]En résumé, les coordonnées analytiques de Painlevé (et de Kerr-Schild) ne sont pas inertielles comme celles de Lorentz (qui par contre sont non analytiques), mais elles sont celles qui s'en rapprochent le plus !

Troisième partie: Painlevé méritait-il l'opprobre pour ses propos sur le ds² ?

20- Décalage spectral sur une géodésique radiale

Avant de tenter de réhabiliter Painlevé, il convient d'examiner ce qu'on entend aujourd'hui par décalage spectral et de le comparer pour différents observateurs dont celui de Painlevé.
Ce chapitre donne les définitions scientifiques et établit les équations associées. Le chapitre suivant en propose l'analyse conceptuelle dans le cadre des propos de Painlevé.

Définition du décalage spectral

Avant d'analyser plus particulièrement la teneur des allégations de Painlevé, rappelons d'abord ce qu'on entend communément par décalage spectral. Ceci peut paraître trivial mais ce type de mise au point, si elle avait été faite à l'époque, aurait permis de dissiper le malentendu.

Plaçons-nous dans le cas du corps central à symétrie sphérique pour des trajectoires radiales.

Considérons un photon émis localement radialement dans le référentiel d'un observateur dans une certaine forme de la métrique. L'équation géodésique du photon $x^{\nu}(\lambda)$ dans cette forme définit le paramétrage affin[807] de la géodésique lumière dans cette forme.

Nous aurons, bien sûr, deux solutions (entrante et sortante).

Ce photon a une certaine énergie E lorsqu'il est émis.

Dans son référentiel d'émission cette énergie vaut : $E = \omega$ (on pose ~~$\hbar$~~$=1$).[808]

La fréquence (ou plutôt pulsation[809] qui diffère d'un facteur 2π) du photon mesurée par un observateur de vitesse U^{μ} (composantes définies dans une forme de la métrique) vaut :

---

[807]Ce paramétrage pour une géodésique nulle est particulier dans la mesure où on ne peut pas utiliser le temps propre (qui est nul) comme paramètre affin. Il faut partir de la forme générale de l'équation géodésique

$$d^2x^{\mu}/d\alpha^2 + \Gamma^{\mu}_{\rho\sigma}(dx^{\rho}/d\alpha)(dx^{\sigma}/d\alpha) = k(\alpha)(dx^{\mu}/d\alpha$$

directement dérivée des équations d'Euler Lagrange avec le Lagrangien $L = (-g_{\mu\nu}(dx^{\mu}/d\alpha)(dx^{\nu}/d\alpha))^{1/2}$. Le problème c'est que $k(\alpha) = (1/L)dL/d\alpha$ est du type $0/0$ dans le cas des géodésiques nulles (E. Gourgoulhon p.34-38). Pour se ramener à la forme classique de l'équation géodésique $d^2x^{\mu}/d\lambda^2 + \Gamma^{\mu}_{\rho\sigma}(dx^{\rho}/d\lambda)(dx^{\sigma}/d\lambda) = 0$, on introduit un paramètre λ défini par une fonction $\lambda = f(\alpha)$. Ceci implique que $df/d\alpha = a.\int_0^{\lambda} k(\alpha')d\alpha'$ où a est une constante. Sur une géodésique nulle on choisit souvent le paramètre affin λ tel que $p^{\mu} = dx^{\mu}/d\lambda$ où p^{μ} est le quadrivecteur impulsion qui est défini non pas par unité de masse puisque celle-ci vaut zéro pour un photon, mais intrinsèquement. Remarquons qu'à l'inverse d'une géodésique temporelle où le paramètre affin τ (scalaire) est donné par l'invariant métrique ce qui permet de calculer p^{μ}, ici c'est l'inverse le vecteur p^{μ} de la lumière est la donnée (par une relation du type $K_{\mu}p^{\mu}$ = constante où K_{μ} est un vecteur de Killing, liée à certaines invariances) et c'est lui qui permet de normaliser le paramètre affin λ via la relation $p^{\mu} = dx^{\mu}/d\lambda$.
Peu importe que p^{μ} soit nul puisqu'on va en faire le produit scalaire avec la quadri-vitesse U^{μ}, ce qui donnera des composantes en général non nulles donc un résultat exploitable (le produit scalaire d'un vecteur nul par un vecteur différent, est en général non nul). Le paramètre affin λ apparaît alors comme une variable intermédiaire de calcul qui s'élimine à la fin du calcul. La norme de ce vecteur est "conservée" lors de son déplacement parallèle (tangent) sur la courbe géodésique. Dans tous les cas un observateur de vitesse U^{μ} mesure une énergie $E = -p_{\mu}U^{\mu}$ que p^{μ} soit nul ou de type temps. Signalons toutefois que l'énergie E n'inclut pas l'énergie potentielle liée au champ de gravitation, énergie potentielle, qui ici est définie, ce qui n'est pas toujours le cas en RG.

[808]On utilise plutôt la pulsation ω (en rad/s) que la fréquence ν. Elles sont liées par un facteur 2π. Pour la démonstration que nous menons, comme on s'intéresse à des rapports, cela est indifférent.

[809]Comme on fait des rapports de fréquences, de longueurs d'onde, cela n'a pas d'importance.

$$\omega = - g_{\mu\nu} U^{\mu} \frac{dx^{\nu}}{d\lambda}.$$

Si la forme de la métrique est stationnaire, l'énergie E du photon est conservée (sur sa géodésique).

Ceci s'écrit[810]

$$-K_{\mu} \frac{dx^{\mu}}{d\lambda} = E,$$

où $K_{\mu} = g_{\mu\nu} K^{\nu}$ est le vecteur de Killing (covariant) temps exprimé dans la forme de la métrique considérée où on rappelle que $K^{\nu} = (\partial_t)^{\nu} = (1, 0, 0, 0)$.

Décalage spectral pour l'observateur de Painlevé dans la forme de Painlevé

Le principe consiste à utiliser la conservation de l'énergie et l'invariant métrique pour calculer ω en fonction r en coordonnées sphériques dans ces coordonnées de Painlevé

Le calcul est fait en annexe *3*, chapitre *20*, équations *(20-1)* à *(20-5)*[811], nous donnons ici le résultat et leur illustration sous forme de courbes.

Le décalage spectral, subi par un photon émis à la fréquence $\boldsymbol{\omega_1}$ par un observateur de Painlevé situé en $\boldsymbol{r = r_1}$ et mesuré à une fréquence $\boldsymbol{\omega_2}$ par un autre observateur de Painlevé en r_2 est donné par les équations ci-dessous pour les deux cas. Rappelons que $r_s = 2GM/c^2$ est le rayon de Schwarzschild et que ce décalage se mesure par le rapport $(\boldsymbol{\omega_2/\omega_1})$.

Décalage spectral : cas du rayon entrant.

Dans ce cas où $r_1 > r_2$, on obtient :

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{1 + (r_s/r_1)^{1/2}}{1 + (r_s/r_2)^{1/2}}.$$

Dans le cas où $r >> r_s$, cela peut s'écrire :

$$\omega_2/\omega_1 \approx 1 + (r_s/r_1)^{1/2} - (r_s/r_2)^{1/2}.$$

Si le photon est émis à une distance telle que $r_1 \rightarrow \infty$, alors on a :

$$\omega_2/\omega_1 = [1 + (r_s/r_2)^{1/2}]^{-1}.$$

[810] Le signe « moins » dans cette métrique de signature (-,+,+,+) résulte de la convention que $E > 0$ à l'infini.
[811] Ce qui justifie qu'on commence à l'équation (20-4bis) dans ce chapitre.

Un photon radial entrant révèle un espace-temps en contraction vers la singularité

Si on utilise le paramètre standard z[812] :

$$z = = (r_s/r_2)^{1/2}. \qquad (20\text{-}4bis)$$

Une phénoménologie non triviale

L'équation (*20-4bis*) montre que lorsque r tend vers $r_s = 2GM/c^2$ (sur l'horizon) le décalage spectral tend vers *1*, l'effet Doppler correspondant à une vitesse de fuite égale à la vitesse de la lumière c ce qui correspond bien à la phénoménologie associée à l'horizon et que lorsque r tend vers zéro le décalage spectral z tend vers l'infini, ce qui signifie que l'énergie des photons de la lumière émise à l'infini est nulle dans le référentiel de Painlevé lorsqu'il atteint la singularité centrale.

Bien sûr $r = 0$ étant singulier on peut se retrancher sur l'argument que ce qui s'y passe est singulier et qu'on ne peut rien en dire.

Ici nous avons une autre proposition, et ajoutons que, comme nous avions vu que pour cet observateur le flux gravitationnel entrant à travers une sphère à l'infini était nul, cette phénoménologie satisfait à la conservation du flux.

Cette phénoménologie n'était pas triviale et méritait d'être soulignée et nous allons voir comment elle se raccorde à la solution cosmologique de Lemaître.

Interprétation cosmologique relativiste

En effet, on peut également interpréter cela dans le cadre du modèle cosmologique de Lemaître par exemple.

Ce décalage spectral n'est pas sans rappeler le décalage spectral cosmologique.

Au lieu d'être homogène et isotrope comme dans le cas d'une solution de Friedmann, la solution de Schwarzschild est seulement isotrope par rapport à un point (le centre de symétrie).

La phénoménologie étudiée se limitera donc aux géodésiques radiales.

Le rayon radial entrant subit un décalage spectral cosmologique lié à l'effondrement stationnaire de l'espace-temps (dont l'observateur de Painlevé est le témoin).

L'effet de marée radial, qui est ici la manifestation de cette expansion, étire l'espace-temps (conformément à la description du tenseur de Weyl) donc étire le rayonnement qui en tisse la trame selon une loi qui correspond à ce que le calcul nous a donné.

Ceci est conforme à la phénoménologie de l'effet de marée, dans cette solution, qui croît quand on se rapproche de la singularité.

---

[812] On rappelle que $z = \lambda_r/\lambda_e - 1$ où, λ_r est la longueur d'onde reçue et λ_e la longueur d'onde émise.

Décalage spectral : cas du rayon sortant.

Calcul du décalage

Dans ce cas où $r_2 > r_1$, on obtient :

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{1 - (r_s/r_1)^{1/2}}{1 - (r_s/r_2)^{1/2}}.$$

Dans le cas où $r >> r_s$, cela peut s'écrire :

$$\omega_2/\omega_1 = 1 - (r_s/r_1)^{1/2} + (r_s/r_2)^{1/2}.$$

Si le photon est reçu à une distance telle que $r_2 \rightarrow \infty$, alors on a :

$$\omega_2/\omega_1 \approx [1 - (r_s/r_1)^{1/2}].$$

Si on utilise le paramètre standard z :

$$z = = \frac{(r_s/r_2)^{1/2}}{1 - (r_s/r_2)^{1/2}}. \qquad (20\text{-}4ter)$$

Effet de l'orientation de la solution sur le décalage spectral sortant

La solution étant orientée, le décalage spectral sortant n'est pas identique au décalage spectral entrant, ce qui est en accord avec la dissymétrie des cônes de lumière que nous avions calculée.

Phénoménologies des photons entrants et sortants dans la forme de Painlevé

Dans les deux cas (entrant et sortant), dans la forme de Painlevé, la phénoménologie se traduit par un décalage des photons vers le rouge. Le photon reçu, mesuré dans le référentiel de Painlevé, a une fréquence plus faible que celle de son émission dans un autre référentiel de Painlevé. Nous verrons que la forme de Schwarzschild présente une phénoménologie différente.

Décalage spectral pour l'observateur de Schwarzschild dans la forme associée

Quadri-vitesse de l'observateur de Schwarzschild

Appliquons cela maintenant à l'observateur de Schwarzschild[813] dans la forme de Schwarzschild pour ces mêmes géodésiques nulles $x(\lambda)$.

Équations du décalage spectral

Les cas sortants et entrants sont identiques (symétrie du cône de lumière)

Soit avec les mêmes conventions que pour l'observateur de Painlevé :

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{[1-(r_s/r_1)]^{1/2}}{[1-(r_s/r_2)]^{1/2}}. \qquad (20\text{-}5bis)$$

Si $r >> r_s$ ceci donne la forme quasi newtonienne :

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = 1 - \frac{GM}{r_1} + \frac{GM}{r_2}.$$

Si $r_1 < r_2$, on est dans le cas lumière sortante : $\omega_2/\omega_1 < 1$, il y a décalage vers le rouge.

Si $r_1 > r_2$, on est dans le cas lumière entrante : $\omega_2/\omega_1 > 1$, il y a décalage vers le bleu.

Comparaison des décalages spectraux pour les deux types d'observateurs

Généralités

Les décalages sont différents pour les observateurs de Painlevé et de Schwarzschild.

Dans la forme de Schwarzschild la direction de la lumière n'a pas d'influence (c'est la même équation qui traite les deux cas), car le cône de lumière est symétrique alors que dans la forme de Painlevé compte tenu des produits croisés *dr.dt* on a deux équations différentes et on a toujours un décalage vers le rouge aussi bien pour la lumière entrante que sortante et évidemment les valeurs du décalage sont différentes de celles de la forme de Schwarzschild.

[813]Pour les calculs détaillés, voir annexe 3 chapitre 20, équation (20-5). Comme nous l'avions annoncé lors de la définition de l'observateur de Painlevé, on associe arbitrairement la forme de Schwarzschild à l'observateur statique dit "de Schwarzschild", car dans cette forme sa ligne d'univers de type temps, balisée par son paramètre affin, est orthogonale (mais non géodésique) à la section spatiale à *t= constante*.

Les courbes relatives au décalage spectral pour l'observateur de Painlevé donnent la variation de la fréquence de la lumière (l'impulsion du photon) mesurée par cet observateur, qui étant co-mobile de l'effondrement, dans le cas trou noir, de l'espace est un traceur de l'effondrement de l'espace dans cette solution.

Autrement dit, elles donnent la variation de l'impulsion du photon (sa fréquence) par rapport à l'espace-temps lui-même, information de la plus haute pertinence, en particulier pour la comparer à la phénoménologie en espace-temps de Minkowski.

Décalage spectral d'un photon (entrant) émis à l'infini. Cas Painlevé et Schwarzschild

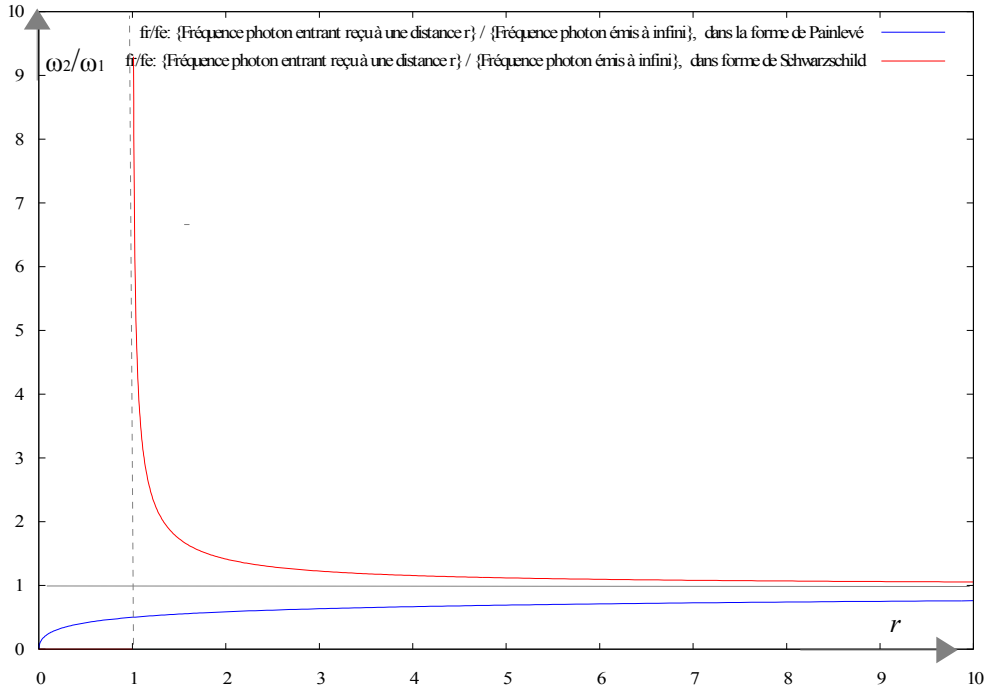


Figure 20.1.[814] *Rapport des fréquences ω_2/ω_1 entre la fréquence ω_2 du photon reçu à une distance r et le photon (entrant) émis depuis l'infini avec une fréquence ω_1.*

On voit que pour l'observateur de Painlevé, on a un décalage vers le rouge contrairement à ce qui se produit pour l'observateur de Schwarzschild où c'est un décalage vers le bleu.

Que l'observateur de Schwarzschild mesure le photon plus énergique que l'observateur inertiel de Painlevé s'explique qualitativement par le fait qu'il est, en fait, accéléré dans la direction des *r* croissants pour rester statique, contrairement à l'observateur de Painlevé géodésique en chute libre radiale entrante vers les *r* décroissants, en mouvement dans l'autre direction, qui fuit donc le photon. Par contre que l'observateur de Painlevé reçoive ce photon décalé vers le rouge, ce qui semble paradoxal mérite explication.

Rappelons l'approche de Sauger(1922) pour établir la solution de Schwarzschild, nous allons nous en inspirer pour démontrer cette propriété, dans ce qui suit.

[814]Figures 20-1 à 20-4 sont tracées pour les valeurs $E=1$, $r_s=1$, avec le logiciel Maxima.

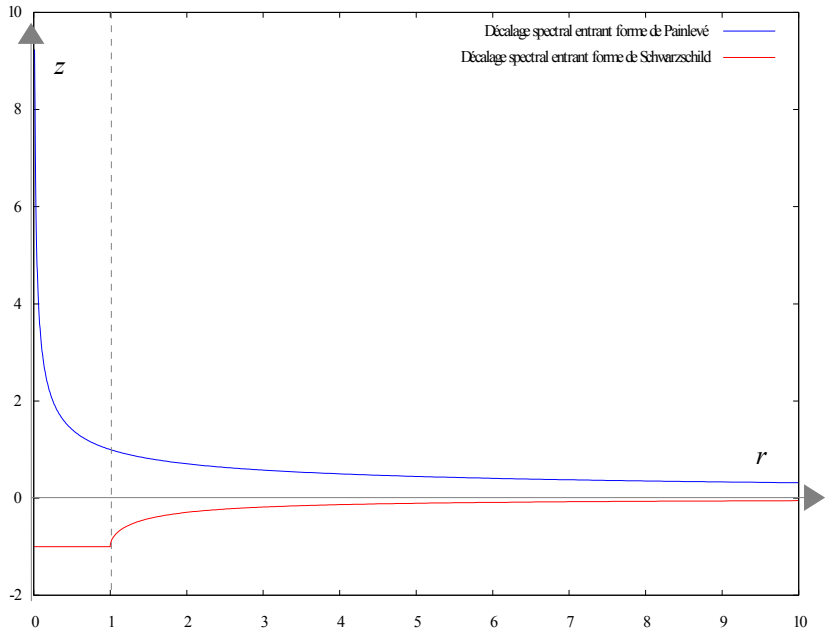


Figure 20.2. *Idem que ci-dessus mais en utilisant le paramètre standard* $z = \lambda_2/\lambda_1 - 1$.

Pour $r < 1$, z n'est pas défini pour l'observateur de Schwarzschild, à la différence de l'observateur de Painlevé. Pour $r = 1$ le décalage spectral vaut $+1$ (Painlevé) et -1 (Schwarzschild) ce qui correspond à un décalage "Doppler" de vitesse $v = \pm c$.

Par rapport à l'observateur statique de la solution de Schwarzschild, l'observateur de Painlevé, à la même coordonnée *r,* est animé, localement, d'une vitesse relative égale à $(r_s/r)^{1/2}$. Ceci se produisant dans le même dans l'espace-temps de Minkowski local, les lois de la relativité restreinte s'appliquent, en particulier la loi relativiste de l'effet Doppler *D* dont la forme générale dans le référentiel de l'observateur est :[815]

$$D = \frac{\lambda_r}{\lambda_e} = \gamma(u_r)(1+u_r) \quad .$$

Ici, la vitesse de la source est radiale $u = (r_s/r)^{1/2} = u_r$.

En appliquant cette formule à *(20-5bis)*[816] avec $r_1 = \infty$, donnant le décalage spectral pour l'observateur de Schwarzschild, dans le cas du photon entrant ($r_1 > r_2$), avec $u_r = (r_s/r)^{1/2}$, on retrouve bien la valeur que nous avons calculée directement pour la forme de Painlevé :

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = (\sqrt{1-u_r^2}) * D = (\sqrt{1-u_r^2}) \frac{(1+u_r)}{\sqrt{1-u_r^2}} = 1+u_r \quad \rightarrow \quad z = u_r$$

Le premier terme $(1-u_r^2)^{1/2}$ est le décalage spectral de la forme de Schwarzschild, donné par *(20-5bis)*, le deuxième l'effet Doppler relativiste donné par l'expression de *D* ci-dessus.

[815] Le symbole $\gamma(u_r)$ est le facteur de Lorentz $(1- u_r^2)^{-1/2}$ pour la vitesse u_r.

[816] Qui vaut $(1- u_r^2)^{1/2}$ dans ce cas. Il apparaît au numérateur de l'équation qui suit. Comme (20-5bis) donne rapport de fréquence, pour le rapport des longueurs d'onde il faut l'inverser, par ailleurs dans ce cas r_1 est infini.

Décalage d'un photon sortant reçu à l'infini : cas Painlevé et Schwarzschild

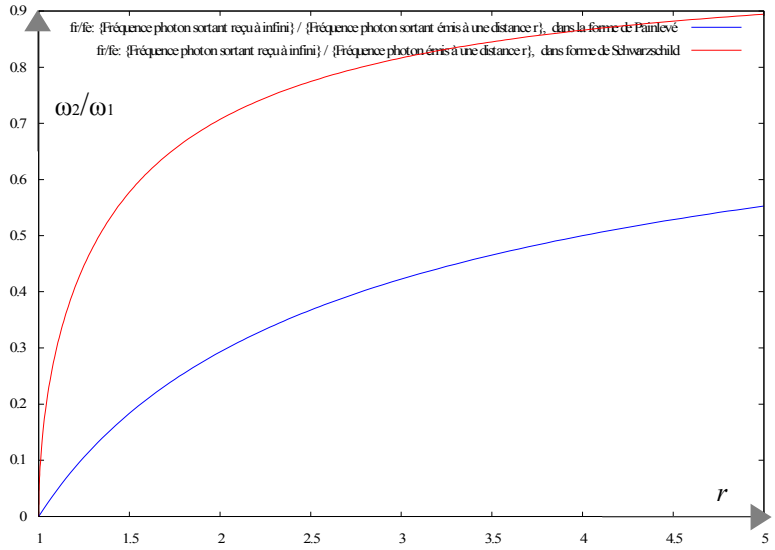


Figure 20.3. *Rapport des fréquences ω_2/ω_1 entre le photon (sortant) et le photon de fréquence ω_1 émis à une distance r et reçu à l'infini avec une fréquence ω_2.*

On voit que pour les deux observateurs, on a un décalage vers le rouge ce qui était prévisible, car dans les deux cas le photon doit remonter le puits de potentiel.

Que dans le référentiel de Schwarzschild on mesure le photon reçu plus énergique que dans le référentiel de Painlevé s'explique qualitativement par le fait que par rapport à l'observateur de Painlevé qui est en chute libre vers $r = 0$, il est en fait accéléré vers les r croissants pour rester statique. Les équations en précisent la valeur. On pourrait utiliser l'effet Doppler relativiste comme pour le rayon entrant, pour vérifier la relation entre les deux courbes.

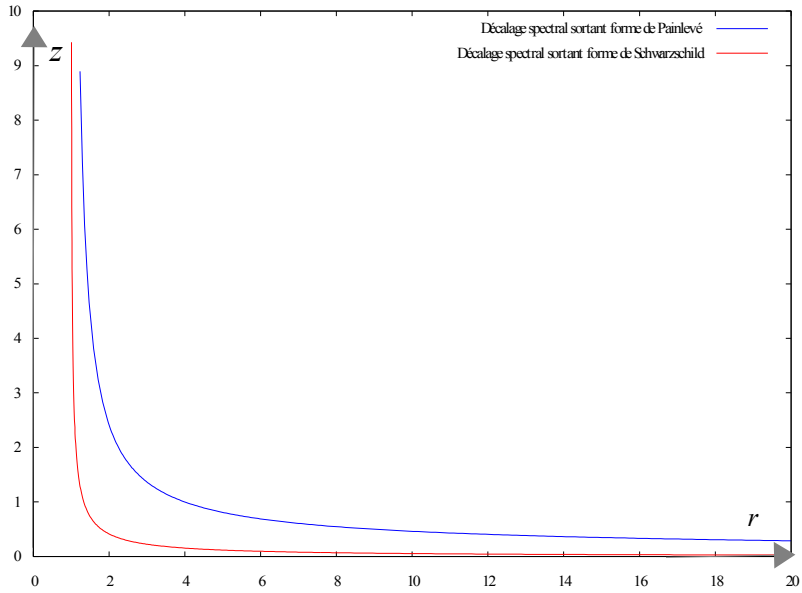


Figure 20.4. *Idem que ci-dessus mais en utilisant le paramètre standard : $z = \lambda_2/\lambda_1 - 1$.*

On note la différence sensible de décalage spectral même pour des valeurs de r élevées comme $r = 20$. À noter aussi que les courbes bleues et rouges ne convergent que lentement l'une vers l'autre vers l'infini.

21- Analyse des propos de Painlevé : faut-il le réhabiliter ?

Nous analysons les propos de Painlevé dans le texte pour montrer le malentendu qui a été à la source de l'incompréhension de ses propos à l'époque et nous nous interrogeons et formulons une hypothèse plausible sur ce qui l'a conduit à proposer sa solution si innovante. Nous complétons l'analyse du décalage spectral en explicitant une phénoménologie non évidente.

Rappel

Painlevé affirme péremptoirement à la fin de son article que "***concernant le décalage spectral, c'est pure imagination de prétendre tirer du ds² des conséquences de cette nature***" [Painlevé P. 24 octobre 1921].

De l'étude du chapitre précédent nous avons vu que si les décalages spectraux étaient différents pour les différents observateurs pour autant ce décalage spectral existe dans la forme de Painlevé.

Alors doit-on en déduire que Painlevé s'est lourdement trompé dans son affirmation et mérite l'opprobre dont il a été victime ?

Mais n'est-il pas étonnant qu'un mathématicien aussi avisé que Painlevé ait pu prononcer cette phrase, qui l'a discrédité auprès de nombreux scientifiques, ce qui a entraîné que sa contribution en relativité générale ait été injustement déconsidérée.

Plutôt que de le condamner, cherchons à comprendre ce qui a pu motiver une telle assertion, d'autant que habituellement elle est citée hors de son contexte.

Les propos de Painlevé "dans le texte"

Pour bien critiquer sa position citons intégralement le passage qui pose problème en n'oubliant pas les "attendus" auxquels Painlevé se réfère dans sa phrase péremptoire.

"De la formule (1) [817]ils [818]concluent :

1° Que les vibrations lumineuses d'un même atome doivent être plus courtes près du Soleil que sur la Terre (le ralentissement étant le même pour tous les atomes)[819];

2° Que nos solides dits invariables, nos mètres en particulier, doivent se raccourcir dans le même rapport dans la direction du Soleil, quand ils sont plus près de celui-ci.

Lors même que la formule (1) serait imposée sans aucune ambiguïté par la doctrine[820] einsteinienne de la gravitation et de la propagation de la lumière, les conclusions que je viens d'énoncer m'apparaîtraient comme des conjectures des plus audacieuses[821], et non pas comme des conséquences inévitables de cette doctrine, qui suffiraient (comme l'affirme Einstein avec sa magnifique franchise) à la faire crouler si elles ne se vérifiaient pas.

---

[817]La forme de la métrique de Schwarzschild.
[818]Les "einsteiniens" sic !
[819]On voit que Painlevé parle bien de l'émission locale des rayonnements par les atomes.
[820]Notons le terme "doctrine" qui, semble-t-il, à l'époque n'avait pas le sens péjoratif qu'il a aujourd'hui.
[821]Painlevé s'avance sans doute, mais il vrai qu'il faudrait préciser ce qu'on mesure par rapport à quoi et dans quel référentiel.

Mais l'existence de la formule (2) [822] et d'une infinité d'autres possibles me paraît suffire à démontrer le caractère plus qu'aventureux de telles prévisions.

Si l'on admet, en effet, la formule (2), on retombe pour dt =0, sur le ds² euclidien ordinaire ; d'où (en raisonnant comme les einsteiniens) la conséquence que nos solides ne subissent aucune contraction dans aucun sens quand ils se rapprochent du Soleil.

D'autres formules, aussi simples conduiraient à la conclusion que ces corps se dilatent dans le sens du Soleil[823] au lieu de se contracter ; d'autres encore que les corps se dilatent perpendiculairement à la direction du Soleil.

Ma conclusion c'est que c'est pure imagination de prétendre tirer du ds² des conséquences[824] de cette nature."

Incompréhension des propos précis de Painlevé

En fait, Painlevé ne parle pas du décalage spectral d'un photon sur une géodésique radiale entre deux points différents, auquel cas comme nous l'avons montré il aurait tort, mais des "vibrations d'un même atome (la fréquence du photon émis) plus ou moins près du Soleil".

Il se place du point de vue de son observateur[825] en chute libre dans son référentiel (inertiel de Lorentz) local où le photon est émis.

Pour éviter toute ambiguïté, comme nous l'avons montré, il convient de préciser dans quel référentiel et à quelles coordonnées le photon est émis et dans quel référentiel et à quelles coordonnées il est mesuré.

Pour caractériser la fréquence d'émission liée à un processus donné (transition entre deux niveaux, caractéristique d'éléments chimiques) la mesure doit être faite dans le même référentiel et aux mêmes coordonnées que l'émission.

C'est ce que ses propos laissent supposer et on peut ajouter que c'est sans aucun intérêt, car on va trouver le même chose quel que soit le référentiel et les coordonnées[826].

Accessoirement, supposons qu'il y ait une arrière-pensée derrière ses propos[827]. Il faut donc chercher autre chose. Les phénoménologies des observateurs de Schwarzschild (statiques donc non inertiels) et de Painlevé (inertiels) étant différentes c'est de ce côté qu'on peut trouver un sens à ses propos.

Pour des atomes associés à des observateurs de Schwarzschild, statiques donc non inertiels, qui sont soumis à une accélération qui dépend de la valeur de *r*, la valeur de la fréquence émise, pour une transition électronique donnée, varie[828], si on la mesure localement dans un référentiel inertiel (absolu pour Painlevé), selon qu'on est plus ou moins près du Soleil.

Mais ce n'est pas le cas pour les observateurs de Painlevé, comme nous l'avons montré à plusieurs occasions précédemment. Les atomes étant en situation inertielle[829] ils émettent

[822]C'est la forme de la métrique qu'il propose dans son article.
[823]Allusion à la partie symétrique (anti-univers) où l'espace est en expansion?
[824]Selon le référentiel les conséquences peuvent varier.
[825]Point de vue aussi présent dans Mizony (2003) La relativité générale aujourd'hui ou l'observateur oublié.
[826]On est dans le référentiel local minkowskien en un point donné.
[827]On peut nous reprocher de spéculer sur ce que Painlevé voulait dire, mais nous essayons d'être constructifs.
[828]Dans le rapport donné par l'effet Doppler relativiste qui dépend de *r*.
[829]Notons également que la remarque de Painlevé sur la contraction des longueurs est de même nature que celle sur la fréquence des photons émis et n'apporte rien de plus ou de moins.

partout la même fréquence (par rapport à un référentiel inertiel)[830]. C'est sans doute cela que Painlevé veut souligner qui, concrètement, se traduit, comme nous le montrons plus loin par le fait qu'on peut simplement synchroniser des horloges associées à des observateurs de Painlevé alors que cela est hautement problématique pour des observateurs de Schwarzschild

.Les observateurs de Painlevé balisent un référentiel "synchronisable"[831] comme un référentiel de Minkowski. Nous verrons également qu'il est possible de baliser ce référentiel en espace (à condition d'en connaître la nature et certains paramètres). Tout ceci n'est pas trivial.

Au sujet du ds^2, rappelons qu'un observateur de Schwarzschild non inertiel et un observateur de Painlevé inertiel ne suivent pas la même ligne d'univers, ce sont des observateurs différents donc leurs ds^2 sont sur des lignes d'univers différentes. Pour faire des comparaisons de ds^2 il faut tenir compte de la ligne d'univers qu'ils mesurent.

Toutes ces imprécisions de langage participent à la confusion générale qui a prévalu pendant le débat qui n'a pas permis de démêler l'écheveau des propositions contradictoires et aboutir à la clarification pourtant simple du problème posé.

La phénoménologie qui a pu motiver les propos de Painlevé

Nous avons analysé la forme des propos de Painlevé, pour le fond, cette phénoménologie est résumée par l'équation donnant la valeur de la fréquence d'un rayonnement, mesurée par un observateur de quadri-vitesse U^μ

$$\omega = - g_{\mu\nu} U^\mu \frac{dx^\nu}{d\lambda} = -U_\mu \frac{dx^\mu}{d\lambda},$$

elle vaut,

$$\omega = \frac{dx^0}{d\lambda},$$

dans le cas de l'observateur de Painlevé, car

$$U_\mu = (-1, 0, 0, 0).$$

Bien entendu Painlevé n'a pas utilisé explicitement cet argument.

Sa motivation était inspirée par sa conception newtonienne qui lui a fait rechercher ce qui à son sens, en relativité, correspondait au référentiel absolu de la mécanique newtonienne.

Rappelons-nous ses propos que nous avons cités au début de ce document sur l'existence de référentiels privilégiés en relativité qui sont les référentiels absolus (immobiles par rapport à l'éther) de la mécanique classique.

Pas étonnant que, dans ces conditions, dans l'équation qu'il propose ce soit un référentiel inertiel qui soit l'objet de son choix.

C'est ce que la relativité a de plus approchant à proposer en la matière.

---

[830]Cela ressemble à de l'auto référencement, mais nous allons voir qu'on aboutit à quelque chose de concret.
[831]Voir Gautreau R. & Hoffmann B. (1978), dont un résumé est donné en annexe 3, chapitre 21.

En effet son observateur qui est (localement) inertiel co-mobile de l'espace-temps en effondrement et donc co-mobile du référentiel d'émission du photon va observer la fréquence "native[832]", d'une certaine radiation, émise[833] dans son référentiel local, comme en métrique de Minkowski et comme dans le référentiel absolu qui lui est cher en mécanique newtonienne.

Comment Painlevé a-t-il construit sa forme de métrique ?

Hypothèse d'une méthode "purement heuristique"

Si on ne se réfère qu'à l'article du 24 octobre 1921, connaissant la formation newtonienne de Painlevé, on est tenté de faire l'hypothèse[834] qu'il ait construit sa forme en insérant, sans autre forme de procès, dans la forme de Minkowski, la vitesse newtonienne $v = dr/dt = -(2GM/r)^{1/2}$ de son observateur (en chute libre radiale dans un champ central généré par une masse M) de sorte que dans le référentiel (local inertiel de Lorentz) attaché à cet observateur on retrouve la forme de Minkowski.

La forme de Painlevé, rappelée ci-dessous réalise explicitement ces conditions.

$$ds^2 = -d\tau^2 = -dt^2 + \left(dr + \sqrt{\frac{2GM}{r}}\,dt\right)^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2(\theta)\,d\varphi^2\right)$$

Avec $dr/dt = -(2GM/r)^{1/2}$, on a bien $d\tau = dt$ sur la géodésique radiale où θ, φ sont constants.

L'équation (complète) ci-dessus décrit un espace minkowskien (t, r, θ, φ) sous contrainte que $dr/dt = -(2GM/r)^{1/2}$, pour notre observateur.

De plus à coordonnée radiale constante, le temps propre d'un observateur est multiplié par $(1-v^2/c^2)$ par rapport à un observateur minkowskien à l'infini, ce qui correspond à l'effet cinématique de la relativité restreinte.

En relativité générale le Lagrangien géodésique L pour un observateur s'écrit

$$L = \tfrac{1}{2} g_{\mu\nu}(dx^\mu/d\tau)(dx^\nu/d\tau),$$

[832]On peut discuter le terme "natif"(privilégié) , il désigne la phénoménologie dans un référentiel inertiel.
[833]Correspondant par exemple à la transition qui permet de définir le mètre.
[834]Hypothèse également suggérée par Michel Mizony (Institut Camille Jordan, CNRS UMR 5028, université Lyon 1). Voir également, le CRAS de Sauger (1922) qui établit la forme de Schwarzschild sur ce type de critère.

avec τ comme paramètre affin. En développant ceci s'écrit :

$$2L = \frac{-dt^2}{d\tau^2} + \left(\frac{dr}{d\tau} + \sqrt{\frac{2Gm}{r}}\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta^2}{d\tau^2} + \sin^2(\theta)\frac{d\varphi^2}{d\tau^2}\right) \quad .$$

On obtient alors le mouvement géodésique par utilisation des équations de Euler Lagrange.

Mais on peut construire aussi ce même Lagrangien sur des considérations "semi-classiques" dans l'espace de Minkowski, en y introduisant l'énergie cinétique de la particule de test dans le référentiel chute libre radiale de vitesse $dr/d\tau = -(2GM/r)^{1/2}$ associé au potentiel newtonien $-GM/r$, ce qui a également pu conforter Painlevé dans son intuition.

Compte tenu des considérations précédentes, en particulier que pour la vitesse $dr/d\tau = (2GM/r)^{1/2}$, l'espace est minkowskien, cette manière de construire ce Lagrangien ne paraît pas absurde. On peut d'ailleurs construire le Lagrangien qu'on veut, reste à l'interpréter.

Il faut cependant noter que les dérivées s'expriment par rapport au temps propre de la particule de test (ce que nous avons déjà souligné pour le modèle de la rivière), ce qui n'est pas newtonien (où la coordonnée temporelle est "absolue") mais peut se comprendre dans une extension pseudo-newtonienne dans un espace-temps de Minkowski.

Bien entendu cette méthode n'est pas très académique mais cela donne un résultat correct.

C'est sans doute lié à ce que, pour cet espace-temps,[835] la seule courbure, que cette contrainte "compense", est temporelle.

Painlevé a sans aucun doute utilisé une méthode scientifique rigoureuse

Même si la première méthode citée a pu l'inspirer, un scientifique de la rigueur de Painlevé ne s'en serait sans doute pas satisfait.

Son article du 14 novembre 1921, suivant de peu celui du 24 octobre 1921, nous donne les éléments de réponse qui manquent dans l'article précédent.

Il détermine *a priori* la forme géométrique générique d'une solution ne dépendant pas du temps (au minimum) stationnaire, à symétrie spatiale sphérique et contraint cette solution par les équations d'Einstein , comme nous l'avons vu lorsque nous avons étudié cet article[836].

Rappelons ses propos :

[835]Et quelques autres, dont la cosmologie critique décrite par Lemaître comme déjà indiqué. Ce comportement pseudo-minkowskien, qui permet à certains de proposer une description pseudo-newtonienne en postulant toutefois, que les coordonnées (t, r, θ, φ) dépendent d'un temps propre τ, sont sans doute liées à cette particularité.

[836]C'est méthodologiquement la même approche que suivra Lemaître dix ans plus tard.

"Mais Einstein veut a priori que ces conditions invariantes soient des dérivées partielles du deuxième ordre d'une forme spéciale, qui s'inspirent à la fois des théories de la gravité newtonienne en coordonnées curvilignes, et de la théorie de la courbure des surfaces ordinaires[837].

Ce sont ces restrictions capitales et non le truisme pur et simple de l'invariance, qui parmi les ds² de la forme ([3]) ne laissent subsister que les suivants :

$$ds^2=\left(1-\frac{2\mu}{f(r)}\right)[dt-\chi(r)\,dr]^2-f^2(r)\left(d\theta^2+\sin^2\theta\,d\varphi^2\right)-\frac{f'^2(r)\,dr^2}{1-\frac{2\mu}{f(r)}} \quad ([4])"$$

C'est donc bien en scientifique et mathématicien rigoureux que Painlevé expose le problème.

Peut-on définir une fréquence "native" pour les rayonnements ?

Un même photon se propage localement à la même vitesse dans tous les référentiels.

Seule sa fréquence est affectée par le choix du référentiel de mesure.

Comment définir une fréquence native (à supposer que cela ait un sens) du rayonnement émis à partir de la mesure dans un référentiel quelconque ?

Comme le temps propre est affecté par un champ gravitationnel, il est naturel de considérer que cette fréquence native serait celle observée dans un laboratoire minkowskien[838].

Localement un laboratoire en chute libre, dans la forme de Painlevé où la quadri-vitesse covariante, dont dépend la valeur mesurée de la fréquence d'un rayonnement, est égale à celle de la forme de Minkowski reproduit localement les conditions minkowskiennes pour cette phénoménologie, ce qui confère alors une pertinence aux propos de Painlevé.

Le choix de sa forme n'est donc pas fortuit, et implicitement ou non, ce n'est peut-être pas étranger à son choix. La genèse mystérieuse de cette forme pourrait ainsi s'évanouir à la lumière de cette hypothèse.

Ajoutons, comme nous l'avons également signalé auparavant, et c'est une conséquence de la constance des fréquences d'émission de photons, ce qui est particulièrement évident quand on utilise des horloges atomiques, que les horloges de tous les observateurs de Painlevé battent au même rythme, comme dans un référentiel newtonien, ce qui n'est pas le cas des observateurs de Schwarzschild (soumis relativement à des accélérations différentes).

Ce qui est admirable c'est que, malgré une approche, au moins partiellement erronée, Painlevé, confronté aux différentes contraintes, dont certaines contradictoires, des théories, ait réussi à dégager une solution originale et innovante qui est une ligne de moindre différence entre ces contraintes.

[837]Bien qu'il ne le dise pas explicitement Painlevé fait référence à l'équation d'Einstein.

[838]Le calcul de la fréquence, d'un photon, mesurée par un observateur dépend de sa quadri-vitesse covariante qui dans la forme de Painlevé est identique à celle de Minkowski.

À chacun sa vérité

Comment ce malentendu a t'-il pu se perpétuer si longtemps alors que le concept de décalage spectral paraissait bien défini, même à son époque ?

Quand on examine la qualité de certaines contributions en particulier le haut niveau formel des discussions qui ont nourri le débat suite à l'article de Painlevé, on ne peut que s'étonner qu'un point aussi fondamental ait pu échapper à la sagacité des intervenants.

Tout cela témoigne de la confusion et la frilosité qui régnait à l'époque, puisqu'on n'a pas été capable, sans doute par peur de s'exposer à des critiques, de poser le problème correctement en énonçant toutes les hypothèses implicites ou pas suffisamment explicites qui avaient été faites, ce qui aurait permis de mettre tout le monde d'accord sur une réponse commune.

Rappelons que les "disciples d'Einstein", qui étaient encore sous le coup de la découverte d'une singularité dans la solution de Schwarzschild, l'horizon, craignaient que cette "monstruosité" comme disait A. Eddington ne jette le discrédit sur la théorie, si contestée.

Paradoxalement nous avons vu que cet argument n'a pas été retenu dans les différentes critiques pourtant virulentes formulées à l'encontre de la théorie. Il faudra bien du temps pour comprendre et accepter ces singularités qui n'ont fait que se généraliser dans la théorie de la relativité générale.[839]

Cela met encore en exergue le fossé qui existait entre les élites des académies scientifiques et Einstein, qui, guidé principalement par son intuition, d'une part compensait un défaut de connaissances formelles par un pragmatisme créatif[840] et d'autre part n'était pas trop inhibé par un excès de culture scientifique.[841]

En l'occurrence, mais peut-être que le cas d'Einstein est atypique[842], c'est l'autodidacte guidé par son intuition puisée dans l'empirisme du monde physique, qui avait raison.

Faute d'avoir fait cette clarification sur ce qu'on nommait décalage spectral, chacun a donné sa réponse partielle particulière, plus ou moins pertinente, qui ne traitait pas de l'intégralité du problème.

Comme souvent chacun avait raison, mais dans sa propre approche du problème.

---

[839]Voir théorème des singularités de Penrose et Hawking. Einstein n'a sans doute jamais accepté l'existence d'un horizon (en fait non singulier) dans le problème que nous considérons.

[840]Einstein à l'époque de la relativité restreinte était assez dubitatif voire ironique sur l'intérêt des travaux formels qui étaient entrepris à propos de sa théorie, comme ceux de Poincaré à propos du groupe associé à la relativité restreinte et de la forme de Minkowski. A l'occasion de la relativité générale il s'est rendu compte de l'importance de maîtriser certains outils mathématiques comme le calcul tensoriel, mais sa querelle en paternité de la théorie de la relativité générale avec Hilbert montre, même s'il compensait certains manques par un génie créatif [comme quand il démontre "à la main" son équation géodésique sans recourir aux équations de Lagrange comme l'aurait fait tout bon mathématicien- Einstein (1916)], qu'il était encore très loin du niveau des "mécaniciens" et mathématiciens qui peuplaient les instances académiques à cette époque.

[841]On sait que trop de réflexion peut nuire à l'action.

[842]Il l'est certainement et à plus d'un titre. Modeste collaborateur au bureau des brevets de Berne, son œuvre majeure, la relativité générale est vraiment l'œuvre d'une seule personne et jamais personne scientifique n'a été autant honorée qu'Einstein. Par contre concernant la relativité restreinte, la situation était différente, car même si on peut créditer à Einstein le mérite d'avoir finalisé le travail en s'appuyant sur une approche qui lui était propre, les idées étaient dans l'air et des contributions majeures avaient été faites par d'autres scientifiques (Lorentz, Poincaré,...)

22- Conclusion

À la lumière de la faillite scientifique que nous avons évoquée, nous voyons que l'introduction d'une théorie comme celle de la relativité d'Einstein aussi dévastatrice vis-à-vis des schémas de pensée solidement établis, ne peut se faire que dans la passion et la confusion.

Indépendamment des adversaires résolus qui sont le lot de toute innovation, surtout lorsqu'elle est aussi radicale, même les contributeurs les plus enthousiastes ne se sont pas pour autant dégagés de tous les préjugés hérités du contexte dans lequel cette révolution s'est produite.

Nous avons constaté que même s'ils ont contribué à faire progresser la théorie, ils étaient loin d'en avoir appréhendé toute l'étendue et d'en accepter toutes les conséquences.

Autrement dit, le champ de ruines résultant de l'onde de choc provoquée par la relativité n'a pas révélé clairement ce qu'il y avait sous les décombres. Les physiciens plutôt désorientés n'en percevaient difficilement que des contours dont l'harmonie leur était étrangère.

Il apparaît que c'est ainsi que se font les découvertes majeures, en rupture avec les paradigmes en vigueur.

Murray Gell-Mann, auteur de la découverte majeure des quarks, fait valoir dans une approche darwinienne que la science, comme la vie, progresse par bonds, par des phases[843] enchaînant croissance et mutation, à la manière des reptiles. Il faut donc savoir se débarrasser de ses anciennes peaux pour permettre d'atteindre la maturité et à cet effet d'accepter d'abandonner une partie de soi et désapprendre ce qui y correspondait pour s'adapter.

Si on adopte ce point de vue, une simple évolution permet certes de progresser mais se heurte à des limites, asymptotiques sans doute, qui ne peuvent être franchies que par une mutation.

À ce titre, l'introduction de la relativité par Einstein a été une mutation conceptuelle de la pensée scientifique. Mais de son côté, l'intuition de Painlevé, novice en relativité, donc libre de tout schéma de pensée établi dans ce domaine, n'était-elle pas propice à saisir des implications implicites même déroutantes de la théorie, comme celle d'un espace "intrinsèquement en mouvement" ?

Ceci corrobore l'influence capitale de l'environnement puisque si en génétique les mutations semblent être un mécanisme universel lié à ce que nous appelons des "erreurs de transmission du patrimoine génétique[844]", c'est l'adaptation au milieu qui sélectionne les mutations "gagnantes". Mais, pour autant, pour sortir d'un équilibre local, il faut un grand bouleversement brutal.

En physique, astrophysique et cosmologie, pour ne citer que ces domaines[845], l'utilisation de moyens d'expérimentation et d'observation de plus en plus puissants fournissent une référence contextuelle de données que les scientifiques peuvent exploiter d'une part pour les confronter aux théories existantes et en chantier mais aussi pour y puiser la source de théories en rupture avec la science académique en vigueur.

C'est sans doute ainsi qu'émergeront des idées qui, balayant l'existant, viendront semer les germes d'une nouvelle théorie totalement inattendue et déroutante

L'apport de Painlevé, que nous avons décrit dans la deuxième partie de ce document, avec la phénoménologie comme fil conducteur, enfin reconnu aujourd'hui, portait les germes de ce

[843]Murray Gell-Mann "le quark et le jaguar".
[844]On les qualifie d'erreurs, mais ne sont-elles pas un procédé nécessaire d'adaptation à un contexte qui change ?
[845]Que dire des progrès dans la science du vivant et sur l'organisation sociétale (réseaux). Quel sera leur impact ?

type de bouleversement par des concepts, en rupture avec les idées de l'époque, ce qui a d'ailleurs causé sa perte.

Nous avons découvert que cette forme, pour cette solution des équations d'Einstein, révélait des propriétés qui ont dérouté les scientifiques, comme l'orientation spatio-temporelle de l'espace avec sa "dynamique" associée. Nous avons montré que la nullité[846] du pseudo-tenseur d'énergie-impulsion du champ gravitationnel (Landau & Lifchitz) en coordonnées cartésiennes [847] révélait une propriété caractéristique de cet univers.

Nous avons tenté de comprendre la phénoménologie associée à ces propriétés étranges, car en-effet dans un espace-temps intrinsèquement courbe on peut se demander comment il est possible qu'un observateur puisse voir un espace-temps de type pseudo-minkowskien.

Nous nous sommes attachés à présenter différents aspects de la phénoménologie sous-jacente à cette forme, en étudiant ses différentes caractéristiques, pour tenter de déchiffrer certains aspects paradoxaux qu'elle présente.

À cet effet, la synthèse des différentes représentations de cet espace-temps sur un même diagramme a permis de mieux comprendre la phénoménologie associée à la solution de Schwarzschild telle qu'elle est perçue (et mesurée) par les différents observateurs dont l'observateur de Painlevé et la nature des paradoxes qui s'y rattachent.

Une des conclusions qui s'est imposée à ce propos est que la forme de Painlevé, parce qu'elle représente la solution au problème du corps "central" à symétrie sphérique sous sa forme d'un espace-temps stationnaire (de type cosmologique mais vide) et non pas statique, fournit une représentation beaucoup plus simple dans le contexte de la relativité générale que celle de Schwarzschild, utilisée en général comme référence, qui de prime abord paraissait s'imposer.

Si privilégier une forme de métrique semble porter atteinte à la covariance revendiquée par la théorie c'est oublier que cette contrainte est purement formelle et sans effet sur le contenu de la théorie (Painlevé la qualifie de truisme), et que si toutes les formes doivent décrire, avec les mêmes lois, la même situation physique, certaines le font d'une manière plus claire à notre entendement.

La structure unifiée d'espace-temps de la relativité, déterminée par des considérations permettant d'assurer la cohérence de la physique moderne, n'est pas celle que nos données immédiates de la conscience nous inspirent sans nul doute, forgées dans notre relation quotidienne avec le monde physique extérieur. Cette préférence est peut-être liée à une infirmité de notre entendement mais elle se révèle une méthode efficace pour la surmonter ou du moins pour la contourner.

Cette approche implicitement newtonienne, non covariante, est corroborée par l'usage quasi-systématique (bien pratique) du diagramme de Minkowski où pour expliciter et comparer les différentes phénoménologies nous avons représenté la fonction *r(t)* ou *t(r)* dans différentes coordonnées où temps et espace sont seuls pris en considération.

[846]Le pseudo-tenseur est identiquement nul.

[847]Cela peut paraître trivial pour un observateur décrivant une géodésique, mais nous avons montré que le fait que ceci soit une propriété de la forme de la métrique stationnaire globale montre son caractère particulier.

Serions-nous tombés dans le travers que nous dénonçons ?

Incidemment, la forme de Painlevé établit une passerelle entre non covariance et covariance[848] puisque pour la géodésique radiale associée à l'observateur de Painlevé, la coordonnée temporelle est égale au temps propre qui est le paramètre affin, rendant la représentation sur le diagramme de Minkowski, de facto, covariante. Cela n'est pas étranger à l'adéquation de cette forme à la représentation physique des caractères de cette solution de la relativité générale.

Si ceci est trivial dans les formes "géodésiques" comme celle de Lemaître[849], ce qui ne fait que souligner le caractère physique d'une géodésique, cela ne l'est pas dans une forme "non géodésique" comme celle de Painlevé.

Corrélativement, le feuilletage de l'espace-temps en temps et espace est très simple[850] et est bien adapté à notre perception immédiate séparée de ces concepts, ce qui permet, sans gymnastique cérébrale excessive, une interprétation physique correcte de type classique des géodésiques de Painlevé.

Après avoir été longtemps incomprise comme le rappel historique l'a montré, puisque Painlevé lui-même l'a reniée, l'intérêt que présente cette forme n'a été redécouvert que récemment[851].

Sa mise à l'index, fondée sur un malentendu comme nous l'avons montré, montre combien il faut être prudent en cette matière et, dans l'intérêt général, ne pas jeter l'anathème trop rapidement sur quelqu'un qui tient des propos jugés intempestivement incohérents.

On a qualifié Painlevé de piètre relativiste[852]. Pourtant, si on se réfère à la valeur de sa contribution, comme nous avons essayé de le montrer, on pourrait nuancer ce jugement.

Par exemple Schwarzschild, dont la gloire est intimement associée à celle d'Einstein, et à qui on attribue la forme de la métrique qui porte son nom alors qu'en fait sa solution ne décrivait que la partie extérieure à l'horizon et que c'est Droste qui lui a donné la forme qu'on connaît, n'avait pour ambition que se demander ce que les équations de la gravitation dans le cas du système solaire devenaient dans cette nouvelle théorie, ce qui est louable mais relève plus d'un exercice plutôt pratique qu'ontologique.

Est-ce plus important que d'essayer de comprendre comment la nouvelle théorie bouscule, jusqu'au cœur même de ses concepts, la théorie qui faisait figure de monument de la science ?

---

[848]D'autres méthodes, nativement covariantes existent comme, par exemple, l'étude des congruences de géodésiques que nous avons présentées au chapitre *13* dont la portée plus générale permet une étude plus approfondie de la structure des espaces temps solutions de la relativité générale.

[849]La forme ne contient que des termes quadratiques et la composante temporelle du tenseur métrique, $g_{00} = -1$.

[850]Voir le chapitre *18* sur la décomposition ADM. Les feuilles spatiales (hypersurfaces 3D) sont euclidiennes, le temps est celui d'un observateur de Painlevé dont la ligne d'univers géodésique est orthogonale à ces feuilles.

[851]Entre autres on peut montrer que l'équation de Dirac s'exprime simplement dans cette forme.

[852]Compte de tenu de l'argument, que nous avons développé au début de la conclusion, invoquant la nécessité de désapprendre, n'était ce pas plutôt un avantage d'être libre de toute contrainte d'acquis dans ce domaine pour y faire une contribution permettant de faire faire un bond à la théorie alors que ses tenants étaient encore en phase d'assimilation et de consolidation des acquis ? Finalement il n'est pas étonnant qu'un tel bond soit issu d'un "novice".

Cela dépend de la valeur qu'on attribue aux choses. Sans doute qu'Einstein, lui-même dont la sensibilité aux aspects épistémologiques a fait la force aurait apprécié ce débat s'il avait pu se dérouler sereinement.

En effet, en dépit des aspects polémiques, Painlevé était plus exigeant puisqu'il cherchait vraiment à déterminer en quoi cette théorie pouvait remettre en cause les fondements de la mécanique newtonienne auréolée de la gloire de ses contributions magistrales en mécanique céleste.

Au cours de l'analyse de ses textes, nous avons vu que dans son approche il a bien touché du doigt certains aspects fondamentaux de la théorie comme la remise en cause du caractère physique des coordonnées, qui avait également posé problème à Einstein, puisqu'il lui avait fallu trois ans pour l'accepter.

Lorsque, pour comparer les deux théories, il établit une forme géométrique strictement spatiale, nativement covariante, de la gravitation newtonienne, il invoque implicitement que le temps absolu newtonien qui s'écoulerait indépendamment de toute chose est une pure fiction et qu'il n'émerge physiquement qu'en tant que paramètre dynamique affin sur la géodésique spatiale.

Ceci rejoint les conceptions modernes[853] comme nous l'avons argumenté à propos du lien indissoluble entre les coordonnées d'espace et de temps à travers la forme de la métrique.

Painlevé est un scientifique de grande valeur et même si son attachement à la théorie newtonienne peut troubler son jugement sur la théorie d'Einstein non seulement elle ne lui fait pas perdre, pour autant, toute capacité de discernement mais c'est probablement, comme nous l'avons soutenu ce conflit d'idées[854] qui l'a conduit, sans doute inconsciemment, à la solution inspirée qu'il propose.

Comme le débat qui a suivi n'a pas permis de clarifier ces points,[855] et que ces articles, qui sont sa seule contribution en Relativité n'ont pas connu la résonance qu'ils méritaient, au bout de quelques mois, il a mis un terme définitif à ses travaux.

Le regain d'intérêt pour cette approche a fait école. Il a fait des émules qui ont utilisé le modèle pour établir une forme du même type dans la solution de Kerr-Newmann permettant d'en proposer une description phénoménologique d'une surprenante simplicité.

Nul doute que Painlevé aurait été surpris d'apprendre que la postérité pourrait retenir sa contribution sur la relativité générale plutôt que ses réalisations monumentales comme la ligne Maginot par exemple.

Ce n'est pas encore ce qui figure dans les livres d'histoire mais après tout, comme il a fallu quatre-vingts ans pour redécouvrir l'intérêt de sa contribution, cela laisse un peu de temps pour réparer cet oubli.

[853]Voir par exemple Julian Barbour (2011).
[854]Ce ne serait pas la première fois qu'une solution géniale serait issue d'hypothèses erronées, cf l'équation de Dirac également établie pour des raisons douteuses : il existe de valeurs < 0 à l'équation du courant de probabilité
[855]Ce point est détaillé au chapitre *2*.

Annexes

Annexe 1 : l'article de Painlevé suivi de celui de E. Picard

ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 24 OCTOBRE 1921.

PRÉSIDENCE DE M. GEORGES LEMOINE.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS
DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

MÉCANIQUE. — *La Mécanique classique et la théorie de la relativité.* Note de M. PAUL PAINLEVÉ.

Je voudrais exposer brièvement à l'Académie certaines conclusions d'une étude critique de la théorie de la relativité que je publierai prochainement et où je compare les postulats de la théorie de la relativité (restreinte et généralisée) aux postulats de la mécanique newtonienne. J'y discute notamment la question de savoir s'il existe ou non *des axes privilégiés* parmi tous les modes de référence possibles. La mécanique newtonienne repose tout entière sur cet axiome, qu'on peut appeler l'*axiome de causalité* en mécanique :

« *Il est possible, une fois pour toutes, et pour tout l'univers, de définir une mesure des longueurs, du temps, et un trièdre de référence tels que le principe de causalité soit vrai toujours et partout.* »

Autrement dit, considérons un système matériel dont chaque élément reste identique à soi-même, et qui est très éloigné de tous les autres corps matériels; si les conditions initiales (positions et vitesses des éléments à l'instant considéré t_0) se reproduisent transportées seulement dans l'espace et le temps, le même mouvement se reproduira, au même transport près, dans l'espace et le temps.

Une première conséquence, c'est que les lois du mouvement du système ne dépendront pas explicitement du temps.

Une seconde conséquence, c'est l'*axiome de la symétrie* (corollaire de l'axiome de causalité). Si les conditions initiales présentent une symétrie

quelconque (par rapport à un plan, un axe ou un point), la même symétrie persistera dans le mouvement.

Cet axiome de la symétrie entraîne le principe de Képler ou de l'inertie et une foule d'autres conséquences capitales.

Si ces propriétés sont vraies quand on a adopté un repérage *espace-temps* convenable, elles ne le sont plus quand on lui substitue un repérage arbitraire. Sous sa forme positive, le postulat fondamental de la doctrine newtonienne, c'est qu'un tel repérage existe effectivement. Pour les newtoniens, il correspond à une mesure du temps, des longueurs et des mouvements absolus. Bornons-nous à l'appeler *repérage privilégié*.

L'expérience a montré, par un prodigieux ensemble de vérifications, aussi précises que le comportent nos mesures actuelles, qu'il existe effectivement un repérage *espace-temps* possédant à la fois toutes les propriétés attribuées *a priori* par les newtoniens au repérage absolu. Aucun autre repérage ne répond à ces axiomes, sauf ceux qui se déduisent du premier par la substitution aux axes de nouveaux axes animés relativement aux premiers d'une translation rectiligne et uniforme; *les axes privilégiés* sont ainsi définis à une translation rectiligne et uniforme près.

Les doctrines d'Einstein, dont j'admire profondément l'audace de pensée et la puissance constructive, conduiront-elles à abandonner définitivement le postulat fondamental de la mécanique newtonienne? Je crois au contraire qu'il subsistera de ces doctrines un corps de formules qui sans la contredire se fondra dans la science classique, mais que ne subsisteront pas les principes ou conséquences philosophico-scientifiques qui ont été, suivant les jugements, le scandale ou le miracle de la théorie de la relativité.

Lorsqu'on analyse les postulats et raisonnements qui ont conduit Einstein à ses résultats positifs (1), on voit combien ils sont imprégnés de « newtonisme ».

Insistons notamment sur la formule explicite de la gravitation dans le cas d'un centre unique (2). C'est la célèbre formule qui a donné lieu aux deux vérifications éclatantes : mouvement du périhélie de Mercure, déviation d'un rayon lumineux au voisinage du Soleil.

Rapportons le mouvement de l'élément gravitant à des axes $Oxyz$ ayant

(1) Cette analyse sera développée dans une Note prochaine.

(2) Cette remarque a déjà été faite par plusieurs auteurs, notamment par M. Le Roux, dans d'intéressantes Communications (*Comptes rendus*, t. 172, 1921, p. 1227, 1467).

le centre matériel comme origine O. Pour un newtonien, si ces axes sont des axes absolus, les équations différentielles du mouvement doivent être indépendantes du temps et symétriques autour du centre O; mais si le centre O est animé d'un mouvement absolu varié, ou si les axes tournent par rapport aux étoiles, il n'en est plus ainsi. Or, pour arriver à leur loi explicite de gravitation, les einsteiniens doivent admettre *a priori* que, le temps t et les coordonnées polaires r, θ, φ étant mesurées à la manière ordinaire, leur formule fondamentale doit ne pas dépendre explicitement du temps et doit être dissymétrique par rapport à r, θ, φ autour de l'origine. Or cette hypothèse n'est vraie que si les axes $Oxyz$ sont des axes privilégiés au sens newtonien et présuppose par conséquent l'existence de tels axes. Cette hypothèse admise, les einsteiniens parviennent au ds^2 (à quatre variables) aujourd'hui célèbre, dont les géodésiques définissent dans leur théorie le mouvement du point gravitant, à savoir

$$(1) \qquad ds^2 = dt^2\left(1 - \frac{a}{r}\right) - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) - \frac{dr^2}{1 - \frac{a}{r}},$$

a désignant une constante arbitraire que déterminera la masse du centre matériel O.

Mais ce ds^2 n'est pas le seul qui réponde à toutes les conditions einsteiniennes. Il en est une infinité d'autres dépendant de deux fonctions de r et le choix de la formule (1) entre toutes ces formules est purement arbitraire. Parmi ces formules il en est d'aussi simples que la formule (1) et qui entraînent exactement les mêmes vérifications. Telle celle-ci :

$$(2) \qquad ds^2 = dt^2\left(1 - \frac{a}{r}\right) + 2\,dr\,dt\sqrt{\frac{a}{r}} - d\sigma^2,$$

avec

$$d\sigma^2 = dr^2 + r^2[d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2]$$

(ds^2 euclidien à trois dimensions).

Or on sait que pour les einsteiniens, le ds^2 a une signification mystique et universelle, contraignant tous les phénomènes à se couler dans une sorte de forme *espace-temps* comme l'eau dans un vase. D'une formule déduite de l'étude du mouvement des corps gravitants et de la propagation de la lumière, ils pensent déduire des conséquences relatives aux phénomènes immobiles ou quasi immobiles. C'est ainsi que de la formule (1) ils concluent :

1° Que les vibrations lumineuses d'un même atome doivent être plus

courtes près du Soleil que sur la Terre (le ralentissement étant le même pour tous les atomes);

2° Que nos solides, dits invariables, nos mètres en particulier, doivent se raccourcir tous dans le même rapport dans la direction du Soleil, quand ils sont plus près de celui-ci.

Lors même que la formule (1) serait *imposée* sans aucune ambiguïté, par la doctrine einsteinienne de la gravitation et de la propagation de la lumière, les conclusions que je viens d'énoncer m'apparaîtraient comme des conjonctures des plus audacieuses, et non pas comme des conséquences inévitables de cette doctrine, qui suffiraient (comme l'affirme Einstein avec sa magnifique franchise) à la faire crouler si elles ne se vérifiaient pas. Mais l'existence de la formule (2) et d'une infinité d'autres possibles me paraît suffire à démontrer le caractère plus qu'aventureux de telles prévisions.

Si l'on admet, en effet, la formule (2), on retombe, pour $dt = 0$, sur le ds^2 euclidien ordinaire; d'où (en raisonnant comme les einsteiniens) la conséquence que nos solides ne subissent aucune contraction dans aucun sens quand ils se rapprochent du Soleil. D'autres formules, aussi simples, conduiraient à la conclusion que ces corps se dilatent dans le sens du Soleil au lieu de se contracter; d'autres encore que les corps se dilatent perpendiculairement à la direction du Soleil.

Ma conclusion c'est que c'est pure imagination de prétendre tirer du ds^2 des conséquences de cette nature.

PHYSIQUE. — *Quelques remarques sur la théorie de la relativité.* Note de M. **Émile Picard.**

Ayant écrit, pour l'*Annuaire du Bureau des Longitudes de* 1922, une Notice sur la théorie de la relativité et l'Astronomie, je demande la permission de faire quelques remarques sur cette théorie, à l'occasion de la très intéressante communication que vient de faire M. Painlevé. En traçant une esquisse de la théorie moderne de la relativité, j'ai voulu tout d'abord rester narrateur impartial, n'ayant pas encore une opinion sur la place que l'avenir réservera à l'édifice, si séduisant par certains côtés, construit par Einstein, et me demandant si c'est un progrès de chercher à ramener la Physique à la Géométrie; j'admire d'ailleurs hautement l'effort accompli dans cette audacieuse tentative.

Ceux que ne fascine pas une sorte de mystique de la relativité, ont tous été frappés des nombreuses hypothèses plus ou moins dissimulées que renferme la théorie. La première partie de celle-ci, dite théorie de la relativité restreinte, se développe harmonieusement en partant de l'interprétation, communément sinon universellement admise, de l'expérience classique de Michelson, interprétation d'après laquelle la vitesse de la lumière pour un observateur placé dans un système animé d'une translation uniforme est une constante universelle, et en faisant intervenir les signaux lumineux dans les mesures du temps et de l'espace; en particulier, la cinématique de cette relativité restreinte est une des belles parties de l'œuvre d'Einstein.

Quand on passe à la théorie générale, on est conduit à rattacher la physique d'un Univers à une forme quadratique de différentielles à quatre coordonnées, et l'on pose en principe que toute loi physique doit être exprimée par des équations gardant dans leur ensemble la même forme, quand on substitue aux coordonnées initiales des fonctions quelconques de celles-ci, ce qui constitue, sous une forme générale, le principe de relativité. D'ailleurs, pour une catégorie étudiée de phénomènes, il est nécessaire de faire des hypothèses complémentaires pour parvenir à une forme quadratique correspondante. Le raccord, si je puis dire, entre la théorie restreinte et la théorie générale, se fait par l'intermédiaire de ce que l'on appelle l'*Univers tangent en chaque point à l'Univers envisagé;* c'est là un point capital, mais les difficultés d'application peuvent être grandes, comme en témoigne la question controversée du déplacement vers le rouge des raies du spectre solaire sous l'action du champ de gravitation du Soleil.

Pour que la Physique s'engage définitivement dans la voie ouverte par la théorie de la relativité, il faudra probablement que de nombreuses expériences d'un caractère positif aient été effectuées dans les laboratoires. Une expérience, se rattachant aux questions qui nous occupent, fut faite, il y a une dizaine d'années, par M. Sagnac. Elle présente quelque analogie avec celle de Michelson, mais elle se passe dans un système auquel on donne un mouvement de rotation. Dans cette expérience, on observe un déplacement de franges d'interférence, qui met en évidence la rotation. Comme il ne s'agit pas d'un mouvement de translation uniforme, il n'y a pas d'opposition avec la théorie restreinte d'Einstein. Il serait intéressant d'expliquer la belle expérience de M. Sagnac au moyen de la théorie générale de la relativité, en allant jusqu'aux concordances numériques.

Nous avons dit qu'on trouve dans l'établissement de la théorie de la relativité einsteinienne des points obscurs et des hypothèses insuffisamment

formulées. Mais cette critique touche peu ceux qui pensent qu'une théorie ne doit pas avoir la prétention de donner des apparences une explication conforme à la réalité, et que seuls importent les formules finales et leur accord aussi exact que possible avec un ensemble de résultats expérimentaux, le but essentiel étant de *sauver les phénomènes*, σώζειν τά φαινόμενα, suivant une expression qui remonte à Platon, et la partie essentielle d'une théorie étant surtout le moule analytique dans lequel elle enferme les choses. A ce point de vue, on peut dire que ce qui constitue une théorie de la relativité, c'est la forme quadratique qui lui correspond. Celle-ci obtenue, on peut faire abstraction de la manière dont on y a été conduit.

D'autres, attachés aux idées traditionnelles, ont été surtout frappés par les propositions d'allure paradoxale qu'on rencontre dans la théorie de la relativité, et y ont vu principalement une modification dans les idées fondamentales de l'humanité relatives à l'espace et au temps. Ils ne prennent pas facilement leur parti d'une sorte de rupture avec le sens commun. L'avenir dira dans quelle mesure les idées nouvelles, si elles reçoivent de nouvelles confirmations expérimentales, pourront s'incorporer dans ce bon sens moyen de l'humanité, où Descartes mettait le fondement de la certitude, et qui était pour lui le trait d'union entre notre pensée et le réel. Sans cet accord, il n'y a que scepticisme; c'est un écueil que n'ont pas toujours évité les théoriciens de la Physique.

Annexe 2 : Painlevé biographie

Paul Painlevé,[856] né à Paris le 5 décembre 1863 et mort à Paris le 29 octobre 1933 est un mathématicien et homme politique français.

Spécialiste de l'aéronautique, président de l'Académie de sciences, normalien, professeur à la faculté des sciences de Paris et à l'école polytechnique, élu à l'Académie des sciences en 1900, il entra en politique à l'occasion de l'affaire Dreyfus.

Le mathématicien

Élève de l'école normale supérieure agrégé en 1886, il alla suivre les cours de Schwarz et de Klein à Göttingen. Il enseigna ensuite à Lille, puis à Paris. Il fut professeur à la faculté des sciences de l'université de Paris (1892-1896), à l'École polytechnique, au Collège de France (1897-1900) et à l'École normale supérieure. Commençant par sa thèse *Sur les lignes singulières des fonctions analytiques* soutenue le 10 juin 1887, ses travaux mathématiques les plus réussis portèrent sur les points singuliers des équations différentielles algébriques du premier et du second ordre (singularités) et sur les fonctions abéliennes. Ils lui valurent d'être élu à l'Académie des sciences en 1900. Il en deviendra président en 1918.

En tant que mathématicien, dans le cadre de ses recherches en mécanique des fluides, ses travaux portèrent principalement sur les systèmes d'équations différentielles et leurs singularités, les fonctions elliptiques, l'analyse complexe.

Équations différentielles de Painlevé : Lazarus Fuchs avait établi une typologie des équations différentielles du 1er ordre. Painlevé s'attaqua, avec Charles Émile Picard, à celles du second ordre. Les équations de la forme : $y'' = f(z, y, y')$, où f désigne une fonction rationnelle en y et y', portent son nom et permirent une classification d'où émergea des équations types, comme $y'' = 6y^2 + x$, possédant des solutions transcendantes appelées fonctions transcendantes de Painlevé.

Enfin Paul Painlevé a trouvé en 1921 une forme de métrique inhabituelle, trop méconnue, qui rend compte du champ gravitationnel d'un astre à l'extérieur de cet astre.

[856] Adapté de Wikipedia

L'homme politique

1910-1917

Député, ministre de l'Instruction, de la Guerre, président du Conseil

Il s'engagea dans une carrière politique à partir de 1910, se faisant d'abord élire député du Ve arrondissement de Paris. Créateur, au tout début du conflit mondial, de la Direction des inventions intéressant la défense nationale, il devint le grand théoricien de l'aviation et obtint du Parlement, en 1910, le vote des premiers crédits pour l'achat d'avions.

En octobre 1915, alors qu'il vient d'être nommé ministre de l'Instruction Publique dans le gouvernement présidé par Aristide Briand, les fondateurs du comité d'initiative de l'œuvre des Pupilles viennent lui expliquer que les œuvres non-laïques obtiennent tous les fonds des quêtes publiques en faveur des orphelins. Il décide de faire agréer l'œuvre des Pupilles pour qu'elle puisse obtenir des fonds et aider les orphelins des écoles laïques. Sa présidence est marquée notamment par la multiplication des colonies de vacances et d'écoles de plein air, l'attention portée à la santé des pupilles, et la modification des statuts de l'œuvre qui s'occupe désormais non seulement des orphelins mais de tous les enfants en difficulté.

Ministre de la guerre en mars 1917, il devient président du Conseil en septembre et nomme alors Philippe Pétain commandant en chef et Ferdinand Foch chef d'état-major. Il est remplacé deux mois plus tard par Georges Clemenceau.

1919-1933

Ministre de la Guerre, président de l'Assemblée, président du Conseil, ministre de l'Air

Il est réélu député en 1919. Il anime la ligue de la République en 1921-22 (à l'époque de ses contributions à la relativité générale), puis participe au Cartel des gauches. Après la victoire du Cartel des gauches, il présida la Chambre du 9 juin 1924 au 17 avril 1925, jusqu'au moment de sa candidature à la présidence de la République, après la démission d'Alexandre Millerand. Battu par Gaston Doumergue, il est réélu président de la Chambre puis nommé, le 17 avril 1925, président du Conseil en remplacement d'Édouard Herriot. Renversé le 22 novembre de la même année, il devient ministre de la Guerre de 1925 à 1929 (avec une interruption de 3 semaines en juin 1926), sous Aristide Briand, Édouard Herriot et Raymond Poincaré, Il fit voter la loi sur le service militaire obligatoire d'un an (1928) et ordonna les premiers travaux de la ligne Maginot.

Il meurt en octobre 1933. Après des funérailles nationales, il est inhumé au Panthéon.

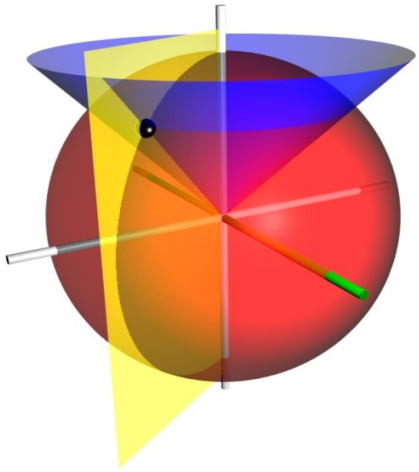
Son fils Jean Painlevé (1902-1989), documentariste français, a réalisé un grand nombre de films scientifiques.

Annexe 3 : Calculs détaillés classés par chapitres

Chapitre 1

Coordonnées sur une variété

Dans l'approche moderne l'espace-temps est modélisé par une variété pseudo-riemannienne et les coordonnées sont des courbes dérivées de fonctions scalaires définies sur cette variété, ce qu'on sait définir sans ambiguïté compte tenu des propriétés liées à la définition d'une variété (ensemble ouvert de points, continuité locale permettant de dériver des fonctions scalaires définies en ces points et de définir un espace tangent entre autres), les points n'obéissant pas à ces caractéristiques ne font pas partie de la variété (singularité). Pour clarifier le débat du caractère physique des coordonnées dans un espace-temps, on utilise souvent l'exemple de la surface sphérique S^2 (à courbure positive) qu'on peut associer à R^2 (R est l'ensemble des réels).



Comme illustré sur la figure ci-dessus, on peut définir différents types de coordonnées pour en repérer tous les points de la variété représentant l'espace courbe, par exemple:

A- Prendre arbitrairement un point O (pôle) et considérer tous les grands cercles passant par ce point. Ils balaient toute la sphère de façon univoque (à l'exception du point O et de son antipode multivoque). On prend arbitrairement un de ces cercles C comme référence et on définit les coordonnées d'un point P sur un grand cercle C' par l'angle θ (longitude, modulo 2π) que fait C' avec C (évalué en O) et une coordonnée χ (angle de développement : latitude modulo π) caractérisant la position de P sur C'. Ces coordonnées "curvilignes" ont un caractère physique, car les courbes associées appartiennent à la variété S^2. On peut écrire le ds^2 à partir de ces coordonnées seulement pour calculer la longueur d'une courbe quelconque appartenant à la surface sphérique (la variété).

B- On peut comme précédemment définir le pôle O et l'angle θ de longitude, mais au lieu d'utiliser l'angle de développement χ comme précédemment dans la forme de la métrique donnée par ds^2, utiliser le rayon r du cercle c à angle de développement χ constant (petit cercle).

Remarquons que si la courbe représentant ce petit cercle c appartient bien à la surface de sphère, ce n'est pas le cas de r. En effet, le rayon de ce petit cercle qui est un segment contenu dans un plan sécant à la sphère à latitude constante dont le centre o est comme le segment à

l'extérieur de la surface sphère à l'exception de son extrémité) comme notre représentation de la sphère dans un espace à trois dimensions nous le montre.

Pourtant rien n'empêche d'utiliser r comme coordonnée en lieu et place de χ puisque les coordonnées étant des fonctions sur la variété on voit qu'à chaque valeur de χ on peut associer une valeur de r, la relation entre χ, θ et r étant simple à établir. Mais attention à une valeur de r correspond deux valeurs de χ symétriques par rapport $\chi = \pi/2$.

Dans les formes de Schwarzschild et de Painlevé (entre autres) on utilise d'ailleurs cette coordonnée r au motif qu'elle met en évidence la symétrie sphérique. Ce sont les coordonnées sphériques classiques utilisées en géométrie euclidiennes bien adaptées à un problème à symétrie sphérique. Mais on voit que si r est une coordonnée physique dans un espace sans courbure, il ne l'est pas dans un espace avec courbure.

Cette illustration très simple, si elle avait été faite à l'époque, aurait permis de bien statuer sur le caractère physique d'une coordonnée et d'éviter des discussions stériles. Elle nous permet également de rappeler le caractère "euclidien implicite" des coordonnées sphériques, que nous savons utiliser en espace courbe puisque les valeurs des coordonnées sont définies par des fonctions scalaires sur la variété, propriété rarement explicitée qu'il est pourtant essentiel de garder à l'esprit.

Chapitre 2

Calculs détaillés

L'équation géodésique newtonienne établie à partir de la forme géométrique de Painlevé

Comme Painlevé revendique par son équation *(2-4)* qu'on peut exprimer la gravitation newtonienne par une formulation géométrique similaire à celle de la relativité générale, nous allons appliquer la méthode utilisée en relativité générale pour déterminer la géodésique.

$$ds^2 = (U+h)\,(dx^2+dy^2+dz^2) \qquad (2\text{-}4)$$

Dans ce contexte le Lagrangien $L(x^\mu, dx^\mu/d\lambda)$ associé à la métrique s'écrit de façon générique[857]

$$L\left(x^\mu, \frac{dx^\mu}{d\lambda}\right)=\frac{1}{2}g_{\mu\nu}(x,y,z)\left[\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}\right]=\frac{1}{2}ds^2 \quad , \qquad (2\text{-}5)$$

où λ est le paramètre affin spatial de la courbe géodésique qui mesure la longueur de la courbe. Avec les conventions de Painlevé et en notant $\delta_{\mu\nu}$ la métrique spatiale euclidienne on a :

$$g_{\mu\nu}(x,y,z)= \delta_{\mu\nu}\,(U(x,y,z) +h).$$

Ceci donne[858]

$$L\left(x^\mu, \frac{dx^\mu}{d\lambda}\right)=\frac{1}{2}\delta_{\mu\mu}[U(x,y,z)+h]\left(\frac{dx^\mu}{d\lambda}\right)^2=\frac{1}{2}ds^2 \quad , \qquad (2\text{-}6)$$

avec $x^\mu = (x, y, z)$.

On sait que dans un espace courbe l'équation géodésique s'écrit de façon générale :

[857]Comme P. Appell, Painlevé suppose que la métrique ne dépend pas du temps pour cette classe de problème. Conformément à l'équation *(A1)* donnée par Painlevé, nous utilisons les coordonnées cartésiennes, mais la démonstration formelle ne dépend pas des coordonnées. Compte tenu de la symétrie sphérique, nous utiliserons souvent aussi les coordonnées sphériques

[858]On sait que le tenseur métrique euclidien à trois dimensions spatiales $\delta_{\mu\mu}$ est diagonal. La position des indices est positionnée pour utiliser la convention d'Einstein en sommation, mais étant en espace euclidien elle n'a pas d'importance.

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2}+\Gamma^\mu_{\nu\rho}\left(\frac{dx^\nu}{d\lambda}\right)\left(\frac{dx^\rho}{d\lambda}\right)=0 \quad . \qquad (2\text{-}7)$$

Mais comme on peut, entre autres, déduire cette équation *(2-7)* des équations de Lagrange[859] :

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{dx^\mu}{d\lambda}\right)}\right)=\frac{\partial L}{\partial x^\mu} \quad . \qquad (2\text{-}8)$$

Avec le lagrangien défini par *(2-6)*, en appliquant l'équation *(2-8)*, on obtient l'équation :

$$[U(x,y,z)+h]\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{dx^\mu}{d\lambda}\right)^2\partial_\mu U(x,y,z)=0 \quad .$$

Soit :

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{dx^\mu}{d\lambda}\right)^2\frac{\partial_\mu U(x,y,z)}{[U(x,y,z)+h]}=0 \quad . \qquad (2\text{-}9)$$

Ceci est l'équation du mouvement géodésique déduite de la métrique spatiale *(2-4)* proposée par Painlevé.

L'équation géodésique établie en mécanique newtonienne conventionnelle

En mécanique classique les équations du mouvement font intervenir les dérivées par rapport au temps.

Dans la définition de Painlevé le temps ne figure pas, alors comment fait-il le lien avec les équations de la mécanique classique où l'équation de Lagrange s'écrit

$$\left(\frac{d}{dt}\right)\left(\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{dx^\mu}{dt}\right)}\right)=\frac{\partial L}{\partial x^\mu} \quad , \qquad (2\text{-}10)$$

[859] Voir par exemple Blanchet L. (1996-1997) p.32

où le Lagrangien classique est égal à l'énergie cinétique moins l'énergie potentielle soit ici [860]:

$$L(x^{\mu},\frac{dx^{\mu}}{dt})=\frac{1}{2}\delta_{\mu\mu}(\frac{dx^{\mu}}{dt})^{2}-[U(x,y,z)+h] \quad . \qquad (2\text{-}11)$$

Ceci montre que *h* est lié à l'énergie totale du système.

En appliquant les équations de Lagrange en mécanique classique, on obtient :

$$\frac{d^{2}x^{\mu}}{dt^{2}}+\partial_{\mu}U(x,y,z)=0 \quad . \qquad (2\text{-}12)$$

Conditions pour que les équations géodésiques soient identiques

Comparons *(2-12)* et *(2-9)*. La forme de ces équations est équivalente si :

$$\frac{1}{2}\frac{(\frac{dx^{\mu}}{d\lambda})^{2}}{U(x,y,z)+h}=1 \quad ,$$

qu'on peut écrire :

$$\frac{1}{2}(\frac{dx^{\mu}}{d\lambda})^{2}-U(x,y,z)=h \quad . \qquad (2\text{-}13)$$

Y a-t-il une relation entre le paramètre affin λ et le paramètre *t* du type $t = a\lambda + b$ pour montrer que ce que propose Painlevé permet de considérer *t* comme un paramètre affin ?

La relativité s'invite dans la formulation géométrique de la gravitation de Painlevé

Posons

$$t = i.\lambda,$$

[860]Cette forme du Lagrangien est valide si on pose $U = -m/r$, notation moderne, pour satisfaire aux conditions du Lagrangien. On utilise la convention d'Einstein pour les sommations sur les indices μ. La masse du corps de test est unitaire (*m =1)*

et reportons cette valeur dans l'équation *(2-13)*, on obtient :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dx^{\mu}}{dt}\right)^{2}+U(x,y,z)=-h \quad .$$

Ceci n'est autre que l'expression du hamiltonien en mécanique classique qui donne l'énergie totale de la particule de test.

Nous savons que, quand le potentiel décrivant le champ gravitationnel ne dépend pas du temps, cette énergie totale est conservée sur une géodésique. Notons le signe de *h* qui résulte des conventions adoptées.

Nous avons donc bien montré que sous réserve de poser $t = i\lambda$, la proposition de Painlevé est pertinente.

La relation entre le paramètre affin λ (et donc *t)* et les coordonnées spatiales x^{μ}, donnée sous forme d'équation différentielle par le hamiltonien (conservé, rappelons-le, sur une géodésique), est bien celle donnée par les lois du mouvement géodésique, ce qui était nécessaire et suffisant pour que le temps *t* soit également un paramètre affin de la courbe spatiale.

Il est significatif qu'un paramètre de type spatial comme λ et un autre de type temporel comme *t* soient liés par le nombre imaginaire *i*, car c'est précisément ce qu'on retrouve dans la forme relativiste de la métrique, c'est même implicitement une avancée naturelle vers une formulation relativiste, puisque dès qu'on veut introduire le temps de façon dépendante de l'espace, à travers la description d'une géodésique, il se présente sous ses habits relativistes.

Nous découvrons cela à propos des géodésiques en mécanique classique et relativiste. Nous aurons l'occasion de souligner l'importance structurelle du concept de géodésique à maintes reprises.

Formulation géométrique de Painlevé de la gravitation classique et rotation de Wick

En posant $t = i.\lambda$ (avec $i^2 = -1$) nous avons vérifié que la relation *(2-13)* est vérifiée, ce qui confère la même forme aux équations de la mécanique classique exprimées dans deux formalismes différents.

Remarquons que dans la relation $t = a\lambda + b$, définissant la classe des paramètres affins sur une courbe, où *a* et *b* sont des constantes, on suppose en général que *a* et *b* sont des réels, mais formellement, si on tient compte des particularités liées à l'utilisation du nombre *i*, (on fait une "rotation de Wick[861]" qui est un procédé bien connu), non seulement rien n'interdit d'utiliser le procédé, mais cela induit ce qu'on va retrouver dans la forme relativiste complète.

Quelques exemples d'application de cette géométrisation

Géodésique radiale critique dans la solution du corps central à symétrie sphérique

[861]Procédé qui n'avait pas été encore formalisé par Wick (alors âgé de 12 ans !) en 1921 et qui n'avait sans doute pas été vraiment utilisé

Avec $U(x) = -M/r$, en coordonnées sphériques la géodésique radiale s'écrit :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \frac{M}{r} = h \quad . \qquad (2\text{-}13\text{-}1)$$

En résolvant cette équation pour $h = 0$, (énergie totale nulle) par exemple on peut vérifier que l'équation

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \frac{M}{r} = 0 \quad ,$$

admet

$$r = -(2M)^{1/3}[(3/2)\lambda]^{2/3},$$

comme solution.

Dans la suite du chapitre nous aurons l'occasion de calculer (entre autres) la solution de l'équation de la mécanique classique et trouverons :

$$r = (2M)^{1/3}[(3/2)\lambda]^{2/3}.$$

Cela confirme que nous pouvons égaler les équations *(2-9)* et *(2-12)* en posant $t = i.\lambda$, ce qui était le but recherché. La valeur du paramètre d'énergie totale h va indiquer si la géodésique est fermée (ellipse)[862], ouverte (hyperbole) ou critique (parabole) selon la valeur de "l'énergie totale" caractérisée par h.

Avant de détailler quelques calculs relatifs à ces hypothèses, intéressons-nous à la portée et donc également aux limites de cette proposition originale de Painlevé.

Vérification par l'équation géodésique de la validité de la forme géométrique de Painlevé

De façon plus formelle, on peut aussi vérifier que l'équation géodésique définie de façon générale

$$d^2x^\mu/d\lambda^2 + \Gamma^\mu{}_{\nu\rho}(dx^\nu/d\lambda)(dx^\rho/d\lambda) = 0,$$

exprimée en espace courbe par les deux formes de métrique, celle relativiste de Painlevé dans l'espace-temps (quatre dimensions) et la forme conformément euclidienne de Painlevé (trois dimensions) donnent le même résultat.

En coordonnées sphériques, pour la géodésique radiale elle se réduit à :

$$d^2r/d\lambda^2 + \Gamma^r{}_{\nu\rho}(dx^\nu/d\lambda)(dx^\rho/d\lambda) = 0.$$

[862] L'ellipse, la parabole l'hyperbole peuvent se réduire à des trajectoires radiales si le moment angulaire L est nul.

Cas de la forme relativiste de Painlevé

Nous considérons la forme relativiste donnée par *(1-1)*.

Comme $d\theta$ et $d\varphi$ sont nuls, les seuls symboles de Christoffel à considérer pour la forme relativiste à quatre dimensions de Painlevé sont [863]:

$$\Gamma^{r}_{rr} = -M/r^2, \qquad \Gamma^{r}_{rt} = \Gamma^{r}_{tr} = -[2^{1/2}(M/r)^{3/2}]/r, \qquad \Gamma^{r}_{tt} = M(r-2M)/r^3.$$

Avec ces valeurs, $d^2r/d\lambda^2 + \Gamma^{r}_{\nu\rho}(dx^{\nu}/d\lambda)(dx^{\rho}/d\lambda) = 0$ →

$d^2r/d\lambda^2 + \Gamma^{r}_{rr}(dr/d\lambda)(dr/d\lambda) + 2.\,\Gamma^{r}_{rt}(dr/d\lambda)(dt/d\lambda) + \Gamma^{r}_{tt}(dt/d\lambda)(dt/d\lambda) = 0$ →

$d^2r/d\lambda^2 - M/r^2(dr/d\lambda)(dr/d\lambda) - 2\,[2^{1/2}(M/r)^{3/2}]/r,\,(dr/d\lambda)(dt/d\lambda) + M(r-2M)/r^3(dt/d\lambda)(dt/d\lambda) = 0.$

En relativité générale on utilise le temps propre τ comme paramètre affin. Dans la suite du paragraphe, $\lambda = \tau$.

Avec $dr/d\lambda) = -(2M/r)^{1/2}$ et $dt/d\lambda = 1$ dans ce cas, cela donne,

$$d^2r/d\lambda^2 - M/r^2(2M/r) - 2.[2^{1/2}(M/r)^{3/2}]/r\,(-2M/r)^{1/2}(1) + M(r-2M)/r^3(1)(1) = 0 \quad \rightarrow$$
$$d^2r/d\lambda^2 - 2M^2/r^3 + [(4M^2/r)^3] + M(r-2M)/r^3 = d^2x^{\mu}/d\lambda^2 + M/r^2 = 0.$$

Soit finalement : $d^2r/d\lambda^2 = -M/r^2$

Cas non relativiste

Pour la forme non relativiste à trois dimensions. L'équation géodésique s'écrit :

$$d^2r/d\lambda^2 + \Gamma^{r}_{rr}(dr/d\lambda)(dr/d\lambda) = 0.$$

avec $\Gamma^{r}_{rr} = -\tfrac{1}{2}r,$

et $dr/d\lambda = -(2M/r)^{1/2}.$

Cette dernière équation résulte des considérations relatives à l'utilisation de la métrique euclidienne conforme en posant $\lambda = t,$ où $t,$ paramètre affin de la géodésique, est égal au temps absolu utilisé dans les équations de la mécanique classique.

Cela donne : $d^2r/d\lambda^2 - (1/2r)(2M/r) = d^2r/d\lambda^2 - M/r^2 = 0.$

[863] Il s'agit de la forme relativiste de Painlevé donnée par l'équation (II) de l'article du 24 octobre 1921. Calculés par Mathematica 4. Les valeurs des quadri-vitesses seront calculées plus loin dans le document. Pour celle du cas non relativiste elle se déduit simplement de (A-10) avec $h = 0$.

Soit finalement en rappelant que $t = i.\lambda$:

$$d^2r/dt^2 = (d/dt)[dr/dt] = (d\lambda/dt)[(d/d\lambda)[(dr/d\lambda)(d\lambda/dt)] = 1/i[(d/d\lambda)[(dr/d\lambda)1/i] = - d^2r/d\lambda^2,$$

ce qui est ce que nous voulions montrer, à savoir : $d^2r/dt^2 = -M/r^2$

La géodésique radiale critique est identique en mécanique newtonienne et en relativité générale

Pour bien illustrer les équations que nous avons démontrées traitons un cas particulier simple mais important que nous allons retrouver régulièrement dans la suite du document.

Cas de la gravitation newtonienne

Solution de l'équation géodésique en mécanique newtonienne

Vérifions la propriété pour le potentiel central défini en mécanique classique par[864]:

$$U(r) = -M/r.$$

Elle correspond au cas du corps unique à symétrie sphérique, en coordonnées sphériques, en utilisant la convention de Painlevé, avec $h = 0$, où une solution simple avec $t_0 = 0$ est :

$$r = (2M)^{1/3} [(3/2)t]^{2/3}. \qquad (2\text{-}14)$$

On pourrait vérifier que l'équation *(2-12)* de la mécanique classique est satisfaite avec *(2-14)*.

Vérification que les équations classiques et géométriques de Painlevé sont équivalentes

L'équation *(2-13),* donnant la condition pour que l'équation de la mécanique classique *(2-12)* soit identique à celle de la formulation géométrique dérivée du lagrangien *(2-9)* avec $t = i\lambda$

$$½ (dx^\mu/d\lambda)^2 - U(x^\mu) = 0,$$

a pour solution dans le cas de cette géodésique radiale :

$$r = -(2M)^{1/3} [(3/2)\lambda]^{2/3}.$$

[864]Rappelons qu'en général on pose G=1 et c =1. Nous prenons la valeur "moderne" du potentiel gravitationnel.

En développant pour cette géodésique radiale :

$$½(dr/d\lambda)^2 = ½[(2M)^{1/3}2/3(3/2)]^{2/3}t^{-1/3}]^2 = ½[(2M)^{2/3}4/9(3/2)]^{4/3}t^{-2/3}] = (1/3)(2M)^{2/3}(3/2)]^{1/3}t^{-2/3},$$

$$U(x^\mu) = M/r = M.[(2M)^{-1/3}\,[(3/2)t]^{-2/3}] = 2M/2[(2M)^{-1/3}\,(3/2)^{-2/3}\,t^{-2/3} = (1/3)(2M)^{2/3}(3/2)]^{1/3}t^{-2/3}.$$

On vérifie que la relation *(2-13)* est bien vérifiée dans ce cas.

Cas de la relativité générale

Caractère universel de la géodésique radiale critique

Ajoutons que, dans ce cas particulier de la géodésique suivie par l'observateur de Painlevé, la solution relativiste donne également la même équation[865], ce qui souligne le caractère très particulier de cette géodésique qui répond à 2 types d'équations établies de façon indépendantes dans deux théories différentes.

On peut conclure de cette "égalité" que pour la famille de géodésiques radiales (critiques) la description de Painlevé par sa métrique conformément euclidienne et celle de la relativité générale par la métrique relativiste coïncident.

Ceci peut se vérifier en utilisant la forme de Painlevé relativiste où la quadri-vitesse[866] sur une telle trajectoire est égale à $-(2GM/r)^{1/2}$. Nous montrerons dans la suite du document qu'il en est de même en mécanique classique, comme le montre l'équation (*2-13)* avec $h = 0$:

$$½\ (dx^\mu/d\lambda)^2 - U(x^\mu) = 0.$$

Vérification par résolution de l'équation géodésique dans un espace non euclidien

De façon plus formelle, on peut aussi vérifier que l'équation géodésique définie de façon générale,

$$d^2x^\mu/d\lambda^2 + \Gamma^\mu{}_{\nu\rho}(dx^\nu/d\lambda)(dx^\rho/d\lambda) = 0,$$

exprimée en espace courbe par les deux formes de métrique, celle relativiste de Painlevé dans l'espace-temps (quatre dimensions) et la forme conformément euclidienne de Painlevé (trois dimensions) donnent le même résultat.

---

[865]Nous verrons plus loin (chapitre *10* : § "*l'équation géodésique générale dans l'espace-temps statique à symétrie sphérique"*) que ceci n'est vrai que lorsque *L,* le moment angulaire, est nul puisque les termes du "potentiel" relativiste *V(r)* et newtonien *U(r)* ne diffèrent dans ce cas que par le terme $-GML^2/r^3$ qui est nul si *L* est nul.

[866]La quadri-vitesse $U^\mu = dr/d\tau$ est égale à dr/dt, car la coordonnée *t* est égale au temps propre τ sur cette géodésique.

Si nous avons développé longuement cette proposition de métrique spatiale de Painlevé, c'est qu'elle est peu connue alors qu'elle méritait de l'être d'autant qu'on pourra la deviner en filigrane dans certains développements ultérieurs.

Une fonction *f(r)* que n'a pas utilisé Painlevé qui lui aurait montré l'intérêt de sa solution

Dans ces coordonnées on remplace la coordonnée *r* par une nouvelle coordonnée *R* définie par la relation inverse

$$r = R(1+2M/4R)^2,$$

avec

$$R > 2M/4,$$

Ce qui implique

$$r > 2M.$$

La relation peut être inversée et donne :

$$R=(\frac{1}{2})[r+\sqrt{r(r-2\mathrm{M})}-M] \quad .$$

On remarque immédiatement que cette nouvelle coordonnée *R* qui est bien du type *R = f(r)*, ce que Painlevé requiert, n'est explicitement définie qu'à l'extérieur de l'horizon, à la différence de la coordonnée *r*.

Cette coordonnée n'est donc pas sujette aux problèmes de singularité sur l'horizon puisqu'elle ne décrit que la région extérieure.

Par contre ceci limite la portée de son intérêt, car contrairement à la forme de Painlevé de l'article du 24 octobre 1921 elle ne décrit pas toute la région du trou noir (y compris l'intérieur de l'horizon) par une seule forme de métrique.

La coordonnée R n'est pas plus physique que la coordonnée *r* sauf pour *r* tendant vers l'infini auquel cas *R* tend vers *r* qui tend vers la coordonnée newtonienne et on constate également que *f'(r)* tend vers 1, tout ceci étant conforme à ce qui est requis par Painlevé.

Avec cette nouvelle coordonnée on obtient une nouvelle forme quadratique[867] de métrique qui s'écrit par exemple :

$$ds^2=-\left(\frac{1-\frac{M}{2R}}{1+\frac{M}{2R}}\right)^2 dt^2+\left(1+\frac{M}{2R}\right)^4\left[dR^2+R^2\left(d\theta^2+\sin^2\theta\, d\varphi^2\right)\right] \quad .$$

Remarquons que la section spatiale de cette forme de la métrique décrivant le champ à l'extérieur d'un corps unique à symétrie sphérique est conformément euclidienne ce qui se traduit par la nullité du tenseur de Weyl pour la section spatiale $d\sigma^2$:

$$d\sigma^2=\left(1+\frac{M}{2R}\right)^4\left[dR^2+R^2\left(d\theta^2+\sin^2\theta\, d\varphi^2\right)\right]$$

Le tenseur de Weyl, étant un tenseur, n'importe quelle forme spatiale (non singulière), obtenue à partir du $d\sigma^2$ ci-dessus, résultant d'un changement de coordonnées de cette partie spatiale, préservera cette nullité.

Soulignons cependant que les sections spatiales d'une forme quadridimensionnelle dépendent de la coordonnée temporelle et que cela ne s'applique que pour des formes spatio-temporelles où la coordonnée temporelle est la même.

Cette conformité euclidienne est exhibée de la manière la plus explicite qui soit dans la forme proposée par Painlevé dans son premier article, puisque dans ce cas la section spatiale est euclidienne.

Ceci est un argument supplémentaire qui montre que cette forme révèle de manière la plus claire qui soit la phénoménologie très particulière de cette solution et qu'il ne faudra pas s'étonner de toutes propriétés spécifiques que nous allons trouver dans notre analyse.

De façon plus générale, des métriques quadridimensionnelles conformément équivalentes, bien qu'elles ne soient pas égales ont, entre autres, la même structure causale.

Ceci est exploité dans les diagrammes de Carter-Penrose qui représentent l'espace-temps infini par un diagramme fini obtenu par l'utilisation de transformations conformes (qui conservent les angles) des coordonnées.

La conformité est un critère qui permet de classer des solutions (on construit des classes) qui partagent certaines propriétés importantes et qu'on peut donc apparenter.

[867]Comme elle est quadratique, il n'est donc pas étonnant que cette forme ne décrive pas la région complète incluant la partie sous l'horizon.

Ce critère est utile pour caractériser certaines propriétés de la phénoménologie de la solution géométrique au problème du champ généré par un corps unique à symétrie sphérique.

Manifestation de l'orientation de la solution de Painlevé par l'anisotropie locale

Isotropie locale dans la forme de Schwarzschild

De façon plus générale si on considère une trajectoire radiale dans le cas de la forme de Schwarzschild pour une valeur de $r = r_0$, elle s'écrit :

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r_0}\right)dt^2 + \left(\frac{1}{1 - \frac{2M}{r_0}}\right)dr^2 \quad .$$

Ce qui fait qu'en un point donné de coordonnée $r = r_0$, pour une valeur donnée de dt et dr, si on change de signe soit dt soit dr, cela ne change pas la valeur de ds^2.

Pour la lumière ($ds^2 = 0$), cela s'écrit :

$$0 = -\left(1 - \frac{2M}{r_0}\right)dt^2 + \left(\frac{1}{1 - \frac{2M}{r_0}}\right)dr^2 \;\rightarrow\; \frac{dr}{dt} = \pm\left(1 - \frac{2M}{r_0}\right) \quad .$$

Le cône de lumière radial est symétrique en tout point, cela malgré l'anisotropie de l'espace-temps ailleurs qu'en $r = 0$, puisque que la solution n'est à symétrie sphérique (isotrope) que par rapport à un point.

C'est lié au caractère statique[868] des coordonnées de Schwarzschild, associé à cette contrainte de réversibilité, et à la nature de la coordonnée t qui en résulte. Notons que pour $r_0 = 2M$, $dr/dt = 0$, ce qui montre que la lumière entrante est piégée sur l'horizon, ne le franchit pas dans cette représentation.

Anisotropie locale de l'espace-temps, révélée par la forme de Painlevé

Alors que dans le même cas ($r = r_0$) pour la forme de Painlevé

[868]Lorsque la métrique ne dépend pas de la coordonnée t, elle est qualifiée de "stationnaire" et quand, de plus, le vecteur ∂_t tangent à la coordonnée t est orthogonal aux vecteurs tangents aux coordonnées spatiales elle est "statique" et alors la forme de métrique associée est quadratique pour les termes en dr et dt.

$$ds^2 = -\left(1-\frac{2M}{r_0}\right)dt^2 + 2\sqrt{\frac{2M}{r_0}}\,dr\,dt + dr^2 \quad ,$$

si on change le signe de *dr* ou *dt,* mais pas les deux évidemment, on obtient respectivement

$$ds^2 = -\left(1-\frac{2M}{r_0}\right)dt^2 + 2\sqrt{\frac{2M}{r_0}}(-dr)(dt) + dr^2$$

et

$$ds^2 = -\left(1-\frac{2M}{r_0}\right)dt^2 + 2\sqrt{\frac{2M}{r_0}}(dr)(-dt) + dr^2 \quad ,$$

deux valeurs égales du ds^2, mais qui correspond à un ds^2 différent de celui où *dt* et *dr* sont de même signe.

Notons que si ce résultat est le même que celui du trou blanc, cela correspond à des phénoménologies différentes, car pour un "trou blanc" qui s'écrit dans ce cas :

$$ds^2 = -\left(1-\frac{2M}{r}\right)dt^2 - 2\sqrt{\frac{2M}{r}}(dr)(dt) + dr^2 \quad .$$

On note que *dr* et *dt* sont de même signe, le signe négatif du terme croisé est inhérent à la forme de la métrique, ce ne sont pas les éléments différentiels qui sont de signe différents comme dans le cas du trou noir pour obtenir la même valeur.

En considérant le cône de lumière ($ds^2 = 0$) dans la forme "trou noir" de Painlevé, comme dans le cas de Schwarzschild :

$$0 = -\left(1-\frac{2M}{r_0}\right)dt^2 + 2\sqrt{\frac{2M}{r_0}}\,dr\,dt + dr^2 \quad \rightarrow \quad \frac{dr}{dt} = -\sqrt{\frac{2M}{r_0}} \pm 1 \quad .$$

La dissymétrie manifeste du cône de lumière dans la forme stationnaire, à caractère inertiel, de la métrique de Painlevé révèle l'anisotropie locale de l'espace-temps. Comme pour $r_0 = 2M$, $dr/dt = -2$, dans cette représentation un rayon lumineux entrant traverse l'horizon.[869]

Ceci souligne une propriété pourtant évidente, car comme Lemaître le dénoncera[870], l'attribut d'isotropie locale (attaché au caractère statique) non seulement n'a rien de nécessaire mais est cause de la singularité sur l'horizon.

L'orientation de la solution de Painlevé ne fait que révéler l'anisotropie locale qui est un caractère physique de l'espace-temps.

[869]Nous discuterons de ce "paradoxe" au chapitre *8* et montrerons que c'est bien la forme de Painlevé qui décrit la phénoménologie physique.

[870]Lemaître (1932) p. 200 : "*Nous nous proposons de montrer que la singularité du champ n'est pas réelle et provient simplement de ce qu'on a voulu employer des coordonnées pour lequel le champ est statique."*

Comparaison avec les observations astronomiques dans le système solaire

L'avance du périhélie de Mercure et la déviation de la lumière par le Soleil

Dans la dernière partie de son article, Painlevé développe longuement l'analyse des observations de l'avance bien établie du périhélie de Mercure qui avait été mesurée avec précision par les astronomes, non expliqué par la gravitation classique, mais qu'Einstein dans un article[871] du 4 novembre 1915 suivi d'un complément le 11 novembre retrouve par un calcul à la limite des champs faibles en relativité générale.

Il traite aussi de l'observation de la déviation des rayons lumineux du Soleil, confirmée en 1919, peu avant son article par les observations au cours d'une éclipse de Soleil à Sobral (Brésil) par une mission dirigée par Eddington. On sait qu'en fait en raison d'une météo peu favorable les clichés pris étaient peu convaincants mais compte de tenu de la réputation d'Eddington qui avait noté que sur un des clichés on avait observé une déviation compatible avec celle prédite par Einstein, l'expérience fut jugée concluante, mais cette vérification expérimentale était en fait bien moins confirmée (des expériences ultérieures ont confirmé cette déviation sans aucun doute cette fois) à l'époque de Painlevé que l'avance du périhélie de Mercure.

Comme ces observations sont discriminantes entre la théorie de Newton et la relativité Painlevé y attache de l'importance.

"*Dans ces observations, le maximum et le minimum r_1 et r_2 de la distance de la planète P au centre du soleil S sont parmi les éléments les mieux mesurés. Soit ω l'angle de ces deux rayons vecteurs r_1, r_2 et posons :*

$$r_1 + r_2 = 2a, \qquad \frac{(r_1 - r_2)}{(r_1 + r_2)} = e ;$$

Dans la théorie newtonienne, a est le demi grand axe et e l'excentricité de l'ellipse képlérienne. Soit enfin T l'intervalle de temps qui s'écoule entre deux périhélies successifs. Dans la théorie newtonienne, des formules classiques donnent :

$$\mu_1 = 4\pi^2 a^3/T^2, \qquad \omega = \pi \qquad ([6])$$

Dans la théorie einsteinienne, la trajectoire de P ne se ferme pas et si on pose

$$f(r_1) = f_1, f(r_2) = f_2 \quad , \quad 2\alpha = f_1 + f_2$$

$$\frac{\mu}{1 + 6\mu/\alpha} = 4\frac{\pi\alpha^3}{T^2} \quad et \quad \omega - \pi = 3\pi\mu \frac{(f_1 + f_2)}{f_1 f_2} \qquad ([7])$$

[871] Traduit et commenté dans Balibar F., Darrigol O. Eisenstaedt J. Pottier L., Ritter J., Stachel J. (1993), tome 2 p. 168-177

En outre, la déviation δ d'un rayon lumineux issu d'une étoile et passant près du bord du Soleil pour un observateur très éloigne placé de l'autre côté du Soleil est

$$\delta = \frac{4\mu}{f(l)} \qquad ([8])$$

l désignant le rayon du Soleil.

Dans ces formules, les unités sont choisies de façon que la vitesse de la lumière soit égale à 1.

....."

Painlevé indique les observables qui permettent de confronter les prédictions de la théorie aux résultats des observations.

On remarque que l'observable principale est $\omega - \pi$ (un angle) que Painlevé suppose être mesuré dans un espace euclidien et par rapport à des positions dans des directions réputées absolues (étoiles lointaines fixes) de cet espace euclidien, ce qui n'est pas rigoureusement le cas.

Il se réfère également à d'autres paramètres, μ_1 (la masse gravitationnelle active dérivée des mesures de temps de la période de l'orbite elle-même déterminée par le temps entre deux observations dans une même direction réputée fixe et des équations de Kepler), a le demi grand axe de l'orbite et e l'excentricité tous deux déterminés dans des conditions similaires qu'il considère comme acquis mais qui ont résulté d'autres observations (toujours supposées en espace euclidien alors que ce n'est pas rigoureusement exact).

En bref, d'un point de vue rigoureux, tout est faux, mais, comme l'erreur est très petite, on espère que cela ne nuit pas trop à l'accord entre les prédictions de la théorie (dans un système de coordonnées, non physique en général pour la relativité) et de qu'on observe.

Nous verrons comment, rigoureusement, on peut vérifier la validité (en fait, la non invalidité) d'une théorie via des observables.

Painlevé conteste que ces observations confirment de façon incontestable la relativité

Painlevé cite les équations concernées dans les deux théories et souligne précisément que les équations classiques et relativistes doivent donner des résultats très proches compte tenu de la très petite valeur (≈ 45" arc par siècle) de cet effet et en déduit certaines contraintes sur les termes de ces équations ($\mu/r < 4.10^{-6}$ dans le cas du système solaire) tout en restant attaché à son choix de substituer à la coordonnée r une fonction $f(r)$ *d*ans les équations d'Einstein.

Il insiste:

"Einstein admet que f(r)≡ r; cette identification n'est donc pas une conséquence de la relativité, mais elle est imposée approximativement *par une première confrontation avec les observations astronomiques"*

Cette assertion souligne encore une incompréhension fondamentale dont Painlevé n'arrive pas à se défaire.

Einstein n'a pas choisi la coordonnée *r* dans ces équations de façon *ad hoc* pour retrouver la valeur de l'avance du périhélie de Mercure. En établissant l'équation du mouvement de Mercure à partir des équations relativistes il ne pouvait pas savoir (il suffit de lire son calcul pour s'en persuader) à l'avance ce qu'il allait trouver.

Il a été en fait le premier (agréablement) surpris, mais ravi bien entendu[872], quand il a constaté qu'à partir de ses équations[873], déduites de façon cohérente des équations générales de la relativité générale, il retrouvait bien le résultat des observations avec une bonne précision.

Alors que Painlevé veut conserver un caractère physique[874], comme en mécanique classique à la coordonnée radiale, dans les équations relativistes *r* est une coordonnée sans signification physique qui s'impose naturellement comme coordonnée radiale dans des coordonnées sphériques dans l'établissement analytique rigoureux de la forme de la métrique à symétrie sphérique[875].

Il peut y avoir d'autres formes toutes aussi "exactes dans le cadre de la théorie", mais toutes se déduisent les unes des autres par changement de coordonnées, car cela revient à utiliser d'autres coordonnées sur la variété représentant cet espace-temps particulier pour le décrire.

Si Einstein fait un calcul approximatif (en utilisant un développement en série) pour trouver une valeur numérique c'est que l'équation donnant le mouvement des planètes (et de Mercure en particulier) déduite mathématiquement des équations de la relativité générale n'a pas de solution analytique exacte (en tout cas évidente), car ne l'oublions pas les équations de la relativité générale sont non linéaires en général. Par ces opérations Einstein ne remet pas en cause la théorie de la relativité[876].

Cette démarche (approximative) en champ faible où on construit un tenseur métrique à partir du tenseur de la métrique de Minkowski (à l'ordre zéro), qui en coordonnées sphériques confère un sens physique à *r,* en ajoutant des perturbations très petites est une démarche qu'il trouve peut-être similaire à la sienne également approximative ce qui peut le conforter dans son approche.

Mais il y a une différence fondamentale d'approche qui reste encore implicite à ce stade, car remplacer *r* par *f(r)* ne change rien aux équations, mais ce qui va se révéler dans la suite, c'est que Painlevé va mettre en cause la théorie (ce qui est son droit) en la considérant comme une approximation intéressante, à l'ordre zéro, des lois de la nature (ce qui n'est pas faux) et il se propose de la rendre plus compatible avec ces lois en insérant dans les équations des éléments pour permettre des ajustements *ad hoc.*

Ce faisant il n'établit pas de nouvelle théorie mais propose un ajustement empirique de la relativité. Le problème c'est que puisque cet ajustement est empirique, donc ne découle d'aucune loi qui permettrait de le prédire, rien ne prouve qu'il va pouvoir avoir une portée suffisamment générale pour avoir une quelconque utilité et qu'on ne va pas aller vers une

[872]Dans une lettre à Ehrenfest (17 janvier 1917) il écrit : "Imagine ma joie quand j'ai compris que la covariance générale était réalisable et en voyant le résultat, à savoir que les équations donnaient exactement (l 'avance) le périhélie de Mercure. Pendant plusieurs jours la joie et l'excitation m'ont fait sortir de mes gonds". Cité dans Balibar F., Darrigol O. Eisenstaedt J. Pottier L., Ritter J., Stachel J. (1993), tome 2 p.168-169

[873]Dans un modèle de champ faible où le tenseur métrique est considéré comme la somme du tenseur de la métrique de Minkowski pour l'ordre zéro plus des perturbations très petites à des ordres supérieurs. Son calcul est décrit dans Balibar F., Darrigol O. Eisenstaedt J. Pottier L., Ritter J., Stachel J. (1993), tome 2 p.169-177.

[874]Notons que c'est à cette époque (Novembre 1915) que Einstein prend vraiment conscience du caractère non physique des coordonnées comme il l'écrit à Ehrenfest le 26 décembre 1915. Cité dans Balibar F., Darrigol O. Eisenstaedt J. Pottier L., Ritter J., Stachel J. (1993), tome 2 p. 178

[875]Rappelons que quand Einstein a fait ce calcul (Novembre 1915) la solution de Schwarzschild n'avait pas été trouvée. Il est parti directement des équations générales du champ.

[876]On peut trouver une démonstration plus moderne et plus simple dans Carroll S. (2003) p.212-216

inflation de corrections empiriques ne faisant que traduire notre méconnaissance des lois physiques.

Painlevé met en doute la théorie sans l'avoir vraiment testée et en particulier poussée dans ses retranchements où elle pourrait être mise en difficulté.

La démarche scientifique consiste déjà à vérifier ce que la théorie prédit, sans ces ajouts, à le confronter avec ce que les observations ou expériences nous donnent et en fonction de l'accord décider de l'intérêt de la théorie par rapport à celles qui existent. Rien n'empêche de travailler à en établir une encore "meilleure". Lorsque la précision des expériences met en avant les insuffisances de la théorie cela devient même indispensable, ce qui ne veut pas dire que la tâche est facile.

Autrement dit cette démarche est purement opératoire en relativité et résulte simplement de la difficulté de résoudre les équations de la relativité générale (non linéaires) pour ce problème, d'autant qu'à l'époque où Einstein a fait ce calcul aucune solution exacte de la relativité générale n'existait.

Painlevé poursuit :

"Si on l'admet, on peut écrire :

$$\omega - \pi = \frac{6\pi\mu_1}{(1-e^2)a}(1+\eta), \qquad \delta = \frac{4\mu_1}{l}(1+\eta_1) \qquad ([9])$$

μ_1 désignant la valeur képlérienne $4\pi^2a^2/T^2$ très approximativement commune à toutes les planètes, et η, η_1 deux quantités très petites devant l'unité.[877]
Les formules ([9]) sont vérifiées pour l'avance du périhélie de Mercure et pour la déviation d'un rayon lumineux rasant le bord du Soleil."

On retrouve les résultats relativistes bien connus dans son équation ([9]) si on pose $\eta, \eta_1 = 0$. On sait que Painlevé a introduit ce terme pour permettre un ajustement empirique *ad hoc* aux équations de la relativité puisqu'il se place dans l'hypothèse où la relativité ne donne une solution qu'au premier ordre et que si à la coordonnée *r* on substitue une fonction *f(r),* comme les équations sont plus générales, cela permet un ajustement aux ordres supérieurs.

Il enchaîne donc :

"Mais on n'en peut conclure que la loi rigoureuse de la gravitation soit donnée par $f(r) \equiv r$. Posons en effet,

$$f(r) = r[1 + \varepsilon(u)] \text{ avec } u = \mu/r \qquad ([10])$$

[877] Le paramètre l est le rayon du Soleil.

la fonction ε (u) étant assujettie à être très petite pour r > l (par exemple inférieure 10^{-3} pour $u < 4.10^{-6}$) et telle de plus que u.(dε /du) – ε(u) tende vers zéro avec u et reste inférieur à 1 pour $u < 4.10^{-6}$. Les deux formules ([9]) subsistent (η et η_1 restant petits devant l'unité) et les deux vérifications qui ont si justement frappé l'opinion sont exactement aussi satisfaisantes.

Mais la première des formules ([7]) donne alors, en appelant ε_1 et ε_2 les valeurs de ε qui correspondent à r_1 et r_2,

$$\frac{4\pi^2 a^3}{T^2} = \mu\left[1 - \frac{6\mu}{a} + \frac{3\varepsilon_1}{2}(1+e) - \frac{3\varepsilon_2}{2}(1-e)\right] \qquad ([11])$$

Einstein choisit ε ≡ 0 et l'on peut prendre pour μ la valeur,

$$\frac{4\pi^2 a^3}{T^2}\left(1 + \frac{24\pi^2 a^2}{T^2}\right)$$

calculée pour Mercure[878]. Mais il n'en résulte pas que le choix soit celui qui rende le mieux compte des observations astronomiques.

l'étude des trajectoires seules (trajectoires d'une planète ou d'un rayon lumineux) ne permet pas de choisir aucune de ces fonctions ε (r) de préférence aux autres ; dans l'état actuel de nos mesures, toutes se valent."

Dans le cadre de la théorie d'Einstein, on peut affirmer que *r* (coordonnée radiale en coordonnés sphériques "euclidiennes") fait parfaitement l'affaire, car la notation est plus simple et dire que cela implique que $f(r) \equiv r$ n'apporte rien de plus que de dire qu'on change de nom la coordonnée *r* en l'appelant *f(r)*.

On voit que Painlevé persiste dans son approche empirique, considérant la relativité comme une théorie donnant des résultats corrects au premier ordre et n'attribuant les résultats probants de la relativité générale pour rendre compte de l'anomalie du périhélie de Mercure avec la coordonnée *r,* ($f(r) \equiv r$) qu'à l'imprécision des mesures actuelles.

Bien entendu, une théorie n'est pas une vérité et la théorie de la relativité n'est certainement pas la théorie finale (à supposer que cela puisse exister, ce dont nous pouvons douter), elle sera de toute manière certainement préemptée par des théories plus générales qui devraient l'inclure (du moins on l'espère) comme théorie valide dans des cas particuliers.

Dans la fin de son article, Painlevé décline plusieurs possibilités pour cette fonction *f(r)* dont le seul intérêt est de montrer qu'effectivement on peut proposer de nombreuses formes différentes (mais équivalentes) pour décrire la solution.

Ceci n'appelle pas de commentaires particuliers.

---

[878]Note de Painlevé : "Cette valeur coïncide avec la constante μ de Kepler, à une erreur relative près moindre que $1/(7.10^{-6})$".

Chapitre 3

Théorème des singularités de Hawking et Penrose

Le théorème des singularités de Hawking et Penrose[879] (le plus important d'une large classe) nous garantit l'ubiquité des singularités dans des espaces non symétriques.
"Un espace-temps *M, s*olution des équations d'Einstein, contient nécessairement des géodésiques ou courbes de type temps incomplètes, (est donc singulier au sens de Schmidt), si les quatre conditions suivantes sont satisfaites.

1- *M* ne contient pas de boucles temporelles (condition de causalité raisonnable).
2- En tout point événement de *M*, pour chaque vecteur unitaire de type temps, le tenseur énergie-impulsion satisfait la condition : $(T_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}T)u^{\mu}u^{\nu} \geq 0$ (condition d'énergie forte).
3- La variété est générique (pas trop symétrique) : il existe au moins un point événement par lequel passe le vecteur unitaire *u* tangent à une géodésique temporelle ou nulle où sa relation avec la courbure locale ne satisfait pas une relation spécifique. On doit avoir $U_{[\alpha}R_{\beta]\gamma\delta[\varepsilon}u_{\rho]}u^{\gamma}u^{\delta} \neq 0$, au moins en un point de la géodésique
4- La variété contient une surface piégée.

Avant l'établissement de ces théorèmes, on pouvait espérer que l'effondrement en une singularité de Schwarzschild était un artefact de la symétrie sphérique et que les géométries typiques resteraient non singulières (comme cela se produit en gravitation Newtonienne).

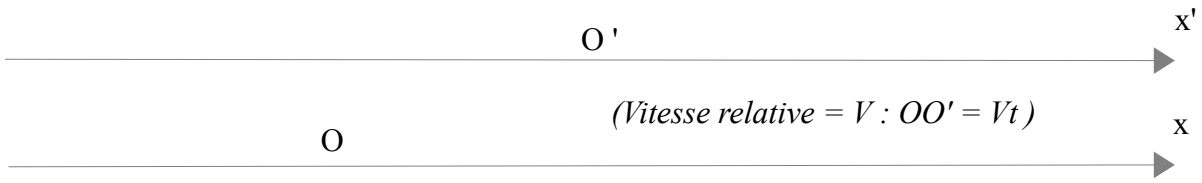
Mais le théorème de Hawking et Penrose montre que une fois que l'effondrement a atteint un certain point, l'évolution vers la singularité est inévitable. C'est l'incomplétude des géodésiques qui nous révèle l'existence d'une singularité : il existe des géodésiques qui ne peuvent pas être prolongées dans la variété , et qui néanmoins se terminent à une valeur finie du paramètre affin associé. C'est quand une surface piégée apparaît que le point de non-retour est atteint. Ceci suggère qu'une singularité est associée à un horizon.

[879]Hawking S.W. and Penrose R. (1969).

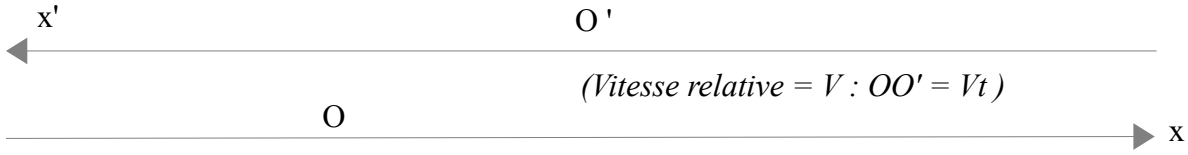
Établissement des transformations de Lorentz sur le principe de relativité seul[880].

C'est l'existence de référentiels inertiels ne se différenciant que par une vitesse relative, dans lesquels les lois de la physique sont identiques et qui sont tous équivalents, qui impose un invariant qui va se révéler intervenir dans les équations comme une vitesse indépassable.

Recherchons la transformation de Lorentz le long de deux axes *Ox* et *O'x'* glissant l'un sur l'autre avec la vitesse relative constante *V.*



Afin d'obtenir une symétrie parfaite entre les deux référentiels retournons l'axe *O'x'.*



l'homogénéité conduira à une transformation linéaire et si nous choisissons $t = t' = 0$ en *O* et *O'* quand ils se croisent, les transformations $(x, t) \rightarrow (x', t')$ et $(x', t') \rightarrow (x, t)$ seront données comme suit avec huit constantes appropriées *A* à *D'*

$$x' = Ax + Bt, \qquad t' = Cx + Dt,$$
$$x = A'x' + B't', \qquad t = C'x' + D't'. \qquad (1)\text{-}(4)$$

Le principe de relativité et la symétrie de la configuration conduisent à :

$$A = A', \qquad B = B', \qquad C = C', \qquad D = D'. \qquad (5)$$

De plus en *O'* nous avons $x' = 0$ et $x = Vt,$ donc

$$x' = Ax + Bt, \qquad (5\text{-}1)$$

entraîne

[880]Extrait du document : **Henri Poincaré :** une contribution décisive à la Relativité : par Christian Marchal, Direction Scientifique Générale, Office National d'Études et de Recherches Aérospatiales, BP 72, 92322 Châtillon cedex, France.

$$AV + B = 0 \quad \rightarrow B = - AV, \qquad (5\text{-}2)$$

De même

$$x = Ax' + Bt' \quad \rightarrow Vt = Bt' \rightarrow t = Bt'/V \quad \text{et} \quad t = Cx' + Dt' \rightarrow t = Dt',$$

entraînent

$$B = DV \qquad \text{et donc} \qquad D = - A, \text{ d'après } (5\text{-}2). \qquad (5\text{-}3)$$

Enfin en substituant x' et t' par leurs valeurs et en tenant compte de *(5-2)* et *(5-3)* :

$$x = Ax' + Bt' = A(Ax + Bt) + B(Cx + Dt) \rightarrow (1 - D^2 + CDV)x = (-DB+DB)t = 0, \qquad (6)$$

$$t = Cx' + Dt' = C(Ax + Bt) + D(Cx + Dt) \rightarrow (1-D^2 - CDV)\, t = (-CD + CD)x = 0.$$

donc :

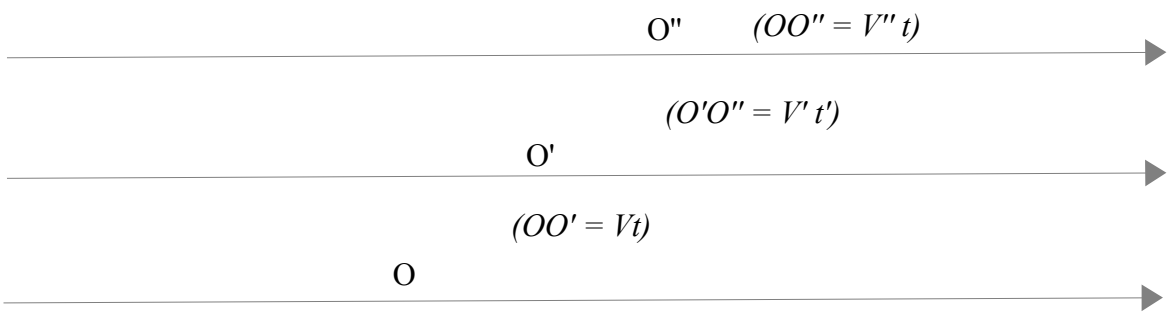
$$D^2 + CDV = 1, \qquad \text{soit } C = (1 - D^2) / DV.$$

La transformation $(x, t) \rightarrow (x', t')$ devient donc :

$$x' = -Dx + Dvt, \qquad t' = [(1- D^2) / DV]x + Dt. \qquad (7)$$

La seule inconnue restante, D, est une fonction de la vitesse V qui peut être déterminée par la comparaison de plusieurs vitesses.

Retournons à nouveau $O'x'$ et considérons trois axes Ox, $O'x'$ et $O''x''$ de même sens.



La relation *(7)* devient, avec le signe opposé pour x'

$$x' = D(x - Vt), \qquad t' = [(1 - D^2) / DV]x + Dt, \qquad (8)$$

et pareillement, avec D' pour V' et D'' pour V''.

Ce nouveau *D'* est indépendant de celui de *(4)-(5)*, lequel n'est plus utilisé après *(5)* :

$$x''= D'(x'- V't'), \qquad t'' = [(1 - D'^2)/D'V']x' + D't', \tag{9}$$

$$x''= D''(x – V''t), \qquad t'' = [(1 - D''^2)/ D''V'']x + D''t. \tag{10}$$

Éliminons alors x' et t' en *(9)* en utilisant *(8)*, nous obtenons une autre expression de *(10) :*

$$x''=\{DD'+[D'V'(D^2 - 1) / DV] \}x - DD'(V + V')t, \tag{11}$$

$$t''=\{[(D - DD'^2) / d'V'] + [(D'- D^2 D') / DV]\} x + \{ Dd'+ [DV(D'^2-1) /D'V']\} t.$$

L'identification de *(10)* et de *(11)* conduit aux quatre égalités suivantes :

$$D '' = DD' + [D'V'(D^2-1) / DV], \tag{12}$$

$$D''V ''= DD'(V + V'), \tag{13}$$

$$(1 - D''^2) / D''V''= [(D - DD'^2) /D'V'] + [(D'- D^2d') / DV], \tag{14}$$

$$D''= DD' + [DV(D'^2- 1) / D'V']. \tag{15}$$

Donc, avec *(12)* et *(15):*

$$D''- DD' = D'V'(D^2- 1) / DV = DV(D'^2 - 1) / D'V'. \tag{16}$$

La dernière égalité permet de définir la quantité *K* par :

$$K=D^2 V^2 / (D^2- 1) = D'^2V'^2 / (D'^2 – 1). \tag{17}$$

La quantité *K* à la même valeur pour deux vitesses arbitraires (et leur *D* correspondant), elle est donc constante pour toutes les vitesses.

D'autre part le cas $V = 0$ donne $x = x'$ et $t = t'$, donc $D = 1$ en *(8)*, il nous faut donc choisir la solution positive de *(17) :*

$$D = (1 – V^2/K)^{-1/2}. \tag{18}$$

On obtient ainsi, avec *(8)*, la transformation $(x, t)\rightarrow (x', t)$ et Poincaré l'étend sans difficulté à la transformation générale $(x, y, z, t) \rightarrow (x', y', z', t')$.

$$x'=(x - Vt)\ (1-V^2/K)^{-1/2}, \qquad y'= y, \quad z'= z, \quad t'=[(t-(Vx/K)]\ (1-V^2/K)^{-1/2}. \qquad (19)$$

Il reste à déterminer la constante *K*.

Si elle est infinie, la transformation est celle de Galilée.

Si $K = c^2$, la transformation est celle de Lorentz.

Bien entendu ces deux transformations sont très voisines lorsque le rapport *V/c* est faible.

La constante *K* ne peut être négative (il deviendrait possible de remonter dans le temps) et sa racine carrée apparaît comme une vitesse limite indépassable.

Ceci est confirmé par la racine carrée $(1-V^2/K)^{1/2}$ et aussi par la composition des vitesses déduite de *(12)* et *(13)*

$$V'' = (V+V')/ [1 + (VV'/ K)] \qquad \text{soit avec } K = k^2,$$

$$(k - V'')/(k+V'') = [(k-V)/(k+V)].[(k-V')/(k+v')],$$

donc $|V|$ et $|V'| < k$, entraînent $|V''| < k$.

Très naturellement Poincaré et Lorentz ont choisi $K = c^2$, ce qui s'accorde avec l'invariance de la vitesse de la lumière et avec la conservation des équations de Maxwell dans les référentiels inertiels.

On peut cependant remarquer que, si nécessaire, il reste possible que *K* soit très légèrement supérieur à c^2. Les photons auraient alors une masse très petite mais non nulle, et leur vitesse, la vitesse de la lumière, serait une fonction très légèrement croissante de leur énergie et tendrait vers $(K)^{1/2}$ quand leur énergie augmenterait indéfiniment.

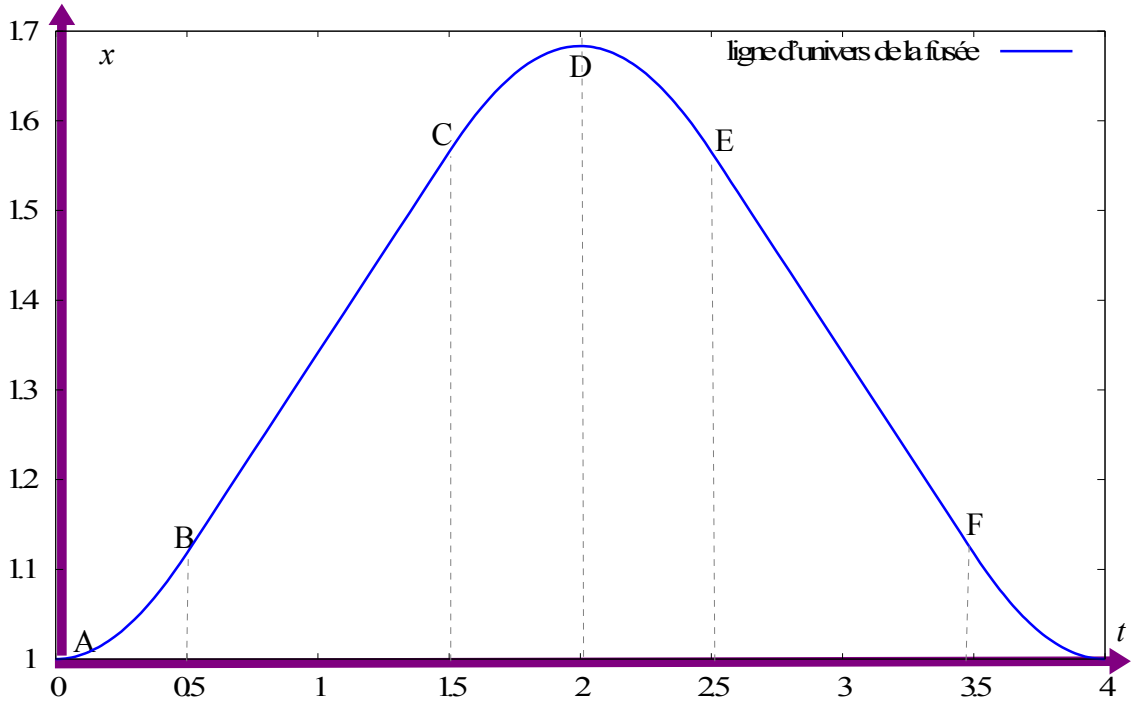
Paradoxe de Langevin

Sur le diagramme suivant (figure ci-dessous) nous avons représenté l'enchaînement des lignes d'univers d'une fusée initialement à l'arrêt en *A* dans un référentiel inertiel (le laboratoire) décollant du laboratoire et soumis à une accélération propre constante.

Au bout d'un temps propre convenu la fusée, alors en *B,* arrête son moteur pour passer en vol inertiel jusqu'en *C*.

Elle rallume son moteur en *C* en renversant la poussée pour ralentir jusqu'à un point *D* où la vitesse par rapport au laboratoire est alors nulle.

La ligne d'univers est complétée par symétrie par rapport à *D* pour obtenir une boucle fermée.



Cas d'une ligne d'univers aller-retour.

Le temps propre du trajet aller-retour de la fusée en étant la somme, calculons la longueur de Minkowski (*s)* des différentes parties de la ligne d'univers de la fusée dans le diagramme de Minkowski associé au laboratoire.

Comme il est facile de le vérifier la ligne d'univers d'un observateur subissant une accélération propre constante de valeur 1 dans les unités où $c = 1$ est représentée par une courbe d'équation[881] $x = (t^2+1)^{1/2}$ dans le diagramme de Minkowski associé au laboratoire.

Segment AB (longueur d'un arc d'hyperbole) :

De

$$x = (t^2+1)^{1/2} \rightarrow dx = t.dt/(t^2+1)^{1/2},$$

[881] Une telle trajectoire accélérée obéit à des équations du type $t = \sinh[a.\tau]/a$ et $x = \cosh[a.\tau]/a$, où a est l'accélération et τ le temps propre. On en déduit $x^2 - t^2 = 1/a^2$. S'agissant d'un exemple destiné à analyser le phénoménologie, jusqu'à nouvel ordre, on peut poser $a = 1$ pour simplifier les calculs.

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 = dt^2\,[1 - t^2/(1+t^2)] = dt^2(\,1/1+t^2) \rightarrow ds = [1/(1+t^2)]^{1/2}.dt,$$

en posant

$$t = \sinh(\alpha) \rightarrow \alpha = \operatorname{argsinh}(t) \quad , \alpha_0 = \operatorname{argsinh}(t_0),\ \alpha_1 = \operatorname{argsinh}(t_1)$$

et

$$ds = [1/(1+\sinh^2(\alpha)]^{1/2} = [\,1/\cosh^2(\alpha)]^{1/2} = 1/\cosh(\alpha),$$

comme $dt = \cosh(\alpha)\,.d\alpha, \quad ds = [1/\cosh(\alpha)]\cosh(\alpha)\,.d\alpha, \ = \ d\alpha,$

alors $s = \int_{\alpha^0}^{\alpha_1} d\alpha = \alpha_1 - \alpha_0 = \operatorname{argsinh}(t_1) - \operatorname{argsinh}(t_0).$

Dans notre exemple nous obtenons

$$\operatorname{argsinh}(0.5) - \operatorname{argsinh}(0) = \operatorname{argsinh}(0.5) = 0.481212,$$

car

$$\operatorname{argsinh}(0) = 0.$$

Sur la partie rectiligne (AB) de la ligne d'univers le calcul de *s* est trivial

$$ds^2 = dt^2 - v^2.dt^2,$$

avec

$$v = t(1+t^2)^{-1/2} = 0.5[1+(0.5)^2]^{-1/2} = 0.5/(1.25)^{1/2},$$

$$ds^2 = dt^2(1 - 0.25/1.25) = (1/1.25)dt^2 \rightarrow ds = (1/1.25)^{1/2}.dt \rightarrow s = (1/1.25)^{1/2} \int_{0.5}^{1.5} dt = (1/1.25)^{1/2}.$$

Calculons maintenant la partie *CD*.

Sur le diagramme il est clair qu'elle est symétrique de *AB* (si nous considérons que *D,* au repos dans le référentiel du laboratoire, est l'origine et qu'on progresse vers la gauche).

L'intervalle d'espace-temps (s) ne dépend pas du signe de *t*.

Et toutes les autres parties se ramènent à une des deux parties que nous avons calculées.
Donc le résultat final s'établit à :

$$\tau_{fusée} = 4(\,0.481212) + 2\,(0.8944272) = 3.7137024.$$

Le temps écoulé dans le laboratoire vaut *4*.

Le calcul montre que les observateurs dans les fusées sont plus jeunes que leurs collègues restés dans le laboratoire.

Désynchronisation des horloges entre deux référentiels galiléens en relativité restreinte.

Nous savons qu'entre deux référentiels galiléens, localement, chaque observateur voit les horloges de l'autre battre plus lentement (le rapport des fréquences $1/\gamma$ est constant dans ce

cas) et voit les longueurs d'objets dans l'autre référentiel plus courts (également d'un rapport $1/\gamma$) que ce que mesure l'observateur attaché au référentiel de l'objet.

Attachons-nous aux horloges. L'effet local sur la différence de fréquence des horloges entre référentiels galiléens, et la procédure de synchronisation des référentiels galiléens, entraîne un effet global sur les phases de ces horloges (la fréquence est la dérivée de la phase, la phase est une fonction de t et x).

Ceci apparaît dans la formule de Lorentz de transformation du temps (avec $c = 1$).

$$t' = \gamma\,(t - vx)$$

Nous voyons qu'il y a un terme vx qui apparaît et fait intervenir la coordonnée spatiale.

Les référentiels galiléens x et x' sont tous deux équipés d'horloges synchronisées (par la méthode d'Einstein) dans leur référentiel propre.

Considérons la situation du point de vue de x à l'instant où toutes ses horloges marquent $0\ H$ dans le référentiel x.

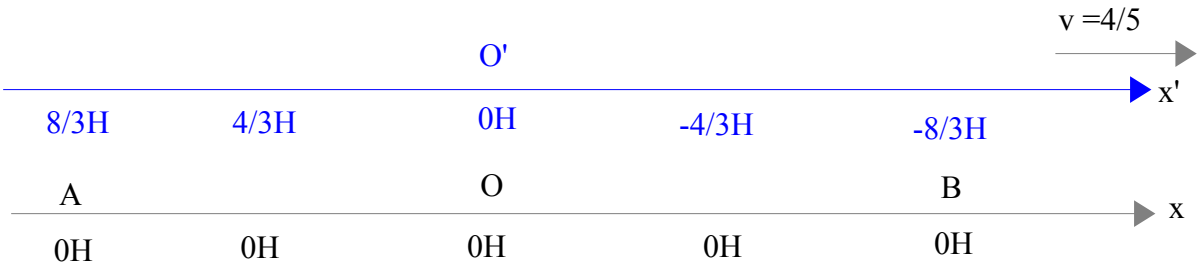
L'origine des deux référentiels est O et O'. Le référentiel x' est animé d'une vitesse $v = (4/5)c$ par rapport à x.

Les observateurs de x et x' conviennent de synchroniser leurs horloges en O et O' à $0H$ à cet instant.

En appliquant, dans ces unités, l'équation de Lorentz sur les points de gauche à droite repérés sur x de coordonnées $-2, -1, 0, +1, +2$, avec $\gamma = (1-v^2)^{-1/2} = (1-16/25)^{-1/2} = (9/25)^{-1/2} = 5/3$, on obtient :

$t'_{(-2)} = (5/3)[0 + (4/5).2] = 8/3$, $t'_{(-1)} = (5/3)[0 + (4/5).1] = 4/3$, $t'_{(0)} = (5/3)[0 + (4/5).0] = 0$
$t'_{(1)} = (5/3)[0 - (4/5).1] = -4/3$, $t'_{(2)} = (5/3)[0 - (4/5).2] = -8/3$.

Ceci est représenté sur la figure ci-dessous.



Désynchronisation entre référentiels galiléens.

La signification physique de ceci est que les cinq observateurs du référentiel galiléen x situés aux points indiqués voient, lorsque leurs horloges locales (toutes synchronisées dans leur référentiel galiléen) marquent $0H$, les horloges du référentiel x' qui passent en indiquant les heures que nous avons calculées qui sont différentes alors qu'elles sont toutes synchronisées dans leur référentiel x'.

En *O* et *O′* les horloges sont en phase à ce moment-là (par définition) mais on note le déphasage pour tous les autres points.

Deux événements en *A* et *B* dans le référentiel *x* se produisant à *0H* (simultanés dans *x*) seront observés respectivement à *2H 40mn* (plus tard) et à *21H 20 mn* (plus tôt) dans *x′* et ne seront pas simultanés.

On voit qu'un décalage spatial implique un décalage temporel.

Bien entendu, lorsque le temps s'écoule (par exemple une heure plus tard) ce ne sont plus les points *O* et *O′* qui sont en phase mais d'autres, par contre vis-à-vis des nouveaux points en phase la situation décrite est la même (invariance par translation).

Notons bien la dépendance du phénomène par rapport à la position spatiale relative des observateurs, leur distance jouant le rôle d'un "potentiel" quand on utilise une interprétation utilisant le principe d'équivalence.

Séparabilité de l'équation de Hamilton Jacobi

La séparabilité de l'équation de Hamilton Jacobi,

$$g^{\mu\nu}\frac{\partial s}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial s}{\partial x^{\nu}}+mc^2=0 \quad .$$

dont dérivent les équations du mouvement d'une particule de masse *m* dans l'espace-temps de métrique $g_{\mu\nu}$, est un sujet qui a fait couler beaucoup d'encre.

Rappelons que $g^{\mu\nu}$ est la métrique inverse et *s* l'action associée à un Lagrangien de la forme :

$$L = ½\, g_{\mu\nu}\, p^{\mu}\, p^{\nu} \text{ avec } p^{\mu} = m.dx^{\mu}/d\lambda.$$

L'équation de Hamilton Jacobi est un système de dix équations couplées non linéaires[882], aux dérivées partielles à quatre variables et il n'existe pas de méthode analytique générale d'intégration, sauf à être résolue par séparation des variables, ce qui revient à chercher une action *s* de la forme :

$$s\,(\lambda, t, r, \theta, \varphi) = s_{\lambda} + s_t + s_r + s_{\theta} + s_{\varphi}.$$

La relation entre l'action et l'impulsion est donnée par la relation

$$p_{\mu} = \frac{\partial s}{\partial x^{\mu}},$$

qui, dans le cas où l'action se sépare, conformément à l'équation ci-dessus, s'écrit :

[882]Le tenseur métrique est symétrique. En fait il y a quatre autres relations qui réduisent ces équations à six même dans le cas le plus général. Ici compte tenu des symétries, le nombre d'équations indépendantes est encore bien inférieur.

$$p_\mu = \frac{\partial s_\mu}{\partial x^\mu} .$$

La séparation des variables est possible quand il existe autant de constantes du mouvement (dans l'idéal de contraintes spécifiques à chaque coordonnée) que de degrés de liberté régis par des équations séparées (quatre, en général, dans notre problème).

Dans le problème que nous étudions (corps unique à symétrie sphérique) nous avons un invariant métrique (encore appelé invariant de masse), un invariant de type temps (la solution est stationnaire donc implique une conservation de l'énergie E sur une géodésique), un de type espace lié à la rotation autour d'un axe perpendiculaire au plan de la géodésique (symétrie axiale impliquant la conservation du moment angulaire L).

Par ailleurs, lié à la symétrie sphérique le fait que la solution ne dépende pas de θ, puisque symétrie sphérique oblige, toutes les solutions dans un plan (les géodésiques sont planes dans ce problème) passant par le centre de symétrie sont équivalentes par rotation du plan autour du point central donc pour simplifier, on peut toujours poser $\theta = \pi/2$. On peut ignorer s_θ, puisque si $\theta = \pi/2$ =constante, cela implique que $p_\theta = 0$.

Les orbites étant planes, la partie spatiale concernant les géodésiques ne possèdent que deux degrés de liberté.

Dans le cas que nous traitons, ceci permet de mettre l'action sous la forme :

$$s = - ½ m^2.\lambda - E.t + L.\varphi + s_r$$

Où s_r est l'action représentée par une fonction qui ne dépend que de r, donc les équations différentielles relatives à r vont être intégrables (même si les solutions ne sont pas forcément simples).

L'expression du hamiltonien permet alors trouver une solution analytique au problème.

Comme nous sommes précisément dans ce cas de séparabilité des variables, les équations différentielles couplées aux dérivées partielles pour chaque composante de l'équation géodésique se ramènent à des équations différentielles classiques permettant d'intégrer chaque composante indépendamment des autres. Mais cela se fait dans le cadre de la définition paramétrique de la géodésique.

Toutes ces équations couplées par le paramètre affin commun sont nécessaires, sauf dégénérescence, pour obtenir la solution. Séparation n'est pas indépendance.

La proposition de Painlevé paraît donc sujette à caution dans son principe et il convient d'examiner si elle rejoint l'approche hamiltonienne générale que nous venons de décrire.

Séparabilité partielle de l'équation de Hamilton Jacobi, cas espace-temps stationnaire

Par stationnaire, nous entendons que le ds^2 qui définit la métrique de l'espace-temps ne dépend pas de la coordonnée temporelle. Cela inclut les formes de métriques statiques et stationnaires[883].

[883] Nous en donnons une définition plus précise dans un autre chapitre.

Dans ce cas, sans que la séparation soit totale, on peut séparer l'espace et le temps dans le $ds^2 = d\tau^2$ puisque ce caractère implique la conservation de l'énergie qui se manifeste dans le cas statique (forme de Schwarzschild) par une relation du type[884]

$$E = K_\mu (dt/d\tau),$$

où $K_\mu = g_{0\mu}K^0 = g_{00}$, dans ce cas, est le vecteur de Killing associé au temps.

On peut donc éliminer[885] dt^2 du $d\tau^2$ et avoir alors une forme du type

$$d\tau^2 = f(E,x, y, z)\, dS^2,$$

où dS^2 est une forme de métrique purement spatiale, dont on peut déterminer les géodésiques par l'équation géodésique où les équations de Lagrange dans un espace à trois dimensions seulement, le temps propre étant le paramètre affin de cette géodésique, ce qui rejoint l'analyse de Painlevé, du moins dans son principe, car sauf cas très spécifique, la métrique spatiale ainsi constituée représentée par dS^2 n'est pas égale à la métrique spatiale $d\sigma^2$ de l'équation *([6bis]),* celui de la forme de Schwarzschild donnée.

Nous allons étudier cela plus en détail.

Validité de la forme de la coordonnée temporelle proposée par Painlevé : cas général

Dans ce qui précède nous avions montré que les conditions de séparation des variables temporelles et spatiales étaient remplies dans le cas que nous considérons et indiqué une méthode pour résoudre le problème.

Pour les géodésiques nulles, la solution étant immédiate, il n'était pas nécessaire de démontrer l'équation *([6ter]).* Pour les géodésiques de type temps, ce n'est pas évident. Nous allons montrer que cette relation se déduit simplement de la constante du mouvement liée à la conservation de l'énergie sur une géodésique dans toute métrique indépendante du temps .

Démontrons l'équation *([6ter])* pour la forme de Schwarzschild [886]

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r}} - r^2\left(\sin^2\theta\, d\varphi^2 + d\theta^2\right) \qquad (1\text{-}2bis)$$

exprimée sous la forme de l'équation *([6])*

$$ds^2 = d\tau^2 = \frac{dt^2}{U(x_1, x_2, x_3)} - d\sigma^2 \qquad ([6])$$

[884]E est l'énergie par unité de masse pour une particule réelle (m =1, c =1).

[885]On l'élimine "lexicalement" mais sémantiquement il intervient toujours dans l'équation via la constante du mouvement *E* associée à la coordonnée temporelle.

[886]On utilise $d\tau$ (avec c =1) pour avoir la même signature dans les deux équations pour homogénéiser la notation, puisque Painlevé utilise la convention (+, -, -, -) qui était celle usuelle à l'époque.

Valeur du potentiel dans la forme de Schwarzschild

Par identification des équations *(1-2bis)* et *([6]),* rappelées ci-dessus, il ressort que :

$$U(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} \quad .$$

Comme la forme de la métrique de Schwarzschild ne dépend pas du temps nous savons que l'énergie est conservée sur les géodésiques.

Conservation de l'énergie

Utilisons la relation concernant cette conservation de l'énergie E[887] sur la géodésique qui implique (existence d'un vecteur de Killing K^μ) :

$$E = -K_\mu \frac{dx^\mu}{d\tau} = (1 - \frac{2M}{r})\frac{dt}{d\tau} \rightarrow \frac{dt}{d\tau} = E\,U.$$

En remplaçant $d\tau$ dans l'équation ci-dessus par sa valeur en fonction de *dt, U* et $d\sigma$ extraite de l'équation *([6])*, on obtient une relation entre *dt, U* et $d\sigma$.

$$d\tau^2 = \frac{dt^2}{E^2U^2} = \frac{dt^2}{U} - d\sigma^2 \rightarrow d\sigma^2 = \frac{dt^2}{U} - \frac{dt^2}{E^2U^2} \rightarrow dt^2 = \frac{E^2U^2 d\sigma^2}{(E^2U-1)}$$

Relation entre le paramètre h et l'énergie E

En divisant numérateur et diviseur par E^2 et en extrayant la racine carrée on obtient

$$dt = \frac{U\,d\,\sigma}{\sqrt{U - \frac{1}{E^2}}} \quad , \qquad \textit{([6quater])}$$

qu'on peut identifier à son équation *([6ter])* en posant :

$$h = -1/E^2.$$

Nous avons montré que la relation entre temps et espace dans cette métrique, que donne Painlevé, qui s'appuie sur la conservation géodésique de l'énergie d'une particule de masse unitaire (pour une particule de masse *m* et d'énergie, *E = e/m)*[888], est bien fondée.

[887] E est l'énergie d'une particule par unité de masse (m=1, c =1).

Cohérence et signification des équations de Painlevé pour la relativité générale

Calculs complémentaires

Nous venons d'indiquer la signification précise de l'équation ([6-5]) qui résulte simplement de la séparabilité de l'action dans ce cas, montrons, pour permettre de faire la comparaison avec le résultat issu de la méthode proposée par Painlevé, comment cette séparabilité est mise en œuvre sur l'exemple de la géodésique radiale critique ($d\theta = d\varphi = 0$) dans le contexte de la forme de Schwarzschild, avec $h = E^{-2} = -1$,[889] où

$$ds^2 = -d\tau^2 = \frac{-h\, d\sigma^2}{U+h} \;\rightarrow\; \frac{d\sigma}{d\tau} = \sqrt{\frac{U+h}{h}} \quad , \qquad \textit{([6-5])}$$

$$d\sigma^2 = \frac{dr^2}{1-\frac{2M}{r}} = \frac{r\, dr^2}{r-2M} \quad , \qquad \textit{([6-6])}$$

et

$$U-1 = \frac{1}{1-\frac{2M}{r}} - 1 = \frac{2M}{r-2M} \quad , \qquad \textit{([6-7])}$$

en reportant dans ([6-5]) cela donne

$$ds^2 = \frac{r}{2M} dr^2 \quad , \qquad \textit{([6-8])}$$

ce qui donne un lagrangien L

$$L = \frac{1}{2}\left(\frac{r}{2M}\right)\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 \quad . \qquad \textit{([6-9])}$$

En appliquant les équations de Lagrange avec ce lagrangien

$$\frac{d}{ds}\left[\frac{d}{\left(\frac{dr}{ds}\right)}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{r}{2M}\right)\left(\frac{dr}{ds}\right)^2\right]\right] - \frac{d}{dr}\left[\left(\frac{1}{2}\left(\frac{r}{2M}\right)\left(\frac{dr}{ds}\right)^2\right)\right] = \left(\frac{dr}{ds}\right)\frac{d}{dr}\left[\left(\frac{r}{2M}\right)\left(\frac{dr}{ds}\right)\right] - \left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2M}\right)\left(\frac{dr}{ds}\right)^2\right) = 0,$$

on obtient finalement l'équation[890] :

[888] Avec c =1. Pour la lumière, de masse nulle et d'énergie non nulle, cette convention conduit à $E = \infty \rightarrow h = 0$. comme Painlevé l'a posé.

[889] Pour cette géodésique, où l'énergie potentielle est nulle à l'infini, l'énergie conservée vaut 1 pour une masse unitaire ($E = mc^2$) avec notre choix d'unités (c =1).

[890] Nous ne donnons pas les détails des calculs qui ne présentent pas de difficulté.

$$\frac{d^2 r}{ds^2}+\frac{1}{2r}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2=0 \quad .$$

Compte tenu de *([6-8])*, on en déduit

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2}=\frac{-M}{r^2},$$

ce qui est le résultat connu pour cette géodésique en relativité générale.

Remarquons qu'au cours de la démonstration nous avons été amenés à calculer

$$\frac{dr}{d\tau}=\sqrt{\frac{2M}{r}} \quad , \qquad \textit{([6-10])}$$

qui est la composante spatiale de quadri-vitesse spatiale (radiale dans ce cas) de cet observateur en chute libre radiale sans vitesse initiale à l'infini.

Nous retrouverons ce résultat au chapitre *5* quand nous étudierons comment la forme de Painlevé peut se déduire de celle de Schwarzschild.

Ceci montre qu'on obtient bien le même résultat que lorsqu'on calcule la quadri-vitesse avec l'équation complète.

Le même calcul peut être fait pour la composante temporelle de la quadri-vitesse en utilisant l'équation ([6-4]) d'où on tire

$$\frac{dt}{d\tau}=\frac{U}{\sqrt{-h}} \quad , \qquad \textit{([6-11])}$$

en remplaçant *U* et *h* par leurs valeurs respectives utilisées pour la composante spatiale.

On obtient :

$$\frac{dt}{d\tau}=\frac{1}{1-\frac{2\mathrm{m}}{r}} \quad . \qquad \textit{([6-11bis])}$$

Comme pour la composante spatiale de la quadri-vitesse, nous retrouverons ces valeurs au chapitre *5*, lorsque nous la dériverons de la forme de la métrique complète de Schwarzschild.

Nous voyons que l'utilisation que nous faisons de ces formes partielles est bien justifiée et que l'équation géodésique qui peut se déduire de la quadri-vitesse est bien la même que celle qui se déduit de la forme de la métrique complète de Schwarzschild.

Forme géodésique dans le cas de la forme complète de la métrique de Schwarzschild

Dans l'esprit (mais pas dans la lettre) de la méthode suggérée par Painlevé nous avons établi l'équation géodésique, séparément, à partir d'équations résultant, compte tenu des symétries de cette solution, de sa décomposition entre équations de temps et d'espace. Il est facile de vérifier que ces équations, dont on utilise la combinaison des éléments séparés pour caractériser l'équation géodésique physique donnent le même résultat que celui qu'on obtient directement de la métrique complète.

Forme relativiste de Schwarzschild

$$ds^2 = -\left(1-\frac{2M}{r}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{1-\frac{2M}{r}} + r^2\left(\sin^2\theta\, d\varphi^2 + d\theta^2\right) \qquad \textit{([6-12])}\ ^{891}$$

Où le rapprochement avec l'équation *([6])* montre que ici $U = (1 - 2M/r)^{-1}$.

Prise en compte des constantes du mouvement dans la forme géodésique de la métrique.

Rappelons les constantes du mouvement E (énergie conservée sur une géodésique) et L (moment angulaire conservé sur une géodésique) dans la forme relativiste liée au fait que la métrique ne dépend ni de la coordonnée t ni de la coordonnée φ, et que compte tenu de symétrie sphérique on peut poser $\theta = \pi/2$ [892] ce qui implique l'existence de vecteurs de Killing permettant de calculer ces invariants.

$$E = (1 - 2M/r)\, dt/d\tau \qquad \textit{([6-13])}$$
$$L = r^2 d\varphi/d\tau$$

En insérant ces constantes du mouvement dans la métrique de Schwarzschild, on peut éliminer les termes en $(dt/d\tau)$ et $(d\varphi/d\tau)$ [893]et, sur une géodésique, elle se met sous la forme :

$$-E^2 + \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \left(1-\frac{2M}{r}\right)\left(\frac{L^2}{r^2}+\varepsilon\right) = 0 \quad . \qquad \textit{([6-14])}$$

Cette équation, où ε est un paramètre qui vaut 0 ou 1 [894] selon que la géodésique décrite par l'équation est de type nul ou de type temps, confirme que les variables se séparent bien puisque elle décrit une équation différentielle qui ne dépend que de dérivée de r par rapport au paramètre affin et de fonctions de r.

[891]Nous adoptons la convention moderne pour la signature de la métrique, les signes d'équations écrites avec la convention (opposée) de Painlevé doivent être ajustés en conséquence.
[892]En fait c'est lié à la conservation du moment angulaire qui est un vecteur spatial 3D qui implique conservation de la direction du vecteur impliquant que le mouvement est plan. Celle du module du vecteur est donnée par la relation invoquant φ.
[893]Rappel, on avait également posé $\theta = \pi/2$ en en justifiant l'hypothèse.
[894]Pour une géodésique de type espace $\varepsilon = -1$. Mais on ne considère pas ces géodésiques en général.

L'intégration de cette équation différentielle donne l'équation du mouvement *r (τ)*.

On peut remarquer que les coordonnées angulaires et de temps ne figurant pas dans l'expression, pour toutes les formes de la solution au problème du corps unique à symétrie sphérique, utilisant la même coordonnée *r*, l'équation ci-dessus est la même, en particulier pour la forme donnée par Painlevé dans son article du 24/10/1921.

Si on montre que cette forme peut être obtenue à partir l'équation *([6-5])*

$$ds^2 = -d\tau^2 = \frac{-h\, d\sigma^2}{U+h} \quad , \qquad \textit{([6-15])}$$

nous aurons montré que toutes les géodésiques données par *([6-5])* qui est une forme purement spatiale sont toutes celles de la forme complète *([6-12])*.

Développons le terme $d\sigma^2$, dans le même contexte que ce qui a produit l'équation *([6-14])*

$$d\sigma^2 = \frac{dr^2}{1-\frac{2M}{r}} + r^2\left(\sin^2\theta\, d\varphi^2 + d\theta^2\right) \quad . \qquad \textit{([6-16])}$$

En reportant dans l'équation ([6-15]), avec $\theta = \pi/2$, et $r^2(d\varphi/d\tau) = L$, on obtient :

$$\frac{U+h}{h} = \frac{dr^2}{d\tau^2\left(1-\frac{2M}{r}\right)} + \frac{L^2}{r^2} \quad . \qquad \textit{([6-17])}$$

Soit en multipliant les deux membres par $1/U = 1 - 2M/r$:

$$\frac{1}{h} + \left(1-\frac{2M}{r}\right) = \frac{-dr^2}{d\tau^2} - \left(1-\frac{2M}{r}\right)\frac{L^2}{r^2} \quad .$$

Rappelons que dans la convention de Painlevé $h = -E^{-2}$

En appliquant et réarrangeant l'équation on obtient :

$$-E^2 = \frac{-dr^2}{d\tau^2} - \left(1-\frac{2M}{r}\right)\left(\frac{L^2}{r^2}+1\right) \quad . \qquad \textit{([6-18])}$$

Ce qui est bien la même équation. Nous nous sommes restreints ici au cas de la géodésique de type temps mais il est simple de vérifier qu'on peut généraliser au cas des géodésiques nulles et trouver :

$$-E^2+\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2+\left(1-\frac{2M}{r}\right)\left(\frac{L^2}{r^2}+\varepsilon\right)=0 \quad , \qquad \textit{([6-19])}$$

avec ε = 0 ou 1 selon que la géodésique est de type nulle ou temps.

Pour compléter ce chapitre ajoutons que si on écrit cette équation sous une forme "pseudo- newtonienne" (énergie cinétique + énergie potentielle = énergie totale)

$$\tfrac{1}{2}(dr/d\tau)^2 + V(r) = e,$$

où $e = (\tfrac{1}{2})E^2$.

Ceci conduit à définir un potentiel *V(r)* qui ne dépend de la coordonnée *r* :

$$V(r) = (\tfrac{1}{2})\,\varepsilon - \varepsilon(GM/r) + L^2/2r^2 - GML^2/r^3.$$

On reconnaît que par rapport au potentiel newtonien, il y a un terme supplémentaire (le dernier).

Si le moment angulaire *L* est nul, (géodésique radiales) les potentiels sont similaires, mais en relativité les dérivées sont par rapport au temps propre, ce qui ne correspond pas généralement au temps de la mécanique classique.

Les fonctions *r(φ)* de la géodésique en coordonnées polaires sont-elles identiques ?

Cas des géodésiques de type temps

Pour les géodésiques nulles nous savons que les équations sont identiques.

Pour celles de type temps, malgré la différence constatée, est-il possible que les fonctions *r(φ)* dans le plan de la géodésique soient les mêmes ?

À cet effet, comparons les courbes spatiales géodésiques obtenues par les équations géodésiques dans la forme de métrique *([6])* et *([6bis])* définies en coordonnées polaires par la fonction *r(φ),* on sait que la courbe est plane dans les deux cas.

Dans les mêmes coordonnées une géodésique est décrite par une équation et une seule, nous devons donc obtenir la même équation *r(φ)* pour les géodésiques des deux formes.

Établissons cette équation pour chacune d'entre elles et comparons-les.

En tenant compte de l'invariance de la métrique par rotation (symétrie sphérique), on peut poser :

$$\theta = \pi/2,$$
$$l = r^2(d\varphi/ds_1),$$

où *l,* est le moment angulaire conservé, et utilisant ces relations et en remplaçant *U* et *h* par leur valeur tirée de *([6])*, la métrique géodésique définie par l'équation *([6bis])* peut s'écrire :

$$1=\left(\frac{1}{1-\frac{2M}{r}}-\frac{1}{E^2}\right)\left(\frac{dr^2}{ds_1^2\left(1-\frac{2M}{r}\right)}+\frac{l^2}{r^2}\right) \quad . \qquad ([6\text{-}20])$$

En multipliant par[895]

$$(ds_1/d\varphi)^2 = r^4/l^2, \qquad ([6\text{-}21])$$

pour éliminer le paramètre affin ds_1 au profit de φ on va pouvoir alors comparer les trajectoires purement spatiales $r(\varphi)$ puisqu'elles s'expriment dans les mêmes coordonnées, avec bien sûr la restriction que les constantes du mouvement associées aux moments angulaires *L* et *l* sont deux constantes différentes puisqu'elles font intervenir des paramètres affins différents. On obtient l'équation suivante

$$\frac{r^4}{l^2}=\left(\frac{1}{1-\frac{2M}{r}}-\frac{1}{E^2}\right)\left(\frac{dr^2}{d\varphi^2\left(1-\frac{2M}{r}\right)}+r^2\right) \quad , \qquad ([6\text{-}22])$$

soit

$$\left(\frac{E^2(r-2M)}{E^2r-(r-2M)}\right)\frac{r^4}{l^2}=\frac{dr^2}{d\varphi^2\left(1-\frac{2M}{r}\right)}+r^2 \quad , \qquad ([6\text{-}23])$$

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2=\left[\left(\frac{E^2(r-2M)}{E^2r-(r-2M)}\right)\frac{r^4}{l^2}-r^2\right]\left(\frac{r-2\mathrm{M}}{r}\right) \quad , \qquad ([6\text{-}24])$$

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2=\left[\left(\frac{E^2\left(1-\frac{2M}{r}\right)}{E^2-\left(1-\frac{2M}{r}\right)}\right)\frac{r^4}{l^2}-r^2\right]\left(1-\frac{2M}{r}\right) \quad , \qquad ([6\text{-}24bis])$$

qu'il faut comparer à l'équation similaire issue de la forme de Schwarzschild [896]

[895]On reprend la méthode donnée dans Carroll (2003) p. 213-216 pour l'avance du périhélie de Mercure.
[896]Équation tirée de *(6-14)* qu'on trouve aussi dans Carroll (2003) p 213 (où on a posé $\varepsilon = E^2/2$, p. 209)

$$(\frac{dr}{d\varphi})^2=-(1-\frac{2M}{r})(r^2+\frac{r^4}{L^2})+E^2\frac{r^4}{L^2} \quad , \qquad \textit{([6-25])}$$

$$(\frac{dr}{d\varphi})^2=[E^2-(1-\frac{2M}{r})](\frac{r^4}{L^2})-r^2(1-\frac{2M}{r}) \quad . \qquad \textit{([6-25bis])}$$

On voit que les expressions *([6-24bis])* et *([6-25bis])* sont égales si :

$$\frac{E^2(1-\frac{2M}{r})}{(E^2-1)+\frac{2M}{r}}=[(E^2-1)+\frac{2M}{r}]\frac{l^2}{L^2} \quad , \qquad \textit{([6-26])}$$

$$E^2(1-\frac{2M}{r})=[(E^2-1)+\frac{2M}{r}]^2\frac{l^2}{L^2} \quad ,$$

$$E^2-(E^2-1)^2\frac{l^2}{L^2}=\frac{2M}{r}[E^2+2(E^2-1)(\frac{l^2}{L^2})]+(\frac{2M}{r})^2\frac{l^2}{L^2} \quad ,$$

$$(E^2-(E^2-1)^2\frac{l^2}{L^2})r^2-2Mr[E^2+2(E^2-1)(\frac{l^2}{L^2})]-(2M)^2\frac{l^2}{L^2}=0 \quad .$$

Les expressions *([6-24bis])* et *([6-25bis])* ne dépendent que de la seule variable *r* (coordonnée) puisque *E, L, l, M* sont des constantes.

Elles doivent donc être vérifiées quel que soit *r*.

Il est facile de vérifier en développant *([6-26]),* en séparant les termes constants des termes comportant la coordonnée *r* et en multipliant les deux termes par r^2 qu'on obtient en fait une équation du deuxième degré et non pas une identité ce qui sauf dégénérescence de l'équation dans un cas particulier de valeurs de *L, l* et *E* montre que ces équations sont différentes.

Chapitre 4

Pas de calculs en annexe.

Chapitre 5

Différentes formes de métrique avec boost.

Forme donnée par K. Martel et E. Poisson

Dans cette forme, les auteurs introduisent un paramètre d'énergie *p* différent de *1* [897], pour traiter le cas où la "vitesse" de chute radiale à l'infini de l'observateur n'est plus nulle[898].

Ce paramètre *p* constant caractérise le boost entrant à l'infini et est défini par : $p = E^{-2}=1-v_\infty^2$.

Un paramètre de "vitesse" noté v_∞ est introduit[899]. Pour calculer la nouvelle coordonnée *T,* ils vont utiliser la même méthode que pour le cas de Painlevé.

A partir de l'équation géodésique de cet observateur d'énergie $E = (p)^{-1/2}$, conservée sur la géodésique, exprimée dans les coordonnées de Schwarzschild (*t, r*)[900], ils vont montrer que la quadri-vitesse U_μ covariante de cet observateur (constituée de U_0 et U_1, car le mouvement est radial) est le gradient d'une fonction scalaire *T* telle que :

$$U_\mu=\frac{-1}{\sqrt{p}}\partial_\mu T \quad .$$

La relation ci-dessus garantit que la quadri-vitesse de cet observateur (avec boost) est orthogonale aux hypersurfaces spatiales définies par *T* = constante, comme dans le cas de l'observateur de Painlevé mais avec un facteur de Lorentz, constant en tout point de la géodésique, sur la coordonnée *r* par rapport à celle de la forme de Painlevé.

Ceci correspond bien au phénomène physique que nous étudions.

Un observateur quelconque de cette classe[901] d'observateurs est animé d'une vitesse, égale au boost défini par *p,* par rapport à l'observateur situé à la même valeur de la coordonnée radiale *r* de la classe d'observateurs de Painlevé.

La nouvelle coordonnée *T* définie par la relation précédente s'écrit :

$$T=t+\int\left(\frac{\sqrt{1-p\left(1-\frac{2GM}{r}\right)}}{1-\frac{2GM}{r}}\right)$$

En opérant le changement de coordonnées dans la forme de Schwarzschild on obtient la nouvelle forme de métrique suivante

[897]En fait mc^2, mais on a considéré une masse unitaire $m = 1$ et on a posé $c = 1$.
[898]Le cas de vitesse nulle correspond à l'observateur de Painlevé.
[899]Nous en préciserons la signification et verrons que dans d'autres approches, pour traiter ce problème, d'autres paramètres de "vitesse" sont introduits et qu'ils n'ont pas exactement la même signification.
[900]Le mouvement étant radial, on ne s'intéresse pas aux coordonnées angulaires.
[901]Quand nous parlons d'un observateur, en fait c'est en tant que représentant d'une classe dont il décrit les attributs.

$$ds^2 = -\left(1-\frac{2GM}{r}\right)dT^2 + 2\sqrt{1-p\left(1-\frac{2GM}{r}\right)}\,dr.dT + p\,dr^2 + r^2\,d\Omega^2 \quad , \qquad \textit{(A3-5-1)}$$

qui peut aussi s'écrire

$$ds^2 = -\left(\frac{1}{p}\right)dT^2 + p\left(dr + \frac{1}{p}\sqrt{1-p\left(1-\frac{2GM}{r}\right)}\,dT\right)^2 + r^2\,d\Omega^2 \quad . \qquad \textit{(A3-5-2)}$$

Pour $r = \infty$ on voit sur (A3-5-2) que pour

$$\frac{dr}{dT} = \frac{-1}{p}\sqrt{1-p} = \frac{-v_\infty}{1-v_\infty} \quad , \qquad \textit{(A3-5-2-1)}$$

la forme (A3-5-2) se réduit à :

$$ds^2 = -d\tau^2 = -\left(\frac{1}{p}\right)dT^2 \;\rightarrow\; d\tau = \frac{dT}{\sqrt{1-v_\infty^2}} \quad .$$

Le temps propre τ et la coordonnée temps T sont bien liés par un facteur de Lorentz constant de paramètre v_∞, comme nous l'avions indiqué précédemment.

Par ailleurs la relation (A3-5-2-1) montre que dans cette forme la "vitesse" de coordonnées dr/dT, à l'infini n'est pas v_∞ comme on aurait naïvement pu le croire.

Pour que la coordonnée temporelle soit le temps propre de l'observateur géodésique, on peut aussi définir une nouvelle coordonnée temps τ telle que $\tau = p^{-1/2}\,T$, (rappelons que p est une constante) donc $d\tau = p^{-1/2}\,dT$, soit $dT = p^{1/2}\,d\tau$. En substituant dans *(A5-2)* on obtient :

$$ds^2 = -d\tau^2 + p\left(dr + \sqrt{\frac{1-p}{p} + \frac{2GM}{r}}\,d\tau\right)^2 + r^2\,d\Omega^2 \quad . \qquad \textit{(A3-5-2-2)}$$

En utilisant la définition de $p = 1 - v^2_\infty$, cela donne :

$$ds^2 = -d\tau^2 + \left(1-v_\infty^2\right)\left(dr + \sqrt{\frac{v_\infty^2}{1-v_\infty^2} + \frac{2GM}{r}}\,d\tau\right)^2 + r^2\,d\Omega^2 \quad . \qquad \textit{(A3-5-2-3)}$$

On remarque que pour $r = \infty$ cette forme se réduit à :

$$ds^2 = -d\tau^2 + \left(1-v_\infty^2\right)\left(dr + \sqrt{\frac{v_\infty^2}{1-v_\infty^2}}\,d\tau\right)^2 + r^2\,d\Omega^2 \quad . \qquad \textit{(A3-5-2-4)}$$

Pour une géodésique radiale (entrante) le temps propre ($ds^2 = -d\tau^2$) s'obtient pour :

$$dr = -\sqrt{\frac{v_\infty^2}{1-v_\infty^2}}\, d\tau = \frac{-v_\infty}{\sqrt{1-v_\infty^2}}\, d\tau \quad . \qquad (A3\text{-}5\text{-}2\text{-}5)$$

La valeur v_∞ est affectée du facteur de Lorentz associé au boost.[902]

Forme donnée par R. Gautreau et B. Hoffmann (1978)

$$ds^2 = -d\tau^2 + \frac{\left(\epsilon\, dr - \sqrt{\frac{2GM}{r} - \frac{2GM}{r_0}}\, d\tau\right)^2}{1-\frac{2GM}{r_0}} + r^2\, d\Omega^2 \qquad (A3\text{-}5\text{-}3)$$

Dans cette forme, r_0 est la distance de départ (sans vitesse initiale) au temps τ_0 de la géodésique entrante si $\epsilon = -1$ et sortante jusqu'à un maximum égal à r_0 si $\epsilon = +1$.[903]

Cette solution est également traitée dans "Gravitation (1973)" p 659-664 qui montre que l'équation géodésique est de type cycloïdal.

La coordonnée temporelle de cette forme a été établie par une méthode différente de celle de K. Martel et E. Poisson.

Les auteurs utilisent les quadri-vitesses radiales (contravariantes) U^μ, pour un observateur[904] de vitesse nulle à $r = r_0$, dans la forme de Schwarzschild (coordonnées *t, r)* pour calculer le temps propre en fonction de la coordonnée temporelle *t* et de *r*.

La relation établie leur permet de procéder à un changement de coordonnées par rapport à la forme de Schwarzschild, en conservant la coordonnée radiale *r,* mais en substituant le temps propre τ de l'observateur géodésique à la coordonnée temporelle *t*.

Cela leur permet d'obtenir la nouvelle forme (A3-5-3).

Vérifions directement que la coordonnée temporelle de cette forme est orthogonale à l'hypersurface τ = constante et que, pour les coordonnées *t* et *r*, on peut donc écrire $U_\mu = k.\partial_\mu \tau$, pour $\mu = 0$ et *1, k* étant une constante

En combinant les quadri-vitesses correspondant à l'équation géodésique pour cet observateur :

$$U^0 = \frac{dt}{d\tau} = \frac{\sqrt{1-\frac{2GM}{r_0}}}{1-\frac{2GM}{r}} \quad ,$$

[902]Nous verrons que la signification de la vitesse peut être différente selon la méthode utilisée pour définir l'élément métrique. Comme la coordonnée *r* ce boost est relatif à la coordonnée temporelle seulement.

[903]Voir R. Gautreau & B.Hoffmann *(1978) p. 2553 éq. (10)*

[904]Voir équations 7a et 7b de leur article, soit en appelant τ le temps propre de l'observateur sur cette géodésique avec boost :$U^1 = dr/d\tau = \epsilon(2GM/r - 2GM/r_0)^{1/2}$ et $U^0 = dt/d\tau = (1-2GM/r_0)^{1/2}(1 - 2GM/r)^{-1}$.

$$U^1=\frac{dr}{d\tau}=\epsilon\sqrt{\frac{2GM}{r}-\frac{2GM}{r_0}} \quad ,$$

on peut montrer que $d\tau$ est une différentielle totale qui s'écrit :

$$d\tau=\sqrt{1-\frac{2GM}{r_0}}\,dt-\epsilon\frac{\sqrt{\frac{2GM}{r}-\frac{2GM}{r_0}}}{1-\frac{2GM}{r}}\,dr \quad .$$

En calculant les vitesses covariantes, $U_\mu = g_{\mu\nu}U^\nu$, associées à cet observateur[905]

$$U_0=\sqrt{1-\frac{2GM}{r_0}} \quad ,$$

$$U_1=\epsilon\frac{\sqrt{\frac{2GM}{r}-\frac{2GM}{r_0}}}{1-\frac{2GM}{r}} \quad ,$$

nous vérifions que l'équation $U_\mu = -k.\partial_\mu \tau$ est satisfaite.

Forme donnée par M. Mizony (2011)

$$ds^2=-dt^2+\frac{\left(dr+\epsilon\sqrt{v_0^2-\frac{2GM}{r_0}+\frac{2GM}{r}}\,dt\right)^2}{1+v_0^2-\frac{2GM}{r_0}}+r^2d\Omega^2 \qquad (A3\text{-}5\text{-}4)$$

M. Mizony[906] propose cette forme où v_0 est la vitesse purement radiale *(dr/dt),* sortante si $\epsilon = -1$ ou entrante si $\epsilon = +1$, de l'observateur pour $r = r_0$ et où Ω est l'élément spatial à symétrie sphérique.

M. Mizony utilise le fait que la géodésique radiale est "newtonienne" et que rajouter un boost ne change pas la dynamique (spécifiée par une équation différentielle ne comportant qu'une différentielle du second ordre), car elle ne fait que spécifier un paramètre d'intégration de "vitesse initiale", pour faire une extension "newtonienne" de la forme de Painlevé.

Relation entre la forme de Gautreau-Hoffmann et celle de Mizony

On voit que la forme (A3-5-4) donnée par M. Mizony, permet d'ajouter une vitesse non nulle v_0 en r_0, par rapport au cas traité par R. Gautreau et B. Hoffmann.

[905] En métrique de Schwarzschild puisque ces vitesses sont définies dans cette métrique.
[906] Mizony M. (2011).

Forme de Gautreau Hoffmann généralisée

Mais ce n'est qu'une question de présentation, car si on considère $r_1 < r_0$, la vitesse géodésique radiale $dr/d\tau = v_1$ en r_1 qui correspond à la nullité du terme entre parenthèses au carré (pour que $ds^2 = d\tau^2$: condition géodésique) n'est pas nulle et vaut selon *(A3-5-3)* :

$$dr/dt = v_1 = \epsilon(2GM/r_1 - 2GM/r_0)^{1/2} \rightarrow -2GM/r_0 = v_1^2 - 2GM/r_1.$$

En substituant dans *(A3-5-3)* cela donne

$$ds^2 = -d\tau^2 + \frac{\left(\epsilon\, dr - \sqrt{\frac{2GM}{r} + v_1^2 - \frac{2GM}{r_1}}\, d\tau\right)^2}{1 + v_1^2 - \frac{2GM}{r_1}} + r^2 d\Omega^2 \quad , \qquad (A3\text{-}5\text{-}5)$$

avec les mêmes conventions sur ϵ que dans *(A3-5-3)*. C'est la même équation que celle de M. Mizony, avec les limitations associées à la contrainte que l'expression sous le radical soit non négative.

On voit que, à l'infini, pour l'équation géodésique correspondant à cet observateur avec boost, on a $dr/d\tau = v_1$.

Ceci montre bien que la signification de la "vitesse" v_1 de cette forme est différente de celle du paramètre v_∞ de la forme de K. Martel et E. Poisson. Calculons leur relation.

Relations entre forme de Gautreau et Hoffmann généralisée et celle de Martel-Poisson

Pour faire le rapprochement avec la forme de K. Martel et E. Poisson, il ne suffit pas de poser $r_1 = \infty$ pour la vitesse v_1 de "boost", dans *(A3-5-5)*, car pour $r = \infty$, dans la forme de Gautreau-Hoffmann généralisée on obtiendrait (dans le cas entrant) :

$$ds^2 = -d\tau^2 + \frac{(dr + v_1 d\tau)^2}{1 + v_1^2} + r^2 d\Omega^2 \quad ,$$

à comparer à ce que donne la forme de Martel-Poisson dans les mêmes conditions :

$$ds^2 = -d\tau^2 + (1 - v_\infty^2)\left(dr + \frac{v_\infty}{\sqrt{1 - v_\infty^2}} dT\right)^2 + r^2 d\Omega^2 \quad .$$

Mais en posant

$$v_1 = \frac{v_\infty}{\sqrt{1 - v_\infty^2}} \quad ,$$

ce qui correspond à l'effet Doppler relativiste[907], on constate l'identité des deux formes.

On remarque que manifestement la signification des vitesses n'est pas la même dans les deux formes.

La vitesse v_1 génère en mécanique classique le même effet Doppler que la vitesse v_∞ en relativité restreinte.

On peut donc dire que v_1 est la vitesse "newtonienne" et que v_∞ est le boost relativiste.

Comme la coordonnée *r* est la même dans toutes les formes étudiées (on l'a conservée), comme ce boost s'applique à la "vitesse" *dr/dt*, ce facteur de Lorentz constant est uniquement relatif à la coordonnée temporelle qui est donc différente (mais proportionnelle[908]) dans la forme de Martel & Poisson de celle des autres formes étudiées.

Cela tient, bien entendu à la manière dont ces formes ont été établies ce qu'on peut vérifier dans les articles publiés par les auteurs[909].

Chapitre 6

Pas de calculs en annexe.

Chapitre 7

Pas de calculs en annexe.

[907]L'effet Doppler en relativité restreinte vaut : $D = \gamma(v)(1 + v_r)$, où $\gamma(v)$ est le facteur de Lorentz de paramètre de vitesse *v* et v_r est la composante "radiale" (de direction vers l'observateur) de *v*.
[908]Elles ne diffèrent que par un paramétrage du paramètre affin de la géodésique concernée.
[909]Pour mémoire : R. Gautreau & B. Hoffmann (1978) et K. Martel& E. Poisson (2000).

Chapitre 8

Équation géodésique

Vérifions-le en faisant le rapport entre *(8-1)* et *(8-2)*, on obtient l'équation différentielle :

$$\frac{dt}{dr}=\frac{r^{(\frac{3}{2})}}{1-r} \qquad (8\text{-}6)$$

En dérivant par rapport à *r* l'expression *(8-5)* on obtient :

$$-r^{1/2}-r^{-1/2}-\tfrac{1}{2}\left[r^{-1/2}/(r^{1/2}-1)-\tfrac{1}{2}r^{-1/2}/(r^{1/2}+1)\right]=-r^{-1/2}(1+r)-\tfrac{1}{2}\left\{[r^{-1/2}[(r^{1/2}+1)-(r^{1/2}-1)]/(r-1)\right\}$$
$$=-r^{-1/2}[(1+r)(r-1)+1]/(r-1)=r^{3/2}/(1-r) \qquad (8\text{-}7)$$

Ce qui est bien le résultat cherché.

Chapitre 9

Calcul de l'accélération par l'équation géodésique

Calculons l'équation géodésique en utilisant la méthode générale.
L'équation géodésique générale s'écrit avec $x^0 = \tau$, $x^1 = r$, $x^2 = \theta$, $x^3 = \varphi$:

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu{}_{\nu\sigma}\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\sigma}{d\tau} = 0$$

La géodésique étant radiale, les deux seules composantes qui nous intéressent sont :

$$\frac{d^2x^0}{d\tau^2} + \Gamma^0{}_{\nu\sigma}\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\sigma}{d\tau} = 0, \qquad (9\text{-}3)$$

$$\frac{d^2x^1}{d\tau^2} + \Gamma^1{}_{\nu\sigma}\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\sigma}{d\tau} = 0. \qquad (9\text{-}4)$$

De *(9-1)* nous tirons que $\frac{d^2x^0}{d\tau^2} = 0$, donc cela implique que $\Gamma^0{}_{\nu\sigma}\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\sigma}{d\tau} = 0$.

De *(9-2)*, avec $x^1 = r$, nous tirons que $\frac{d^2r}{d\tau^2} = \Gamma^1{}_{\nu\sigma}\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\sigma}{d\tau} = -\frac{1}{2}\frac{r_s}{r^2} = -\frac{GM}{r^2}$.

Vérifions en développant les termes non nuls[910]:

$$\Gamma^0{}_{\nu\sigma}(dx^\nu/d\tau)(dx^\sigma/d\tau) = \Gamma^0{}_{00}(dx^0/d\tau)(dx^0/d\tau) + 2\Gamma^0{}_{10}(dx^0/d\tau)(dx^1/d\tau) + \Gamma^0{}_{11}(dx^1/d\tau)(dx^1/d\tau) = 0$$
$$\Gamma^1{}_{\nu\sigma}(dx^\nu/d\tau)(dx^\sigma/d\tau) = \Gamma^1{}_{00}(dx^0/d\tau)(dx^0/d\tau) + 2\Gamma^1{}_{10}(dx^0/d\tau)(dx^1/d\tau) + \Gamma^1{}_{11}(dx^1/d\tau)(dx^1/d\tau) = GM/r^2.$$

En utilisant les valeurs de $dx^0/d\tau$ et $dx^1/d\tau$ données par *(9-1)* et les symboles de Christoffel :

$$\Gamma^t{}_{tt} = [\sqrt{2}(M/r)^{3/2}]/r$$
$$\Gamma^t{}_{tr} = +M/r^2$$
$$\Gamma^t{}_{rr} = (M/2)^{1/2}/r^{3/2}$$
$$\Gamma^r{}_{rt} = \sqrt{2}(M/r)^{3/2}]/r$$
$$\Gamma^r{}_{rr} = -M/r^2$$
$$\Gamma^r{}_{tt} = M(-2M+r)/r^3$$

$$\Gamma^0{}_{\nu\sigma}(dx^\nu/d\tau)(dx^\sigma/d\tau) = ([\sqrt{2}(M/r)^{3/2}]/r)(1)(1) + 2M/r^2(1)(-2M/r)^{1/2} + (M/2)^{1/2}/r^{3/2}(-2M/r)^{1/2}(-2M/r)^{1/2}$$
$$= \{\sqrt{2}(M)^{3/2} - 2.\sqrt{2}(M)^{3/2} + \sqrt{2}(M)^{3/2}\}/r^{5/2} = 0$$

$$\Gamma^1{}_{\nu\sigma}(dx^\nu/d\tau)(dx^\sigma/d\tau) = [M(-2M+r)/r^3](1)(1) - 2\{\sqrt{2}(M/r)^{3/2}/r\}(1)(-2M/r)^{1/2}) - (M/r^2)(-2M/r)^{1/2}(-M/r)^{1/2}$$
$$= (-2M^2 + Mr + 4M^2 - 2M^2)/r^3 = GM/r^2.$$

[910]Pour ne pas alourdir les calculs intermédiaires nous avons posé $G = 1$ en plus de $c = 1$. G est rétabli à la fin.

Chapitre 10

Forme réduite identique à celle de Schwarzschild pour une orbite circulaire

Pour *r = constante,* (*dr = 0)*, elles se réduisent toutes deux à :

$$ds^2 = -\left(1-\frac{2GM}{r}\right)dt^2 + r^2\left(\sin(\theta)^2 d\varphi^2 + d\theta^2\right) \quad . \qquad (10\text{-}1)$$

Établissement de l'équation géodésique circulaire

Les orbites circulaires de rayon $r = r_c$ ayant la même équation dans les deux formes, on peut reprendre ce qui a été utilisé pour l'établir dans la solution de Schwarzschild.

Normalisation de la quadri-vitesse, aussi appelé invariant géométrique

$$\varepsilon = -g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} \quad , \qquad (10\text{-}2)$$

où $\varepsilon = 1$ si la quadri-vitesse $U^\mu = dx^\mu/d\lambda$ est de type temps et $\varepsilon = 0$ si elle est de type nul.

Les vecteurs de Killing associés aux invariants de la métrique conduisent à poser :

- contrainte d'orbite plane :

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad , \qquad (10\text{-}3)$$

- conservation de l'énergie, car la métrique est indépendante du temps :

$$\left(1-\frac{2GM}{r}\right)\frac{dt}{d\lambda} = E \quad , \qquad (10\text{-}4)$$

- conservation du moment angulaire, car la métrique ne dépend pas de φ :

$$r^2\frac{d\varphi}{d\lambda} = L \quad . \qquad (10\text{-}5)$$

L'équation géodésique s'écrit alors

$$-E^2 + \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \left(1-\frac{2m}{r}\right)\left(\frac{L^2}{r^2}+\varepsilon\right) = 0 \quad ,$$

soit

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + V(r) = \frac{1}{2}E^2 \quad , \qquad (10\text{-}6)$$

où E est l'énergie totale par unité de masse (conservée), où on a défini un potentiel :

$$V(r) = \frac{1}{2}\varepsilon - \varepsilon\frac{GM}{r} + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{GM\,L^2}{r^3} \quad . \qquad (10\text{-}7)$$

Une orbite circulaire impose que la dérivée de $V(r)$, par rapport à r, soit nulle[911]

$$\varepsilon\, GMr_c^2 - L^2 r_c + 3\,G\,M\,L^2\gamma = 0 \quad , \qquad (10\text{-}8)$$

soit avec $\varepsilon = 1$ (particule massive) et $\gamma = 1$ (cas de la relativité)[912]

$$r_c = \frac{L^2 \pm \sqrt{L^4 - 12\,G^2M^2L^2}}{2\,GM} \quad , \qquad (10\text{-}9)$$

pour une particule massive.

Temps propre pour décrire une orbite complète.

Calculons le temps propre pour réaliser une orbite complète.
De *(10-5)* et de la normalisation de λ qu'on peut poser égal à τ d'après *(10-2)* nous tirons

$$d\tau = \frac{r^2 d\varphi}{L} \,,$$

pour $r = r_c$, cela s'intègre pour φ de *0* à 2π et donne :

$$\tau = \frac{2\pi r^2}{L}. \qquad (10\text{-}10)$$

Pour une orbite circulaire, de *(10-8)*, nous tirons pour une particule massive ($\varepsilon = 1$) :

$$L^2 = \frac{GMr^2}{r - 3GM}. \qquad (10\text{-}11)$$

En substituant dans *(10-10)* on obtient finalement pour la période de révolution τ d'une orbite :

$$\tau = \frac{2\pi r\sqrt{(r - 3\mathrm{GM})}}{\sqrt{GM}} \quad . \qquad (10\text{-}12)$$

[911] Si cet extremum est un minimum, l'orbite est stable.
[912] Cette formule recouvre le cas relativiste ($\gamma = 1$) et le cas newtonien ($\gamma = 0$).

Le caractère relativiste se manifeste dans cette équation qui est différente de l'équation newtonienne, ce qui est dû, comme nous le verrons, au moment angulaire *L* qui n'est pas nul.

Remarquons que pour $r = 3GM$ le temps propre τ est nul. Cette orbite correspond à la "sphère de photons", où la vitesse de satellisation est celle de la lumière.

Pour *r* tendant vers l'infini *(10-12)* tend vers :

$$\tau = \frac{2\pi r\sqrt{r}}{\sqrt{GM}} \quad . \qquad (10\text{-}13)$$

Ce qui donne le temps de révolution en mécanique newtonienne (lois de Kepler), ce qui est bien compatible avec la convergence des deux théories dans ces conditions, qui résulte des hypothèses faites par construction de la forme relativiste.

Par contre l'équation *(10-12)* confirme que l'équation reliant temps propre (paramètre affin sur la trajectoire) et rayon est différente de la loi de Kepler *(10-13)* dans le cas général.

Temps coordonnée pour décrire une orbite.

Comme nous l'avions indiqué au début dans le résumé, un observateur en orbite circulaire n'étant pas un observateur de Painlevé, son temps propre et le temps coordonnée associé sont différents.

De la métrique associée à une orbite circulaire ($dr = 0$) on tire :

$$1 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - r^2\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 \quad .$$

En utilisant *(10-5)* on obtient :

$$1 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \frac{L^2}{r^2} \quad .$$

En remplaçant L^2 par sa valeur tirée de *(10-11)* on obtient finalement :

$$\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = \frac{r}{r - 3GM} \quad .$$

Soit pour la période de révolution de l'orbite *T* exprimée en temps coordonnée :

$$t = \frac{\tau\sqrt{r}}{\sqrt{r - 3GM}} \rightarrow T = \frac{2\pi r\sqrt{r}}{\sqrt{GM}} \quad . \qquad (10\text{-}14)$$

On retrouve la loi de Kepler! Mais la différence entre les théories c'est qu'en mécanique classique la coordonnée temporelle est identifiée à un temps absolu physique alors qu'en relativité, c'est une simple coordonnée, car ce qui est physique c'est le temps propre de l'observateur.

Quadri-vitesse orbitale

Pour une géodésique orbitale, la 4- vitesse contravariante

$$U^\mu = dx^\mu/d\tau,$$

a la même valeur que dans la forme de Schwarzschild, car les formes de la métrique sont identiques pour $dr = 0$.

De *(10-4)* et *(10-5)* on tire avec $x^\mu = (t, r, \theta, \varphi)$:

$$U^\mu = \{ \frac{E}{(1-2GM/r)}, 0, 0, \frac{L}{r^2} \}.$$

En normalisant l'énergie à l'infini ($E = 1$) et en remplaçant L par sa valeur en orbite circulaire on obtient :

$$U^\mu = \{ \frac{1}{(1-2GM/r)}, 0, 0, \frac{(GM)^{1/2}}{r(r-3GM)^{1/2}} \}. \qquad (10\text{-}15)$$

La 4- vitesse covariante

$$U_\mu = g_{\mu\nu}U^\nu,$$

vaut alors (avec la métrique de signature, -, +, +,+):

$$U_\mu = \{-1, 0, 0, \frac{r\,(GM)^{1/2}}{(r-3GM)^{1/2}} \}. \qquad (10\text{-}16)$$

On remarque que dans la forme covariante, la composante temporelle est constante sur une géodésique orbitale, ce qui était prévisible, compte tenu que la métrique ne dépend que de r qui est constant sur cette géodésique.

Chapitre 11

Pas de calculs détaillés, ni équations en annexe.

Chapitre 12

Pas de calculs détaillés, ni équations en annexe.

Chapitre 13

Forme de Kerr-Schild sans rotation et forme de Painlevé

Si on calcule la géodésique suivie par un observateur de Painlevé (donc pour $\mu = 0$ et $\mu = 1$) dans les coordonnées de Kerr-Schild où K_μ est le vecteur de Killing de type temps, en utilisant la méthode habituelle, à savoir : la conservation de l'énergie d'une particule de masse unitaire sur la géodésique

$$E = 1 = - K_\mu p^\mu . = - K_\mu U^\mu = -U^\mu . g_{\mu\nu} K^\nu ,$$

où

$$K^\nu = \{1, 0, 0, 0\},$$

et la normalisation de la quadri-vitesse : $g_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = -1.$

Avec $U^\mu = dx^\mu / d\tau ,$

on obtient[913] :

$$p^0 = m.dx^0/d\tau = dx^0/d\tau = dt/ d\tau = [1-(2GM/r)^{3/2}][1-2GM/r]^{-1} = 1 + [2GM/r][1+ (2GM/r)^{1/2}]^{-1}$$
$$p^1 = m.dx^1/d\tau = dx^1/d\tau = dr/ d\tau = -(2GM/r)^{1/2}.$$

On voit que $dr/d\tau$ a la même valeur que dans la forme de Painlevé ce qui est normal, car la coordonnée r est la même et τ est le temps propre de cet observateur.

Si on calcule les valeurs covariantes on obtient

$$p_0 = -1,$$
$$p_1 = -[2GM/r)^{1/2}][1 +(2GM/r)^{1/2}]^{-1}.$$

Avec la notation $\beta = - (2GM/r)^{1/2}$ cela s'écrit

$$p^0 = 1 + \frac{\beta^2}{1- \beta}, \qquad p^1 = \beta,$$
$$p_0 = -1, \qquad p_1 = \frac{\beta}{1 - \beta}.$$

On peut vérifier que :

$$p^\mu p_\mu = p^0 p_0 + p^1 p_1 = -1[1 + \frac{\beta^2}{(1- \beta)}] + \frac{\beta(\beta)}{(1- \beta)} = -1 .$$

Calculons :

$$dt/dr = p^0/p^1 = [1 + \beta^2/(1- \beta)]/\beta = 1/\beta + \beta/(1- \beta).$$

[913] Nous ne donnons pas le détail des calculs, mais on peut vérifier simplement que les résultats donnés satisfont bien les relations citées.

En posant *2GM = 1* (choix d'unité) soit

$$\beta = -r^{-1/2} \quad \rightarrow \quad (1/\beta) = -r^{1/2},$$

ceci devient

$$dt/dr = -r^{1/2} \frac{-r^{-1/2}}{1+r^{-1/2}} = -r^{1/2} \frac{-1}{1+r^{1/2}},$$

soit :

$$dt = -r^{1/2}.dr - \frac{dr}{1+r^{1/2}}.$$

En intégrant on obtient[914] :

$$t = -\tfrac{2}{3} r^{3/2} + [-2 r^{1/2} + 2\ln(1+r^{1/2})] + \text{constante.}$$

Chapitre 14

Pas de calculs détaillés.

Chapitre 15

Pas de calculs détaillés.

[914] Intégrale donnée par Mathematica que j'ai vérifiée.

Chapitre 16

Calcul détaillé de pseudo-tenseurs de Landau & Lifchitz

Coordonnées sphériques de la forme de Painlevé : il n'est pas identiquement nul

Pour la forme de Painlevé en coordonnées sphériques (*t, r, θ, φ*), cf éq.(5-4) on obtient[915]:

$$\begin{pmatrix} -\frac{2\left(5+\cot[\theta]^2\right)}{r^2} & \frac{2\sqrt{2}\sqrt{\frac{m}{r}}\left(-1+\cot[\theta]^2\right)}{r^2} & -\frac{3\sqrt{2}\sqrt{\frac{m}{r}}\cot[\theta]}{r^3} & 0 \\ \frac{2\sqrt{2}\sqrt{\frac{m}{r}}\left(-1+\cot[\theta]^2\right)}{r^2} & -\frac{2(2m-r)\left(-1+\cot[\theta]^2\right)}{r^3} & \frac{4(m-r)\cot[\theta]}{r^4} & 0 \\ -\frac{3\sqrt{2}\sqrt{\frac{m}{r}}\cot[\theta]}{r^3} & \frac{4(m-r)\cot[\theta]}{r^4} & \frac{2}{r^4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2\csc[\theta]^2}{r^4} \end{pmatrix}$$

Formes cartésiennes et sphériques de Schwarzschild : il n'est pas identiquement nul

La forme de la métrique de Schwarzschild en coordonnées cartésiennes vaut (tableau):

$$\begin{pmatrix} -1+\frac{2m}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\frac{2mx^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(-2m+\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)} & \frac{2mxy}{\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(-2m+\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)} & \frac{2mxz}{\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(-2m+\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)} \\ 0 & \frac{2mxy}{\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(-2m+\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)} & 1+\frac{2my^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(-2m+\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)} & \frac{2myz}{\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(-2m+\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)} \\ 0 & \frac{2mxz}{\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(-2m+\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)} & \frac{2myz}{\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(-2m+\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)} & 1+\frac{2mz^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(-2m+\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)} \end{pmatrix}$$

Pseudo-tenseur en coordonnées cartésiennes de Schwarzschild *(t, x, y, z)*[916]:

$$\begin{pmatrix} -\frac{8m^2\left(-8m^3+12m^2\sqrt{x^2+y^2+z^2}-6m\left(x^2+y^2+z^2\right)+\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}\right)}{\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(-2m+\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Par rapport à la forme de Painlevé en coordonnées cartésiennes (où $g = -1$), notons que la seule la composante non nulle, est la composante temporelle (*0,0*), qui se simplifie en :

$$\frac{8M^2}{(x^2+y^2+z^2)[(x^2+y^2+z^2)^{1/2}-2M]^2}.$$

[915] En coordonnées sphériques la base de vecteurs $\partial_t, \partial_r, \partial_\theta, \partial_\varphi$ n'est pas orthonormée ce qui fait la différence.
[916] Le déterminant de la métrique vaut -1.

Pseudo-tenseur en coordonnées sphériques *(t, r, θ, φ)* de Schwarzschild[917] :

$$\begin{pmatrix} -\frac{2\left(-12\,m+5\,r+r\,\mathrm{Cot}[\theta]^2\right)}{r^2\,(-2\,m+r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\,(-2\,m+r)\,\mathrm{Cos}[2\,\theta]\,\mathrm{Csc}[\theta]^2}{r^3} & \frac{4\,(m-r)\,\mathrm{Cot}[\theta]}{r^4} & 0 \\ 0 & \frac{4\,(m-r)\,\mathrm{Cot}[\theta]}{r^4} & \frac{2}{r^4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2\,\mathrm{Csc}[\theta]^2}{r^4} \end{pmatrix}$$

Coordonnées sphériques de la forme de Lemaître*[918]*: il n'est pas identiquement nul

Pour la forme de Lemaître en coordonnées sphériques *(t, χ, θ, φ)*, le pseudo-tenseur vaut :

$$\begin{pmatrix} -\frac{2\left(4\,6^{2/3}\left(\frac{m}{r-t}\right)^{1/3}(r-t)^{1/3}+6^{2/3}\,m^{1/3}\,\mathrm{Cot}[\theta]^2\right)}{9\,m\,(r-t)^{4/3}} & -\frac{10}{3\,3^{1/3}\left(\frac{m}{2\,r-2\,t}\right)^{2/3}(r-t)^2} & -\frac{4\,2^{2/3}\,\mathrm{Cot}[\theta]}{9\,3^{1/3}\,m^{2/3}\,(r-t)^{7/3}} & 0 \\ -\frac{10}{3\,3^{1/3}\left(\frac{m}{2\,r-2\,t}\right)^{2/3}(r-t)^2} & \frac{2^{1/3}\left(\frac{m}{r-t}\right)^{4/3}\left(-10\,6^{1/3}\,m-\frac{3\,m}{\left(\frac{m}{r-t}\right)^{2/3}}+3\,m^{1/3}\,(r-t)^{2/3}\,\mathrm{Cot}[\theta]^2\right)}{3\,3^{2/3}\,m^3} & -\frac{4\,2^{1/3}\left(\frac{m}{r-t}\right)^{1/3}\mathrm{Cot}[\theta]}{3\,3^{2/3}\,m^{5/3}\,(r-t)^{4/3}} & 0 \\ -\frac{4\,2^{2/3}\,\mathrm{Cot}[\theta]}{9\,3^{1/3}\,m^{2/3}\,(r-t)^{7/3}} & -\frac{4\,2^{1/3}\left(\frac{m}{r-t}\right)^{1/3}\mathrm{Cot}[\theta]}{3\,3^{2/3}\,m^{5/3}\,(r-t)^{4/3}} & \frac{2\,6^{2/3}\,m+\frac{6\,6^{1/3}\,m}{\left(\frac{m}{r-t}\right)^{2/3}}}{81\,m^{5/3}\,(r-t)^{10/3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2\,2^{1/3}\left(3+6^{1/3}\left(\frac{m}{r-t}\right)^{2/3}\right)\left(\frac{m}{r-t}\right)^{1/3}\mathrm{Csc}[\theta]^2}{27\,3^{2/3}\,m^{5/3}\,(r-t)^{7/3}} \end{pmatrix}$$

Coordonnées cartésiennes de la forme isotrope : il n'est pas identiquement nul

En coordonnées sphériques, la forme isotrope s'écrit :

$$ds^2 = -\,[(2r-GM)/(2r+GM)]^2dt^2 + (1+GM/2r)^4[dr^2+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2)].$$

Il est facile de mettre la forme isotrope sous forme cartésienne (la section spatiale est "conformément" euclidienne).

La forme de métrique isotrope en coordonnées cartésiennes s'écrit (sous forme de tableau) :

$$\begin{pmatrix} -\frac{\left(-m+2\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^2}{\left(m+2\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1+\frac{m}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(1+\frac{m}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(1+\frac{m}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)^4 \end{pmatrix}$$

[917] Rappelons la forme de Schwarzschild : $ds^2 = -\,(1-2GM/r)dt^2 + dr^2(1-2GM/r)^{-1} + r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2)$.

[918] Nous en avons donné la forme au Chapitre 13 éq.(16).

Pour le pseudo-tenseur, on obtient le résultat :

$$\begin{pmatrix} -\frac{896\,m^2\,(x^2+y^2+z^2)}{\left(-m+2\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^2\left(m+2\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2048\,m^2\,(x^2+y^2+z^2)^2\left(m^2\left(x^2-2\,(y^2+z^2)\right)+4\left(-x^4+(y^2+z^2)^2\right)\right)}{\left(-m+2\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)\left(m+2\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^9\left(-m^2+4\,(x^2+y^2+z^2)\right)} & \frac{2048\,m^2\,x\,y\,(x^2+y^2+z^2)^2\left(-3\,m^2+8\,(x^2+y^2+z^2)\right)}{\left(-m+2\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)\left(m+2\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^9\left(-m^2+4\,(x^2+y^2+z^2)\right)} & \frac{2048\,m^2\,x\,z\,(x^2+y^2+z^2)^2\left(-3\,m^2+8\,(x^2+y^2+z^2)\right)}{\left(-m+2\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)\left(m+2\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^9\left(-m^2+4\,(x^2+y^2+z^2)\right)} \\ 0 & \frac{2048\,m^2\,x\,y\,(x^2+y^2+z^2)^2\left(-3\,m^2+8\,(x^2+y^2+z^2)\right)}{\left(-m+2\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)\left(m+2\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^9\left(-m^2+4\,(x^2+y^2+z^2)\right)} & -\frac{2048\,m^2\,(x^2+y^2+z^2)^2\left(m^2\left(-2\,x^2+y^2-2\,z^2\right)+4\left(x^4-y^4+2\,x^2\,z^2+z^4\right)\right)}{\left(-m+2\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)\left(m+2\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^9\left(-m^2+4\,(x^2+y^2+z^2)\right)} & \frac{2048\,m^2\,y\,z\,(x^2+y^2+z^2)^2\left(-3\,m^2+8\,(x^2+y^2+z^2)\right)}{\left(-m+2\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)\left(m+2\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^9\left(-m^2+4\,(x^2+y^2+z^2)\right)} \\ 0 & \frac{2048\,m^2\,x\,z\,(x^2+y^2+z^2)^2\left(-3\,m^2+8\,(x^2+y^2+z^2)\right)}{\left(-m+2\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)\left(m+2\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^9\left(-m^2+4\,(x^2+y^2+z^2)\right)} & \frac{2048\,m^2\,y\,z\,(x^2+y^2+z^2)^2\left(-3\,m^2+8\,(x^2+y^2+z^2)\right)}{\left(-m+2\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)\left(m+2\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^9\left(-m^2+4\,(x^2+y^2+z^2)\right)} & -\frac{2048\,m^2\,(x^2+y^2+z^2)^2\left(m^2\left(-2\,x^2-2\,y^2+z^2\right)+4\left(x^4+2\,x^2\,y^2+y^4-z^4\right)\right)}{\left(-m+2\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)\left(m+2\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^9\left(-m^2+4\,(x^2+y^2+z^2)\right)} \end{pmatrix}$$

Cas de l'extension de la forme de Painlevé (avec vitesse non nulle à l'infini)

Nous avons vu que cette forme recouvrait, entre autres, le cas de la forme de Painlevé et celle d'Eddington-Finkelstein. En coordonnées sphériques, elle s'écrit :

$$ds^2 = -\left(1-\frac{2M}{r}\right)dT^2 + 2*\sqrt{1-p\left(1-\frac{2M}{r}\right)}\,dr.dT + p\,dr^2 + r^2\,d\Omega^2 \quad .$$

Le pseudo-tenseur en coordonnées sphériques vaut :

$$\begin{pmatrix} \frac{2\left(-6+a-a\,\mathrm{Cot}[\theta]^2\right)}{r^2} & \frac{2\sqrt{1+a\left(-1+\frac{2m}{r}\right)}\,\mathrm{Cos}[2\theta]\,\mathrm{Csc}[\theta]^2}{r^2} & \frac{2\,(-3\,a\,m-2\,r+2\,a\,r)\,\mathrm{Cot}[\theta]}{\sqrt{1+a\left(-1+\frac{2m}{r}\right)}\,r^4} & 0 \\ \frac{2\sqrt{1+a\left(-1+\frac{2m}{r}\right)}\,\mathrm{Cos}[2\theta]\,\mathrm{Csc}[\theta]^2}{r^2} & \frac{2\,(-2\,m+r)\,\mathrm{Cos}[2\theta]\,\mathrm{Csc}[\theta]^2}{r^3} & \frac{4\,(m-r)\,\mathrm{Cot}[\theta]}{r^4} & 0 \\ \frac{2\,(-3\,a\,m-2\,r+2\,a\,r)\,\mathrm{Cot}[\theta]}{\sqrt{1+a\left(-1+\frac{2m}{r}\right)}\,r^4} & \frac{4\,(m-r)\,\mathrm{Cot}[\theta]}{r^4} & \frac{2}{r^4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2\,\mathrm{Csc}[\theta]^2}{r^4} \end{pmatrix}$$

Compléments sur le pseudo-tenseur de Landau & Lifchitz

Énergie calculée par le pseudo-tenseur dans la forme de Painlevé

Le calcul par Mathematica de $16\pi.h^{\mu\nu\rho}$ donne :

$$h[2,\ 1,\ 2] \quad -\frac{\sqrt{m}\ \left(4\,x^2+y^2+z^2\right)}{\sqrt{2}\ \left(x^2+y^2+z^2\right)^{7/4}}$$

$$h[2,\ 1,\ 3] \quad -\frac{3\,\sqrt{m}\ x\,y}{\sqrt{2}\ \left(x^2+y^2+z^2\right)^{7/4}}$$

$$h[2,\ 1,\ 4] \quad -\frac{3\,\sqrt{m}\ x\,z}{\sqrt{2}\ \left(x^2+y^2+z^2\right)^{7/4}}$$

$$h[2,\ 2,\ 1] \quad \frac{\sqrt{m}\ \left(4\,x^2+y^2+z^2\right)}{\sqrt{2}\ \left(x^2+y^2+z^2\right)^{7/4}}$$

$$h[2,\ 3,\ 1] \quad \frac{3\,\sqrt{m}\ x\,y}{\sqrt{2}\ \left(x^2+y^2+z^2\right)^{7/4}}$$

$$h[2,\ 4,\ 1] \quad \frac{3\,\sqrt{m}\ x\,z}{\sqrt{2}\ \left(x^2+y^2+z^2\right)^{7/4}}$$

$$h[3,\ 1,\ 2] \quad -\frac{3\,\sqrt{m}\ x\,y}{\sqrt{2}\ \left(x^2+y^2+z^2\right)^{7/4}}$$

$$h[3,\ 1,\ 3] \quad -\frac{\sqrt{m}\ \left(x^2+4\,y^2+z^2\right)}{\sqrt{2}\ \left(x^2+y^2+z^2\right)^{7/4}}$$

$$h[3,\ 1,\ 4] \quad -\frac{3\,\sqrt{m}\ y\,z}{\sqrt{2}\ \left(x^2+y^2+z^2\right)^{7/4}}$$

$$h[3,\ 2,\ 1] \quad \frac{3\,\sqrt{m}\ x\,y}{\sqrt{2}\ \left(x^2+y^2+z^2\right)^{7/4}}$$

$$h[3,\ 3,\ 1] \quad \frac{\sqrt{m}\ \left(x^2+4\,y^2+z^2\right)}{\sqrt{2}\ \left(x^2+y^2+z^2\right)^{7/4}}$$

$$h[3,\ 4,\ 1] \quad \frac{3\,\sqrt{m}\ y\,z}{\sqrt{2}\ \left(x^2+y^2+z^2\right)^{7/4}}$$

$$h[4,\ 1,\ 2] \quad -\frac{3\,\sqrt{m}\ x\,z}{\sqrt{2}\ \left(x^2+y^2+z^2\right)^{7/4}}$$

$$h[4,\ 1,\ 3] \quad -\frac{3\,\sqrt{m}\ y\,z}{\sqrt{2}\ \left(x^2+y^2+z^2\right)^{7/4}}$$

$$h[4,\ 1,\ 4] \quad -\frac{\sqrt{m}\ \left(x^2+y^2+4\,z^2\right)}{\sqrt{2}\ \left(x^2+y^2+z^2\right)^{7/4}}$$

$$h[4,\ 2,\ 1] \quad \frac{3\,\sqrt{m}\ x\,z}{\sqrt{2}\ \left(x^2+y^2+z^2\right)^{7/4}}$$

$$h[4,\ 3,\ 1] \quad \frac{3\,\sqrt{m}\ y\,z}{\sqrt{2}\ \left(x^2+y^2+z^2\right)^{7/4}}$$

$$h[4,\ 4,\ 1] \quad \frac{\sqrt{m}\ \left(x^2+y^2+4\,z^2\right)}{\sqrt{2}\ \left(x^2+y^2+z^2\right)^{7/4}}$$

Chapitre 17

Le modèle de la rivière et compléments : formulation mathématique

Équations utilisées pour poser le problème

En coordonnées cartésiennes la métrique de Painlevé s'écrit[919]:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu}(dx^\mu - \beta^\mu dx^0)(dx^\nu - \beta^\nu dx^0). \qquad (17\text{-}1)$$

Les composantes du quadrivecteur vitesse $\boldsymbol{v_{ff}}$ d'un observateur de Painlevé, dans la base globale $\boldsymbol{g_\mu}$ sont définies par

$$v_{ff}^{\ \mu} = (1, \beta^1, \beta^2, \beta^3), \qquad (17\text{-}2)$$

avec[920]

$$\beta^\mu = \beta\left(0, -\frac{x}{r}, -\frac{y}{r}, -\frac{z}{r}\right) \quad , \qquad (17\text{-}3)$$

et

$$\beta = \sqrt{\frac{2GM}{r}} \quad . \qquad (17\text{-}4)$$

On définit une base orthonormée satisfaisant à :

$$\boldsymbol{\gamma_m}\,\boldsymbol{\gamma_n} = \boldsymbol{\eta_{mn}}\,. \qquad (17\text{-}5)$$

Si cette base suit l'observateur en chute libre radiale sans précession, ceci implique que les vecteurs γ_m sont transportés parallèlement le long des lignes d'univers de cet observateur, ce qui s'écrit : [921]

$$v_{ff}^{\ \mu}\frac{\partial \vec{\gamma}_m}{\partial x^\mu} = 0 \quad . \qquad (17\text{-}6)$$

---

[919]La transformation de coordonnées est simple, car $dr^2 + r^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\varphi^2) = dx^2 + dy^2 + dz^2$ et $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. En développant (*17-1*) on obtient : $ds^2 = -dT^2(1-\beta^2) - 2\,dT(\beta^x.dx + \beta^y.dy + \beta^z.dz) + dx^2 + dy^2 + dz^2$.

[920]Comme nous l'avions indiqué ce vecteur est de type espace, car $\beta^\mu\beta_\mu > 0$ dans cette métrique de Painlevé.

[921]Remarquons la forme vectorielle de l'équation (*17-6*).
d'après le principe d'équivalence un vecteur $\boldsymbol{p}$ non accéléré (chute libre) reste au repos dans son référentiel (localement inertiel), sa dérivée par rapport au temps propre est nulle ($d\boldsymbol{p}/d\tau = 0$).
Les vecteurs $\boldsymbol{\gamma_m}$ sont donc transportés sans accélération si $d\boldsymbol{\gamma_m}/d\tau = 0$, condition qui est imposée par définition de la base tétradique "localement inertielle attachée à l'observateur en chute libre radiale". Montrons que la condition peut s'écrire sous la forme de l'équation (*17-6*).
La condition $d\boldsymbol{\gamma_m}/d\tau = 0$ est équivalente à $u^n\,\partial_n\boldsymbol{\gamma_m} = 0$ d'après l'équation *(17-11)*, dans la base tétradique où les coordonnées d'un vecteur, sont x^n avec $u^n = dx^n/d\tau$. Dans le référentiel co-mobile de la rivière $u^n = (1, 0, 0, 0)$, comme $u^n\,\partial_n = v^\mu\,\partial/\partial x^\mu$ (d'après l'équation *(17-11)* où v^μ et $\partial/\partial x^\mu$ sont respectivement la quadri-vitesse et la dérivée en coordonnées globales). L'équation $d\boldsymbol{\gamma_m}/d\tau = 0$ est donc bien identique à $v^\mu\partial_\mu\boldsymbol{\gamma_m} = 0$.
Vérifions qu'avec la définition de l'équation *(17-7)* des vecteurs de cette base cette condition est bien satisfaite, pour cela utilisons l'équation des coordonnées du transport parallèle d'un vecteur $\boldsymbol{v}$ qui s'écrit $dv^\mu/d\lambda + \Gamma^\mu_{\sigma\rho}\,dx^\rho/d\lambda.v^\sigma = 0$. L'équation *(17-7)* montre que $\boldsymbol{\gamma_0} = \boldsymbol{v_{ff}}$. L'équation s'écrit : $dv_{ff}^{\ \mu}/d\lambda + \Gamma^\mu_{\sigma\rho}\,v_{ff}^{\ \sigma}.v_{ff}^{\ \rho} = 0$. Comme $\boldsymbol{v_{ff}}$ est le vecteur tangent à la géodésique cette équation est satisfaite. Pour les vecteurs $\boldsymbol{\gamma_i = g_i}$, l'équation s'écrit : $dg_i^{\ \mu}/d\lambda + \Gamma^\mu_{\sigma\rho}\,g_i^{\ \sigma}.v_{ff}^{\ \rho} = \Gamma^\mu_{i\rho}\,g_i^{\ i}.v_{ff}^{\ \rho} = 0$, car $dg_i^{\ \mu}/d\lambda = 0$ et $g_i^{\ \sigma} = \delta_i^{\ \sigma}$, (condition vérifiée par Mathematica 4).

Supposons, sans perte de généralité, que les vecteurs $\boldsymbol{\gamma_m}$ de la base tétradique[922] sont alignés avec ceux du référentiel cartésien de Painlevé à l'infini.

La rivière coule de façon galiléenne dans un espace de fond euclidien

Alors la base tétradique γ_m et la base $\boldsymbol{g_\mu}$ de Painlevé satisfont en tout point aux relations [923] :

$$\boldsymbol{\gamma_0} = \boldsymbol{g_0} + \beta^i \boldsymbol{g_i}$$
$$\boldsymbol{\gamma_i} = \boldsymbol{g_i} \qquad (i = 1, 2, 3). \qquad (17\text{-}7)$$

La quadri-vitesse u^m d'une particule en chute libre dans la base tétradique γ_m à la position de la particule se déduit de $u^m \boldsymbol{\gamma_m} = v^\mu \boldsymbol{g_\mu}$, ce qui implique [924]:

$$u^0 = v^0,$$
$$u^i = v^i - \beta^i v^0 \ (i = 1, 2, 3). \qquad (17\text{-}8)$$

Physiquement la quadri-vitesse u^m est la quadri-vitesse relative par rapport au flot de la rivière.

De nouveau les relations *(17-8)* ressemblent à celles d'une transformation galiléenne qui ne modifient que les composantes spatiales du vecteur, laissant la composante temporelle inchangée, si ce n'est que dans les équations *(17-8)* les quadri-vitesses u^m et v^μ font intervenir des dérivées par rapport au temps propre de la particule en chute libre, ce qui est relativiste (au lieu de dérivées par rapport à la coordonnée temporelle, comme en mécanique newtonienne).

Ceci démontre [925], équations *(17-7)* et *(17-8)*, que la rivière coule de façon galiléenne dans un espace de fond euclidien.

Les objets se meuvent dans la rivière selon les lois de la relativité restreinte

Mais le temps propre est une propriété des objets se déplaçant dans la rivière, et pas de la rivière elle-même. Les objets se déplaçant dans la rivière s'y déplacent conformément aux règles de la Relativité Restreinte.

---

[922] Par base "tétradique" on entend la base de vecteurs orthonormés définissant un espace minkowskien.

[923] Compte tenu de la relation $g_{\mu\nu} = e_\mu^{\ m}\, e_\nu^{\ n}\, \eta_{mn}$ reliant une base tétradique orthonormée à la métrique, l'équation (17-1) nous suggère la base tétradique donnée par *(17-7)*. La base tétradique est définie (en tout point) dans l'espace-temps tangent (ses vecteurs de base sont une combinaison linéaire de ceux de la base globale qui sont dans cet espace-temps tangent). Ici la transformation est particulièrement simple, seul le vecteur de base temporel $\boldsymbol{\gamma_0}$ de la base tétradique qui reste tangent à la géodésique suivie par l'observateur de Painlevé, ce qui fait qu'il reste orthogonal aux vecteurs de base spatiaux, diffère de son homologue ($\boldsymbol{g_0}$) comme indiqué.

[924] On reporte (17-7), donnant la valeur des vecteurs $\boldsymbol{\gamma}$ en fonction des vecteurs $\boldsymbol{g}$ dans cette expression et on identifie les coefficients des vecteurs $\boldsymbol{g}$ correspondants soit : $u^m\gamma_m = u^0\gamma_0 + u^i\gamma_i = u^0 (g_0 + \beta^i g_i) + u^i g_i = v^0 g_0 + v^i g_i \rightarrow (u^0 = v^0,\ u^i = v^i - u^0\beta^i) \rightarrow (u^0 = v^0,\ u^i = v^i - v^0\beta^i)$. Notons que la relation (17-8) donne les composantes d'un vecteur dans la base de la rivière par rapport à celles dans la base générale. On peut inverser (17-8) pour obtenir : $v^0 = u^0$ et $v^i = u^i + u^0\beta^i$, (17-8bis). Attention, pour les coordonnées $(X \leftrightarrow x)$ la relation est : $dX^\mu = dx^\mu - \beta^\mu dx^0$.

[925] Rappelons que la base tétradique, co-mobile de la rivière, ainsi définie satisfait bien aux conditions d'orthogonalité et d'espace-temps plat, et ceci dans le cadre de la forme de la métrique considérée.

Démontrerons également que les objets se meuvent dans la rivière selon les lois de la relativité restreinte, subissant des entraînements de Lorentz liés aux effets de marée associés aux différences de vitesse du flot [926]

Le référentiel tétradique, entraîné par la rivière, a été construit de sorte que l'observateur de Painlevé (en chute libre radiale sans vitesse initiale à l'infini) ait toujours son propre référentiel aligné avec le référentiel tétradique.

Mais en général un autre observateur en chute libre sur une autre géodésique[927] va constater que son référentiel va se désaligner de celui de l'observateur de Painlevé.

Ce désalignement est déterminé mathématiquement par les équations du mouvement des objets, quadrivecteurs, représentés dans la base tétradique.

Soit un quadrivecteur arbitraire :

$$\boldsymbol{p} = p^m \gamma_m = p^\mu g_\mu \,.$$

Ses composantes $\boldsymbol{p^m}$ dans le référentiel tétradique et ses composantes $\boldsymbol{p^\mu}$ dans le référentiel global sont reliés par :

$$p^m = \delta_\mu{}^m p^\mu - \beta^m p^0 \,.$$ [928]

Calculons pour ce quadrivecteur en chute libre les équations du mouvement pour ses composantes p^m dans le référentiel tétradique.

Le vecteur $\boldsymbol{p} = p^m \gamma_m = p^\mu g_\mu$ est un objet invariant[929], indépendant du choix de la base tétradique ou du système de coordonnées.

Conformément au principe d'équivalence, un quadrivecteur $\boldsymbol{p}$ non accéléré reste au repos dans son référentiel "chute libre", ceci se traduisant par le fait que ses dérivées par rapport à son temps propre $\boldsymbol{\tau}$ sont nulles dans son propre référentiel :

$$\frac{d\,\vec{p}}{d\,\tau} = 0 \quad . \qquad \textit{(17-9)}$$

Si le quadrivecteur $\boldsymbol{p}$ est accéléré dans son référentiel propre (du fait d'une interaction avec un champ électromagnétique où par réaction par exemple), alors le membre de droite de l'équation *(17-9)* n'est plus nul et doit être remplacé par le quadrivecteur accélération approprié.

Nous ne considérerons que le cas d'accélération nulle, une accélération pouvant être ajoutée si on le souhaite à la fin du calcul [930].

[926] Le fait que la relativité restreinte s'applique dans la base tétradique est mis en œuvre implicitement par le fait que les quadrivecteurs sont définis dans la base tétradique $\boldsymbol{\gamma_m}$ obéissant à la relation *(17-5)* qui caractérise un espace-temps de Minkowski. Pour ce qui est des effets de marée ils vont être décrits que localement, ce qui permet d'en dessiner une carte, mais une intégration est nécessaire pour être exploitable mathématiquement.

[927] L'auteur traite de la déviation géodésique. L'étude de la congruence formée par les géodésiques radiales suivies par les observateurs de Painlevé, montrerait cet effet "de marée" qui est représenté par la déviation géodésique. Ce modèle ne traite que des mouvements géodésiques, même si d'autres mouvements sont évoqués.

[928] Cela se déduit directement de *(17-8)*.

[929] Ce vecteur est défini dans l'espace tangent, en un point de l'espace tangent, la base tétradique est la base locale minkowskienne de vecteurs $\boldsymbol{\gamma_m}$ en ce point et la base générale est formée par les vecteurs $\boldsymbol{g_\mu}$ en ce point.

[930] Ce point n'est pas traité dans ce document.

Comme ***p*** est invariant, l'équation *(17-9)* doit être vérifiée dans tous les systèmes de coordonnées.

Dans le référentiel tétradique cela implique :

$$\vec{\gamma}_m \frac{dp^m}{d\tau} + \frac{d\vec{\gamma}_m}{d\tau} p^m = 0 \quad . \qquad (17\text{-}10)$$

La dérivée par rapport au temps propre $d/d\tau$ peut s'écrire

$$\frac{d}{d\tau} = v^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} = u^n e^\nu_n \frac{\partial}{\partial x^\nu} = u^n \partial_n \quad [931]. \qquad (17\text{-}11)$$

où la dérivée directionnelle ∂_n est définie par :

$$\partial_n = e^\nu_n \frac{\partial}{\partial x^\nu} \quad . \qquad (17\text{-}12)$$

La dérivée $\boldsymbol{\partial_n}$ définie par l'équation *(17-12)* est indépendante du choix des coordonnées x^ν, comme suggéré par l'absence d'indices grecs[932].

La dérivée peut s'écrire $\partial_n = \gamma_n \partial$ où $\partial = g^\nu \partial/\partial x^\nu$ et $\boldsymbol{g^\nu \equiv g^{\nu\mu}\, g_\mu}$, ce qui montre que ∂_n est une dérivée directionnelle le long de $\boldsymbol{\gamma_n}$, le produit scalaire du vecteur $\boldsymbol{\gamma_n}$ avec le vecteur de dérivation $\partial = g^\nu \partial/\partial x^\nu$, un objet indépendant des coordonnées.

Autrement dit, $\boldsymbol{\partial_n}$ représente les composantes de la tétrade d'un quadrivecteur invariant $\partial = \gamma^n \partial_n = g^\nu \partial/\partial x^\nu$.

Contrairement aux dérivées partielles ∂/∂^ν, les dérivées directionnelles ne commutent pas.
Introduisons les coefficients de connexion tétradiques Γ^k_{mn} aussi appelés coefficients de rotation de Ricci, définis par :

$$\partial_n \vec{\gamma}_m \equiv \Gamma^k_{mn} \vec{\gamma}_k \quad . \qquad (17\text{-}13)$$

Rappelons que l'équivalent, en coordonnées "courbes", (les symboles de Christoffel) s'écrit :

$$\frac{\partial \vec{g}_\mu}{\partial x^\nu} = \Gamma^\kappa_{\mu\nu} \vec{g}_\kappa \quad . \qquad (17\text{-}14)$$

C'est la même forme mais cette fois ci les dérivées sont prises non pas dans un repère minkowskien, mais par rapport à des coordonnées "curvilignes" globales.
Pour la version totalement covariante on a :

$$\Gamma_{kmn} = \vec{\gamma}_k \partial_n \vec{\gamma}_m = e^\kappa_k \vec{g}_\kappa e^\nu_n \frac{\partial (e^\mu_m \vec{g}_\mu)}{\partial x^\nu} \quad . \qquad (17\text{-}15)$$

[931] L'expression $v^\mu \partial/\partial x^\mu = (dx^\mu/d\tau)\,(\partial/\partial x^\mu) = d/d\tau$. Le vecteur ***u*** est le vecteur quadri-vitesse associé à la géodésique parcourue par ***v***.
[932] Ils disparaissent, car ils sont sommés.

L'équation géodésique dans la base tétradique s'écrit

$$\frac{d\,p^k}{d\,\tau}+\Gamma^{k}_{\ mn}u^n\,p^m=0 \quad , \qquad (17\text{-}16)$$ [933]

où $\Gamma^{\ k}_{mn}$ sont les coefficients de la connexion dans le référentiel tétradique, appelés "coefficients de rotation de Ricci" qui sont l 'équivalent des symboles de Christoffel associés à une connexion métrique.

La base tétradique $\boldsymbol{\gamma_m}$ définit un ensemble de référentiels inertiels dans l'espace-temps. Dans notre cas, nous avons construit ces référentiels inertiels de sorte qu'un observateur en chute libre depuis l'infini sans vitesse initiale ait en permanence son propre référentiel aligné avec le référentiel tétradique.

Mais en général, le référentiel d'un autre observateur, en chute libre, sur une autre géodésique, va dévier du référentiel tétradique.

L'équation *(17-16)* définit cette divergence entre les référentiels inertiels locaux.

Comme cette différence est entre référentiels locaux inertiels [934], ils sont liés par une transformation de Lorentz [935].

Cette transformation de Lorentz est encodée dans les connexions $\Gamma^{\ k}_{mn}$.

En particulier, si un quadrivecteur p^k est déplacé en chute libre d'une distance infinitésimale $\delta\zeta^n = u^n\delta\tau$ dans le référentiel tétradique de base $\boldsymbol{\gamma_n}$, alors le quadrivecteur subit une transformation de Lorentz infinitésimale $p^k \rightarrow p^k - \delta\zeta^n\Gamma^k_{\ mn}\,p^m$. Autrement dit le coefficient de connexion $\Gamma^{\ k}_{mn}$ est le générateur d'une transformation de Lorentz pour chaque index final n.

L'antisymétrie des coefficients de connexion tétradiques (exprimés avec tous les indices bas) par rapport à leurs deux premiers indices, ($\Gamma_{kmn} = -\Gamma_{mkn}$), exprime mathématiquement le fait que $\Gamma^{\ k}_{mn}$ pour chaque n donné est le générateur d'une transformation de Lorentz.[936]

Les composantes de $\Gamma^{\ k}_{mn}$, dans lequel un des deux premiers indices k ou m vaut zéro (temps), génèrent des boosts de Lorentz. Les composantes de $\Gamma^{\ k}_{mn}$, dont les deux premiers indices k et m sont 1, 2 ou 3 (espace), génèrent des rotations spatiales.

Ici pour un trou noir à symétrie sphérique, il se trouve que les coefficients non nuls de la connexion tétradique sont les gradients spatiaux des composantes de la vitesse de la rivière/

$$\Gamma^0_{ij}=\Gamma^i_{0\mathrm{j}}=\frac{\partial\,\beta^i}{\partial\,x^j} \qquad (i\,,\,j=1,2,3) \quad . \qquad (17\text{-}17)$$

[933]C'est l'équation géodésique standard, ici dans le référentiel tétradique. Cela se déduit directement de *(17-10)* en utilisant *(17-11*) et *(17-13)* pour le deuxième terme. Bien qu'étant dans un référentiel minkowskien, pour une géodésique le terme $\boldsymbol{\Gamma^{\ k}_{mn}}$ n'est pas nul, car il décrit une géodésique du référentiel global. Certes, les bases tétradiques sont locales et plates mais elles sont définies en chaque point par rapport au référentiel global et leur variation doit être prise en compte, comme l'équation *(17-10)* qui décrit un vecteur inertiel dont se déduit *(17-16)*, qui décrit ce vecteur inertiel dans la base tétradique, le montre.

[934]Différence infinitésimale puisque exprimée dans une même base tétradique minkowskienne locale.

[935]Ce sont deux géodésiques infiniment voisines dans un même référentiel minkowskien.

[936]Le groupe des transformations $\Lambda^\mu_{\ \nu}$ de Lorentz est relié à la transformation unitaire par une chaîne de transformations infinitésimales $\lambda^\mu_{\ \nu}$ En posant $\Lambda^\mu_{\ \nu} = \delta^\mu_{\ \nu} + \lambda^\mu_{\ \nu}$, on montre que $\lambda^{\mu\nu} = -\lambda^{\nu\mu}$ (antisymétrique).

Des équations *(17-16)* et *(17-17)* on peut déduire :

$$\frac{d\,p^0}{d\,\tau}=\frac{-\partial\,\beta_i}{\partial\,x^j}u^j\,p^i,\qquad \frac{d\,p^i}{d\,\tau}=\frac{-\partial\,\beta_i}{\partial\,x^j}u^j\,p^0,\quad (i=1,2,3)\ . \qquad (17\text{-}18)$$

Les sommations sur les paires d'indices dans les équations *(17-18)* sont formellement sur les quatre indices *0, 1, 2, 3* mais en pratique cela se réduit aux sommes sur les trois indices spatiaux 1, 2, 3, car le vecteur d'entraînement a une composante temporelle nulle, $\beta^0 = 0$, comme nous l'avons défini et une dérivée temporelle nulle: $\partial\beta^\mu/\partial x^0 = 0$. [937]

Dans le contexte du modèle de la rivière les équations du mouvement *(17-18)* ont l'interprétation suivante.

Dans un intervalle $\delta\tau$ de temps propre, une particule se déplace d'une distance $\delta x^i = v^i\delta\tau$ dans les coordonnées cartésiennes de Painlevé et d'une distance propre $\delta\xi^i = u^i\delta\tau = \delta x^i - \beta^i\delta T$ [938]relativement au flot de la rivière.

La distance propre $\delta\xi^i$ est égale à la distance δx^i moins la distance $\beta^i\delta T$ parcourue par la rivière.

Dans les coordonnées cartésiennes de Painlevé, la vitesse β^i de la rivière à la nouvelle position diffère de celle à l'ancienne position de $\delta x^j \cdot \partial\beta^i/\partial x^j$.

Cependant dans le modèle de la rivière, une particule se déplaçant dans la rivière ne voit pas la totalité du changement de la vitesse de la rivière relativement aux coordonnées globales, mais uniquement celui lié aux effets de marée [939]

$$\delta\,\beta^i=\frac{\partial\,\beta^i}{\partial\,x^j}\delta\,\xi^j\ , \qquad (17\text{-}19)$$

dans la vitesse de la rivière, relativement au référentiel localement inertiel en chute libre.

Si la particule est co-mobile du flot de la rivière, de sorte que $\delta\xi^i = 0$, alors la particule ne voit aucun changement du tout [940] dans la vitesse de la rivière au cours du temps : $\delta\beta^i = 0$.

Le changement infinitésimal $\delta\beta^i$ lié à l'effet de marée induit un entraînement de Lorentz du quadrivecteur p^m :

$$p^0\to p^0-\delta\,\beta_i\,p^i\qquad p^i\to p^i-\delta\,\beta^i\,p^0\qquad (i=1,\,2,\,3)\ . \qquad (17\text{-}20)$$

Les équations *(17-19)* et *(17-20)* [941] reproduisent les équations du mouvement (*17-18*).

[937]La métrique étant stationnaire, β ne dépend pas de x^0.

[938]Cela se déduit de *(17-8)* en utilisant la définition de u^i par rapport à v^i.

[939]Un corps étendu subit un effet de marée longitudinal et transversal du fait que la vitesse de la rivière est différente dans les différents points de cet objet.

[940]Le changement est "absorbé" par le référentiel tétradique.

[941]Les équations *(17-20)* se déduisent de *(17-18)* et *(17-19)*, il suffit de multiplier *(17-18)* par $d\tau$ et d'utiliser la définition de $\delta\beta^i$ de *(17-19)* en remarquant que $\delta\xi^i = u^i.d\tau$.

Nous avons maintenant montré que quand une particule se meut dans la rivière d'espace, sa quadri-vitesse, ou plus généralement tout quadrivecteur qui lui est attaché subit un boost de Lorentz consécutif aux effets de marée dans la vitesse de la rivière.

Introduction d'un espace de fond plat

Rappel des équations fondatrices liées à cette représentation

Le formalisme utilisé par les auteurs définissant la tétrade dans des coordonnées globales, les coefficients de rotation de Ricci et les équations géodésiques est celui qu'on utilise de façon classique en relativité générale.

Si l'interprétation qu'ils en donnent est originale le fondement mathématique qui la supporte est sans commentaire particulier.

Dans ce qui précède, nous nous sommes référés à la forme cartésienne de Painlevé, mais sans tenir compte de la forme particulière très simple des tétrades dans notre exemple.

C'est cette forme très simple des tétrades et de leurs dérivées qui fait que le calcul des connexions Γ_{kmn} (coefficients de rotation de Ricci) à partir de *(17-22)* et *(17-21)*[942] donne le résultat simple *(17-17)*.

Définissons comme d'habitude les tétrades inverses $e_m{}^\mu$ par :

$$\boldsymbol{\gamma_m} = e_m{}^\mu \boldsymbol{g_\mu}.$$

Les relations *(17-7)* s'écrivent alors :

$$\boldsymbol{\gamma_0} = e_0{}^\mu \boldsymbol{g_\mu}. = g_0 + \beta^i g_i$$
$$\boldsymbol{\gamma_i} = e_i{}^\mu \boldsymbol{g_\mu}. = g_i .$$

Nous en déduisons que :

$$e_m{}^\mu = \delta_m{}^\mu + \delta_m{}^0 \beta^\mu.$$

Définissons les tétrades par :

$$e_\mu{}^m \text{ par } \boldsymbol{g_\mu} = e_\mu{}^m \ \boldsymbol{\gamma_m} .$$

Comme *(17-7)* peut s'écrire

$$g_0 = \gamma_0 - \beta^i \gamma_i$$
$$g_i = \gamma_i ,$$

on en déduit que :

$$e_\mu{}^m = \delta_\mu{}^m - \delta_\mu{}^0 \beta^m.$$

Rappelons que :

$$g_{\mu\nu} = \eta_{mn} e^m{}_\mu e^n{}_\nu .$$

[942] Ces deux équations sont données dans la suite du paragraphe.

Les relations remarquables entre l'espace de Minkowski, le trou noir et le trou blanc

Les formules ci-dessus montrent le caractère remarquable de la relation entre la matrice (*4x4*) décrivant la tétrade, qui représente formellement la relation entre l'espace-temps de Minkowski (plat) et l'espace-temps de la solution de Schwarzschild (courbe) dans les coordonnées de la forme de Painlevé (elle décrit les vecteurs de base de l'espace-temps courbe dans la base orthonormée minkowskienne) et la matrice (*4x4*) de la tétrade inverse qui fait l'inverse.

En effet si l'une est l'inverse de l'autre nous savons qu'inverser une matrice n'est pas une opération très simple dans le cas général et que lorsqu'on compare les deux, la relation entre ses termes correspondants n'est pas évidente.

Ici la matrice décrivant la relation entre l'espace-temps minkowskien et l'espace-temps de la solution de Schwarzschild est représentée par la somme de la matrice identité $\delta_\mu{}^m$ et d'une matrice où un seul vecteur (colonne et spatial) n'est pas nul ce qui fait que l'inverse ne diffère que par le fait que le vecteur spatial est de signe opposé.

Il suffit de considérer les tétrades et tétrades inverses de la même solution de Schwarzschild dans des formes telles que celle de Schwarzschild, isotrope, et même de Schild ou de Finkelstein qui sont pourtant proches de celle de Painlevé pour s'en convaincre.

Ceci souligne les propriétés structurelles très particulières de cette forme : l'analyse ADM éclairera la signification physique d'une telle particularité.

Ceci est remarquable. Ajoutons que si nous considérons l'anti-univers correspondant à l'autre forme de la métrique où le signe du produit croisé *dr.dt* est l'inverse alors nous constatons que la tétrade du trou noir est égale à la tétrade inverse du trou blanc et vice versa.

Ces relations très simples nous laissent supputer que les deux systèmes de coordonnées sont très proches l'un de l'autre bien que leurs natures soient différentes.

Ceci se manifeste d'ailleurs par le caractère presque minkowskien des coordonnées de Painlevé.

Rappelons que les Γ_{kmn} sont définis (dans la métrique globale) à partir des tétrades $e_m{}^\mu$, des tétrades inverses $e_\mu{}^m$ et de leur dérivées métriques par[943]

$$d_{kmn} = \eta_{kl} e^l_\lambda e^\nu_n \frac{\partial (e^\lambda_m)}{\partial x^\nu} \quad , \qquad (17\text{-}21)$$

et

$$\Gamma_{kmn} = \frac{1}{2}(d_{kmn} - d_{mkn} + d_{nmk} - d_{nkm} + d_{mnk} - d_{knm}) \quad . \qquad (17\text{-}22)$$

[943]Le formalisme est bien explicité (avec des notations différentes) dans Landau & Lifchitz (1994) § 98 p.379-385 Notons la dérivée non covariante dans *(17-21)*. Comme on utilise *(17-21)* pour calculer *(17-22)*, cela est équivalent à une dérivée covariante. La partie covariante s'annule par symétrie sur les deux derniers indices des $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$.

Le calcul explicite des coefficients de connexion, équation *(17-22)*, à partir des tétrades que nous venons de définir nous montre que la pléiade de termes non linéaires s'annule de façon remarquable (pas seulement du fait de l'identité de Jacobi) ne laissant que des termes linéaires dans les tétrades $e_m{}^{\lambda}$.

Où le caractère nul du pseudo-tenseur de gravitation s'invite dans les équations.

Autrement dit, dans l'équation *(17-22)* les facteurs $e^{l}{}_{\lambda}\, e^{\nu}{}_{n}$ des termes d_{kmn} de l'équation *(17-21)* peuvent être remplacés par les symboles de Kronecker $\delta^{l}{}_{\lambda}\, \delta^{\nu}{}_{n}$ comme l'équation *(17-23)* ci-dessous l'indique sans que cela change le résultat donnant la valeur de Γ_{kmn}.

$$d_{kmn} = \eta_{kl}\, \delta_{\lambda}{}^{l} \delta_{n}{}^{\nu} \partial_{\nu}\, e_m{}^{\lambda} \;\rightarrow \delta_{n}{}^{\nu} \partial_{\nu}\, \delta_{m}{}^{0} \beta_k \qquad (17\text{-}23)$$

Dans ces conditions l'expression *(17-23)* se ramène à une dérivée partielle en espace de Minkowski de fonctions scalaires.

Remarquons que l'indice k de β a été abaissé par la métrique de Minkowski η_{kl} pour satisfaire la forme de d_{kmn}, mais que comme la composante 0 de β^k est nulle, $\beta^k = \beta_k$.

Soulignons que les valeurs de d_{kmn} obtenus par les équations *(17-21)* et *(17-23)* ne sont pas identiques, comme les calculs donnés dans les pages suivantes le montrent[944].

Les coefficients de rotation de Ricci sont représentatifs de la courbure d'un espace-temps dans le formalisme des tétrades. Le fait qu'ils s'expriment simplement par une dérivée partielle en espace de Minkowski est symptomatique d'une phénoménologie de type minkowskienne.

Ce caractère original confirme les éléments que nous avions déjà signalés.

Structure des coefficients de rotation de Ricci dans cette solution

Les termes non nuls de d_{kmn} dans *(17-21)* sont du type d_{i0n}.

Rappelons que la notation propre à Mathematica numérote les indices de *1* à *4* ce qui correspond aux indices de *0* à *3* en relativité générale.

Le temps est noté *0*, l'espace noté *i* et *j* correspond aux valeurs de *1* à *3* et l'indice *n* aux valeurs de *0* à *4*.

Nous démontrons la forme de ce résultat par une analyse simple de cette équation. Il découle de la valeur particulière des tétrades et tétrades inverses et du fait que la dérivée par rapport au temps est nulle.

Considérons le terme le plus à droite de *(17-21)* :

$$\partial_{\nu}\, e_m{}^{\lambda} = \partial_{\nu}(\delta_m{}^{\lambda} + \delta_m{}^{0} \beta^{\lambda}) = \partial_{\nu}\, \delta_m{}^{\lambda} + \partial_{\nu} \delta_m{}^{0} \beta^{\lambda} = \partial_{\nu} \delta_m{}^{0} \beta^{\lambda}.$$

Ce terme étant en facteur, sa nullité entraîne celle de d_{kmn}.

[944] Calculés par Mathematica 4, les indices des composantes sont notées de *1* à *4* où 1 est le temps *(t)* et *2, 3, 4* respectivement *x, y, z*. On donne la ligne de commande avec des notations évidentes.

Pour qu'il soit non nul, il faut:

- $v \neq 0$, car la dérivée par rapport au temps est nulle,
- $\lambda \neq 0$, car $\beta^0 = 0$ et $m = 0$, car $\delta_m{}^0 = 0$ si $m \neq 0$.

Si on développe l'expression :

$$e^l{}_\lambda \, e^\nu{}_n = \delta^l{}_\lambda \, \delta^\nu{}_n + \delta^l{}_\lambda \, \delta^0{}_n \, \beta^\nu - \delta^0{}_\lambda \, \delta^\nu{}_n \, \beta^l - \delta^0{}_\lambda \, \delta^0{}_n \, \beta^l \beta^\nu .$$

Avec $\lambda \neq 0$, elle se réduit à :

$$e^l{}_\lambda \, e^\nu{}_n = \delta^l{}_\lambda \, (\delta^\nu{}_n + \delta^0{}_n \, \beta^\nu).$$

Ce qui implique $l = \lambda \neq 0$. Comme dans *(17-21)*, $\delta^l{}_\lambda$ se contracte avec η_{kl} en donnant $\delta_{\lambda k} = \delta^k{}_\lambda$, puisqu'il n'y a que des composantes spatiales (de signature positive), il ne reste que des termes où k n'a que des composantes spatiales, où m est toujours une composante temporelle et n peut être une composante temporelle par $\delta^0{}_n \, \beta^\nu$ ou spatiale par $\delta^\nu{}_n$.

Ceci confirme le résultat du calcul qui est donné ci-dessus.

La différence entre $\delta^l{}_\lambda \, \delta^\nu{}_n$ et $e^l{}_\lambda \, e^\nu{}_n = \delta^l{}_\lambda (\delta^\nu{}_n + \delta^0{}_n \, \beta^\nu)$ se réduit aux trois composantes de type d_{i00}, car elles sont liées au terme supplémentaire $\delta^0{}_n \, \beta^\nu$ qui n'est non nul que pour $n = 0$[945].

Compte tenu de la forme alternée, vis-à-vis de la permutation des indices m et n, de Γ_{kmn}, ces composantes temporelles, où m et n sont égaux, présentes dans *(17-21)* vont s'éliminer dans le calcul de Γ_{kmn} par *(17-22)*, ce qui va donner le même résultat que le calcul de Γ_{kmn} à partir des d_{kmn} définis par *(17-23)*.

En effet, *(17-22)* montre que dans l'expression de Γ_{kmn} à un terme $d_{kmn} = d_{i00}$ correspond un terme $-d_{knm} = -d_{i00}$ et que les autres permutations donnent des termes de type d_{0i0} ou d_{00i} qui sont nuls.

De façon générale, quand les deux derniers indices m et n sont égaux leur permutation ne change pas la valeur de l'expression, ces termes étant de signe opposés ils s'annihilent.

Ainsi le caractère mystérieux de cette simplification s'estompe, car comme nous l'avons montré elle résulte simplement de la forme très particulière des tétrades et de la structure des équations.

On vérifiera, par un calcul que nous ferons dans la suite du document, que à partir des valeurs différentes des d_{kmn} donnés par les équations (*17-21)* et *(17-23)* on obtient bien la même valeur pour le coefficient de Ricci défini par *(17-22*).

Nous obtenons bien le même résultat[946], mais la propriété que nous allons énoncer ci-dessous est donc restrictive à Γ_{kmn}, ses variantes et ses dérivées par rapport aux nouvelles coordonnées que nous allons introduire. On voit que les Γ_{kmn} non nuls sont de type Γ_{0ij} et Γ_{i0j} (son antisymétrique) et que $\Gamma_{0ij} = \Gamma_{0ji}$, ce qui réduit à 6 le nombre de termes indépendants.

[945]Rappelons que nous avons montré préalablement que $k \neq 0$ et $m = 0$.

[946]On obtient aussi ce même résultat en permutant les tétrades et les tétrades inverses dans *(17-21)* ce qui montre bien le rôle symétrique joué par ces expressions bien qu'elles décrivent des opérations inverses entre métrique globale courbe et métrique locale plate (espace-temps de Lorentz) ce qui traduit la similitude entre les deux.

Cela se démontre simplement en effectuant *(17-22)* avec les valeurs non nulles de d_{kmn} et de la symétrie sphérique de la solution qui impose que $d_{i1j} = d_{j1i}$.

Nous pouvons alors utiliser le fait que la dérivée $e_n^{\nu}\partial/\partial x^{\nu}$ dans l'équation *(17-21)* peut être remplacée par $\delta_n^{\nu}\partial/\partial x^{\nu}$ pour introduire un nouvel ensemble de coordonnées d'espace plat x^n, avec des indices latins, ayant par définition la propriété donnée par *(17-24)* dans le système particulier et la base tétradique particulière que nous utilisons :

$$\frac{\partial}{\partial x^n} = \delta_n^{\nu}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \quad . \qquad (17\text{-}24)$$

La relation invariante $dx^n\partial/\partial x^n = dx^{\nu}\partial/\partial x^{\nu}$ [947] implique alors que les différentielles d'espace plat dx^n sont liées aux différentielles des coordonnées dx^{ν} par :

$$dx^n = \delta_{\nu}^n dx^{\nu} \quad . \qquad (17\text{-}25)$$

Insistons bien sur le fait que les relations *(17-24)* et *(17-25)* ne sont valables que dans le système de coordonnées particulier (Painlevé cartésien) et dans la base tétradique particulière que nous utilisons[948].
Si nous appliquons une transformation locale de jauge au référentiel tétradique (par exemple, une transformation de Lorentz qui varierait selon l'endroit) qui ferait tourner les coordonnées localement inertielles selon $\xi^n \rightarrow \xi'^n$, et si on applique au système de coordonnées globales une transformation $x^{\nu} \rightarrow x'^{\nu}$, alors les symboles de Kronecker des équations *(17-24) et (17-25)* doivent être remplacés par :

$$\delta_n^{\nu} \rightarrow \delta_m^{\mu}\frac{\partial \xi^m}{\partial \xi'^n}\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\mu}}, \qquad \delta_{\nu}^n \rightarrow \delta_{\mu}^m\frac{\partial \xi'^n}{\partial \xi'^m}\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}} \quad . \qquad (17\text{-}26)$$

Dans le système de coordonnées particulier que nous utilisons (global et tétradique), l'intégration générale de la relation *(17-25)* dans l'espace, (on a posé la constante d'intégration à zéro, sans perte de généralité), donne :

$$x^n = \delta_{\nu}^n x^{\nu} \quad . \qquad (17\text{-}27)$$

Ne nous laissons pas abuser par la notation indicielle, en fait, ni x^n ni x^{ν} ne sont des quadrivecteurs, ils ne sont pas invariants par des transformations de jauge locales de la tétrade ou par des transformations générales des coordonnées globales (seules les différentielles dx^n et dx^{ν} sont des quadrivecteurs).

L'équation *(17-27)* ne doit pas être interprétée comme une relation covariante reliant les coordonnées x^n aux coordonnées x^{ν}, même si le symbole de Kronecker est remplacé conformément à *(17-26)*.

On peut interpréter l'équation *(17-27)* comme définissant les coordonnées d'espace plat x^n, qui ont numériquement la même valeur que les coordonnées globales courbes x^{ν} de la

[947] C'est le vecteur "intervalle" invariant ***dx*** qui est mentionné au chapitre précédent.
[948] Les relations ne sont pas covariantes (ne se transposent pas dans un autre système de coordonnées).

métrique cartésienne de Painlevé, mais transposées dans le cadre d'un espace plat de métrique minkowskienne.

Les coordonnées de Painlevé présentent donc la particularité de pouvoir être utilisées comme coordonnées d'un espace de fond plat dans lequel la rivière d'espace coule, dans les trous noirs statiques.

Les coordonnées d'espace-temps plat x^n ne sont pas les mêmes que les coordonnées localement inertielles ξ^n associées à la base tétradique γ_n en chaque point de l'espace-temps. Les différentielles localement inertielles $d\xi^n$ sont liées aux différentielles des coordonnées dx^v par

$$d\,\xi^n = e^n_v\, dx^v \quad , \qquad (17\text{-}28)$$

qui diffèrent de la relation correspondante *(17-25)* entre dx^n et dx^v.

Le champ de la rivière dans l'espace global de Minkowski

Insérons les valeurs de la tétrade et de la tétrade inverse que nous considérons :

$$e_\mu{}^m = \delta_\mu{}^m - \delta_\mu{}^0\beta^m$$
$$e_m{}^\mu = \delta_m{}^\mu + \delta_m{}^0\beta^\mu.$$

Dans *(17-23).* Cela donne :

$$d_{kmn} = \eta_{kl}\,\delta_\lambda{}^l\delta^v{}_n\,\partial_v(\delta_m{}^\lambda + \delta_m{}^0\beta^\lambda) = \eta_{kl}\,\delta_\lambda{}^l\delta^v{}_n\,\partial_v(\delta_m{}^0\beta^\lambda) = \partial_n(\delta_m{}^0\beta_k)$$

Dans l'ordre, à droite de d_{kmn}, nous avons la définition, l'élimination de la dérivée du symbole de Kronecker et le résultat final toutes sommations, utilisant la convention d'Einstein, effectuées, compte tenu des précédentes.

On retrouve dans d_{kmn} calculé par *(17-23)* que l'indice m vaut 0 ainsi que k pour les composantes non nulles, ce que nous avons précédemment établi.

Si on calcule Γ_{kmn} à partir de cette forme de d_{kmn}, cela donne :

$$\Gamma_{kmn} = \tfrac{1}{2}[\partial_n(\delta_m{}^0\beta_k) - \partial_n(\delta_k{}^0\beta_m) + \partial_k(\delta_m{}^0\beta_n) - \partial_m(\delta_k{}^0\beta_n) + \partial_k(\delta_n{}^0\beta_m) - \partial_m(\delta_n{}^0\beta_k)]$$

Ceci se simplifie considérablement, car en rappelant que $\beta_k = \beta^k$, comme les coefficients de connexion d'indice $n = 0$ sont nuls, ($\Gamma_{km0} = 0$), Γ_{kmn} se réduit à Γ_{kmi}.

En effet, les deux premiers termes sont nuls, car la dérivée par rapport au temps est nulle, le troisième et le sixième sont nuls, car $\beta^0 = 0$ et les deux restants sont opposés, car pour $n = 0$, $\partial_m\beta^k = \partial_k\beta^m$, se réduit à $\partial_i\beta^j = \partial_j\beta^i$, où i, j désignent les valeurs spatiales des indices.

Tous les termes de type $\Gamma_{kmn} = \Gamma_{fij}$, où f, i, j désignent les valeurs (*1-3*) des indices spatiaux, sont tous nuls.

Ceci est évident, compte tenu de la présence du symbole de Kronecker $\delta_m{}^0$, en facteur dans tous les termes, qui impose qu'au moins un des indices prenne la valeur zéro.

Les seules valeurs non nulles possibles sont donc de la forme $\Gamma_{kmn} = \Gamma_{0ij}$ et Γ_{i0j}.

Montrons que l'expression de Γ_{kmn} est bien antisymétrique sur les deux premiers indices pour ces valeurs restantes (rappelons que $\partial_m \beta^k = \partial_k \beta^m$) :

$$\boldsymbol{\Gamma_{0ij}} = \tfrac{1}{2}[\,\partial_j(\delta_i{}^0\beta_0) \boldsymbol{-\partial_j(\delta_0{}^0\beta_i)} + \partial_0(\delta_i{}^0\beta_i) \boldsymbol{-\partial_i(\delta_0{}^0\beta_j)} + \partial_0(\delta_j{}^0\beta_i) - \partial_i(\delta_j{}^0\beta_0)] = \tfrac{1}{2}[-\partial_j\beta_i - \partial_i\beta_j] = \boldsymbol{-\partial_i\beta_j}$$

$$\boldsymbol{\Gamma_{i0j}} = \tfrac{1}{2}[\boldsymbol{\partial_j(\delta_0{}^0\beta_i)} - \partial_j(\delta_i{}^0\beta_j) + \boldsymbol{\partial_i(\delta_0{}^0\beta_j)} - \partial_0(\delta_i{}^0\beta_j) + \partial_i(\delta_j{}^0\beta_0) - \partial_0(\delta_j{}^0\beta_i)] = \tfrac{1}{2}[\partial_j\beta_i + \partial_i\beta_j] = \boldsymbol{\partial_i\beta_j}.$$

On a mis en **gras** les termes non nuls. On peut alors écrire que Γ_{kmn} se réduit à :

$$\Gamma_{0ij} = -\Gamma_{i0j} = -\partial_i\beta_j .$$

Tout ceci nous permet de préciser ce qu'on appelle "un gradient spatial".

En tenant compte de ceci, revenons à l'équation géodésique d'un quadrivecteur non accéléré[949]:

$$\frac{d\,p^0}{d\,\tau} = -\left(\frac{\partial\,\beta_i}{\partial\,x^j}\right) u^j\,p^i , \qquad \frac{d\,p^i}{d\,\tau} = -\left(\frac{\partial\,\beta_i}{\partial\,x^j}\right) u^j\,p^0 , \qquad (i = 1,2,3) \quad . \quad \textit{(17-18)}$$

L'existence de coordonnées plates x^n équivalentes en valeur aux coordonnées de Painlevé x^v, valide le membre de droite des équations *(17-18)* dans ces coordonnées plates.

Rappelons que β^i (qui n'utilise que les coordonnées spatiales) est une fonction dans un espace euclidien *3D* de coordonnées euclidiennes x^n, où n est réduit aux coordonnées spatiales notées i ou j, et où $\Gamma^0{}_{ij} = \Gamma^i{}_{0j} = \partial\beta^i/\partial x^j$ est bien un gradient spatial de β^i (le champ de la rivière) qui détermine les boosts lorsque la géodésique n'est pas radiale.

Nous verrons que cette approche rejoint celle de l'approche ADM et ceci nous révélera la signification géométrique de $\Gamma^0{}_{ij} = \partial\beta^i/\partial x^j$.

L'équation géodésique dans la tétrade *(17-18)*, utilise $\partial\beta^i/\partial x^j$ comme seul paramètre caractéristique, c'est ce qui nous a permis d'affirmer que le mouvement global dans les coordonnées globales de Painlevé est bien le "produit" au sens formel du mouvement de la rivière par le mouvement dans l'espace de Minkowski local.

L'espace courbe de Painlevé est formellement le produit d'un espace spatial euclidien *3D* par un espace de Minkowski *4D*.

C'est l'existence d'un espace plat, de même coordonnées globales que les coordonnées de Painlevé, ce qui permet de remplacer les dérivées par rapport aux coordonnées courbes de Painlevé par des dérivées partielles en espace plat, ceci donnant la même valeur, qui permet cette représentation.

[949] Que l'indice i soit élevé dans une des équations ne pose pas de problème, car la métrique spatiale est euclidienne.

Bien entendu cela n'est pas covariant et ne confère pas à cet espace-temps une courbure nulle, la propriété utilisée étant purement opératoire, mais c'est tout de même suffisamment particulier pour justifier ce développement.

Ceci est à mettre en relation avec le fait que le pseudo-tenseur énergie-impulsion du champ gravitationnel est nul.

Autre approche, compléments

Si on calcule la valeur des Γ^{k}_{mn} non nuls avec :

$$\beta^i = -\sqrt{2M}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{4}}[x, y, z] \quad .$$

Pour [950]

$$\partial \beta^i/\partial x^j = \Gamma^{0}_{ij} = \Gamma^{i}_{0j},$$

nous obtenons :

$$\begin{array}{lll}
\frac{\sqrt{m}\,\left(x^2-2\left(y^2+z^2\right)\right)}{\sqrt{2}\,\left(x^2+y^2+z^2\right)^{7/4}} & \frac{3\sqrt{m}\,x\,y}{\sqrt{2}\,\left(x^2+y^2+z^2\right)^{7/4}} & \frac{3\sqrt{m}\,x\,z}{\sqrt{2}\,\left(x^2+y^2+z^2\right)^{7/4}} \\
\frac{3\sqrt{m}\,x\,y}{\sqrt{2}\,\left(x^2+y^2+z^2\right)^{7/4}} & \frac{\sqrt{m}\,\left(-2\,x^2+y^2-2\,z^2\right)}{\sqrt{2}\,\left(x^2+y^2+z^2\right)^{7/4}} & \frac{3\sqrt{m}\,y\,z}{\sqrt{2}\,\left(x^2+y^2+z^2\right)^{7/4}} \\
\frac{3\sqrt{m}\,x\,z}{\sqrt{2}\,\left(x^2+y^2+z^2\right)^{7/4}} & \frac{3\sqrt{m}\,y\,z}{\sqrt{2}\,\left(x^2+y^2+z^2\right)^{7/4}} & \frac{\sqrt{m}\,\left(-2\,x^2-2\,y^2+z^2\right)}{\sqrt{2}\,\left(x^2+y^2+z^2\right)^{7/4}}
\end{array}$$

Si nous comparons ces valeurs avec les valeurs des symboles de Christoffel Γ^{0}_{ij} dans les coordonnées de la métrique de Painlevé, calculés en annexe *7*, nous constatons que les neuf coefficients de rotation de Ricci Γ^{0}_{ij} ci-dessus sont égaux aux neuf symboles de Christoffel, de mêmes indices, calculés dans les coordonnées globales de Painlevé.

Rappelons que les Γ_{0ij} sont symétriques par rapport à *i, j,* (composantes Γ_{0ji} non listées).

Les coefficients de rotation de Ricci sont un sous ensemble des symboles de Christoffel, puisque ceux-ci comportent, en plus, des composantes avec deux indices temporels.

Mais quand on considère la relation

$$\Gamma_{kmn} = d_{kmn} + e^{\kappa}_{k} e^{\mu}_{m} e^{\nu}_{n} \Gamma_{\kappa\mu\nu} \quad , \qquad (17\text{-}29)$$

entre les symboles de Christoffel et les coefficients de rotation de Ricci, relation plutôt compliquée, si on tient compte de la définition *(17-25)* de d_{kmn}, le fait qu'une grande partie des composantes se transforme identiquement paraît miraculeux.

En fait la transformation élimine les composantes à deux indices temporels et symétrise Γ_{0ij} sur les 2 premiers indices.

L'annexe *8* montre comment la transformation, $e_k^{\kappa} e_m^{\mu} e_n^{\nu} \Gamma_{\kappa\mu\nu}$, élimine les symboles Γ_{0i0} et comment l'ajout de d_{kmn} élimine les Γ_{i00}, et symétrise les termes Γ_{0ij} restants sur les 2 premiers indices[951].

[950] Calculs fait avec Mathematica 4.

Ceci dévoile le lien étroit entre la forme globale de Painlevé et la forme locale considérée.

Interprétation géométrique.

On peut aussi interpréter, géométriquement, ces propriétés à partir de la définition de $\Gamma^{k}{}_{mn}$:

$$\partial_n \vec{\gamma}_m \equiv \Gamma^{k}_{mn} \vec{\gamma}_k \quad . \qquad (17\text{-}13)$$

Appliquons cette définition à $\Gamma^{i}{}_{0j}$, cela donne :

$$\partial_j \gamma_0 \; = \Gamma^{i}{}_{0j} \gamma_i \, .$$

La dérivée directionnelle du vecteur de base temps γ_0 par rapport à n'importe quelle autre vecteur spatial γ_i ne se traduit que par des composantes (contenues dans $\Gamma^{i}{}_{0j}$) sur les vecteurs spatiaux γ_i. En appliquant à $\Gamma^{0}{}_{ij}$, cela donne:

$$\partial_j \gamma_i \; = \Gamma^{0}{}_{ij} \gamma_0 \, .$$

La dérivée directionnelle d'un vecteur de base espace γ_i par rapport aux vecteurs de base spatiaux γ_j ,ne se traduit que par des composantes temporelles sur γ_0.

Ceci est bien conforme à la définition de la base co-mobile de vecteurs de la rivière, où les vecteurs spatiaux sont fixes, et où seul le vecteur temps est variable et dépend des coordonnées d'espace, seulement, à travers β_i.

Les vecteurs spatiaux restent invariants entre eux, mais pas par rapport au vecteur de base temps qui, en retour, varie par rapport aux vecteurs spatiaux.

C'est évidemment la structure particulière de cet espace-temps, qui se traduit par le fait que les tétrades et tétrades inverses prennent une forme aussi simple dans ce modèle, qui permet une telle simplification.

[951] Nous verrons au chapitre *18* que $\Gamma^{0}_{i\,j}$ est un tenseur symétrique K_{ij} à deux indices qui est la projection du tenseur de courbure extrinsèque sur l'hypersurface spatiale à t = constante dans la forme de Painlevé.

Calcul des d_{kmn} par les équations *(17-21)* et *(17-23)*

d_{kmn}, calculé par *(17-21)*

$$d[2,1,1] \quad -\frac{m\,x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$d[2,1,2] \quad \frac{\sqrt{m}\,(x^2-2\,(y^2+z^2))}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$$

$$d[2,1,3] \quad \frac{3\sqrt{m}\,x\,y}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$$

$$d[2,1,4] \quad \frac{3\sqrt{m}\,x\,z}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$$

$$d[3,1,1] \quad -\frac{m\,y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$d[3,1,2] \quad \frac{3\sqrt{m}\,x\,y}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$$

$$d[3,1,3] \quad \frac{\sqrt{m}\,(-2\,x^2+y^2-2\,z^2)}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$$

$$d[3,1,4] \quad \frac{3\sqrt{m}\,y\,z}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$$

$$d[4,1,1] \quad -\frac{m\,z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$d[4,1,2] \quad \frac{3\sqrt{m}\,x\,z}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$$

$$d[4,1,3] \quad \frac{3\sqrt{m}\,y\,z}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$$

$$d[4,1,4] \quad \frac{\sqrt{m}\,(-2\,x^2-2\,y^2+z^2)}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$$

d_{kmn}, calculé par *(17-23)*

$$d[2,1,2] \quad \frac{\sqrt{m}\,(x^2-2\,(y^2+z^2))}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$$

$$d[2,1,3] \quad \frac{3\sqrt{m}\,x\,y}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$$

$$d[2,1,4] \quad \frac{3\sqrt{m}\,x\,z}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$$

$$d[3,1,2] \quad \frac{3\sqrt{m}\,x\,y}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$$

$$d[3,1,3] \quad \frac{\sqrt{m}\,(-2\,x^2+y^2-2\,z^2)}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$$

$$d[3,1,4] \quad \frac{3\sqrt{m}\,y\,z}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$$

$$d[4,1,2] \quad \frac{3\sqrt{m}\,x\,z}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$$

$$d[4,1,3] \quad \frac{3\sqrt{m}\,y\,z}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$$

$$d[4,1,4] \quad \frac{\sqrt{m}\,(-2\,x^2-2\,y^2+z^2)}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$$

Calcul du coefficient de rotation de Ricci à partir, des d_{kmn} donnés par *(17-21)* et *(17-23)*

Calcul de Γ_{kmn} par d_{kmn} défini par (17-21)

$$R[1,2,2] \quad \frac{\sqrt{m}\,(-x^2+2\,(y^2+z^2))}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$$

$$R[1,2,3] \quad -\frac{3\sqrt{m}\,x\,y}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$$

$$R[1,2,4] \quad -\frac{3\sqrt{m}\,x\,z}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$$

$$R[1,3,2] \quad -\frac{3\sqrt{m}\,x\,y}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$$

$$R[1,3,3] \quad \frac{\sqrt{m}\,(2\,x^2-y^2+2\,z^2)}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$$

$$R[1,3,4] \quad -\frac{3\sqrt{m}\,y\,z}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$$

$$R[1,4,2] \quad -\frac{3\sqrt{m}\,x\,z}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$$

$$R[1,4,3] \quad -\frac{3\sqrt{m}\,y\,z}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$$

$$R[1,4,4] \quad \frac{\sqrt{m}\,(2\,x^2+2\,y^2-z^2)}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$$

$$R[2,1,2] \quad \frac{\sqrt{m}\,(x^2-2\,(y^2+z^2))}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$$

$$R[2,1,3] \quad \frac{3\sqrt{m}\,x\,y}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$$

$$R[2,1,4] \quad \frac{3\sqrt{m}\,x\,z}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$$

$$R[3,1,2] \quad \frac{3\sqrt{m}\,x\,y}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$$

$$R[3,1,3] \quad \frac{\sqrt{m}\,(-2\,x^2+y^2-2\,z^2)}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$$

$$R[3,1,4] \quad \frac{3\sqrt{m}\,y\,z}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$$

$$R[4,1,2] \quad \frac{3\sqrt{m}\,x\,z}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$$

$$R[4,1,3] \quad \frac{3\sqrt{m}\,y\,z}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$$

$$R[4,1,4] \quad \frac{\sqrt{m}\,(-2\,x^2-2\,y^2+z^2)}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$$

Calcul de Γ_{kmn} par d_{kmn} défini par (17-23)

$$R[1,2,2] \quad -\frac{\sqrt{m}\,(x^2-2\,(y^2+z^2))}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$$

$$R[1,2,3] \quad -\frac{3\sqrt{m}\,x\,y}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$$

$$R[1,2,4] \quad -\frac{3\sqrt{m}\,x\,z}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$$

$$R[1,3,2] \quad -\frac{3\sqrt{m}\,x\,y}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$$

$$R[1,3,3] \quad \frac{\sqrt{m}\,(2\,x^2-y^2+2\,z^2)}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$$

$$R[1,3,4] \quad -\frac{3\sqrt{m}\,y\,z}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$$

$$R[1,4,2] \quad -\frac{3\sqrt{m}\,x\,z}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$$

$$R[1,4,3] \quad -\frac{3\sqrt{m}\,y\,z}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$$

$$R[1,4,4] \quad \frac{\sqrt{m}\,(2\,x^2+2\,y^2-z^2)}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$$

$$R[2,1,2] \quad \frac{\sqrt{m}\,(x^2-2\,(y^2+z^2))}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$$

$$R[2,1,3] \quad \frac{3\sqrt{m}\,x\,y}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$$

$$R[2,1,4] \quad \frac{3\sqrt{m}\,x\,z}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$$

$$R[3,1,2] \quad \frac{3\sqrt{m}\,x\,y}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$$

$$R[3,1,3] \quad \frac{\sqrt{m}\,(-2\,x^2+y^2-2\,z^2)}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$$

$$R[3,1,4] \quad \frac{3\sqrt{m}\,y\,z}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$$

$$R[4,1,2] \quad \frac{3\sqrt{m}\,x\,z}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$$

$$R[4,1,3] \quad \frac{3\sqrt{m}\,y\,z}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$$

$$R[4,1,4] \quad \frac{\sqrt{m}\,(-2\,x^2-2\,y^2+z^2)}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$$

Symboles de Christoffel de la forme de Painlevé

$$\Gamma[1,\ 2,\ 1] \qquad -\frac{m\,x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}$$

$$\Gamma[1,\ 2,\ 2] \qquad \frac{\sqrt{m}\ \left(-x^2+2\ \left(y^2+z^2\right)\right)}{\sqrt{2}\ \left(x^2+y^2+z^2\right)^{7/4}}$$

$$\Gamma[1,\ 3,\ 1] \qquad -\frac{m\,y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}$$

$$\Gamma[1,\ 3,\ 2] \qquad -\frac{3\sqrt{m}\ x\,y}{\sqrt{2}\ \left(x^2+y^2+z^2\right)^{7/4}}$$

$$\Gamma[1,\ 3,\ 3] \qquad \frac{\sqrt{m}\ \left(2\,x^2-y^2+2\,z^2\right)}{\sqrt{2}\ \left(x^2+y^2+z^2\right)^{7/4}}$$

$$\Gamma[1,\ 4,\ 1] \qquad -\frac{m\,z}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}$$

$$\Gamma[1,\ 4,\ 2] \qquad -\frac{3\sqrt{m}\ x\,z}{\sqrt{2}\ \left(x^2+y^2+z^2\right)^{7/4}}$$

$$\Gamma[1,\ 4,\ 3] \qquad -\frac{3\sqrt{m}\ y\,z}{\sqrt{2}\ \left(x^2+y^2+z^2\right)^{7/4}}$$

$$\Gamma[1,\ 4,\ 4] \qquad \frac{\sqrt{m}\ \left(2\,x^2+2\,y^2-z^2\right)}{\sqrt{2}\ \left(x^2+y^2+z^2\right)^{7/4}}$$

$$\Gamma[2,\ 1,\ 1] \qquad \frac{m\,x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}$$

$$\Gamma[3,\ 1,\ 1] \qquad \frac{m\,y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}$$

$$\Gamma[4,\ 1,\ 1] \qquad \frac{m\,z}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}$$

Chapitre 19

Conditions analytiques décrivant la nullité pseudo-tenseur de Landau & Lifchitz

Nous avons calculé ce pseudo-tenseur dans plusieurs formes usuelles de métrique correspondant à cette solution et avons trouvé que c'est seulement dans la forme cartésienne de Painlevé et celle de Kerr-Schild sans rotation, dont nous avons montré la relation, que ce pseudo-tenseur est nul.

Ce résultat n'est pas exhaustif, mais nous allons tenter d'en extraire les caractères structurels.

Un résultat général analytique conduirait à chercher la forme générale d'un tenseur métrique inverse qui satisfait à l'équation

$$t^{ik} = \{c^4/16\pi G\}\{(2\Gamma^{n}{}_{lm}\Gamma^{p}{}_{np} - \Gamma^{n}{}_{lp}\Gamma^{p}{}_{mn} - \Gamma^{n}{}_{ln}\Gamma^{p}{}_{mp})(g^{il}g^{km} - g^{ik}g^{lm}) + g^{il}g^{mn}(\Gamma^{k}{}_{lp}\Gamma^{p}{}_{mn} + \Gamma^{k}{}_{mn}\Gamma^{p}{}_{lp} - \Gamma^{k}{}_{np}\Gamma^{p}{}_{lm} - \Gamma^{k}{}_{lm}\Gamma^{p}{}_{np}) + g^{kl}g^{mn}(\Gamma^{i}{}_{lp}\Gamma^{p}{}_{mn} + \Gamma^{i}{}_{mn}\Gamma^{p}{}_{lp} - \Gamma^{i}{}_{np}\Gamma^{p}{}_{lm} - \Gamma^{i}{}_{lm}\Gamma^{p}{}_{np}) + g^{lm}g^{np}(\Gamma^{i}{}_{ln}\Gamma^{k}{}_{mp} - \Gamma^{i}{}_{lm}\Gamma^{k}{}_{np})\} = 0,$$

ou à l'équation

$$(-g)t^{ik} = \{c^4/16\pi G\}\{\partial_l(g.g^{ik})\partial_m(g.g^{lm}) - \partial_l(g.g^{il})\partial_m(g.g^{km}) + \tfrac{1}{2}g^{ik}g_{lm}\partial_p(g.g^{ln})\partial_n(g.g^{pm}) - [g^{il}g_{mn}\partial_p(g.g^{kn})\partial_l(g.g^{mp}) + g^{kl}g_{mn}\partial_p(g.g^{in})\partial_l(g.g^{mp})] + g^{np}g_{lm}\partial_n(g.g^{il})\partial_p(g.g^{km}) + \tfrac{1}{8}(2g^{il}g^{km} - g^{ik}g^{lm})(2g_{np}g_{qr} - g_{pq}g_{nr})[\partial_l(g.g^{nr})\partial_m(g.g^{pq})]\} = 0.$$

En considérant le tenseur métrique comme l'inconnue, le tenseur métrique inverse s'en déduit, ces équations forment un système de dix équations différentielles, du premier ordre couplées, dont la résolution semble complexe.

À supposer qu'il y ait une solution analytique donnant la ou les solutions satisfaisant à ce système, la résolution ne paraît pas évidente et laisse peu d'espoir d'aboutir par cette méthode.

Pour la nullité du pseudo-tenseur, on peut se limiter au cas des solutions dans le vide[952], auquel cas il faut quand même résoudre le système de 10 équations différentielles suivantes

$$(-g).t^{\mu\nu} = \partial_\rho[\partial_\sigma(\lambda^{\mu\nu\rho\sigma})] = 0,$$

où

$$\lambda^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{(-g)(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma})}{16\pi G},$$

soit

$$16\pi G(-g).t^{\mu\nu} = \partial_\rho\{\partial_\sigma[(-g)(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma})]\} = 0. \qquad (19\text{-}2)$$

Ces équations différentielles données par *(19-2)* comportent des dérivées secondes. On doit pouvoir les éliminer puisqu'on sait que le pseudo-tenseur de gravitation ne comporte que des dérivées premières. Il ne semble pas, même dans ce cas plus simple, très évident de trouver

[952] Nous avons vu que cela résulte du fait que la divergence covariante serait égale à la divergence simple. On a posé c = 1. Il y a 10 équations au maximum compte tenu de la symétrie du tenseur métrique.

les coordonnées dans lesquelles la métrique, associée à la solution extérieure du corps central à symétrie sphérique, satisfait à cette équation *(19-2)*.

Il suffit de développer le système de dix équations indépendantes, correspondant aux dix valeurs de μv donnant des valeurs de $g^{\mu v}$ potentiellement différentes pour s'en convaincre :

$$\partial^2_t \lambda^{\mu vtt} + \partial^2_x \lambda^{\mu vxx} + \partial^2_y \lambda^{\mu vyy} + \partial^2_z \lambda^{\mu vzz} + \partial_x\partial_t \lambda^{\mu vxt} + \partial_y\partial_t \lambda^{\mu vyt} + \partial_z\partial_t \lambda^{\mu vzt} + \partial_t\partial_x \lambda^{\mu vtx} + \partial_t\partial_y \lambda^{\mu vty} + \partial_t\partial_z \lambda^{\mu vtz}] + \partial_x\partial_y\lambda^{\mu vxy} + \partial_x\partial_z \lambda^{\mu vxz} + \partial_y\partial_z \lambda^{\mu vyz} + \partial_y\partial_x \lambda^{\mu vyx} + \partial_z\partial_x \lambda^{\mu vzx} + \partial_z\partial_y \lambda^{\mu vzy} = 0.$$

Nous allons donc nous attacher à traiter un problème plus simple. Après quelques considérations préliminaires, nous allons utiliser analyser la structure de $\lambda^{\mu\nu\rho\sigma}$ et de ses divergences, dans le cas général, et dans le cas particulier de la forme de Painlevé puis de Kerr-Schild sans rotation, pour tenter de découvrir comment la nullité se produit.

Décomposition en un scalaire, un vecteur et un tenseur du tenseur métrique inverse.

S'agissant d'une approche du problème de la gravitation relativiste, dans un contexte d'espace-temps plat, le tenseur inverse va sans doute être impliqué.

Nous pouvons décomposer le tenseur inverse de la métrique en trois parties, *i, j = (1, 2, 3).*

Un scalaire : g^{00}.

Un vecteur *3D :* $g^{0i} = g^{i0}$.

Un tenseur spatial : g^{ij}.

Nous verrons que dans ce cas de métrique stationnaire, il sera approprié d'analyser les propriétés du scalaire et du vecteur *3D*, (la partie "temporelle") indépendamment de celles du tenseur spatial.

En effet, nous avons vu que le tenseur spatial du tenseur inverse avait la particularité d'avoir la même valeur dans plusieurs formes de métrique (Painlevé, Kerr-Schild sans rotation, Schwarzschild) décrivant cette solution, ceci résultant de la symétrie sphérique et du caractère stationnaire de la solution, exprimés dans ces métriques, qu'elles satisfassent ou non à la contrainte de pseudo-tenseur nul.

Ceci implique que les expressions

$$\lambda^{ijkl} = K.[g(g^{ij}g^{kl} - g^{ik}g^{jl})]$$

sont identiques dans ces trois formes.

Nous allons commencer par nous intéresser à ce tenseur spatial de la métrique inverse.

Partie du pseudo-tenseur associée au tenseur spatial du tenseur inverse

Généralités

La forme particulière du pseudo-tenseur dans le vide où le tenseur énergie-impulsion est nul

$$t^{\mu\nu} = \partial_\rho\partial_\sigma\lambda^{\mu\nu\rho\sigma} = K.\partial_\rho\partial_\sigma[g(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma})], \qquad (a)$$

où $K = c^4/16\pi G$ est une constante et g le déterminant de la métrique, suggère qu'on peut remplacer la partie entre crochets par une expression plus simple.

En utilisant les propriétés du cofacteur $C^{\mu\nu}$, déterminant de la sous matrice (*3x3*) qui ne contient aucun élément de la ligne et colonne de $g^{\mu\nu}$ du tenseur métrique inverse, de composantes $g^{\mu\nu}$ et de déterminant $1/g$ on peut définir la composante covariante $g_{\mu\nu}$ de ce tenseur métrique par :

$$C^{\mu\nu}/g^{-1} = g_{\mu\nu} = C^{\mu\nu}g. \qquad (b)$$

Comme l'expression entre crochets n'est pas un cofacteur dans un tenseur (*4x4*) mais dans une partie représentée par une matrice (*3x3*), il va falloir extraire un sous tenseur par exemple le sous tenseur spatial g^{ij}, procéder en deux étapes en appliquant la méthode deux fois.

En appliquant cette même règle *(b)* au tenseur spatial g^{ij}, on voit que par exemple :

$$\lambda^{2233}/g = (g^{22}g^{33} - g^{23}g^{23}) = G_{11}G.$$

Où G est le déterminant du tenseur métrique inverse spatial et G_{11} la composante (covariante) du tenseur inverse du tenseur spatial inverse[953], ce qui s'obtient par inversion de la matrice g^{ij}.

Comme G est également le cofacteur de g^{00}, on a $g_{00} = G/g^{-1} = G.g$ soit $G = g_{00}/g$, donc :

$$\lambda^{2233}/g = (g^{22}g^{33} - g^{23}g^{23}) = G_{11}/G = G_{11}g_{00}/g \rightarrow \lambda^{2233} = g(g^{22}g^{33} - g^{23}g^{23}) = G_{11}g_{00} \qquad (c)$$

Donc pour calculer G_{ij} à partir de $g_{\mu\nu}$ dont on calcule le déterminant g, on inverse sa matrice pour obtenir $g^{\mu\nu}$ dont on extrait le tenseur spatial g^{ij} dont on calcule le déterminant G. On calcule les cofacteurs G_{ij} de g^{ij} dans le tenseur g^{ij} ce qui donne les valeurs de G_{ij}. Ayant calculé $\lambda^{\mu\nu\rho\sigma}$ et disposant de la valeur de g_{00} on peut alors vérifier la relation *(c)*.

Liste des composantes du tenseur $\lambda^{\mu\nu\rho\sigma}$

En ne considérant que des formes de métrique ne dépendant pas du temps, en excluant les termes où ρ et σ sont nuls et en ne tenant pas compte de K qui n'intervient pas dans le calcul, les seules expressions de $\lambda^{\mu\nu\rho\sigma}$ non nulles à prendre en compte pour le calcul de $t^{\mu\nu}$ sont[954] données par le tableau qui suit.

[953] Attention ce n'est pas le tenseur spatial métrique !

Composantes tensorielle de λ^{ijkl} (sous-tenseur spatial) de $\lambda^{\mu\nu\rho\sigma}$

$\lambda^{11kl}=$ $g(g^{11}g^{22}-g^{12}g^{12})=-G_{33}g_{00}$, $g(g^{11}g^{23}-g^{12}g^{13})=G_{32}g_{00}$, k =2
$g(g^{11}g^{32}-g^{13}g^{12})=, G_{32}g_{00}$, $g(g^{11}g^{33}-g^{13}g^{13})=-G_{22}g_{00}$, k =3

$\lambda^{22kl}=$ $g(g^{22}g^{11}-g^{21}g^{21})=-G_{33}g_{00}$, $g(g^{22}g^{13}-g^{21}g^{23})=G_{31}g_{00}$, k =1
$g(g^{22}g^{31}-g^{23}g^{21})=G_{31}g_{00}$, $g(g^{22}g^{33}-g^{23}g^{23})=-G_{11}g_{00}$, k =3

$\lambda^{33kl}=$ $g(g^{33}g^{11}-g^{31}g^{31})=-G_{22}g_{00}$, $g(g^{33}g^{12}-g^{31}g^{33})=G_{21}g_{00}$, k =1
$g(g^{33}g^{21}-g^{32}g^{31})=G_{21}g_{00}$, $g(g^{33}g^{22}-g^{32}g^{32})=-G_{11}g_{00}$ k =2

$\lambda^{12kl}=$ $g(g^{12}g^{12}-g^{11}g^{22})=G_{33}g_{00}$, $g(g^{12}g^{13}-g^{11}g^{32})=-G_{32}g_{00}$, k =1
$g(g^{12}g^{32}-g^{13}g^{22})=-G_{31}g_{00}$, $g(g^{12}g^{33}-g^{13}g^{23})=G_{21}g_{00}$, k =3
$\lambda^{21kl}=$ $g(g^{21}g^{21}-g^{22}g^{11})=G_{33}g_{00}$, $g(g^{21}g^{23}-g^{22}g^{13})=-G_{31}g_{00}$, k =2
$g(g^{21}g^{31}-g^{23}g^{11})=-G_{32}g_{00}$, $g(g^{21}g^{33}-g^{23}g^{13})=G_{21}g_{00}$, k =3

$\lambda^{13kl}=$ $g(g^{13}g^{12}-g^{11}g^{32})=-G_{32}g_{00}$, $g(g^{13}g^{13}-g^{11}g^{33})=G_{22}g_{00}$, k =1
$g(g^{13}g^{22}-g^{12}g^{32})=G_{31}g_{00}$, $g(g^{13}g^{23}-g^{12}g^{33})=-G_{21}g_{00}$, k =2
$\lambda^{31kl}=$ $g(g^{31}g^{21}-g^{32}g^{11})=-G_{32}g_{00}$, $g(g^{31}g^{22}-g^{32}g^{12})=G_{31}g_{00}$, k =2
$g(g^{31}g^{31}-g^{33}g^{11})=G_{22}g_{00}$, $g(g^{31}g^{32}-g^{33}g^{12})=-G_{21}g_{00}$ k =3

$\lambda^{23kl}=$ $g(g^{23}g^{11}-g^{21}g^{31})=G_{32}g_{00}$, $g(g^{23}g^{13}-g^{21}g^{33})=-G_{12}g_{00}$, k =1
$g(g^{23}g^{21}-g^{22}g^{31})=-G_{31}g_{00}$, $g(g^{23}g^{23}-g^{22}g^{33})=G_{11}g_{00}$, k =2
$\lambda^{32kl}=$ $g(g^{32}g^{11}-g^{31}g^{21})=G_{32}g_{00}$, $g(g^{32}g^{12}-g^{31}g^{22})=-G_{31}g_{00}$, k =1
$g(g^{32}g^{31}-g^{33}g^{21})=-G_{12}g_{00}$, $g(g^{32}g^{32}-g^{33}g^{22})=G_{11}g_{00}$, k =3

Le signe est déterminé par la règle des calculs de déterminants (alternances).

Le tableau ci-dessous synthétise les relations entre $G'_{ij}=G_{ij}g_{00}$ et λ^{ijkl}.

$G'_{11}=-\lambda^{2233}=-\lambda^{3322}=\lambda^{2323}=\lambda^{3232}$	$G'_{12}=G'_{21}=\lambda^{3312}=\lambda^{3321}=\lambda^{1233}=\lambda^{2133}$	$G'_{13}=G'_{31}=\lambda^{2213}=\lambda^{2231}=\lambda^{1322}=\lambda^{3122}$
$G'_{21}=-\lambda^{1323}=-\lambda^{3132}=-\lambda^{3231}=-\lambda^{2313}$	$G'_{22}=-\lambda^{3311}=-\lambda^{1133}=\lambda^{3131}=\lambda^{1313}$	$G'_{23}=G'_{32}=\lambda^{1123}=\lambda^{1132}=\lambda^{2311}=\lambda^{3211}$
$G'_{31}=-\lambda^{1232}=-\lambda^{2123}=-\lambda^{2321}=-\lambda^{3212}$	$G'_{32}=-\lambda^{1213}=-\lambda^{2131}=-\lambda^{1312}=-\lambda^{3121}$	$G'_{33}=-\lambda^{1122}=-\lambda^{2211}=\lambda^{1212}=\lambda^{2121}$

Il est facile de vérifier que ces 36 valeurs de composantes (9x4) sont bien celles correspondant aux valeurs de λ^{ijkl} qu'on peut calculer par $g(g^{ij}g^{kl}-g^{ik}g^{jl})$ avec les indices spatiaux *i, j, k, l*.

Nous remarquons que λ^{ijkl} [955], pour *i, j, k* donnés, ne comporte que deux termes non nuls correspondant à deux valeurs de *l,* tels que $l \neq i$ que nous noterons *l'* et *l''*.

[954] Les indices grecs (spatiaux-temporels) varient de 0 à 3 les indices latins (spatiaux) de 1 à 3.
[955] Identique pour les formes de Painlevé, Kerr-Schild Schwarzschild en coordonnées cartésiennes (Det g = -1).

Tous les λ^{ijkl}, valorisés par l' et l'', dérivent de composantes cartésiennes (deux parmi trois) d'un vecteur spatial radial ***V***, de module $2M$ (caractéristique de la symétrie sphérique) et seul paramètre du trou noir, de coordonnées cartésiennes V_i considérées ici comme des fonctions :

$$V_x = 2M.x\,(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2},$$
$$V_y = 2M.y\,(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2},$$
$$V_z = 2M.z\,(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}.$$

Les six valeurs différentes de λ^{ijkl}, données par le tenseur symétrique G'_{ij} sont de la forme ci-dessous[956]. Le chiffre (1) qui apparaît quand λ^{ijkl}, $= G'_{ii}$, s'élimine dans la dérivée partielle[957].

$\lambda^{iikl\,\prime} = (1) - \partial_{l\,\prime\prime}[2M.x^{l\,\prime\prime}(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}]$, $\lambda^{iikl\,\prime\prime} = \partial_{l\,\prime}[2M.x^{l\,\prime\prime}(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}]$, donc :

$\partial_l \lambda^{ijkl} = \partial_{l\,\prime}\lambda^{ijkl\,\prime} + \partial_{l\,\prime\prime}\lambda^{ijkl\,\prime\prime} = \partial_{l\,\prime}\{(1) - \partial_{l\,\prime\prime}[2M.x^{l\,\prime\prime}(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}]\} + \partial_{l\,\prime\prime}\partial_{l\,\prime}[2M.x^{l\,\prime\prime}(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}] = 0.$

$G'_{ij} = \delta_{ij} + \partial_i V_j$, a les composantes suivantes (β^i est une fonction indicée, donnant une valeur) :

$G'_{11} = -1 + \partial_x V_x = -1 + \beta^{y\,2} + \beta^{z\,2}$	$G'_{12} = \partial_x V_y = -\beta^y\beta^x$	$G'_{13} = \partial_x V_z = -\beta^z\beta^x$
$G'_{21} = \partial_y V_x = -\beta^y\beta^x$	$G'_{22} = -1 + \partial_y V_y = -1 + \beta^{x\,2} + \beta^{z\,2}$	$G'_{23} = \partial_y V_z = \beta^z\beta^y$
$G'_{31} = \partial_z V_x = -\beta^z\beta^x$	$G'_{32} = \partial_z V_y = -\beta^z\beta^y$	$G'_{33} = -1 + \partial_z V_z = -1 + \beta^{y\,2} + \beta^{x\,2}$

La relation $\partial_l \lambda^{ijkl} = 0$, du fait de la définition de G'_{ij}, est une identité : $\partial_{[i} G'_{jj]k} = \partial_{[i}\partial_{jj]} V_k \equiv 0$.

Réciproquement, la contrainte sur la divergence implique une forme du type : $G'_{ij} = \delta_{ij} + \partial_i V_j$.

Rappelons que la simplicité de ces propriétés résultent de la structure et valorisation du tenseur spatial du tenseur inverse à symétrie sphérique de composantes :

$$g^{ij} = \delta^{ij} - \beta^i\beta^j = \delta^{ij} - 4(2M)\partial_i(x^2+y^2+z^2)^{1/4}\,\partial_j(x^2+y^2+z^2)^{1/4}.$$

D'où : $$\lambda^{ijkl} = (\delta^{ij} - \beta^i\beta^j)(\delta^{kl} - \beta^k\beta^l)(\delta^{ik} - \beta^i\beta^k)(\delta^{jl} - \beta^j\beta^l).$$

Nous avons donc trouvé une autre méthode de calcul de $\boldsymbol{\lambda^{ijkl}}$, à partir de la métrique par des inversions de matrices, qui montre qu'il n'y a, au maximum, que 6 valeurs indépendantes, ne dépendant que d'un vecteur radial de module $2M$ (paramètre unique du trou noir) et de ses dérivées par rapport aux coordonnées. Ce résultat montre bien, de la manière la plus explicite, que c'est bien ce paramètre qui détermine toutes les propriétés du trou noir.

Le super-potentiel de Freud $\partial_\sigma\,\lambda^{\mu\nu\rho\sigma}$ ne comportera donc que les composantes spatio-temporelles. Ceci confirme le qualificatif de "courbure temporelle" que nous avions utilisé lorsque nous avions présenté différentes formes de la métrique de Painlevé.

Le cas des composantes spatiales étant réglé considérons les composantes spatio-temporelles.

---

[956] Les 9 formes (dont 6 différentes) de la matrice symétrique G'_{ij}, dont chacune correspond à 4 valeurs de λ^{ijkl} par les symétries et antisymétries, comme indiqué dans le tableau précédent, génèrent les 36 valeurs de λ^{ijkl}.

[957] On a particularisé l' et l'' mais ils sont interchangeables, $\partial_l \lambda^{ijkl} = 0$, du fait de la commutativité des dérivées. On rappelle que, ci-dessous, β^i, (β^x, β^y, β^z) désignent les composantes cartésiennes du vecteur d'entraînement.

Analyse de la structure du pseudo-tenseur et de sa nullité dans la forme de Painlevé

Rappel des symétries

Avant de considérer la structure des composantes temporelles et spatio-temporelles, intéressons-nous à des propriétés structurelles du tenseur $\lambda^{\mu\nu\rho\sigma}$. Car si le calcul a montré que le pseudo-tenseur de Landau & Lifchitz était nul dans la forme de Painlevé, nous n'avons pas analysé les propriétés structurelles d'une telle formulation.

Le calcul explicite de $\lambda^{\mu\nu\rho\sigma}$ dans cette forme de Painlevé montre que sur les *256* composantes de $\lambda^{\mu\nu\rho\sigma}$, il n'y en a que *10* de linéairement indépendantes, ceci résultant des symétries de $\lambda^{\mu\nu\rho\sigma}$ et de la forme de la métrique.

Les symétries générales de $\lambda^{\mu\nu\rho\sigma}$ sont les suivantes[958] :

1) $\lambda^{\mu\nu\rho\sigma} = -\lambda^{\mu\rho\nu\sigma}$,

2) $\lambda^{\mu\nu\rho\sigma} = -\lambda^{\sigma\nu\rho\mu}$,

3) $\lambda^{\mu\nu\rho\sigma} = \lambda^{\sigma\rho\nu\mu} = \lambda^{\nu\mu\sigma\rho} = \lambda^{\rho\sigma\mu\nu}$,

4) $\lambda^{\mu\nu\rho\sigma}+\lambda^{\mu\rho\sigma\nu}+\lambda^{\mu\sigma\nu\rho} = 0$.

Composantes de $\lambda^{\mu\nu\rho\sigma}$ non identiquement nulles

En vertu des symétries, les composantes suivantes ne sont pas identiquement nulles.

a) $\lambda^{00ii} = \lambda^{ii00} = -\lambda^{0i0i} = \lambda^{i0i0}$, soit *3* valeurs possibles *[3*] x 4* occurrences = *12* composantes.

b) $\lambda^{0iji} = \lambda^{ji0i} = \lambda^{i0ij} = \lambda^{iji0} = -\lambda^{0jii} = \lambda^{j0ii} = \lambda^{ii0j} = \lambda^{iij0}$, où $i \neq j$ soit *6* valeurs *[6*] x 8* occurrences = *48* composantes.

c) $\lambda^{ijik} = \lambda^{kiji} = -\lambda^{iijk} = \lambda^{kjii}$, avec $i \neq j \neq k$ soit *6* valeurs *[3*] x 4* occurrences = *24* composantes.

d) $\lambda^{iijj} = -\lambda^{ijij}$, avec $i \neq j$ soit *6* valeurs *[3*] x 2* occurrences = *12* composantes.

e) $\lambda^{(\mu\nu\rho\sigma)}$ $(\mu\nu\rho\sigma)$ désigne les permutations de la suite "*0123*" soit *24* valeurs *[2*]* et *24* composantes.

f) $\lambda^{00ij} = -\lambda^{0i0j}$, $\lambda^{ij00} = -\lambda^{i0j0}$ avec $i \neq j$ soit *6* valeurs *[3*]* et *24* composantes.

Ces relations ne dépendent pas de la métrique mais sont liées à la forme de $\lambda^{\mu\nu\rho\sigma}$.

Le nombre total d'occurrences non identiquement nulles est de *144*.

Entre crochets, avec une (*), figure le nombre effectif de valeurs différentes (compte tenu de la symétrie du tenseur métrique) et nous voyons que le total vaut *20* (au maximum) comme les symétries, identiques à celles du tenseur de Riemann, nous le laisse escompter.

C'est un nombre maximum, déduit des symétries de l'expression, en effet, les symétries utilisées étant générales à la forme qui ne préjuge pas d'une métrique dans le vide.

[958] Conformément aux usages, dans ce qui suit, les indices spatio-temporels sont dénotés par des lettres grecques et varient de *0* à *3* et les indices spatiaux par des lettres latines et varient de *1* à *3*.

Cette contrainte supplémentaire (nullité du tenseur de Ricci, trace du tenseur de Riemann) peut réduire le nombre de composantes de valeurs indépendantes.

Composantes de $\lambda^{\mu\nu\rho\sigma}$ identiquement nulles

En vertu des antisymétries, les composantes suivantes sont identiquement nulles.

a)	$\lambda^{\mu\mu\mu\mu} = 0,$	soit *4* composantes.
b)	$\lambda^{\mu\nu\mu\mu} = 0,\ \lambda^{\mu\mu\nu\mu} = 0,\ \lambda^{\mu\mu\mu\nu} = 0,\ \lambda^{\nu\mu\mu\mu} = 0,$	soit *4x4x3=48* composantes
c)	$\lambda^{\mu\nu\rho\mu} = 0,$	soit *4 x 9 = 36* nouvelles composantes.
d)	$\Lambda^{\mu\nu\nu\sigma} = 0,$	soit *4 x 6 = 24* nouvelles composantes.

Soit *112* composantes. Ajoutées aux *144* composantes précédentes non nulles, cela fait *256*.

Composantes non nulles qu'on peut ignorer dans le cas d'une métrique stationnaire

Rappelons qu'une analyse préliminaire à propos de l'intérêt de la forme de la métrique inverse nous avait amené à séparer la partie purement spatiale λ^{ijkl} de $\lambda^{\mu\nu\rho\sigma}$ du reste.

Nous avions fait remarquer que dans ce cas, où la dérivée par rapport au temps est nulle, comme on fait une dérivation sur les deux derniers indices, on sait que les composantes du type

$$\lambda^{\mu\nu\rho 0} \text{ et } \lambda^{\mu\nu 0\sigma},$$

ne seront pas prises en compte dans le calcul final de $t^{\mu\nu}$ et qu'on peut les ignorer.

On peut donc minorer le nombre de composantes utiles dans ce calcul et ne garder que :

a) λ^{00ii}, soit 3 valeurs possibles = 3 composantes.	
b) $\lambda^{0iji} = \lambda^{i0ij} = -\lambda^{0jii} = \lambda^{j0ii}$ où $i \neq j$,	24 composantes.
c) $\lambda^{ijik} = \lambda^{kiji} = -\lambda^{iijk} = \lambda^{kjii}$, avec $i \neq j \neq k,$	24 composantes.
d) $\lambda^{iijj} = -\lambda^{ijij}$, avec $i \neq j,$	12 composantes.
e) $\lambda^{(\mu\nu\rho\sigma)}$ *,*$(\mu\nu\rho\sigma),$ permutations de la suite "0123" $\neq$ de $\mu\nu 0\sigma$ et $\mu\nu\rho 0,$	12 composantes.
f) λ^{00ij} avec $i \neq j,$	6 composantes.

Dans ce cas il ne reste alors que 81 composantes (*9x9*), au lieu de 144, à prendre en compte dans le calcul et 20 valeurs différentes dont 6 pour les composantes purement spatiales.

Dans ces 81 composantes les cas *c)* et *d)* soit 36 composantes sont purement spatiales et doivent être traitées indépendamment des 45 composantes mixtes cas *a), b), e), f).*

Composantes nulles spécifiquement dans la forme de Painlevé

Mais certaines composantes qui ne sont pas identiquement nulles peuvent être nulles dans une forme de métrique particulière.

Pour la forme de Painlevé, par exemple, on a :

e) $\lambda^{(\mu\nu\rho\sigma)} = 0$ $(\mu\nu\rho\sigma)$ désigne les permutations de la suite "0123" soit 24 composantes.

f) $\lambda^{00ij} = -\lambda^{0i0j}$, $\lambda^{ij00} = -\lambda^{i0j0}$ avec $i \neq j$ soit 24 composantes de plus différentes.

Mais notons, qu'en fait, le gain est plus faible, car parmi ces composantes nulles certaines n'étaient pas à prendre en compte.

La forme tétradique pour révéler la structure du pseudo-tenseur.

Pour révéler la structure du pseudo-tenseur, représentons la métrique inverse sous la forme "tétradique" (voir chapitre *16*) avec les conventions habituelles sur les indices grecs et latins :

$$g^{\mu\nu} = \eta^{mn} e_m{}^\mu e_n{}^\nu \rightarrow g^{\mu\nu} = -e_0{}^\mu e_0{}^\nu + \delta^{ji} e_i{}^\mu e_j{}^\nu$$

Où δ^{ji} est la métrique spatiale euclidienne soit : $\delta^{ji} e_i{}^\mu e_j{}^\nu = \delta^{ii} e_i{}^\mu e_i{}^\nu = e_1{}^\mu e_1{}^\nu + e_2{}^\mu e_2{}^\nu + e_3{}^\mu e_3{}^\nu$,

L'équation pour chaque élément $t^{\mu\nu}$ de ce pseudo-tenseur est donnée par *(19-12)*.

$$t^{\mu\nu} = \partial^2{}_t[(-g)(g^{\mu\nu} g^{tt} - g^{\mu t} g^{\nu t})] + \partial^2{}_x[(-g)(g^{\mu\nu} g^{xx} - g^{\mu x} g^{\nu x})] + \partial^2{}_y[(-g)(g^{\mu\nu} g^{yy} - g^{\mu y} g^{\nu y})] + \partial^2{}_z[(-g)(g^{\mu\nu} g^{zz} - g^{\mu z} g^{\nu z})] + \partial_x\partial_t[(-g)(g^{\mu\nu} g^{xt} - g^{\mu x} g^{\nu t}] + \partial_y\partial_t[(-g)(g^{\mu\nu} g^{yt} - g^{\mu y} g^{\nu t})] + \partial_z\partial_t[(-g)(g^{\mu\nu} g^{zt} - g^{\mu z} g^{\nu t})] + \partial_t\partial_x[(-g)(g^{\mu\nu} g^{tx} - g^{\mu t} g^{\nu x}] + \partial_t\partial_y[(-g)(g^{\mu\nu} g^{ty} - g^{\mu t} g^{\nu y})] + \partial_t\partial_z[(-g)(g^{\mu\nu} g^{tz} - g^{\mu t} g^{\nu z})] + \partial_x\partial_y[(-g)(g^{\mu\nu} g^{xy} - g^{\mu x} g^{\nu y})] + \partial_x\partial_z[(-g)(g^{\mu\nu} g^{xz} - g^{\mu x} g^{\nu z})] + \partial_y\partial_z[(-g)(g^{\mu\nu} g^{yz} - g^{\mu y} g^{\nu z})] + \partial_y\partial_x[(-g)(g^{\mu\nu} g^{yx} - g^{\mu y} g^{\nu x})] + \partial_z\partial_x[(-g)(g^{\mu\nu} g^{zx} - g^{\mu z} g^{\nu x})] + \partial_z\partial_y[(-g)(g^{\mu\nu} g^{zy} - g^{\mu z} g^{\nu y})] = 0.$$

En utilisant le symbolisme, $\delta_j{}^i e_i{}^\mu e_i{}^\nu = e_1{}^\mu e_1{}^\nu + e_2{}^\mu e_2{}^\nu + e_3{}^\mu e_3{}^\nu$, en développant, pour une composante quelconque $t^{\mu\nu}$, on obtient :

$$t^{\mu\nu} = \partial_\rho\partial_\sigma\{-g([-e_0{}^\mu e_0{}^\nu + \delta_j{}^i e_i{}^\mu e_i{}^\nu)][-e_0{}^\rho e_0{}^\sigma + \delta_j{}^k e_k{}^\rho e_k{}^\sigma] - [-e_0{}^\mu e_0{}^\rho + \delta_j{}^i e_i{}^\mu e_i{}^\rho)][-e_0{}^\nu e_0{}^\sigma + \delta_j{}^k e_k{}^\nu e_k{}^\sigma])\}$$

En développant la sommation sur les indices spatiaux *i* et *k,* cela s'écrit :

$$t^{\mu\nu} = \partial_\rho\partial_\sigma\{-g\{(e_0{}^\mu e_0{}^\nu + [e_1{}^\mu e_1{}^\nu + e_2{}^\mu e_2{}^\nu + e_3{}^\mu e_3{}^\nu])(e_0{}^\rho e_0{}^\sigma + [e_1{}^\rho e_1{}^\sigma + e_2{}^\rho e_2{}^\sigma + e_3{}^\rho e_3{}^\sigma]) - (e_0{}^\mu e_0{}^\rho [e_1{}^\mu e_1{}^\rho + e_2{}^\mu e_2{}^\rho + e_3{}^\mu e_3{}^\rho])(e_0{}^\nu e_0{}^\sigma + [e_1{}^\nu e_1{}^\sigma + e_2{}^\nu e_2{}^\sigma + e_3{}^\nu e_3{}^\sigma])\}\} = 0.$$

En développant, simplifiant et factorisant l'équation on peut la mettre sous la forme générique

$t^{\mu\nu} = \partial_\rho\partial_\sigma\{-g\{[e_1{}^\nu e_2{}^\rho - e_1{}^\rho e_2{}^\nu][e_1{}^\mu e_2{}^\sigma - e_2{}^\mu e_1{}^\sigma]) + [e_1{}^\nu e_3{}^\rho - e_1{}^\rho e_3{}^\nu][e_1{}^\mu e_3{}^\sigma - e_3{}^\mu e_1{}^\sigma]) + [e_2{}^\nu e_3{}^\rho - e_2{}^\rho e_3{}^\nu]$
$[e_2{}^\mu e_3{}^\sigma - e_3{}^\mu e_2{}^\sigma] + [e_1{}^\nu e_0{}^\rho - e_1{}^\rho e_0{}^\nu][e_0{}^\mu e_1{}^\sigma - e_1{}^\mu e_0{}^\sigma]) + [e_2{}^\nu e_0{}^\rho - e_2{}^\rho e_0{}^\nu][e_0{}^\mu e_2{}^\sigma - e_2{}^\mu e_0{}^\sigma]) + [e_3{}^\nu e_0{}^\rho - e_3{}^\rho e_0{}^\nu$
$][e_0{}^\mu e_3{}^\sigma - e_3{}^\mu e_0{}^\sigma]\}\} = 0,$

où les antisymétries sont évidentes.

Nous avons montré que 124 valeurs de $\lambda^{\mu\nu\rho\sigma}$ sont nulles.

Par ailleurs, l'expression de la divergence ci-dessus montre que pour une composante quelconque $\mu\nu$, lorsque $\sigma = \mu$ ou $\rho = \nu$, l'expression générique est nulle.

Ceci limite à trois le nombre de "termes" non nuls pour chaque divergence.

Ce qui peut s'écrire

$$t^{\mu\nu} = \partial_\beta[\partial_\alpha(\lambda^{\mu\nu\beta\alpha})],$$

où $\alpha \neq \mu$ et $\beta \neq \nu$ ne prennent que 3 valeurs notées *a, a', a "* et *b, b', b"* parmi [*0, 1, 2, 3*], qu'on associe aux composantes de vecteurs tridimensionnels *V(i),* qui comme nous l'avons exposé dans le corpus scientifique, doivent être le rotationnel de vecteurs spatiaux *W(i)*.

Le calcul, ci-dessous, montre que chaque composante est une expression assez complexe dont la résolution ne paraît pas évidente. On remarque que leur expression ne diffère que par la valeur de l'indice *b*. Des propriétés plus générales de symétries vont peut-être nous indiquer quelles contraintes doivent s'appliquer pour que la condition soit satisfaite.

En développant, cela donne pour un couple de valeurs de μ, ν donné, les trois composantes suivantes :

$V(_1) = h^{\mu\nu b} = \partial_a\{-g\{[e_1{}^\nu e_2{}^b - e_1{}^b e_2{}^\nu][e_1{}^\mu e_2{}^a - e_2{}^\mu e_1{}^a]) + [e_1{}^\nu e_3{}^b - e_1{}^b e_3{}^\nu][e_1{}^\mu e_3{}^a - e_3{}^\mu e_1{}^a]) + [e_2{}^\nu e_3{}^b - e_2{}^b e_3{}^\nu][e_2{}^\mu e_3{}^a -$
$e_3{}^\mu e_2{}^a] + [e_1{}^\nu e_0{}^b - e_1{}^b e_0{}^\nu][e_0{}^\mu e_1{}^a - e_1{}^\mu e_0{}^a]) + [e_2{}^\nu e_0{}^b - e_2{}^b e_0{}^\nu][e_0{}^\mu e_2{}^a - e_2{}^\mu e_0{}^a]) + [e_3{}^\nu e_0{}^b - e_3{}^b e_0{}^\nu][e_0{}^\mu e_3{}^a - e_3{}^\mu e_0{}^a]\}$
$+\partial_{a'}\{-g\{[e_1{}^\nu e_2{}^b - e_1{}^b e_2{}^\nu][e_1{}^\mu e_2{}^{a'} - e_2{}^\mu e_1{}^{a'}]) + [e_1{}^\nu e_3{}^b - e_1{}^b e_3{}^\nu][e_1{}^\mu e_3{}^{a'} - e_3{}^\mu e_1{}^{a'}]) + [e_2{}^\nu e_3{}^b - e_2{}^b e_3{}^\nu][e_2{}^\mu e_3{}^{a'} - e_3{}^\mu e_2{}^{a'}] -$
$[e_1{}^\nu e_0{}^b - e_1{}^b e_0{}^\nu][e_0{}^\mu e_1{}^{a'} - e_1{}^\mu e_0{}^{a'}]) + [e_2{}^\nu e_0{}^b - e_2{}^b e_0{}^\nu][e_0{}^\mu e_2{}^{a'} - e_2{}^\mu e_0{}^{a'}]) + [e_3{}^\nu e_0{}^b - e_3{}^b e_0{}^\nu][e_0{}^\mu e_3{}^{a'} - e_3{}^\mu e_0{}^{a'}]\}$
$-+\partial_{a''}\{-g\{[e_1{}^\nu e_2{}^b - e_1{}^b e_2{}^\nu][e_1{}^\mu e_2{}^{a''} - e_2{}^\mu e_1{}^{a''}]) + [e_1{}^\nu e_3{}^b - e_1{}^b e_3{}^\nu][e_1{}^\mu e_3{}^{a''} - e_3{}^\mu e_1{}^{a''}]) + [e_2{}^\nu e_3{}^b - e_2{}^b e_3{}^\nu][e_2{}^\mu e_3{}^{a''} - e_3{}^\mu e_2{}^{a''}] +$
$[e_1{}^\nu e_0{}^b - e_1{}^b e_0{}^\nu][e_0{}^\mu e_1{}^{a''} - e_1{}^\mu e_0{}^{a''}]) + [e_2{}^\nu e_0{}^b - e_2{}^b e_0{}^\nu][e_0{}^\mu e_2{}^{a''} - e_2{}^\mu e_0{}^{a''}]) + [e_3{}^\nu e_0{}^b - e_3{}^b e_0{}^\nu][e_0{}^\mu e_3{}^{a''} - e_3{}^\mu e_0{}^{a''}]\}$

$V(_2) = h^{\mu\nu b'} = \partial_a\{-g\{[e_1{}^\nu e_2{}^{b'} - e_1{}^{b'} e_2{}^\nu][e_1{}^\mu e_2{}^a - e_2{}^\mu e_1{}^a]) + [e_1{}^\nu e_3{}^{b'} - e_1{}^{b'} e_3{}^\nu][e_1{}^\mu e_3{}^a - e_3{}^\mu e_1{}^a]) + [e_2{}^\nu e_3{}^{b'} - e_2{}^{b'} e_3{}^\nu][e_2{}^\mu e_3{}^a -$
$e_3{}^\mu e_2{}^a] + [e_1{}^\nu e_0{}^{b'} - e_1{}^{b'} e_0{}^\nu][e_0{}^\mu e_1{}^a - e_1{}^\mu e_0{}^a]) + [e_2{}^\nu e_0{}^{b'} - e_2{}^{b'} e_0{}^\nu][e_0{}^\mu e_2{}^a - e_2{}^\mu e_0{}^a]) + [e_3{}^\nu e_0{}^{b'} - e_3{}^{b'} e_0{}^\nu][e_0{}^\mu e_3{}^a - e_3{}^\mu e_0{}^a]\}$
$+\partial_{a'}\{-g\{[e_1{}^\nu e_2{}^{b'} - e_1{}^{b'} e_2{}^\nu][e_1{}^\mu e_2{}^{a'} - e_2{}^\mu e_1{}^{a'}]) + [e_1{}^\nu e_3{}^{b'} - e_1{}^{b'} e_3{}^\nu][e_1{}^\mu e_3{}^{a'} - e_3{}^\mu e_1{}^{a'}]) + [e_2{}^\nu e_3{}^{b'} - e_2{}^{b'} e_3{}^\nu][e_2{}^\mu e_3{}^{a'} - e_3{}^\mu e_2{}^{a'}] -$
$[e_1{}^\nu e_0{}^{b'} - e_1{}^{b'} e_0{}^\nu][e_0{}^\mu e_1{}^{a'} - e_1{}^\mu e_0{}^{a'}]) + [e_2{}^\nu e_0{}^{b'} - e_2{}^{b'} e_0{}^\nu][e_0{}^\mu e_2{}^{a'} - e_2{}^\mu e_0{}^{a'}]) + [e_3{}^\nu e_0{}^{b'} - e_3{}^{b'} e_0{}^\nu][e_0{}^\mu e_3{}^{a'} - e_3{}^\mu e_0{}^{a'}]\}$
$+\partial_{a''}\{-g\{[e_1{}^\nu e_2{}^{b'} - e_1{}^{b'} e_2{}^\nu][e_1{}^\mu e_2{}^{a''} - e_2{}^\mu e_1{}^{a''}]) + [e_1{}^\nu e_3{}^{b'} - e_1{}^{b'} e_3{}^\nu][e_1{}^\mu e_3{}^{a''} - e_3{}^\mu e_1{}^{a''}]) + [e_2{}^\nu e_3{}^{b'} - e_2{}^{b'} e_3{}^\nu][e_2{}^\mu e_3{}^{a''} - e_3{}^\mu e_2{}^{a''}] +$
$[e_1{}^\nu e_0{}^{b'} - e_1{}^{b'} e_0{}^\nu][e_0{}^\mu e_1{}^{a''} - e_1{}^\mu e_0{}^{a''}]) + [e_2{}^\nu e_0{}^{b'} - e_2{}^{b'} e_0{}^\nu][e_0{}^\mu e_2{}^{a''} - e_2{}^\mu e_0{}^{a''}]) + [e_3{}^\nu e_0{}^{b'} - e_3{}^{b'} e_0{}^\nu][e_0{}^\mu e_3{}^{a''} - e_3{}^\mu e_0{}^{a''}]\}$

$V(_3) = h^{\mu\nu b''} = \partial_a\{-g\{[e_1{}^\nu e_2{}^{b''} - e_1{}^{b''} e_2{}^\nu][e_1{}^\mu e_2{}^a - e_2{}^\mu e_1{}^a]) + [e_1{}^\nu e_3{}^{b''} - e_1{}^{b''} e_3{}^\nu][e_1{}^\mu e_3{}^a - e_3{}^\mu e_1{}^a]) + [e_2{}^\nu e_3{}^{b''} - e_2{}^{b''} e_3{}^\nu][e_2{}^\mu e_3{}^a -$
$e_3{}^\mu e_2{}^a] + [e_1{}^\nu e_0{}^{b''} - e_1{}^{b''} e_0{}^\nu][e_0{}^\mu e_1{}^a - e_1{}^\mu e_0{}^a]) + [e_2{}^\nu e_0{}^{b''} - e_2{}^{b''} e_0{}^\nu][e_0{}^\mu e_2{}^a - e_2{}^\mu e_0{}^a]) + [e_3{}^\nu e_0{}^{b''} - e_3{}^{b''} e_0{}^\nu][e_0{}^\mu e_3{}^a - e_3{}^\mu e_0{}^a]\}$
$+\partial_{a'}\{-g\{[e_1{}^\nu e_2{}^{b''} - e_1{}^{b''} e_2{}^\nu][e_1{}^\mu e_2{}^{a'} - e_2{}^\mu e_1{}^{a'}]) + [e_1{}^\nu e_3{}^{b''} - e_1{}^{b''} e_3{}^\nu][e_1{}^\mu e_3{}^{a'} - e_3{}^\mu e_1{}^{a'}]) + [e_2{}^\nu e_3{}^{b''} - e_2{}^{b''} e_3{}^\nu][e_2{}^\mu e_3{}^{a'} - e_3{}^\mu e_2{}^{a'}] -$
$[e_1{}^\nu e_0{}^{b''} - e_1{}^{b''} e_0{}^\nu][e_0{}^\mu e_1{}^{a'} - e_1{}^\mu e_0{}^{a'}]) + [e_2{}^\nu e_0{}^{b''} - e_2{}^{b''} e_0{}^\nu][e_0{}^\mu e_2{}^{a'} - e_2{}^\mu e_0{}^{a'}]) + [e_3{}^\nu e_0{}^{b''} - e_3{}^{b''} e_0{}^\nu][e_0{}^\mu e_3{}^{a'} - e_3{}^\mu e_0{}^{a'}]\}$
$+\partial_{a''}\{-g\{[e_1{}^\nu e_2{}^{b''} - e_1{}^{b''} e_2{}^\nu][e_1{}^\mu e_2{}^{a''} - e_2{}^\mu e_1{}^{a''}]) + [e_1{}^\nu e_3{}^{b''} - e_1{}^{b''} e_3{}^\nu][e_1{}^\mu e_3{}^{a''} - e_3{}^\mu e_1{}^{a''}]) + [e_2{}^\nu e_3{}^{b''} - e_2{}^{b''} e_3{}^\nu][e_2{}^\mu e_3{}^{a''} - e_3{}^\mu e_2{}^{a''}] +$
$[e_1{}^\nu e_0{}^{b''} - e_1{}^{b''} e_0{}^\nu][e_0{}^\mu e_1{}^{a''} - e_1{}^\mu e_0{}^{a''}]) + [e_2{}^\nu e_0{}^{b''} - e_2{}^{b''} e_0{}^\nu][e_0{}^\mu e_2{}^{a''} - e_2{}^\mu e_0{}^{a''}]) + [e_3{}^\nu e_0{}^{b''} - e_3{}^{b''} e_0{}^\nu][e_0{}^\mu e_3{}^{a''} - e_3{}^\mu e_0{}^{a''}]\}.$

Pour que la deuxième divergence (sur l'indice *b*) soit nulle il suffit que le résultat de la première divergence (sur l'indice *a*) donne une forme de rotationnel.

Une condition de nullité de la composante $t^{\mu\nu}$ du pseudo-tenseur va donc consister à trouver trois vecteurs *W(i)* dont les vecteurs *V(i)* sont les rotationnels.

C'est donc à cette condition que nous allons nous s'attacher.

On note que la forme des équations pour chaque composante est similaire et que si on trouve une solution pour l'une les autres s'en déduiront simplement. Cette forme va simplifier l'expression $\partial_\rho [\partial_\sigma (\lambda^{\mu\nu\rho\sigma})]$et va être très utile dans notre démonstration.

La partie symétrique du tenseur λ caractérise-t-elle la nullité du pseudo-tenseur ?

Décomposition du tenseur en une partie symétrique et une partie antisymétrique

On sait qu'un tenseur peut être décomposé (sur des indices spécifiés) en un tenseur symétrique noté avec un indice *s* et un tenseur antisymétrique noté avec un indice *a*, dans notre cas, sur les deux derniers indices $\rho\sigma$ de $\lambda^{\mu\nu\rho\sigma}$ cela donne :

$$\lambda^{\mu\nu\rho\sigma} = \lambda_s^{\mu\nu\rho\sigma} + \lambda_a^{\mu\nu\rho\sigma} \text{ avec } \lambda_s^{\mu\nu\rho\sigma} = \tfrac{1}{2}(\lambda^{\mu\nu\rho\sigma} + \lambda^{\mu\nu\sigma\rho}) \text{ et } \lambda_a^{\mu\nu\rho\sigma} = \tfrac{1}{2}(\lambda^{\mu\nu\rho\sigma} - \lambda^{\mu\nu\sigma\rho}).$$

La double dérivée partielle sur deux indices d'une expression antisymétrique, donne formellement un résultat identiquement nul, donc $(\partial_\rho [\partial_\sigma (\lambda_a^{\mu\nu\rho\sigma})] \equiv 0)$, l'information spécifique de nullité de $\partial_\rho [\partial_\sigma (\lambda^{\mu\nu\rho\sigma})]$ est uniquement contenue dans la partie symétrique $(\lambda_s^{\mu\nu\rho\sigma})]$ *de* $\lambda^{\mu\nu\rho\sigma}$, car $\partial_\rho [\partial_\sigma (\lambda_s^{\mu\nu\rho\sigma})]$ n'est pas identiquement nul.

Le pseudo-tenseur obtenu à partir de la partie symétrique du tenseur λ est bien nul

Si on appelle $ts^{\mu\nu}$ le pseudo-tenseur obtenu en effectuant sur $\lambda_s^{\mu\nu\rho\sigma}$ les mêmes opérations[959] que sur $\lambda^{\mu\nu\rho\sigma}$ pour obtenir le tenseur de Landau & Lifchitz, on constate que à un facteur ½ près les valeurs du super potentiel de Freud qui se résument à h^{i0j} et h^{ij0} sont identiques à celles que nous avions trouvées dans le calcul du pseudo-tenseur de Landau & Lifchitz mais qu'ici les valeurs ne sont plus opposées, car $\lambda_s^{\mu\nu\rho\sigma}$ n'est pas antisymétrique sur ses indices $\nu\rho$ mais que cela est sans importance, car comme $\partial_0 h^{ij0} = 0$, on peut ne pas en tenir compte.

Dans ces conditions il n'est pas étonnant de trouver que $ts^{\mu\nu} = 0$.

Forme tétradique du pseudo-tenseur issu de la partie symétrique de λ

Dans le cadre de notre calcul, compte tenu de la forme de $\lambda_s^{\mu\nu\rho\sigma} = \tfrac{1}{2}(\lambda^{\mu\nu\rho\sigma} + \lambda^{\mu\nu\sigma\rho})$, et des calculs précédents effectués, il est évident que la contrainte devient :

$$t^{\mu\nu} = \partial_\rho\partial_\sigma\{-g([-e_0{}^\mu e_0{}^\nu + \delta_j{}^i e_i{}^\mu e_i{}^\nu)][-e_0{}^\rho e_0{}^\sigma + \delta_j{}^k e_k{}^\rho e_k{}^\sigma] - [-e_0{}^\mu e_0{}^\rho + \delta_j{}^i e_i{}^\mu e_i{}^\rho)][-e_0{}^\nu e_0{}^\sigma + \delta_j{}^k e_k{}^\nu e_k{}^{t\sigma}] + [-e_0{}^\mu e_0{}^\nu + \delta_j{}^i e_i{}^\mu e_i{}^\nu)][-e_0{}^\rho e_0{}^\sigma + \delta_j{}^k e_k{}^\rho e_k{}^\sigma] - [-e_0{}^\mu e_0{}^\sigma + \delta_j{}^i e_i{}^\mu e_i{}^\sigma)][-e_0{}^\nu e_0{}^\rho + \delta_j{}^k e_k{}^\nu e_k{}^\rho])\} = 0.$$

Et pour la valeur de $\lambda_s^{\mu\nu\rho\sigma}$, la contrainte

[959] En utilisant Mathematica 4.

$\partial_\rho\partial_\sigma\{-g\{(e_0{}^\mu e_0{}^\nu + [e_1{}^\mu e_1{}^\nu + e_2{}^\mu e_2{}^\nu + e_3{}^\mu e_3{}^\nu])(e_0{}^\rho e_0{}^\sigma + [e_1{}^\rho e_1{}^\sigma + e_2{}^\rho e_2{}^\sigma + e_3{}^\rho e_3{}^\sigma]) - (e_0{}^\mu e_0{}^\rho + [e_1{}^\mu e_1{}^\rho + e_2{}^\mu e_2{}^\rho + e_3{}^\mu e_3{}^\rho])(e_0{}^\nu e_0{}^\sigma + [e_1{}^\nu e_1{}^\sigma + e_2{}^\nu e_2{}^\sigma + e_3{}^\nu e_3{}^\sigma]) + (e_0{}^\mu e_0{}^\nu + [e_1{}^\mu e_1{}^\nu + e_2{}^\mu e_2{}^\nu + e_3{}^\mu e_3{}^\nu])(e_0{}^\rho e_0{}^\sigma + [e_1{}^\rho e_1{}^\sigma + e_2{}^\rho e_2{}^\sigma + e_3{}^\rho e_3{}^\sigma]) - (e_0{}^\mu e_0{}^\sigma + [e_1{}^\mu e_1{}^\sigma + e_2{}^\mu e_2{}^\sigma + e_3{}^\mu e_3{}^\sigma])(e_0{}^\nu e_0{}^\rho + [e_1{}^\nu e_1{}^\rho + e_2{}^\nu e_2{}^\rho + e_3{}^\nu e_3{}^\rho])\}\} = 0,$

devient par la même méthode :

$t^{\mu\nu} = \partial_\rho\partial_\sigma\{-g\{[e_1{}^\nu e_2{}^\rho - e_1{}^\rho e_2{}^\nu][e_1{}^\mu e_2{}^\sigma - e_2{}^\mu e_1{}^\sigma]) + [e_1{}^\nu e_3{}^\rho - e_1{}^\rho e_3{}^\nu][e_1{}^\mu e_3{}^\sigma - e_3{}^\mu e_1{}^\sigma]) + [e_2{}^\nu e_3{}^\rho - e_2{}^\rho e_3{}^\nu][e_2{}^\mu e_3{}^\sigma - e_3{}^\mu e_2{}^\sigma] + [e_1{}^\nu e_2{}^\sigma - e_1{}^\sigma e_2{}^\nu][e_1{}^\mu e_2{}^\rho - e_2{}^\mu e_1{}^\rho]) + [e_1{}^\nu e_3{}^\sigma - e_1{}^\sigma e_3{}^\nu][e_1{}^\mu e_3{}^\rho - e_3{}^\mu e_1{}^\rho]) + [e_2{}^\nu e_3{}^\sigma - e_2{}^\sigma e_3{}^\nu][e_2{}^\mu e_3{}^\rho - e_3{}^\mu e_2{}^\rho] + [e_1{}^\nu e_0{}^\rho - e_1{}^\rho e_0{}^\nu][e_0{}^\mu e_1{}^\sigma - e_1{}^\mu e_0{}^\sigma]) + [e_2{}^\nu e_0{}^\rho - e_2{}^\rho e_0{}^\nu][e_0{}^\mu e_2{}^\sigma - e_2{}^\mu e_0{}^\sigma]) + [e_3{}^\nu e_0{}^\rho - e_3{}^\rho e_0{}^\nu][e_0{}^\mu e_3{}^\sigma - e_3{}^\mu e_0{}^\sigma] + [e_1{}^\nu e_0{}^\sigma - e_1{}^\sigma e_0{}^\nu][e_0{}^\mu e_1{}^\rho - e_1{}^\mu e_0{}^\rho]) + [e_2{}^\nu e_0{}^\sigma - e_2{}^\sigma e_0{}^\nu][e_0{}^\mu e_2{}^\rho - e_2{}^\mu e_0{}^\rho]) + [e_3{}^\nu e_0{}^\sigma - e_3{}^\sigma e_0{}^\nu][e_0{}^\mu e_3{}^\rho - e_3{}^\mu e_0{}^\rho]\}\} = 0.$

Cette expression est symétrique par rapport à σ et ρ et possède un haut degré de symétrie sur d'autres indices (symétrique sur $\mu\nu$).

Chapitre 20

Décalage spectral pour l'observateur de Painlevé dans la forme associée

La forme de la métrique de Painlevé étant stationnaire[960], l'énergie E est conservée sur la géodésique lumière ce qui s'écrit

$$-K_\mu \frac{dx^\mu}{d\lambda} = E, \text{ soit } \qquad \frac{dx^\mu}{d\lambda} = -\frac{E}{K_\mu}. \qquad (20\text{-}2)$$

où K_μ , est un vecteur de Killing dans cette forme, avec :

$$K_\mu = K^\nu g_{\mu\nu}.$$

Comme

$$K^\nu = (1, 0, 0, 0),$$

ceci donne :

$$K_\mu = (K^0 g_{00}, K^0 g_{01}, 0, 0) = (-(1- r_s/r), (r_s/r)^{1/2}, 0, 0).$$

Développons *(20-2) :*

$$E = (1-r_s/r)(dt/d\lambda) - (r_s/r)^{1/2}(dr/d\lambda) = (1-r_s/r)(dt/d\lambda) - (r_s/r)^{1/2}(dt/d\lambda)(dr/dt)$$

$$E = dt/d\lambda[((1-r_s/r)- (r_s/r)^{1/2}(dr/dt)] \qquad (20\text{-}3)$$

Il faut évaluer *dr/dt* pour un rayon lumineux radial[961].

Remarquons que cette manière de calculer la géodésique ne dépend que de la forme de la métrique. En effet dans ce calcul, la fréquence du rayonnement n'est pas concernée.

Rappelons que de la définition du décalage spectral, ce qu'on veut mesurer c'est le décalage entre la fréquence (donc l'énergie) d'un photon émis par un phénomène physique particulier (raie spectrale spécifiée), éventuellement mesurée dans son référentiel d'émission (le "laboratoire" par exemple où on fait cette expérience), et la fréquence de ce même photon mesurée dans un référentiel de réception, un autre "laboratoire" dont un observateur, dans cet autre référentiel, en effectue la mesure.[962]

Puisque nous parlons de référentiels, rappelons que nous évoquons des référentiels associés à des observateurs physiques dans leur "laboratoire", dans lesquels, par définition, ils sont au repos.

On ne peut pas par contre associer de référentiel au photon (où il serait au repos) puisqu'il est indissociable du mouvement.

---

[960]Mais pas statique, du fait de la présence du produit *dt.dr* dans la forme de la métrique.

[961]Qui est géodésique comme toutes les lignes d'univers parcourues par la lumière.

[962]En fait la notion de décalage spectral est plus générale. On peut l'appliquer au décalage entre les mesures faites en B, C, etc par des observateurs respectivement en ces points de la fréquence d'un photon qui aurait été émis en un autre point A, Mais il est plus pédagogique de considérer le phénomène générique à savoir le décalage entre le référentiel d'émission et un référentiel de réception.

Nous supposerons que le référentiel d'émission et celui de réception sont des référentiels associés à des observateurs de Painlevé différents, qui sont localement en chute libre, "co-mobiles" de l'effondrement de l'espace-temps.

Il conviendra de vérifier que les résultats obtenus sont bien conformes à ce que cette phénoménologie laisse entendre.

Les équations du décalage spectral

Pour évaluer *dr/dt,* utilisons la forme de Painlevé :

$$ds^2 = 0 = -(1-r_s/r)dt^2 + 2(r_s/r)^{1/2}(dtdr) + dr^2.$$

En divisant par dt^2 et en résolvant pour *dr/dt* on obtient pour les géodésiques radiales nulles

$$(dr/dt)^2 + 2(r_s/r)^{1/2}(dr/dt) -(1-r_s/r)= 0,$$

dont les racines sont

$$dr/dt = -(r_s/r)^{1/2} \pm [(r_s/r)+(1-r_s/r)]^{1/2} = -(r_s/r)^{1/2} \pm 1,$$

$$dr/dt = -(r_s/r)^{1/2} -1 \qquad \textit{(rayon entrant),}$$
$$dr/dt = -(r_s/r)^{1/2} +1 \qquad \textit{(rayon sortant).}$$

Ce résultat dépend de la coordonnée *r.*

En reportant dans *(20-3),* on obtient deux valeurs (rayons entrants et sortants) :

$$E = dt/d\lambda[((1-r_s/r)- (r_s/r)^{1/2}(-(r_s/r)^{1/2}-1)] = dt/d\lambda[1 + (r_s/r)^{1/2}] \qquad \textit{(rayon entrant),}$$
$$E = dt/d\lambda[((1-r_s/r)- (r_s/r)^{1/2}(-(r_s/r)^{1/2}+1)]= dt/d\lambda[1 - (r_s/r)^{1/2}] \qquad \textit{(rayon sortant).}$$

En supposant que ce sont des observateurs de Painlevé qui font les mesures de fréquence, on peut utiliser l'équation *(20-1)* pour définir la fréquence à partir des équations ci-dessus.

Cela donne :

$$\omega = \frac{dt}{d\lambda} = \frac{E}{1 + (r_s/r)^{1/2}} \qquad \textbf{(rayon entrant)}$$

$$\omega = \frac{dt}{d\lambda} = \frac{E}{1 - (r_s/r)^{1/2}} \qquad \textbf{(rayon sortant)}[963]. \quad \textit{(20-4)}$$

Nous allons calculer le décalage spectral subi par un photon émis à la fréquence ω_1 par un observateur de Painlevé situé en $r = r_1$ et mesuré à une fréquence ω_2 par un autre observateur de Painlevé en r_2.

[963]Attention, les équations (20-4) laissent à penser que la fréquence d'émission dépend de *r.* En fait l'énergie *E* n'a été introduite que pour comparer des mesures de la fréquence en différentes valeurs de la coordonnée *r.*

Décalage spectral : cas du rayon entrant

Dans ce cas $r_1 > r_2$

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{1 + (r_s/r_1)^{1/2}}{1 + (r_s/r_2)^{1/2}} .$$

Dans le cas où $r >> r_s$, cela peut s'écrire :

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} \approx 1 + (r_s/r_1)^{1/2} - (r_s/r_2)^{1/2} .$$

Si le photon est émis à une distance telle que $r_1 \rightarrow \infty$, alors on a :

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = [1 + (r_s/r_2)^{1/2}]^{-1}.$$

Un photon radial entrant révèle un espace-temps en contraction vers la singularité

Si on utilise le paramètre standard z :

$$z = \frac{\lambda_r - \lambda_e}{\lambda_e} = \frac{\lambda_r}{\lambda_e} - 1 = \frac{\lambda_{r2}}{\lambda_{r1}} - 1 = \frac{\omega_1}{\omega_2} - 1 = (r_s/r_2)^{1/2}. \qquad (20\text{-}4bis)$$

Où λ_e est la longueur d'onde émise, λ_r la longueur d'onde reçue et où $(r_s/r_2)^{1/2} = (2GM/r_2)^{1/2}$ est la vitesse newtonienne de l'observateur de Painlevé en r_2.[964]

Décalage spectral : cas du rayon sortant

Calcul du décalage

Dans ce cas $r_2 > r_1$

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{1 - (r_s/r_1)^{1/2}}{1 - (r_s/r_2)^{1/2}} .$$

Dans le cas où $r >> r_s$, cela peut s'écrire :

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = 1 - (r_s/r_1)^{1/2} + (r_s/r_2)^{1/2}.$$

Si le photon est reçu à une distance telle que $r_2 \rightarrow \infty$, alors on a :

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} \approx [1 - (r_s/r_1)^{1/2}].$$

Si on utilise le paramètre standard z :

$$z = \frac{\lambda_r - \lambda_e}{\lambda_e} = \frac{\lambda_r}{\lambda_e} - 1 = \frac{\lambda_{r2}}{\lambda_{r1}} - 1 = \frac{\omega_1}{\omega_2} - 1 = \frac{(r_s/r_2)^{1/2}}{1 - (r_s/r_2)^{1/2}} . \qquad (20\text{-}4ter)$$

[964] Vitesse absolue dans le sens newtonien, relative en relativité restreinte par rapport à celle d'un observateur de Painlevé à l'infini.

Où λ_e est la longueur d'onde émise, λ_r la longueur d'onde reçue et où $(r_s/r_2)^{1/2} = (2GM/r_2)^{1/2}$ est la vitesse newtonienne de l'observateur de Painlevé en r_2.[965]

Décalage spectral pour l'observateur de Schwarzschild dans la forme associée

Quadri-vitesse de l'observateur de Schwarzschild

Appliquons cela maintenant à l'observateur de Schwarzschild[966] dans la forme de Schwarzschild pour ces mêmes géodésiques nulles $x(\lambda)$ cela donne :

$$\frac{dr}{dt} = -1 - \frac{r_s}{r} \qquad \text{(rayon entrant),}$$

$$\frac{dr}{dt} = 1 - \frac{r_s}{r} \qquad \text{(rayon sortant).} \qquad (20\text{-}5)$$

Nous voyons des différences sensibles. Pour $r = r_s$ en particulier, le rayon entrant de *(20-4)* traverse l'horizon ($dr/dt = -2$), alors que celui de *(20-5)* ne le traverse pas ($dr/dt = 0$).

Même si cela est moins flagrant, les comportements des rayons entrants et sortants sont notablement différents, y compris vers les comportements asymptotiques, même lorsqu'ils convergent (par exemple pour $r = \infty$, $r = 1$, ...) vers la même valeur, ils n'y convergent pas au même ordre (Quadratique dans la forme de Schwarzschild par rapport à la forme de Painlevé).

Cela s'explique physiquement par le fait que l'observateur de Painlevé est "en chute libre" (localement inertiel, co-mobile de l'espace-temps en effondrement vers la singularité centrale) alors que celui de Schwarzschild (pour rester statique) est en fait "localement accéléré[967]" par rapport à cet espace-temps en effondrement.

Conservation de l'énergie

Pour le décalage spectral dans la forme de Schwarzschild, pour un observateur statique donc de quadri-vitesse $U^\mu = U^0 = (1 - r_s/r)^{-1/2}$, ce qui donne $U_\mu = U_0 = -(1 - r_s/r)^{1/2}$, avec

$$\omega = - g_{\mu\nu} U^\mu \frac{dx^\nu}{d\lambda} = -U_\mu \frac{dx^\mu}{d\lambda}$$ [968],

et

$$E = -K_\mu \frac{dx^\mu}{d\lambda} = (1 - r_s/r)\frac{dt}{d\lambda}$$,

[965] Vitesse absolue dans le sens newtonien, relative en relativité restreinte par rapport à celle d'un observateur de Painlevé à l'infini.

[966] Comme nous l'avions annoncé lors de la définition de l'observateur de Painlevé, on associe arbitrairement la forme de Schwarzschild à l'observateur statique dit "de Schwarzschild", car dans cette forme sa ligne d'univers de type temps, balisée par son paramètre affin, est orthogonale (mais non géodésique) à la section spatiale à t= *constante*.

[967] Pour rester statique.

[968] Cette relation définit la normalisation du paramètre λ.

où K_μ est le vecteur de Killing associé au temps, le calcul donne :

$$\omega = E.[1 - \underline{r_s}\ ]^{-1/2}.$$
$$r$$

Équations du décalage spectral

Les cas sortants et entrants sont identiques (symétrie du cône de lumière)

Soit avec les mêmes conventions que pour l'observateur de Painlevé :

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{[1 - (r_s/r_1)]^{1/2}}{[1 - (r_s/r_2)]^{1/2}} \quad , \qquad (20\text{-}5bis)$$

Si $r >> r_s$ ceci donne la forme quasi Newtonienne :

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = 1 - \frac{GM}{r_1} + \frac{GM}{r_2}$$

Si $r_1 < r_2$, on est dans le cas lumière sortante : $\omega_2/\omega_1 < 1$, il y a décalage vers le rouge.

Si $r_1 > r_2$, on est dans le cas lumière entrante : $\omega_2/\omega_1 > 1$, il y a décalage vers le bleu.

Composantes du vecteur impulsion du photon entrant en coordonnées de Schwarzschild.

Pour illustrer les calculs que nous avons faits, on peut visualiser graphiquement les décalages spectraux mesurés, en un même point *r,* par les observateurs de Schwarzschild et Painlevé, pour un même photon entrant émis depuis l'infini avec une certaine énergie E (correspondant à une fréquence ω_1), en représentant en *r* les lignes d'univers locales de l'observateur de Schwarzschild (à *r* = constante) et de l'observateur de Painlevé.

On projette la tangente à la géodésique lumière locale sur ces lignes d'univers, ce qui consiste à faire le produit scalaire entre les vecteurs.

Il est géométriquement évident que cette projection donne des résultats différents.

On peut faire cela dans n'importe quel système de coordonnées (nous avons choisi celui de Schwarzschild, le résultat du produit scalaire étant un scalaire invariant relativiste, ce sera représentatif du résultat.

Considérons la situation au point *A,* avec $r_s = 1$ et $E = 1$, il sera facile de transposer au point *B*.

Qualitativement le diagramme 20-5 montre comment et pourquoi l'observateur de Schwarzschild voit un photon plus énergétique que celui de Painlevé qui, dans le référentiel

de Schwarzschild, est animé d'une vitesse dans le même sens que la propagation du photon (il fuit la lumière) causant un effet Doppler de décalage vers le rouge.

Pour aller un peu plus loin, il faut tenir compte de la représentation qui est trompeuse.

En effet, sur la figure *20-5* le vecteur p^μ n'a pas de norme nulle, car la représentation est euclidienne de signature (+, +) alors qu'en Relativité c'est la signature Lorentzienne (-, +) qui s'applique.

Mais nous pouvons considérer que la figure résulte d'une rotation de Wick et il suffira de faire la rotation inverse pour trouver le bon résultat en Relativité.

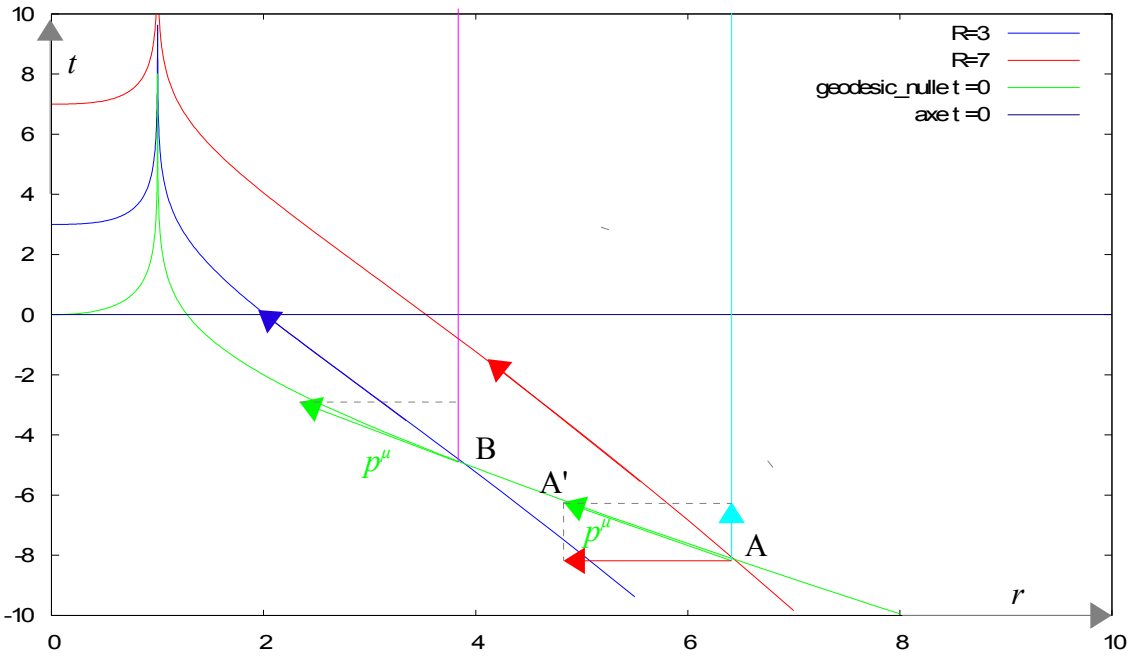


Figure 20.5*. On a tracé, sur un diagramme, avec r_s =1 et E =1, en coordonnées de Schwarzschild deux géodésiques entrantes suivies par deux observateurs de Painlevé, en bleu et rouge, une géodésique lumière entrante en vert clair.*

Aux points A et B, on a représenté deux lignes d'univers d'observateurs de Schwarzschild qui sont des lignes verticales (r = *constante)*.

Jusqu'à la fin du chapitre, pour simplifier, on suppose que $E = 1$ et $r_s = 1$. Le vecteur nul $p^\mu = dx^\mu/d\lambda$ tangent à la géodésique lumière entrante, a pour composante temporelle (énergie) $p^0 = dt/d\lambda = r/(r-1)$, relation qui définit la normalisation de λ.

Sur la figure, cette composante est la projection sur la ligne d'univers de l'observateur de Schwarzschild de quadri-vitesse

$$U_\mu = [-((r-1)/r)^{1/2}, 0, 0, 0] = U_0,$$

définissant ω_S mesuré par cet observateur :

$$\omega_S = -p^\mu U_\mu = -p^0 U_0 = (1-1/r)^{-1/2}.$$

La valeur de cette projection (énergie) $\omega_S = -p^0 U_0$ dépend de r.

Dans ces coordonnées l'observateur de Painlevé a une quadri-vitesse :

$$U_\mu = [-1, -(r^{1/2})/(r-1), 0, 0].$$

Alors $\omega_P = -p^\mu U_\mu$ va donner $\omega = -[p^0 U_0 + p^1 U_1]$.

On peut calculer p^1 par la relation :

$$p^\mu p_\mu = g_{00}(p^0)^2 + g_{11}(p^1)^2 = [-(r-1)/r][p^0]^2 + r/(r-1)[p^1]^2 = 0,$$
$$r/(r-1)[p^1]^2 = [(r-1)/r][p^0]^2 \rightarrow [p^1]^2 = [(r-1)^2/r^2][p^0]^2 \rightarrow [p^1] = \pm[(r-1)/r][p^0].$$

Avec $p^0 = r/(r-1)$ on obtient : $[p^1] = \pm[(r-1)/r][r/(r-1)] = \pm 1$.

On vérifie bien que la composante spatiale de l'impulsion du photon est égale à E (ici $E = 1$).

Choisissons le signe "moins"[969], on a :

$$\omega_P = -p^\mu U_\mu = -[p^0 U_0 + p^1 U_1] = r/(r-1) - [(r^{1/2})/(r-1)] = r^{1/2}(r^{1/2}-1)/(r^{1/2}+1)(r^{1/2}-1) =$$
$$r^{1/2}/(r^{1/2}+1).$$

On retrouve bien les résultats précédents, en particulier que si la lumière a été émise à l'infini avec une énergie de 1, elle est reçue à une distance r de la singularité centrale avec une énergie $r/(r-1)$ supérieure à 1 par un observateur de Schwarzschild mais avec une énergie $r^{1/2}/(r^{1/2}+1)$ inférieure à 1 pour un observateur de Painlevé.

Rappelons que les fréquences sont proportionnelles aux énergies.

Composantes du vecteur impulsion du photon entrant en coordonnées de Painlevé

[969] Ce qui correspond à un vecteur quadri-vitesse (quadri-impulsion) orienté vers les r décroissants, ce qui est notre cas.

Le vecteur nul $p^\mu = dx^\mu/d\lambda$ tangent à la géodésique lumière entrante, a pour composante temporelle (énergie) $p^0 = dt/d\lambda = (r)^{1/2}/(r^{1/2}+1)$, relation qui définit la normalisation de λ.

La projection, sur la ligne d'univers de l'observateur de Painlevé, de quadri-vitesse

$$U_\mu = [-1, 0, 0, 0] = U_0,$$

définit la fréquence ω_P, mesurée par cet observateur :

$$\omega_P = -p^\mu U_\mu = -p^0 U_0 = (r)^{1/2}/(r^{1/2}+1).$$

On peut calculer p^1 par la relation :

$$p^\mu p_\mu = g_{00}(p^0)^2 + g_{11}(p^1)^2 + g_{01}p^0 p^1 = -(r-1)/(r^{1/2}+1)^2 + (p^1)^2 + 2(r^{1/2}+1)p^1 = 0.$$

En développant et en résolvant l'équation on arrive à :

$$p^1 = -1 \pm (r)^{1/2}/(r^{1/2}+1) = -1.$$

En prenant la solution avec le signe moins (géodésique entrante). On retrouve le résultat de la solution de Schwarzschild pour la composante spatiale ce qui est normal puisque les deux formes utilisent la même coordonnée r.

Chapitre 21

Méthode de balisage spatio-temporel physique d'un univers autour d'un corps unique à symétrie sphérique et forme de Painlevé

Dans son argumentation, nous avons vu que Painlevé fait implicitement référence à des référentiels inertiels comme équivalent des référentiels absolus de la mécanique newtonienne. Montrons qu'on peut synchroniser les horloges et définir un balisage spatial physique, de ce type d'univers, dans la forme de Painlevé.

Un référentiel synchronisable doit satisfaire[970] à $g_{0i} = 0$[971].

La forme de Schwarzschild satisfait à ce critère. Si de plus $|g_{00}| = 1$, le temps est le temps propre (ce n'est pas le cas ici).

Un point essentiel, que nous avons analysé au chapitre *11* lorsque nous avons débattu de la nature du caractère non physique des coordonnées en relativité générale, dans un système de coordonnées globales est de définir une correspondance entre ces coordonnées de temps et d'espace définies par la géométrie avec des observables qui sont des mesures physiques de temps et éventuellement d'espace que des observateurs peuvent effectuer dans l'espace-temps balisé par ces coordonnées.

Une l'horloge qui se comporte comme un intégrateur des conditions locales spatio-temporelles (son rythme dépend du champ de gravitation local subi) est l'instrument de métrologie privilégié pour réaliser des mesures. Une méthode a été proposée par Gautreau R & Hoffmann B. en 1978.

Cette méthode est, en théorie, utilisable pour définir un temps propre synchronisé du référentiel associé à la solution au problème du corps central à symétrie sphérique et réaliser un balisage des distances dans ce référentiel. Nous en rappelons ici les lignes essentielles.

La méthode consiste à larguer, sans vitesse initiale, à intervalle de temps local égal, qui peut tendre vers zéro, depuis un point éloigné qui peut tendre vers l'infini, de coordonnées spatiales constante des horloges, toutes synchronisées, numérotées dans l'ordre de largage. Les horloges vont tomber en chute libre sur une géodésique radiale et au bout d'un temps (qui peut tendre vers l'infini) ces horloges vont réaliser une référence physique temporelle (par la valeur indiquée par l'horloge) et spatiale (par le numéro inscrit sur l'horloge) en chaque point.

Ces coordonnées sont celles de la forme de Lemaître si les horloges sont larguées depuis l'infini spatial et ce depuis l'infini temporel du passé.

Ajoutons que si la référence de synchronisation (le point où on largue les horloges tend vers l'infini) alors le champ de gravitation tendant vers zéro, bien que l'observateur soit statique les horloges de l'observateur à l'infini battent la seconde "native".

Sur leur trajectoire inertielle elles vont continuer à battre cette seconde native, ce qui fait qu'on dispose d'une information de temps, donné par les horloges locales en chute libre, qui a un caractère vraiment physique quelle que soit sa position sur la géodésique radiale et traite de façon physique le problème de la synchronisation du référentiel radial entier[972].

[970] Landau & Lifchitz (1994) § 97.

[971] D'après le Landau & Lifchitz, théorie de champs édition 5 p. 371 pour qu'un référentiel soit synchronisable il faut que les termes $g_{0\mu}$ du tenseur métrique soit tous nuls. Ceci n'est pas le cas pour la forme de Painlevé, mais sa forme duale (celle de Lemaître) a cette propriété et comme les temps propres des observateurs de Painlevé et de Lemaître sont les mêmes, cela va nous permettre de réaliser la synchronisation.

[972] Si on essaie d'imaginer une solution de synchronisation d'un "référentiel radial", en utilisant des horloges associées à des observateurs statiques disposés tout au long d'une radiale on voit qu'on se heurte au problème que les horloges ne battent pas au même rythme et que la synchronisation par la méthode des signaux aller-retour ne marche pas en l'état. Il faut la modifier pour tenir compte des différences de rythme (appliquer le facteur correctif en fonction de l'endroit après une procédure de synchronisation initiale avec une horloge maîtresse).. Si

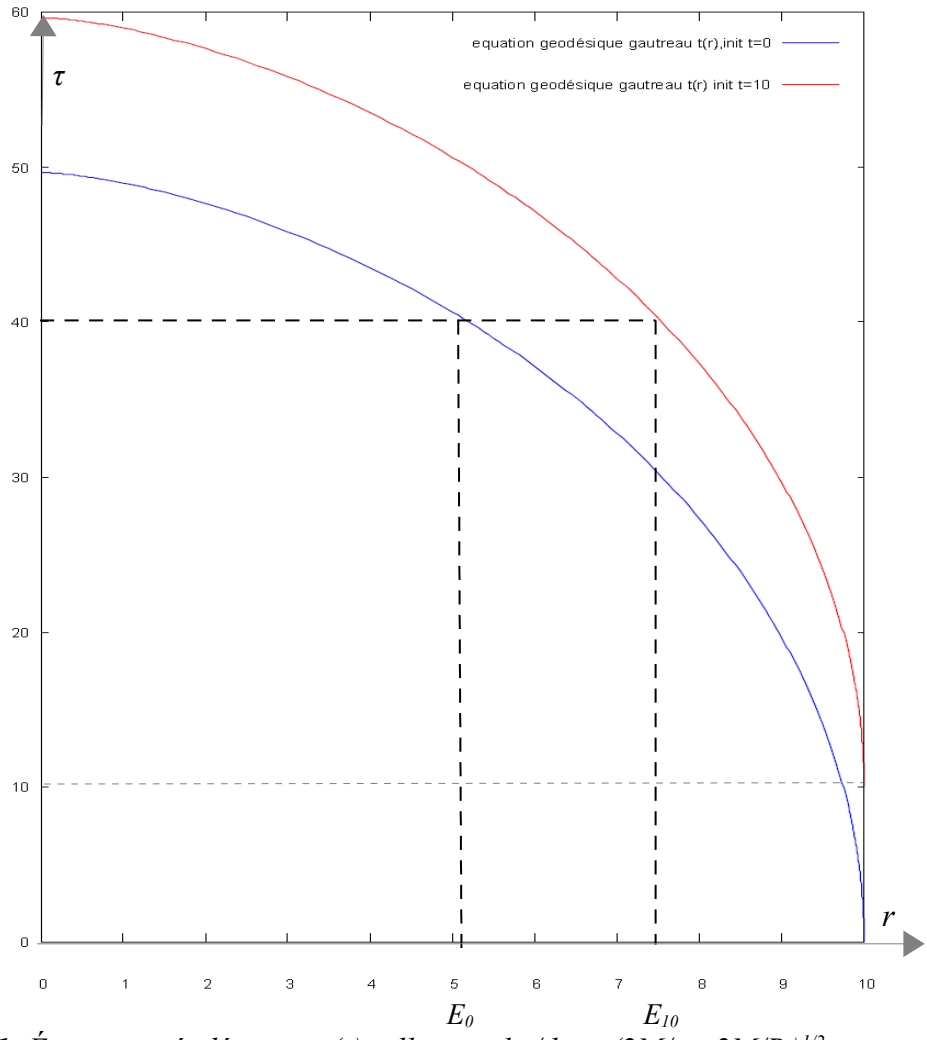


***Figure 21-1**. Équation géodésique τ (r) telle que dr /dτ = (2M/r - 2M/R$_i$)$^{1/2}$ en posant 2M =1 pour R$_i$ =10 et pour deux conditions initiales pour le largage des horloges (τ = 0 et τ =10).*

Ceci définit 2 valeurs de *R1* et *R2* de *r* à τ = *constante* (simultanés, donc une distance spatiale *R2 - R1*).

La courbe bleue correspond à la géodésique suivie par une horloge H_0 larguée à $\tau = 0$, la courbe rouge correspond à une horloge H_{10} larguée à $\tau = 10$.

On a représenté la ligne de simultanéité $\tau = 40$, dont l'intersection avec les courbes bleues et rouges détermine les événements E_0 et E_{10} repérés respectivement par les horloges H_0 ($\tau = 40$, $r \approx 5{,}2$) et H_{10} ($\tau = 40$, $r \approx 7{,}6$) qui indiquent les coordonnées spatio-temporelles.

Ce diagramme montre qu'on peut déduire cette distance propre dans la coordonnée *r*, à condition de connaître le type d'espace-temps (le modèle), la coordonnée $r = R_i$ de largage des horloges, le rythme de largage et la règle de numérotation des horloges.[973]

L'horizontale définit la ligne de simultanéité (les horloges H_0 et H_{10} lâchées à des instants différents, ici décalées de 10 unités du temps propre au point de largage, marquent la même heure). Cette **heure** est une **observable.**

---

une isochrone *t = constante* dans les coordonnées de Schwarzschild est bien définie géométriquement, c'est une autre affaire que d'en faire une réalisation physique avec des horloges associées à des observateurs statiques. Mais cela est possible.

[973]Il faut aussi définir une procédure de communication des observables τ et H_i associées à un événement entre les observateurs pour que le procédé soit opérationnel. Ils doivent pouvoir s'échanger ces informations. Ceci est sujet à des limitations du fait de l'horizon.

La connaissance de la nature de l'espace-temps, de la loi de largage des horloges et de leur **numéro** H_i (qui est une **observable**) permet de déterminer les coordonnées spatiales R_1 et R_2 donc $R_1 - R_2$, comme le montre la figure ci-dessus. La courbe associée à une nouvelle horloge va correspondre à une cette nouvelle coordonnée spatiale H_i constante.

Application au cas cité par Painlevé

Supposons que nous avons synchronisé notre référentiel par la méthode donnée par Gautreau et Hoffmann nécessitant comme d'habitude une armée d'observateurs de Painlevé avec leur horloge sous le bras, comportant un numéro d'ordre de largage, qui ont été largués à intervalle régulier depuis la même position connue de coordonnée *r*.

Les horloges étaient synchrones au point de largage avant leur largage, l'intervalle entre les instants de largage peut tendre vers zéro et la coordonnée de largage vers l'infini. Ainsi le référentiel de Painlevé est balisé physiquement en temps et en espace.

Le numéro d'ordre de largage correspond à la coordonnée spatiale de Lemaître.

Nous savons que la forme de Lemaître et celle de Painlevé ont la même coordonnée temps et que ces deux coordonnées permettent également de déterminer la coordonnée *r* de Painlevé.

Démonstration géométrique simple du redshift d'un photon entrant

Principe de la démonstration

Illustrons cela par le diagramme associé à la forme de la métrique de Lemaître, qui a la même coordonnée *t* que nous noterons τ que celle de Painlevé, les deux formes étant deux variantes d'une même forme comme Lemaître l'a montré [Lemaître G. (1932)].

Rappelons quelques relations de la forme de Lemaître

$$ds^2 = d\tau^2 - \frac{[2\,r_s]^{2/3}}{[3(R-\tau)]^{2/3}}\,dR^2 - r_s^{2/3}[(3/2)(R-\tau)]^{4/3}(d\theta^2 + \sin^2\theta.d\varphi^2), \qquad (21\text{-}1)$$

Avec, $r = [(3/2).\, r_s^{1/2}.(\tau - R)]^{2/3}$. (21-2)

Le diagramme ci-après montre clairement la variation de $\boldsymbol{\tau}$ *e*n fonction de ***r*** sur une géodésique radiale (verticale) caractérisée par R = *constante.*

L'équation des cônes de lumière ($ds^2 = 0$) est donnée par

$$\frac{d\tau}{dR} = \pm \frac{r_s^{1/3}}{[(3/2)(R-\tau)]^{1/3}} = \pm (r_s/r)^{1/2}, \qquad (21\text{-}3)$$

calculés par l'équation *(21-1)* pour $ds^2 = 0$, avec θ = *constante et* φ = *constante.*

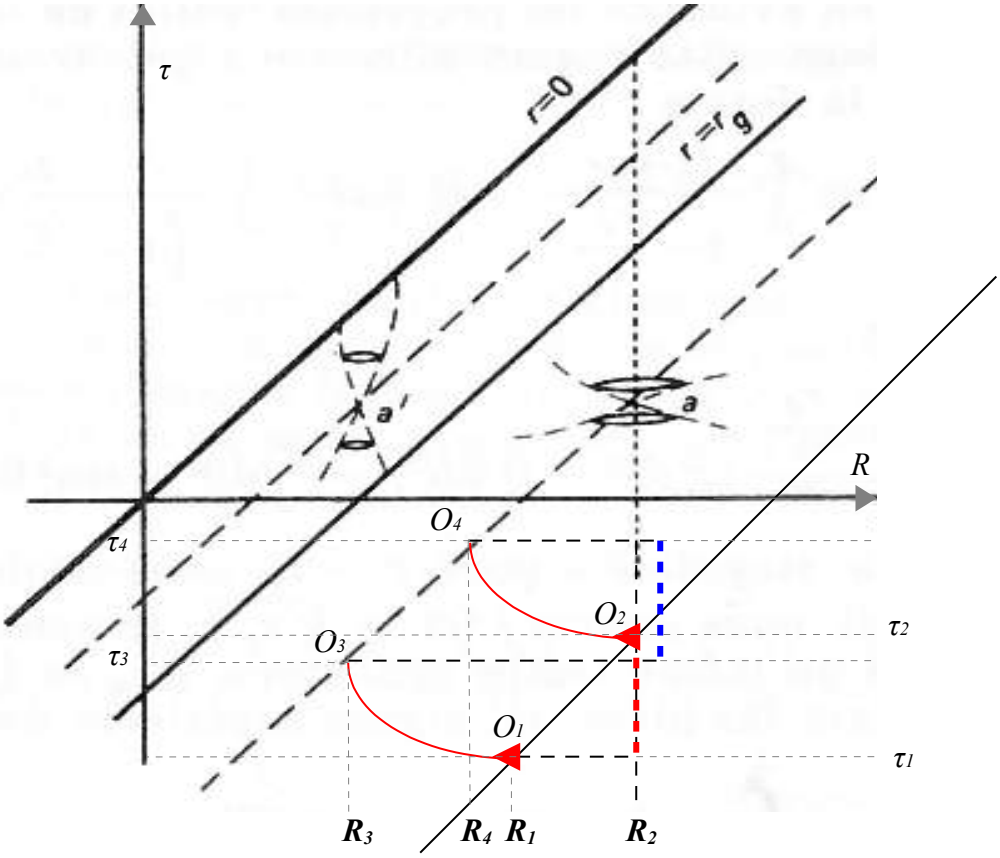


Figure 21-2 *Représentation avec r_s =1, en coordonnées R, τ de l'équation r(R – τ) (pour la région en contraction) dans les coordonnées associées à la forme de Lemaître avec λ = 0.*

La figure représente le réseau de courbes *r = constante*, (ce sont des droites inclinées à +45°) en coordonnées cartésiennes *R, τ*. On notera en particulier *r =r_g* (horizon) et *r =0.*

Sur la figure ci-dessus, les deux courbes en rouge en bas représentent deux géodésiques lumière entrantes, deux éclairs issues du même point (fixe) $r = r_1$ (la courbe $r = r_1$ est représentée par une droite inclinée à 45°), à deux instants différents τ_1,τ_2 séparés à l'émission par un temps $\tau_2 - \tau_1 = \Delta\tau_e$ (coordonnée τ de Painlevé Lemaître) représenté par le segment vertical en pointillé rouge, reliant les origines.

Soulignons que comme la figure ci-dessus le montre, que ce n'est pas le même observateur de Painlevé-Lemaître, la coordonnée *R* étant différente, qui est présent aux points d'émission des deux éclairs, mais il y en a un en chacun des points O_1 (R_1,τ_1) et O_2 (R_2, τ_2) et comme le référentiel est synchronisé (toutes les horloges physiques, qui sont, rappelons-le, en chute libre, à coordonnée τ = constante donc sur une même ligne horizontale, indiquent la même heure), la valeur du temps est non ambiguë.

Elles atteignent un autre point $r = r_2$ (extrémités des courbes pleines rouges représentant les géodésiques) à deux instants différents τ_3 et τ_4 séparés par un temps $\tau_4 - \tau_3 = \Delta\tau_r$, représenté par le segment vertical en pointillé bleus (reçus par 2 autres observateurs, O_3 (R_3, τ_3) et $O_4(R_4,\tau_4)$).

Les deux courbes rouges sont déduites l'une de l'autre par translation dans la direction + 45°, à *r = constante*, et même si la forme de la géodésique (qui ne dépend que de *r*) est assez complexe dans ces coordonnées, compte tenu des symétries de la configuration (invariant par translation dans la direction + *45°*, à *r = cste*), ces courbes sont identiques.

On en déduit que **dans ces conditions de mesure** $\tau_4 - \tau_3 = \tau_2 - \tau_1$ c'est-à-dire qu'il n'y a pas de contraction ou dilatation des durées.[974]

Phénoménologie du décalage spectral d'un photon entrant dans la forme de Painlevé.

Ce diagramme dans la forme de Lemaître, où la géodésique suivie par l'observateur de Painlevé est à coordonnée radiale fixe[975] (droite verticale) permet de mieux visualiser le mouvement de la lumière dans le référentiel de l'observateur de Painlevé que dans un diagramme de Painlevé où à la fois l'observateur de Painlevé et la lumière sont en mouvement.

Nous allons l'utiliser pour illustrer le décalage vers le rouge des photons entrants sur une géodésique radiale dans la forme de Painlevé[976].

L'intégrale $\tau\ (R)$ de l'équation différentielle $d\tau/dR = \pm\ [3(R - \tau)/2r_s]^{-1/3}$ existe[977] mais n'est pas simple à calculer. Mais pour notre démonstration purement géométrique il n'est pas nécessaire de faire le calcul, certaines propriétés, décrites ci-dessous vont suffire.

Les courbes r = *constante* sont des droites toutes parallèles entre elles.
Les courbes représentant les géodésiques nulles se déduisent les unes des autres par une translation parallèle à une droite r = *constante*.
L'équation du cône de lumière vaut : $d\tau/dR = -[3(R - \tau)/2r_s]^{-1/3} = -(rs/r)^{1/2}$.
La droite de pente $d\tau/dR$ se rapproche de la verticale quand r décroît.
Pour le photon géodésique entrant, la pente est négative.

Pour ne pas surcharger la figure *21-2,* nous faisons un zoom de la partie qui nous intéresse (figure *21-3* ci-après).

Dans ces conditions il suffit, sur la figure *21-2*, de prolonger la géodésique O_1O_3 vers la droite jusqu'à ce qu'elle coupe la ligne d'univers (verticale) de l'observateur O_2 en un point O_0 de coordonnée $r\ (O_0) > r\ (O_1)$.

En O_1, de coordonnée $r = r_0$, on trace la tangente à la géodésique nulle: c'est une droite d_0 de pente $-(r_0)^{-1/2}$ qui coupe la verticale issue de R_2 en O'_0.

La géodésique (verticale) suivie par l'observateur O_4 coupe la géodésique nulle O_1O_3 en O_5 de coordonnée r_1.

La droite $r = r_1$ coupe la géodésique nulle O_2O_4 en O_6, où on trace la tangente (droite d_1 de pente $-(r_1)^{-1/2}$) qui coupe la verticale en R_4 en O'_4.

Compte tenu de la courbure de la géodésique nulle O_1O_5 on a $O_2O'_0 > O_2O_0$.

On considère que l'observateur R_2 émet deux éclairs lumineux respectivement en O_0 et O_2, correspondant à deux valeurs $r\ (O_0) > r\ (O_2)$ différentes[978] qui se propagent vers les r décroissants sur les géodésiques nulles $O_0O_1O_5$ et O_2O_4.

[974]Attention! ne pas en déduire que lorsqu'on fait tendre l'intervalle entre les deux éclairs vers zéro, cela prouve qu'il n'y a pas de décalage spectral. Les observateurs émettant (recevant) les 2 éclairs ne sont pas dans le même référentiel. Le paragraphe suivant montrera quel passage à la limite est valide.

[975]Sur un diagramme en coordonnées de Painlevé, à la fois l'observateur de Painlevé et la géodésique lumière sont des fonctions qui dépendent de la coordonnée radiale, ce qui rend la démonstration géométrique un peu moins évidente, mais bien entendu on peut également y faire la même démonstration.

[976]Nous ne traitons pas le cas des photons sortants. Le même type de démonstration peut être utilisé. Rappel $r_s=1$.

[977]Nous pouvons partir de la solution en coordonnées de Painlevé et y substituer $r(\tau, R)$ défini par (21-6-2) mais le résultat $\tau = [3.\ r_s^{1/2}(\tau - R)/2]^{2/3} + ln(\ [3.\ r_s^{1/2}(\tau - R)/2]^{1/3} + 1) + T_0 + \ 2.[3.\ r_s^{1/2}(\tau - R)/2]^{1/3}$ n'est pas très exploitable.

Compte tenu de la courbure de la géodésique nulle O_2O_4 on a $O_5O'_4 < O_5O_4$.

L'arc de géodésique O_2O_6 se déduisant de l'arc de géodésique O_1O_5 par une translation, la figure $O_1O_5\ O_6O_2$ est un parallélogramme.

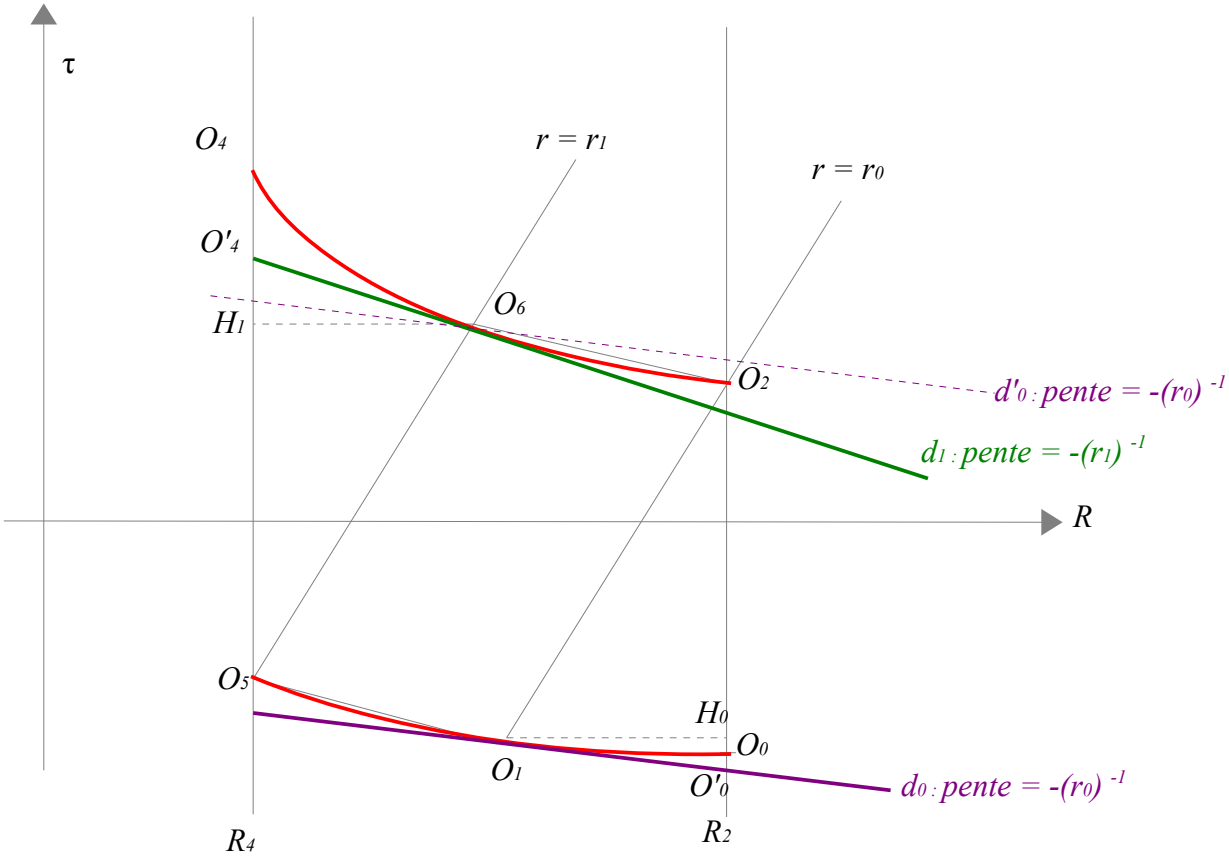


Figure 21-3. *Zoom schématique (avec $r_s = 1$) d'une partie de la figure 21-2, où on a ajouté les éléments que nous utilisons dans cette démonstration. Les arcs de géodésiques sont en rouge.*

On a tracé en O_6 une droite d'_0 parallèle à d_0 pour visualiser la différence de pente.

On a $H_1O_6 = H_0O_1$ et $H_1O_5 = H_0O_2$. Comme $O_5O'_4 = O_5H_1 + H_1O'_4$ et $O_2O'_0 = O_2H_0 + H_0O'_0$ avec $H_1O'_4 = H_1O_6 * |tg(d_1)|$ et $H_0O'_0 = H_0O_1 * |tg(d_0)|$ et que $|tg\ (d_0)| < |tg\ (d_1)|$ en combinant toutes ces expressions on arrive à :

$$O'_0O_2 < O_5O'_4,$$

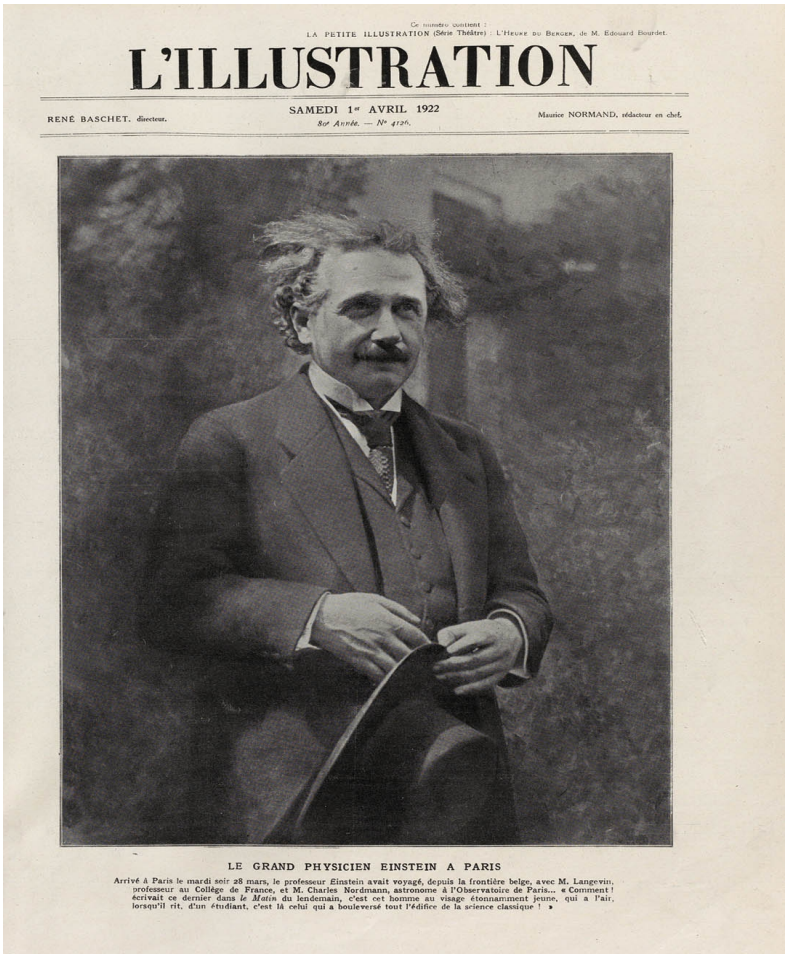
Avec les inégalités précédentes on déduit finalement: $O_5O_4 > O_5O'_4 > O'_0O_2 > O_0O_2$.

Cette dilatation temporelle de la réception par rapport à l'émission caractérise un "décalage vers le rouge".
En passant à la limite en faisant tendre l'intervalle entre les deux éclairs vers zéro, (un seul photon émis), on retombe donc sur la propriété que nous avions énoncée : la lumière sur une géodésique radiale entrante est décalée vers le rouge dans le référentiel d'un observateur de Painlevé.

Notons que c'est bien ce concept de passage à la limite des éclairs qui caractérise physiquement la phénoménologie d'un photon émis et reçu dans le référentiel de Painlevé.

[978]Ce cas est l'inverse du précédent où les éclairs étaient émis à r constant et reçus à r' constant donc par des observateurs différents. Ici, c'est le même observateur qui émet les deux éclairs mais à des valeurs de r différentes (même chose pour la réception).

Annexe 4 : Einstein au Collège de France et à la S. A. F (avril 1922)



Ce numéro contient : LA PETITE ILLUSTRATION (Série Théâtre) : L'Heure du Berger, de M. Edouard Bourdet.

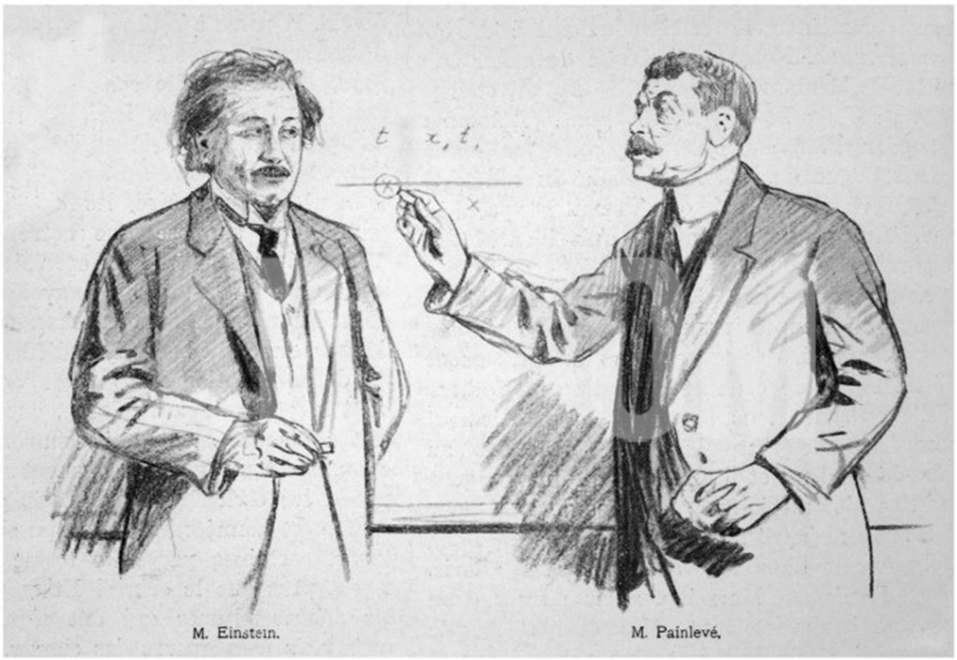
L'ILLUSTRATION

RENÉ BASCHET, directeur. SAMEDI 1er AVRIL 1922 — 80e Année. — N° 4126. — Maurice NORMAND, rédacteur en chef.

LE GRAND PHYSICIEN EINSTEIN A PARIS

Arrivé à Paris le mardi soir 28 mars, le professeur Einstein avait voyagé, depuis la frontière belge, avec M. Langevin, professeur au Collège de France, et M. Charles Nordmann, astronome à l'Observatoire de Paris... « Comment ! écrivait ce dernier dans le *Matin* du lendemain, c'est cet homme au visage étonnamment jeune, qui a l'air, lorsqu'il rit, d'un étudiant, c'est là celui qui a bouleversé tout l'édifice de la science classique ! »

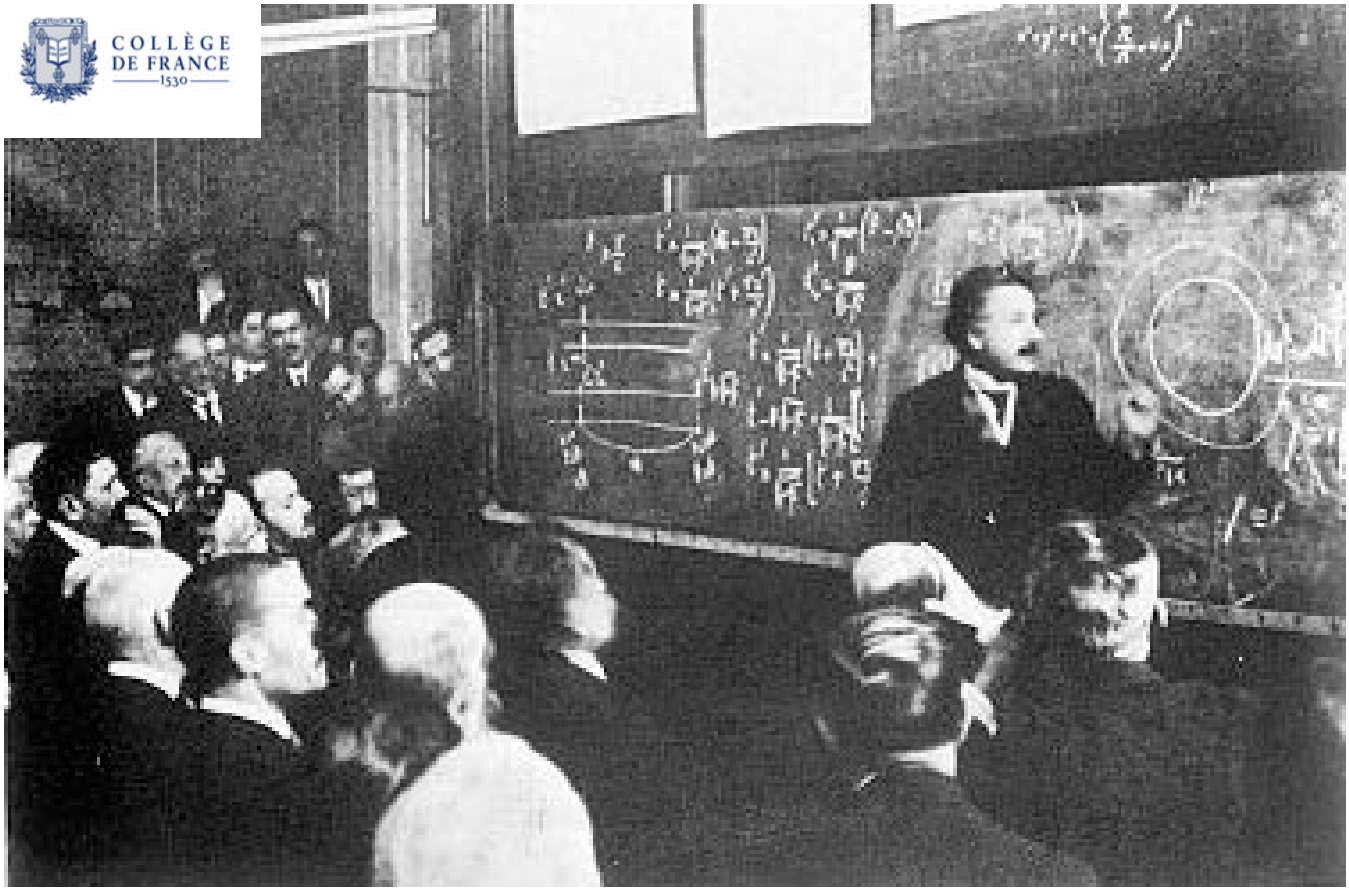
Ci-dessus : Einstein & Langevin. Ci-contre : Einstein & Painlevé, dessin dans l'Illustration. Ci-dessous : Painlevé en 1923



« *Le point culminant de ce différend sur la meilleure solution possible des équations d'Einstein a lieu pendant le voyage d'Einstein à Paris lors de la conférence qu'il donne au Collège de France le 5 avril 1922. Painlevé, aidé de son collègue mathématicien J. Hadamard, ouvre le débat sur la « singularité de Schwarzschild », appelée « catastrophe d' Hadamard » par les participants. Le débat tourne à l'avantage d' Einstein et Painlevé rallie alors son point de vue. D'après «Einstein, un siècle contre lui» de A. Moatti.*

Annexe 4 : Einstein au Collège de France et à la S. A. F (avril 1922)

A la maison des polytechniciens



Au Collège de France

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ ASTRONOMIQUE DE FRANCE

ET

REVUE MENSUELLE

D'ASTRONOMIE, DE MÉTÉOROLOGIE ET DE PHYSIQUE DU GLOBE

Illustré de 204 figures et planches hors-texte

TRENTE-SIXIÈME ANNÉE

SOCIÉTÉ ASTRONOMIQUE DE FRANCE

PARIS

AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ

HOTEL DES SOCIÉTÉS SAVANTES

28, RUE SERPENTE, 28

1922

SOCIÉTÉ ASTRONOMIQUE DE FRANCE

Séance du Mercredi 5 Avril 1922

Présidence de M. le Colonel PAUL RENARD, *membre de Conseil,*

Assisté de MM. J. BOSLER, astronome à l'Observatoire de Paris, secrétaire ; CH.-ED. GUILLAUME, correspondant de l'Institut, directeur du Bureau international des Poids et Mesures ; EMILE BOREL, professeur à l'Université, membre de l'Institut ; LANGEVIN, professeur au Collège de France ; J. BAILLAUD, astronome à l'Observatoire de Paris ; P. SALET, astronome à l'Observatoire de Paris ; H. CHRÉTIEN, professeur à l'Institut d'Optique ; L. D'AZAMBUJA, astronome à l'Obervatoire de Meudon ; F. QUÉNISSET, astronome à l'Observatoire de Juvisy ; ANDRÉ BLOCH, Grand Prix de Rome ; G. FOURNIER, administrateur de l'Observatoire de la Société ; ALBERT CORBET, de la Commission des Finances ; et de plusieurs autres membres du Bureau et du Conseil.

La séance est ouverte à 20^h45^m dans l'amphithéâtre Richelieu, à la Sorbonne, beaucoup trop petit pour contenir tous les sociétaires venus en foule à cette réunion (1)

Extraits du C.R de la séance du 5 avril 1922 concernant l'intervention d'Einstein

M. LE PRÉSIDENT présente les excuses du prince BONAPARTE, président de la Société, qui, empêché, ne peut assister à la séance. Il présente également les excuses de M. EM. BELOT, vice-président, retenu à la chambre par suite d'un refroidissement. M. FLAMMARION est encore en voyage sur la Côte d'Azur.

M. LE PRÉSIDENT est heureux de saluer la présence au bureau du professeur A EINSTEIN, auteur des Théories de la Relativité. (*Applaudissements nombreux et longtemps répétés*).

Le professeur A. EINSTEIN dit quelques mots des **Applications astronomiques de la Relativité.** On sait, dit-il, que les planètes décrivent autour du Soleil des ellipses qui paraissaient fixes dans l'espace. Mais, peu à peu, au fur et à mesure de l'augmentation de précision des observations, et de l'action cumulative du temps, on a reconnu qu'il y a une rotation de l'ellipse. C'est Le Verrier, le premier, qui a signalé cette variation du périhélie pour Mercure. On ne pouvait l'expliquer qu'en faisant des hypothèses peu vraisemblables. La Théorie de la Relativité explique d'une manière parfaite ce déplacement de 45″ par siècle du périhélie de la planète Mercure.

La seconde preuve que l'Astronomie pouvait donner de l'exactitude de la Théorie de la Relativité, c'est la vérification de la courbure de la lumière au voisinage des astres.

On a calculé que la déviation de la lumière au voisinage du Soleil est de l'ordre de 1″. C'est la détermination de cette déviation qui a été entreprise par Eddington au cours de l'éclipse de Soleil de mai 1919 et qu'il a pu vérifier.

Les deux preuves précédentes sont relativement sûres. Il y en a une troisième. La Théorie de la Relativité exige que les phénomènes périodiques, par exemple l'oscillation des atomes donnant lieu aux raies spectrales, soit modifiée dans le voisinage des grandes masses. Autrement dit, la couleur des radiations doit être légèrement modifiée dans ce cas; ainsi les raies spectrales doivent être légèrement déplacées vers le rouge sur le Soleil. Cette conclusion de la Théorie n'a pas encore été complètement vérifiée, car les observateurs ont trouvé des résultats différents.

Ainsi les résultats des expériences de Fabry et Perot et ceux obtenus en Allemagne viennent à l'appui de la Théorie de la Relativité; mais d'autres expérimentateurs ont obtenu des résultats contraires et les discussions sur cette troisième preuve ne sont pas encore closes.

La Théorie de la Relativité qui a demandé à l'Astronomie de lui fournir des vérifications nécessaires peut, à son tour, lui apporter un précieux concours. En effet, inversement, du déplacement du périhélie d'une orbite ou de la valeur du rayon de courbure de la lumière au voisinage des astres, on pourra déterminer la masse de ces astres. On sait combien est importante la détermination des masses en Astronomie. La relation entre les masses et les distances permet en effet d'entrevoir une action très différente de celle qui résulte de la loi de Newton et ce ne sera pas la moindre des conséquences auxquelles aboutit la Théorie de la Relativité.

La communication de M. Einstein a été écoutée dans le plus grand silence, elle est accueillie par des applaudissements qui se prolongent longtemps.

M. LE PRÉSIDENT voudrait adresser ses remerciements à M. Einstein pour les paroles si intéressantes qu'il vient de prononcer. Les applaudissements qui ont suivi sa communication ont devancé ses remerciements, ils expriment bien l'intérêt qu'a suscité la belle Théorie créée par le professeur Einstein. (*Applaudissements*).

M. le professeur LANGEVIN ajoute quelques mots pour compléter les renseignements que vient de donner M. Einstein.

La Théorie de la Relativité ouvre des horizons nouveaux sur les questions cosmogoniques qui concernent l'ensemble de l'Univers.

Parmi les résultats qu'Einstein a obtenus, il trouve qu'à côté des masses considérables on constate un accroissement de la masse des corps voisins. Ainsi un corps voisin du Soleil aura une inertie un peu plus grande que lorsqu'il en est éloigné. Il a donc paru à Einstein — ici le philosophe reparaît — que si un corps doit une petite partie de sa masse au voisinage du Soleil, le reste de sa masse est dû au reste de la matière de l'Univers. Ainsi, au voisinage du Soleil, les corps doivent une partie de leur inertie au fait qu'il y a de la matière dans le Soleil. Comme l'inertie des corps est finie, la théorie exige que le reste de la matière répandue dans l'espace soit fini. Einstein conclut donc que la quantité de matière contenue dans l'Univers est finie et que cet Univers lui-même est fini quoique sans limites, avec une distribution de matière uniforme en moyenne. Ainsi nous sommes ramenés à la conception que nous occupons un univers fini, contenant un nombre fini de nébuleuses analogues à la nôtre.

La matière, dans l'Univers, détermine les propriétés de l'espace, elle détermine la courbure générale de l'espace, en donnant à tout notre univers à trois dimensions ce caractère d'être fermé sur lui-même comme la surface terrestre, à deux dimensions, est fermée sur elle-même. Si nous partons dans l'espace dans une direction quelconque, nous reviendrons par derrière après en avoir fait le tour. Le chemin que l'on aura ainsi parcouru est de l'ordre de celui que parcourt la lumière en 1 milliard d'années. C'est un nombre qui a, en kilomètres, 23 chiffres ; si nous ne connaissons pas le premier chiffre, nous savons cependant qu'il y en a 23 et que la place dont nous disposons est largement suffisante.

« Cette satisfaction de nous sentir ainsi chez nous nous donne une certaine sécurité en éliminant tout infini troublant pour notre esprit, et d'autre part l'espace est assez grand pour que rien ne vienne nous faire craindre une crise possible du logement » (*Applaudissements*).

M. LE PRÉSIDENT remercie M. Langevin pour cette intéressante communication Il adresse, de nouveau, des remerciements à M. Einstein pour avoir fait à la Société astronomique de France l'honneur de venir l'entretenir de questions qui à l'heure actuelle passionnent tous ceux qui pensent et sont avides de progrès.

La séance est levée à 22^h40^m.

Le Secrétaire-adjoint :
EM. TOUCHET.

Annexe 5 : Lemaître et la cosmologie, quelques éléments de son parcours

Lemaître (1894-1966) né à Charleroi en Belgique commença sa carrière scientifique en 1913 à Louvain. Elle fût rapidement interrompue par la guerre. À la fin de la guerre, il entre au séminaire où pendant ses heures de loisirs il étudie les sciences et les mathématiques.

Après son ordination il continue à étudier les mathématiques et les sciences à Cambridge où un de ses professeurs Arthur Eddington était le directeur de l'observatoire. Il s'intéresse en particulier à la relativité générale. De ses calculs il déduit que l'univers est dynamique mais à la différence d'Einstein qui avait introduit la constante cosmologique (dont le caractère répulsif pouvait exactement compenser le caractère attractif de la matière pour un ajustement bien précis des paramètres) pour le rendre statique, Lemaître est convaincu qu'il est en expansion en interprétant le décalage vers le rouge des galaxies comme un effet Doppler.

En 1927, il publie le fruit de ses calculs et réflexions dans un article des "Annales de la société scientifique de Bruxelles", publication qui n'a pratiquement aucun écho. Il fait part de ses calculs à Einstein qu'il rencontre à Bruxelles la même année mais celui-ci lui objecte que si ses calculs sont justes par contre son approche physique du problème cosmologique est abominable (sic)!

En 1929 les observations de Edwin Hubble confirment le décalage systématique vers le rouge des galaxies.
En Angleterre la "Royal Society" s'émeut de la contradiction apparente entre les observations et ce que prédit la relativité générale dans le modèle d'Einstein, en oubliant au passage la contribution de Friedmann qui prévoyait un univers dynamique et ce dès 1922 et qu'Einstein qui en avait eu connaissance avait traité avec une certaine désinvolture.

Sir Arthur Eddington se porte volontaire pour mener à bien cette redoutable mission.

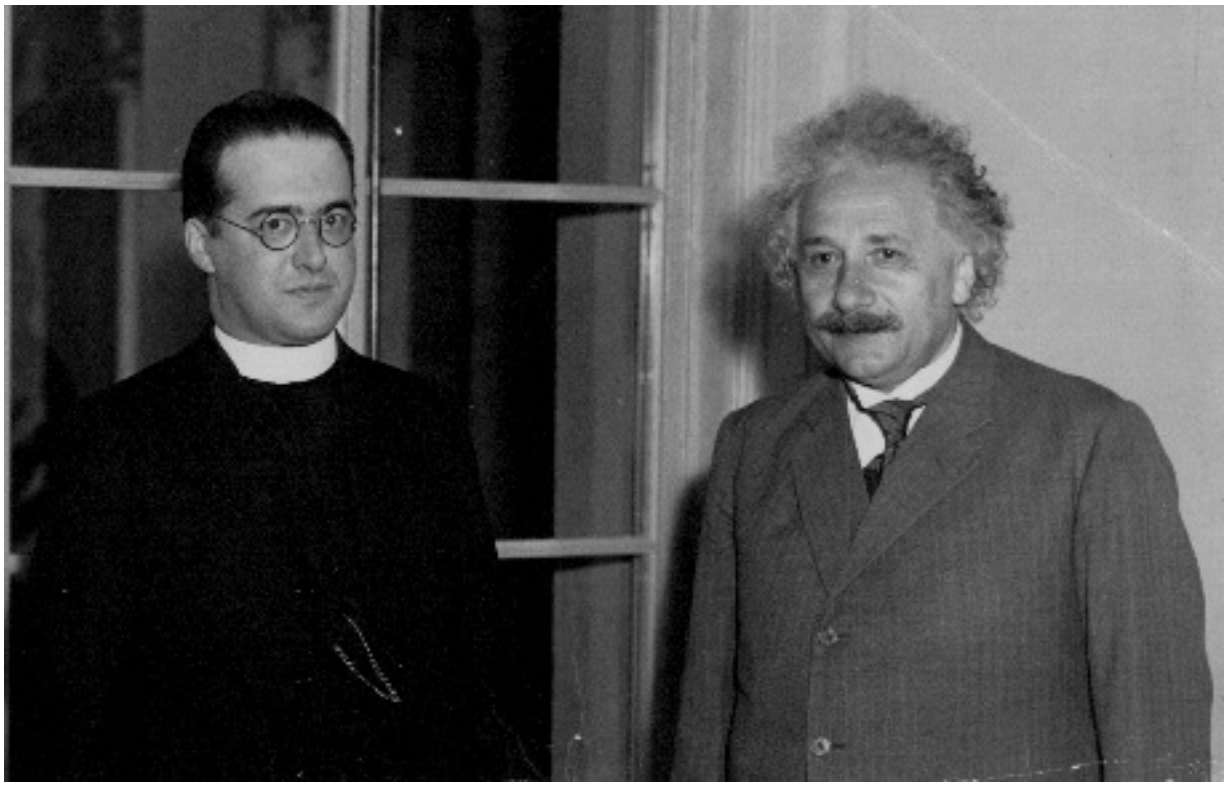
Prenant connaissance de cela, Lemaître envoie une copie de son article de 1927 à Eddington qui se rend compte que Lemaître propose une solution. Eddington fait traduire en anglais l'article de Lemaître et le fait publier dans les "Monthly Notices de la Royal Society" de mars 1931.

Si la communauté scientifique accepte bien l'idée que l'univers est aujourd'hui en expansion, l'idée qu'il a eu un commencement les révulse, à commencer par Eddington qui trouve l'idée "répugnante".

Mais Lemaître qui ne se laisse pas décourager si facilement et en janvier 1933 il obtient enfin une reconnaissance d'Einstein, au cours d'une conférence en Californie, puisque à la fin de la présentation de Lemaître, Einstein se lève en applaudissant et déclare :

" C'est l'explication la plus belle et la plus satisfaisante de la création que j'ai entendue".

Un article dans le New York Times Magazine et une photo de Lemaître et Einstein consacre la notoriété nouvelle de Lemaître.



Lemaître devient membre de l'académie royale des sciences de Belgique et l'année suivante le pape Pie XI le fait membre de l'académie pontificale des sciences.

Les théories d'expansion de l'univers n'étaient pourtant pas sans poser des problèmes.

Avec les valeurs (fausses) mesurées à l'époque, en particulier la valeur très largement surestimée (environ 7 fois) de la constante de Hubble, l'âge de l'univers prédit était bien trop petit, puisqu'on attribuait à des objets de l'univers, comme la Terre par exemple, un âge supérieur.[979]

Lemaître utilise alors la constante cosmologique pour rallonger cet âge, ce que les équations lui permettent de faire.

Ceci met Einstein dans une situation plutôt délicate puisque après dix ans de défense opiniâtre de son modèle statique, modèle qui avait nécessité l'introduction de cette constante

[979]La valeur qu'on lui attribue aujourd'hui (plus de 4 milliards d'années) n'était pas vraiment confirmée, mais il y avait des éléments qui indiquaient que cet age était supérieur à deux milliards d'années.

cosmologique, il s'était résolu l'abjurer suite à des critiques diverses, en particulier la démonstration de l'instabilité d'un tel univers. Il venait juste de déclarer :

" La constante cosmologique a été la plus grande erreur de ma carrière"

La remise au goût du jour de cette constante cosmologique par Lemaître pour trouver des solutions cosmologiques compatibles avec nos données expérimentales faisait figure de désaveu de la déclaration fracassante d'Einstein.

Pour autant, comme nous l'avons signalé, le modèle avec un "commencement" de Lemaître n'avait pas que des adeptes et la résistance s'organise.

À la mort de Arthur Eddington en 1944, la critique de la théorie de Lemaître, qualifiée ironiquement de "Big Bang" par Fred Hoyle, le chef de file du foyer de résistance situé à Cambridge, aboutit à la théorie de l'état stationnaire: l'univers a toujours existé et il est toujours "statistiquement" le même. Cette théorie résout, en l'éludant, le problème de l'origine de l'univers mais au prix d'autres problèmes pas moins critiques qui cependant choquaient moins les esprits.

La création de matière n'a pas lieu qu'une fois au moment du "Big Bang" mais se fait éternellement de façon continue dans l'espace et le temps!

Cette théorie "stationnaire" a connu son heure de gloire mais elle a dû elle aussi se plier à de nombreux aménagements, car comme les observations, en particulier le rayonnement de fond cosmologique, ont plutôt privilégié le modèle avec Big Bang (le terme est resté) elle n'est plus guère d'actualité.

La constante cosmologique a connu un destin quelque peu chaotique. Introduite, reniée, réintroduite oubliée, aujourd'hui les observations des supernovas réalisées ces quinze dernières années semblent montrer l'existence d'une mystérieuse énergie noire dont les effets sont similaires à ceux d'une constante cosmologique, ce qui remet au goût du jour le modèle que Lemaître avait établi.

On voit que Lemaître a bâti sa notoriété sur ses travaux en cosmologie et en particulier sur l'expansion de l'univers, pourtant il a aussi magistralement contribué à résoudre un problème qui était en suspend depuis que Schwarzschild avait trouvé une solution en 1916 et qui donnait bien du souci à Einstein et aux relativistes le problème de la singularité sur l'horizon d'un trou noir à symétrie sphérique.

Lemaître a fait quelques contributions en cosmologie mais leur synthèse est contenue dans l'article cité dans les références (Lemaître G. 1932). Cet article enrichi de nouveaux chapitres en comporte alors douze. Si certains ne sont plus d'actualité, la plupart font preuve d'une modernité traduisant l'approche visionnaire de Lemaître.

En particulier, un tout petit chapitre, le chapitre *11*, s'appuyant sur les résultats précédemment établis dans cet article, traite du problème de Schwarzschild.

On peut se demander ce qu'un chapitre consacré aux trous noirs vient faire dans un article consacré à la cosmologie, on verra que Lemaître y expose sa conception de la solution de Schwarzschild comme une solution cosmologique et que cela relève d'une audace de pensée qui n'est reconnue comme très pertinente que depuis peu.

C’est cette approche originale qui a permis à Lemaître de réussir à résoudre le problème de l’horizon dans le problème de Schwarzschild, là où les autres avaient échoué.

Il y a eu des contributions antérieures de forme de la métrique effaçant la singularité sur l’horizon (Painlevé en 1921, Gullstrand en 1922 et Eddington en 1924) mais soit ces auteurs n’ont pas relevé cette caractéristique, soit ils n’ont pas expliqué que cette singularité n’était due qu’à un choix de coordonnées inadapté. Lemaître a bien compris cela et explicite d’emblée que c’est cela qui pose problème et donne en conséquence une solution qui le résout.

Cela n’a pas été reconnu à sa juste valeur à l’époque mais il est vrai que cet article rédigé en français a été peu diffusé même si Tolmann, Synge et Kruskal y font référence dans leurs propres travaux fondamentaux et décisifs sur cette solution.

Pourtant la lucidité et la rigueur avec laquelle il aborde les problèmes cosmologiques est stupéfiante. Il est vrai que, à la différence d’Einstein, il était un excellent mathématicien et la seule chose qu’on puisse regretter c’est que lui-même n’ait pas reconnu toutes les découvertes qu’il avait faites.

Par la suite Lemaître, dont la curiosité d’esprit ne s’est jamais démentie, estimant sans doute avoir donné ce dont il était capable en cosmologie referma cette longue parenthèse et s’est intéressé, avec un certain succès, à d’autres domaines qui émergeaient comme le calcul numérique par exemple, mais ceci est une autre histoire.

Annexe 6 : rappel de l'état de l'art lorsque Painlevé publie son article.

En 1915, Einstein bute encore sur le problème de covariance générale[980], il publie plusieurs versions de ses équations. Einstein a élaboré ses équations en cherchant une généralisation "relativiste" de l'équation "classique" de Poisson.

A partir de sa conception géométrique de l'espace-temps (la matière génère une courbure de l'espace-temps), son équation se devait de comporter, d'un côté une entité géométrique $G_{\mu\nu}$ (caractérisant une courbure) représentée par un tenseur (le tenseur d'Einstein), et de l'autre une entité physique (caractérisant la distribution de matière énergie) également représentée par un tenseur, qui comme il l'avait montré en relativité restreinte est caractérisé par le tenseur énergie-impulsion $T_{\mu\nu}$ à flux conservatif (divergence covariante nulle).[981]

Ceci s'écrit :

$$G_{\mu\nu} = K.T_{\mu\nu} \quad \text{avec } T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0.$$

Partant du principe qu'en physique, les équations différentielles ne vont pas au-delà du second ordre, il a cherché un tenseur "géométrique", dérivé du tenseur de Riemann[982] qui caractérise la courbure, possédant cette propriété et qui pouvait être égalé (via une constante dimensionnée K) au tenseur énergie-impulsion.

Le choix est restreint. Le tenseur de Ricci aurait pu faire l'affaire s'il avait satisfait à la condition de divergence nulle. Comme ce n'est pas le cas, Einstein est donc amené à construire un tenseur à partir du tenseur de Ricci $R_{\mu\nu}$ et de sa contraction $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ (le scalaire de Ricci) qui y satisfait.

C'est le tenseur d'Einstein $G^{\mu\nu}$ qui a une divergence covariante nulle comme on peut le vérifier.
Avec nos conventions ceci s'écrit :

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\, g_{\mu\nu} R \quad , \; G^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0.$$

Ajoutons une condition aux limites : dans un espace vide de matière ou du moins très loin des sources de matière, on doit converger asymptotiquement vers la relativité restreinte.

La forme générale de son équation étant établie, il restera à valoriser la constante dimensionnée par convergence à la limite "Newtonienne" avec la théorie classique de la gravitation.

---

[980]La covariance des équations garantit que la forme de ces équations sera la même dans tous les systèmes de coordonnées. Compte tenu des types de changement de coordonnées qu'on peut opérer dans des espaces temps courbes utilisés en relativité générale il suffit qu'elles soient écrites sous forme tensorielle. On utilise les formes covariantes et contravariantes des tenseurs selon les circonstances, on sait qu'on passe de l'une à l'autre à l'aide du tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ ou de son inverse $g^{\mu\nu}$. Ainsi $G_{\mu\nu} = g_{\lambda\mu} g_{\rho\nu} G^{\lambda\rho}$..

[981]Le symbole "**;**" est utilisé conformément aux usages pour désigner l'opération de dérivation covariante. La dérivation covariante est une extension de la dérivation classique qui elle est notée "," utilisée en espace-temps courbe pour tenir compte de la courbure de l'espace-temps. La divergence covariante est l'extension de la divergence pour les espaces temps courbes. La conservation du flux tient alors compte de la géométrie courbe de l'espace.

[982]Les composantes du tenseur de Riemann sont des fonctions de la métrique utilisée et de ses dérivées. La métrique associée à un espace-temps courbe permet de calculer l'équivalent d'une "longueur" en fait un intervalle d'espace-temps. La métrique est la "variable" fondamentale en relativité générale, puisque la relativité générale est une théorie géométrique de la gravitation.

A partir de ce résultat, peu de temps après, il publie fin 1915 ses équations dont la première version est restrictive, avec la condition[983] $g = -1$.

Il publie aussi celle correspondant à la covariance générale, mais comme il n'est pas très sûr de lui, il recommande de respecter si possible la condition $g = -1$.

A cette même époque et quelques jours avant qu'Einstein publie ses propres travaux, D. Hilbert en utilisant un principe différent (principe variationnel, utilisant l'action d'Hilbert[984]) propose une équation, solution de la théorie élaborée par Einstein.

Cela a donné lieu à une petite querelle en paternité de la relativité générale qui s'est rapidement éteinte, Hilbert reconnaissant finalement la paternité d'Einstein[985].

Finalement, Einstein publie une synthèse[986] très argumentée et complète de sa théorie en 1916.

1916 : solution de Schwarzschild

C'est dans ce contexte, à partir de la première version des équations d'Einstein (avec $g = -1$) qu'en janvier 1916, depuis le front russe où il s'est porté volontaire, Karl Schwarzschild, un des fondateurs de l'astrophysique moderne, astronome à l'observatoire de Postdam, élabore la première solution exacte aux équations d'Einstein dans le vide, celle relative au champ gravitationnel généré par une masse unique à symétrie sphérique (à l'extérieur de la masse).

Schwarzschild est parti peut-être un peu trop tôt, car la publication restrictive d'Einstein impose quelques contraintes.

Les coordonnées sphériques, pourtant naturelles dans un problème manifestement à symétrie spatiale sphérique, posent problème (elles ne satisfont pas à la condition de déterminant -1 du fait de la partie spatiale).

A partir des coordonnées polaires (R, θ, φ), dont l'origine est le centre de symétrie de la masse unique, Schwarzschild fabrique des coordonnées spatiales de déterminant 1.

Il introduit une coordonnée radiale auxiliaire r définie par :

$$r = (R^3 + r_s^3)^{1/3}.$$

Avec $c=G=1$ [987], $r_s = 2M$ [988], où r_s est appelé le rayon de Schwarzschild, il établit une forme de métrique[989] qui s'écrit alors :

[983] g est le déterminant de la matrice des composantes du tenseur métrique.
[984] La méthode plus générale de Hilbert est celle qui a la préférence aujourd'hui, d'autant que s'appuyant sur le principe variationnel, elle se généralise à d'autres théories.
[985] Voir Earman J. , Glymour C. (1978)
[986] Einstein. A (1916).
[987] On supposera que $c = 1, G = 1$, par défaut lorsque c, G ne sont pas spécifiés explicitement dans tout le texte.
[988] En fait $r_s = 2GM/c^2 = 2M$ avec $c = 1, G = 1$ où M est la masse centrale. Rappelons que dans cette solution on se place à l'extérieur de la matière (dans le vide). On utilisera souvent la notation $r_s = 2M$ tout au long du document.
[989] Une forme de la métrique permet de calculer localement un invariant fondamental (un scalaire) qui est l'intervalle d'espace-temps. Cet intervalle d'espace est la généralisation relativiste du théorème de Pythagore en géométrie euclidienne (qui est la métrique d'un espace euclidien à 3 dimensions). Nous avions aussi signalé qu'elle est nécessaire pour définir les tenseurs fondamentaux utilisés en relativité générale. On a posé $c = 1$.

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 - r^2 \left(\sin(\theta)^2 d\varphi^2 + d\theta^2\right) - \frac{dr^2}{1 - \frac{2GM}{r}} \quad . \qquad (1)$$

Cette solution décrit un espace-temps statique, à l'extérieur de l'horizon (et aussi à l'extérieur de la masse générant le champ, car rappelons-le elle est définie dans le vide) dont la partie spatiale est à symétrie sphérique.

Elle est définie à l'extérieur de l'horizon, car dans ces coordonnées la valeur minimum de R, $R = 0$ donne $r = r_s$, ce qui correspond à la sphère[990] qui représente géométriquement l'horizon.

Dans un deuxième article Schwarzschild publiera une solution "intérieure [991]" en utilisant l'équation hydrostatique pour une boule de fluide à densité constante dont la pression s'annule sur la surface.

Dans ce modèle la pression au centre devient infinie dès que le rayon devient inférieur à une valeur limite $R_{lim} > r_s$. Il en déduit (à tort) que des corps de rayon r et de masse M, tels que $r < 2GM/c^2$ ne peuvent exister, donc que la région $r \leq r_s$ est non physique[992].

1916- Solution de Droste

Droste[993] élève de Lorentz, établit indépendamment une solution au même problème, dans le cadre des équations d'Einstein dans le contexte de la covariance générale (sans cette restriction de déterminant qui a contraint Schwarzschild à quelques artifices), qui généralise la solution de Schwarzschild, en l'étendant jusqu'au point $r = 0$ (centre de symétrie) en coordonnées sphériques.

C'est la forme actuelle de la solution de Schwarzschild :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 - r^2 \left(\sin(\theta)^2 d\varphi^2 + d\theta^2\right) - \frac{dr^2}{1 - \frac{2GM}{r}} \quad . \qquad (1bis)$$

Cette forme met en évidence deux singularités de coordonnées à $r = 2GM$ et $r = 0$. On voit que l'expression du ds^2 devient infinie pour ces valeurs. La discussion portera longtemps sur la nature de ces singularités. Cette forme décrit la métrique (le ds^2) de l'espace-temps pour $0 < r < \infty$. La singularité pour $r = 0$ se comprend, car une masse m de valeur finie dans un volume nul est singulière.

Ce qui est nouveau c'est la singularité pour le "rayon de Schwarzschild" correspondant à la valeur $r = r_s = 2GM/c^2$, qu'on simplifie souvent en $r = 2GM$ ou $r = 2M$ en posant $c = 1$ et $G = 1$. Cette valeur correspond à une hypersurface bien particulière à savoir l'horizon dont la nature paraît bien mystérieuse et dérangeante. Aussi dans un premier temps les relativistes, Einstein en tête, vont s'efforcer de montrer qu'une masse ne peut pas avoir un rayon inférieur à son rayon de Schwarzschild.

---

[990] Ceci a donné lieu à des interprétations, allant jusqu'à nier l'existence d'une singularité centrale dans cette solution, par exemple Zakir. Z (1999). Une critique de ces interprétations a été faite par Senovilla, J.M (2006).

[991] Schwarzschild (1916b). A l'intérieur de la matière, par opposition à la solution "dans le vide" (à l'extérieur de la masse générant le champ). Solution obtenue toujours avec la condition de déterminant -1.

[992] Pas de solution statique pour $r \leq r_s$, mais il oublie de considérer la possibilité de solutions non statiques. Einstein commettra la même erreur (Einstein 1939) dans sa "démonstration" de non existence des trous noirs.

[993] Droste J. (1916). Cette contribution de Droste est citée dans Eisenstaedt (1982).

Comme la métrique diverge sur l'horizon, elle sépare l'espace en deux sous espaces non raccordés continûment et il faut deux référentiels pour décrire cet espace-temps.

En effet il faut un premier référentiel pour décrire la région $r > r_s$ et un deuxième pour décrire $0 < r < r_s$.

C'est un problème assez classique lié aux coordonnées pour baliser une variété[994]. On peut rarement étiqueter la variété avec un seul système de coordonnées[995].

Ajoutons que t (la coordonnée temporelle) utilisée dans la métrique ci-dessus n'a de caractère physique qu'à l'infini spatial, pour $r = \infty$, ce qui est souvent source d'incompréhension, puisque cette forme nous montre qu'un observateur à l'infini, en fait très loin de la singularité centrale, ne peut pas voir un objet, se dirigeant vers ce centre, atteindre l'horizon.

Par caractère physique du temps propre on entend que celui-ci est donné par l'horloge d'un observateur, statique dans cette forme.

[994]Une variété est l'objet géométrique qui représente l'espace-temps courbe. En relativité générale la variété est pseudo-riemannienne. Localement, en tout point non singulier, elle est localement assimilable à l'espace-temps de Minkowski de la relativité restreinte.

[995]On verra dans la suite que c'est pourtant possible dans le cas de la forme de Painlevé redécouverte par Lemaître.

Annexe 7 : calcul du pseudo-tenseur gravitation en utilisant Mathematica 4

(Programme spécifique adapté du fichier *Painleve-4D_cart-pseudo-A7bis.nb*)[996]

Ce calcul est relatif à la forme de la métrique de Painlevé en coordonnées cartésiennes pour la solution trou noir (univers en effondrement).

Sélection du nombre de dimensions de l'espace-temps

```
N = 4
```

Définition des coordonnées

(t, x, y, z)

Définition de la métrique

$$\begin{pmatrix} -1+\frac{2m}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \frac{\sqrt{2}\sqrt{m}\,x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/4}} & \frac{\sqrt{2}\sqrt{m}\,y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/4}} & \frac{\sqrt{2}\sqrt{m}\,z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/4}} \\ \frac{\sqrt{2}\sqrt{m}\,x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/4}} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}\sqrt{m}\,y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/4}} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}\sqrt{m}\,z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/4}} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcul déterminant :

```
g= Simplify[(-Det[metric])^(1/2)]
```

```
g =1
```

Métrique inverse.

```
inversemetric = Simplify[Inverse[metric]]
```

$$\begin{pmatrix} -1 & \frac{\sqrt{2}\sqrt{m}\,x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/4}} & \frac{\sqrt{2}\sqrt{m}\,y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/4}} & \frac{\sqrt{2}\sqrt{m}\,z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/4}} \\ \frac{\sqrt{2}\sqrt{m}\,x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/4}} & \frac{-2mx^2+(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} & -\frac{2mxy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} & -\frac{2mxz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \\ \frac{\sqrt{2}\sqrt{m}\,y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/4}} & -\frac{2mxy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} & \frac{-2my^2+(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} & -\frac{2myz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \\ \frac{\sqrt{2}\sqrt{m}\,z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/4}} & -\frac{2mxz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} & -\frac{2myz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} & \frac{-2mz^2+(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \end{pmatrix}$$

[996] Fichier utilisant certains éléments de celui établi par *Leonard Parker*, *University of Wiscontin Milwaukee,* que j'ai largement adapté et complété pour les besoins de la cause. Disponible sur demande.

Calcul des symboles de Christoffel Γ^{i}_{jk}

```
affine := affine = Simplify[Table[(1 / 2) * Sum[(inversemetric[[i, s]]) *
      (D[metric[[s, j]], coord[[k]] ] +
        D[metric[[s, k]], coord[[j]] ] - D[metric[[j, k]], coord[[s]] ]), {s, 1, n}],
    {i, 1, n}, {j, 1, n}, {k, 1, n}] ]
```

Mise en forme de l'édition, le premier indice est l'indice haut : Γ_{123} se lit Γ^{1}_{23}, les indices *i, j, k* varient de *1* à *4* (et non pas de *0* à *3*). L'indice *1* correspond à *t et 2, 3, 4* respectivement à *x, y, z*.

$$\Gamma[2,\ 4,\ 4] \quad \frac{m\,x\,(2\,x^2+2\,y^2-z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

$$\Gamma[3,\ 1,\ 1] \quad \frac{m\,y\left(-2\,m+\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$$\Gamma[3,\ 2,\ 1] \quad -\frac{\sqrt{2}\,m^{3/2}\,x\,y}{(x^2+y^2+z^2)^{9/4}}$$

$$\Gamma[3,\ 2,\ 2] \quad \frac{m\,y\,(-x^2+2\,(y^2+z^2))}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

$$\Gamma[3,\ 3,\ 1] \quad -\frac{\sqrt{2}\,m^{3/2}\,y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{9/4}}$$

$$\Gamma[3,\ 3,\ 2] \quad -\frac{3\,m\,x\,y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

$$\Gamma[3,\ 3,\ 3] \quad \frac{m\,y\,(2\,x^2-y^2+2\,z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

$$\Gamma[3,\ 4,\ 1] \quad -\frac{\sqrt{2}\,m^{3/2}\,y\,z}{(x^2+y^2+z^2)^{9/4}}$$

$$\Gamma[3,\ 4,\ 2] \quad -\frac{3\,m\,x\,y\,z}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

$$\Gamma[3,\ 4,\ 3] \quad -\frac{3\,m\,y^2\,z}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

$$\Gamma[3,\ 4,\ 4] \quad \frac{m\,y\,(2\,x^2+2\,y^2-z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

$$\Gamma[4,\ 1,\ 1] \quad \frac{m\,z\left(-2\,m+\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$$\Gamma[4,\ 2,\ 1] \quad -\frac{\sqrt{2}\,m^{3/2}\,x\,z}{(x^2+y^2+z^2)^{9/4}}$$

$$\Gamma[4,\ 2,\ 2] \quad \frac{m\,z\,(-x^2+2\,(y^2+z^2))}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

$$\Gamma[4,\ 3,\ 1] \quad -\frac{\sqrt{2}\,m^{3/2}\,y\,z}{(x^2+y^2+z^2)^{9/4}}$$

$$\Gamma[4,\ 3,\ 2] \quad -\frac{3\,m\,x\,y\,z}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

$$\Gamma[4,\ 3,\ 3] \quad \frac{m\,z\,(2\,x^2-y^2+2\,z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

$$\Gamma[4,\ 4,\ 1] \quad -\frac{\sqrt{2}\,m^{3/2}\,z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{9/4}}$$

$$\Gamma[4,\ 4,\ 2] \quad -\frac{3\,m\,x\,z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

$$\Gamma[4,\ 4,\ 3] \quad -\frac{3\,m\,y\,z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

$$\Gamma[4,\ 4,\ 4] \quad \frac{m\,z\,(2\,x^2+2\,y^2-z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

$$\Gamma[1,\ 1,\ 1] \quad \frac{\sqrt{2}\,m^{3/2}}{(x^2+y^2+z^2)^{5/4}}$$

$$\Gamma[1,\ 2,\ 1] \quad \frac{m\,x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$\Gamma[1,\ 2,\ 2] \quad \frac{\sqrt{m}\,(x^2-2\,(y^2+z^2))}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$$

$$\Gamma[1,\ 3,\ 1] \quad \frac{m\,y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$\Gamma[1,\ 3,\ 2] \quad \frac{3\sqrt{m}\,x\,y}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$$

$$\Gamma[1,\ 3,\ 3] \quad \frac{\sqrt{m}\,(-2\,x^2+y^2-2\,z^2)}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$$

$$\Gamma[1,\ 4,\ 1] \quad \frac{m\,z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$\Gamma[1,\ 4,\ 2] \quad \frac{3\sqrt{m}\,x\,z}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$$

$$\Gamma[1,\ 4,\ 3] \quad \frac{3\sqrt{m}\,y\,z}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$$

$$\Gamma[1,\ 4,\ 4] \quad \frac{\sqrt{m}\,(-2\,x^2-2\,y^2+z^2)}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$$

$$\Gamma[2,\ 1,\ 1] \quad \frac{m\,x\left(-2\,m+\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$$\Gamma[2,\ 2,\ 1] \quad -\frac{\sqrt{2}\,m^{3/2}\,x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{9/4}}$$

$$\Gamma[2,\ 2,\ 2] \quad \frac{m\,x\,(-x^2+2\,(y^2+z^2))}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

$$\Gamma[2,\ 3,\ 1] \quad -\frac{\sqrt{2}\,m^{3/2}\,x\,y}{(x^2+y^2+z^2)^{9/4}}$$

$$\Gamma[2,\ 3,\ 2] \quad -\frac{3\,m\,x^2\,y}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

$$\Gamma[2,\ 3,\ 3] \quad \frac{m\,x\,(2\,x^2-y^2+2\,z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

$$\Gamma[2,\ 4,\ 1] \quad -\frac{\sqrt{2}\,m^{3/2}\,x\,z}{(x^2+y^2+z^2)^{9/4}}$$

$$\Gamma[2,\ 4,\ 2] \quad -\frac{3\,m\,x^2\,z}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

$$\Gamma[2,\ 4,\ 3] \quad -\frac{3\,m\,x\,y\,z}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

A- Calcul du pseudo-tenseur gravitation selon l'équation :

$$t^{ik} = c^4/16\pi G\{(2\Gamma^n{}_{lm}\Gamma^p{}_{np} - \Gamma^n{}_{lp}\Gamma^p{}_{mn} - \Gamma^n{}_{ln}\Gamma^p{}_{mp})(g^{il}\, g^{km} - g^{ik}\, g^{lm}) +$$
$$g^{il}g^{mn}\,(\Gamma^k{}_{lp}\Gamma^p{}_{mn} + \Gamma^k{}_{mn}\Gamma^p{}_{lp} - \Gamma^k{}_{np}\Gamma^p{}_{lm} - \Gamma^k{}_{lm}\Gamma^p{}_{np}) +$$
$$g^{kl}g^{mn}\,(\Gamma^i{}_{lp}\Gamma^p{}_{mn} + \Gamma^i{}_{mn}\Gamma^p{}_{lp} - \Gamma^i{}_{np}\Gamma^p{}_{lm} - \Gamma^i{}_{lm}\Gamma^p{}_{np}) +$$
$$g^{lm}\, g^{np}\,(\Gamma^i{}_{ln}\Gamma^k{}_{mp} - \Gamma^i{}_{lm}\Gamma^k{}_{np})\}.$$

```
pseudo := pseudo = Simplify[Table[
    Sum[inversemetric[[l, q]]
       Sum[inversemetric[[j, p]] (affine[[i, l, j]] * affine[[k, q, p]] - affine[[i, l, q]] * affine[[k, j, p]]),
        {j, 1, n}, {p, 1, n}], {l, 1, n}, {q, 1, n}] +
     Sum[inversemetric[[q, j]]
       Sum[inversemetric[[k, l]] (Sum[affine[[i, l, p]] affine[[p, q, j]] - affine[[i, j, p]] affine[[p, l, q]], {p, 1, n}] +
           affine[[i, q, j]] * Sum[affine[[p, l, p]], {p, 1, n}] - affine[[i, l, q]] * Sum[affine[[p, j, p]], {p, 1, n}]),
        {l, 1, n}], {q, 1, n}, {j, 1, n}] +
     Sum[inversemetric[[q, j]]
       Sum[inversemetric[[i, l]] (Sum[affine[[k, l, p]] affine[[p, q, j]] - affine[[k, j, p]] affine[[p, l, q]], {p, 1, n}] +
           affine[[k, q, j]] * Sum[affine[[p, l, p]], {p, 1, n}] - affine[[k, l, q]] * Sum[affine[[p, j, p]], {p, 1, n}]),
        {l, 1, n}], {q, 1, n}, {j, 1, n}] +
     Sum[inversemetric[[k, q]]
       Sum[inversemetric[[i, l]] (Sum[-affine[[j, l, p]] affine[[p, q, j]], {p, 1, n}, {j, 1, n}] -
           Sum[affine[[j, l, j]], {j, 1, n}] * Sum[affine[[p, q, p]], {p, 1, n}] +
           2 * Sum[affine[[j, l, q]] * Sum[affine[[p, j, p]], {p, 1, n}], {j, 1, n}]), {l, 1, n}], {q, 1, n}] -
     inversemetric[[i, k]] *
      Sum[inversemetric[[l, q]] (Sum[-affine[[j, l, p]] affine[[p, q, j]], {p, 1, n}, {j, 1, n}] -
          Sum[affine[[j, l, j]], {j, 1, n}] * Sum[affine[[p, q, p]], {p, 1, n}] +
          2 * Sum[affine[[j, l, q]] * Sum[affine[[p, j, p]], {p, 1, n}], {j, 1, n}]), {l, 1, n}, {q, 1, n}],
    {i, 1, n}, {k, 1, n}]]
```

Affichage du pseudo-tenseur gravitation

```
{{0,0,0,0},{0,0,0,0},{0,0,0,0},{0,0,0,0}}
```

On voit que ce pseudo-tenseur gravitation est identiquement nul.[997]

[997] Signalons que le programme calcule aussi les tenseurs de Riemann, Ricci (nul), Einstein (nul) et le scalaire de Ricci (nul). Nous omettons de citer cette partie qui n'est pas utilisée ici.

B- Le calcul du pseudo-tenseur par les dérivées de la métrique selon l'équation :

$$(-g)t^{ik}=c^4/16\pi G\{\partial_l(g.g^{ik})\partial_m(g.g^{lm})-\partial_l(g.g^{il})\partial_m(g.g^{km})+\tfrac{1}{2}g^{ik}g_{lm}\partial_p(g.g^{ln})\partial_n(g.g^{pm})$$
$$-[g^{il}g_{mn}\partial_p(g.g^{kn})\partial_l(g.g^{mp})+g^{kl}g_{mn}\partial_p(g.g^{in})\partial_l(g.g^{mp})]+g^{np}g_{lm}\partial_n(g.g^{il})\partial_p(g.g^{km})$$
$$+\tfrac{1}{8}(2g^{il}g^{km}-g^{ik}g^{lm})(2g_{np}g_{qr}-g_{pq}g_{nr})[\partial_l(g.g^{nr})\partial_m(g.g^{pq})]\}$$

Cela s'écrit :

```
varpseudo :=
 varpseudo =
  Simplify[
   Table[
    (Sum[D[g * inversemetric[[i, k]], coord[[l]]]
         Sum[D[g * inversemetric[[l, v]], coord[[v]]], {v, 1, n}], {l, 1, n}] -
       Sum[D[g * inversemetric[[i, l]], coord[[l]]], {l, 1, n}] *
        Sum[D[g * inversemetric[[k, v]], coord[[v]]], {v, 1, n}] +
       (1 / 2) * (inversemetric[[i, k]]) *
        (Sum[metric[[l, v]] Sum[D[g * inversemetric[[l, j]], coord[[p]]]
             D[g * inversemetric[[p, v]], coord[[j]]], {p, 1, n}, {j, 1, n}], {l, 1, n},
          {v, 1, n}]) -
       Sum[inversemetric[[i, l]]
         Sum[metric[[v, j]] Sum[D[g * inversemetric[[k, j]], coord[[p]]]
             D[g * inversemetric[[v, p]], coord[[l]]], {p, 1, n}], {v, 1, n}, {j, 1, n}],
        {l, 1, n}] -
       Sum[inversemetric[[k, l]]
         Sum[metric[[v, j]] Sum[D[g * inversemetric[[i, j]], coord[[p]]]
             D[g * inversemetric[[v, p]], coord[[l]]], {p, 1, n}], {v, 1, n}, {j, 1, n}],
        {l, 1, n}] + Sum[inversemetric[[j, p]] metric[[l, v]]
         D[g * inversemetric[[i, l]], coord[[j]]] D[g * inversemetric[[k, v]], coord[[p]]],
        {j, 1, n}, {v, 1, n}, {p, 1, n}, {l, 1, n}] +
       (Sum[(2 * inversemetric[[i, l]] inversemetric[[k, v]] -
             inversemetric[[i, k]] inversemetric[[l, v]])
          Sum[(2 * metric[[j, p]] metric[[q, s]] - metric[[p, q]] metric[[j, s]])
            D[g * inversemetric[[j, s]], coord[[l]]] D[g * inversemetric[[p, q]], coord[[v]]],
           {j, 1, n}, {p, 1, n}, {q, 1, n}, {s, 1, n}], {l, 1, n}, {v, 1, n}]) / 8) / (g^2),
    {i, 1, n}, {k, 1, n}]]
```

```
TableForm[varpseudo]
```

0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0

Ce qui donne bien le même résultat.

C- Calcul du pseudo-tenseur en utilisant le fait que le tenseur énergie-impulsion est nul.

Calcul de $16\pi G.\lambda^{\mu\nu\rho\sigma} = (-g)\,(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma})$

```
lambda :=
 lambda =
  Simplify[
   Table[
    g * ((inversemetric[[i, k]] inversemetric[[l, j]]) -
       (inversemetric[[i, l]] inversemetric[[k, j]])), {i, 1, n}, {k, 1, n}, {l, 1, n}, {j, 1, n}]]
```

Calcul de $h^{\mu\nu\rho} = \partial_\sigma \lambda^{\mu\nu\rho\sigma}$

```
hikl := hikl = Simplify[Table[Sum[
      D[lambda[[i, k, l, j]], coord[[j]]],
      {j, 1, n}], {i, 1, n}, {k, 1, n}, {l, 1, n} ]]
```

$$h[2,1,2] \quad -\frac{\sqrt{m}\,(4x^2+y^2+z^2)}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}} \qquad h[3,2,1] \quad \frac{3\sqrt{m}\,x\,y}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$$

$$h[2,1,3] \quad -\frac{3\sqrt{m}\,x\,y}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}} \qquad h[3,3,1] \quad \frac{\sqrt{m}\,(x^2+4y^2+z^2)}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$$

$$h[2,1,4] \quad -\frac{3\sqrt{m}\,x\,z}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}} \qquad h[3,4,1] \quad \frac{3\sqrt{m}\,y\,z}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$$

$$h[2,2,1] \quad \frac{\sqrt{m}\,(4x^2+y^2+z^2)}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}} \qquad h[4,1,2] \quad -\frac{3\sqrt{m}\,x\,z}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$$

$$h[2,3,1] \quad \frac{3\sqrt{m}\,x\,y}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}} \qquad h[4,1,3] \quad -\frac{3\sqrt{m}\,y\,z}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$$

$$h[2,4,1] \quad \frac{3\sqrt{m}\,x\,z}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}} \qquad h[4,1,4] \quad -\frac{\sqrt{m}\,(x^2+y^2+4z^2)}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$$

$$h[3,1,2] \quad -\frac{3\sqrt{m}\,x\,y}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}} \qquad h[4,2,1] \quad \frac{3\sqrt{m}\,x\,z}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$$

$$h[3,1,3] \quad -\frac{\sqrt{m}\,(x^2+4y^2+z^2)}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}} \qquad h[4,3,1] \quad \frac{3\sqrt{m}\,y\,z}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$$

$$h[3,1,4] \quad -\frac{3\sqrt{m}\,y\,z}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}} \qquad h[4,4,1] \quad \frac{\sqrt{m}\,(x^2+y^2+4z^2)}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$$

Calcul du pseudo-tenseur

```
tik = Simplify[Table[(g^ (-1)) * Sum[
      D[hikl[[i, k, l]], coord[[l]] ],
      {l, 1, n}], {i, 1, n}, {k, 1, n}] ]
```

Ce qui donne bien le résultat attendu.

```
{{0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}}
```

D- Calcul du pseudo-tenseur utilisant la représentation par tétrades de $16\pi G.\lambda^{\mu\nu\rho\sigma}$

Valeur de la tétrade inverse

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}\,\sqrt{m}\,x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/4}} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}\,\sqrt{m}\,y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/4}} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}\,\sqrt{m}\,z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/4}} & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

Calcul de $16\pi G.\lambda^{\mu\nu\rho\sigma}$ par l'équation :

$16\pi G.\lambda^{\mu\nu\rho\sigma} = t^{\mu\nu} = -\partial_\rho\partial_\sigma\{-g\{[e_1{}^\nu e_2{}^\rho - e_1{}^\rho e_2{}^\nu][e_1{}^\mu e_2{}^\sigma - e_2{}^\mu e_1{}^\sigma]) + [e_1{}^\nu e_3{}^\rho - e_1{}^\rho e_3{}^\nu][e_1{}^\mu e_3{}^\sigma - e_3{}^\mu e_1{}^\sigma]) + [e_2{}^\nu e_3{}^\rho - e_2{}^\rho e_3{}^\nu]\,[e_2{}^\mu e_3{}^\sigma - e_3{}^\mu e_2{}^\sigma] + [e_1{}^\nu e_0{}^\rho - e_1{}^\rho e_0{}^\nu][e_0{}^\mu e_1{}^\sigma - e_1{}^\mu e_0{}^\sigma]) + [e_2{}^\nu e_0{}^\rho - e_2{}^\rho e_0{}^\nu][e_0{}^\mu e_2{}^\sigma - e_2{}^\mu e_0{}^\sigma]) + [e_3{}^\nu e_0{}^\rho - e_3{}^\rho e_0{}^\nu]\,[e_0{}^\mu e_3{}^\sigma - e_3{}^\mu e_0{}^\sigma]\}\}$

```
lambda :=
 lambda =
  Simplify[
   Table[(trad[[j, 2]] trad[[k, 3]] - trad[[k, 2]] trad[[j, 3]])
      (trad[[i, 2]] trad[[l, 3]] - trad[[l, 2]] trad[[i, 3]]) +
     (trad[[j, 2]] trad[[k, 4]] - trad[[k, 2]] trad[[j, 4]])
      (trad[[i, 2]] trad[[l, 4]] - trad[[l, 2]] trad[[i, 4]]) +
     (trad[[j, 3]] trad[[k, 4]] - trad[[k, 3]] trad[[j, 4]])
      (trad[[i, 3]] trad[[l, 4]] - trad[[l, 3]] trad[[i, 4]]) +
     (trad[[j, 2]] trad[[k, 1]] - trad[[k, 2]] trad[[j, 1]])
      (trad[[i, 1]] trad[[l, 2]] - trad[[l, 1]] trad[[i, 2]]) +
     (trad[[j, 3]] trad[[k, 1]] - trad[[k, 3]] trad[[j, 1]])
      (trad[[i, 1]] trad[[l, 3]] - trad[[l, 1]] trad[[i, 3]]) +
     (trad[[j, 4]] trad[[k, 1]] - trad[[k, 4]] trad[[j, 1]])
      (trad[[i, 1]] trad[[l, 4]] - trad[[l, 1]] trad[[i, 4]]), {i, 1, n},
    {j, 1, n}, {k, 1, n}, {l, 1, n}]]
```

On obtient la même valeur que dans le cas précédent pour $16\pi G.\lambda^{\mu\nu\rho\sigma}$.

En calculant le super-potentiel de Freud, $h^{\mu\nu\rho}$, on obtient également la même valeur.

En conséquence le pseudo-tenseur de Landau & Lifchitz est nul.

Voir fichier : *Painleve-4D_cart_tik_energy_invtetrad.nb* pour le détail des calculs.

Annexe 8 : calcul des coefficients de rotation de Ricci pour la tétrade définie dans le modèle de la rivière

Programme spécifique sous Mathematica 4 adapté du fichier : *Painleve-4D_cart_A8.nb*[998]

Introduction

Les coordonnées globales sont les coordonnées cartésiennes de Painlevé. Les symboles de Christoffel totalement covariants y sont calculés pour permettre une comparaison avec les coefficients de Ricci en particulier pour montrer comment les opérations effectuées pour satisfaire les équations reliant ces symboles font que les termes "indésirables" dans les symboles de Christoffel sont éliminés ne laissant que les gradients spatiaux; A cet effet les opérations sont menées pas à pas pour bien visualiser ce qui se passe.

On commence par remettre à zéro les variables, sélectionner le nombre de dimensions à quatre et indiquer qu'on choisit les coordonnées cartésiennes *(t, x, y, z)*

Définition de la métrique (Painlevé cartésienne "trou noir")

$$\left\{\left\{-1+\frac{2\,m}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ \frac{\sqrt{2}\,\sqrt{m}\,x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/4}},\ \frac{\sqrt{2}\,\sqrt{m}\,y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/4}},\ \frac{\sqrt{2}\,\sqrt{m}\,z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/4}}\right\},\right.$$
$$\left\{\frac{\sqrt{2}\,\sqrt{m}\,x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/4}},\ 1,\ 0,\ 0\right\},$$
$$\left.\left\{\frac{\sqrt{2}\,\sqrt{m}\,y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/4}},\ 0,\ 1,\ 0\right\},\ \left\{\frac{\sqrt{2}\,\sqrt{m}\,z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/4}},\ 0,\ 0,\ 1\right\}\right\}$$

Calcul des symboles de Christoffel covariants Γ_{ijk}, ici notés "affine"

Ce sont eux qui sont utilisés dans la plupart des équations que nous allons traiter. Le calcul est décrit par :

```
affine := affine = Simplify[Table[(1 / 2) *
      (D[metric[[i, j]], coord[[k]] ] +
        D[metric[[i, k]], coord[[j]] ] - D[metric[[j, k]], coord[[i]] ]),
    {i, 1, n}, {j, 1, n}, {k, 1, n}] ]
```

Affichage de ces symboles

On exécute les commandes de Mathematica pour obtenir un affichage formaté.
On remarquera le nombre réduit de symboles différents.

Mais les symboles avec deux index temporels par exemple Γ_{121} nous posent problème, car ce ne sont pas des gradients spatiaux de β_i composantes de la "vitesse de la rivière".

Nous verrons comment ils vont "s'éliminer" dans la suite.

[998] Fichier utilisant certains éléments de celui établi par *Leonard Parker, University of Wisconsin Milwaukee,* que j'ai largement adapté et complété pour les besoins de la cause. Disponible sur demande.

$$\Gamma[1,\ 2,\ 1] \quad -\frac{m\,x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$\Gamma[1,\ 2,\ 2] \quad \frac{\sqrt{m}\ (-x^2+2\ (y^2+z^2))}{\sqrt{2}\ (x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$$

$$\Gamma[1,\ 3,\ 1] \quad -\frac{m\,y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$\Gamma[1,\ 3,\ 2] \quad -\frac{3\sqrt{m}\ x\,y}{\sqrt{2}\ (x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$$

$$\Gamma[1,\ 3,\ 3] \quad \frac{\sqrt{m}\ (2\,x^2-y^2+2\,z^2)}{\sqrt{2}\ (x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$$

$$\Gamma[1,\ 4,\ 1] \quad -\frac{m\,z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$\Gamma[1,\ 4,\ 2] \quad -\frac{3\sqrt{m}\ x\,z}{\sqrt{2}\ (x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$$

$$\Gamma[1,\ 4,\ 3] \quad -\frac{3\sqrt{m}\ y\,z}{\sqrt{2}\ (x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$$

$$\Gamma[1,\ 4,\ 4] \quad \frac{\sqrt{m}\ (2\,x^2+2\,y^2-z^2)}{\sqrt{2}\ (x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$$

$$\Gamma[2,\ 1,\ 1] \quad \frac{m\,x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$\Gamma[3,\ 1,\ 1] \quad \frac{m\,y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$\Gamma[4,\ 1,\ 1] \quad \frac{m\,z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

Définition de l'opérateur δ_i^j (delta) et β^i (Boost) et de la métrique de Minkowski (RR) qui est aussi sa métrique inverse (on utilise les deux)

```
delta = {{1, 0, 0, 0}, {0, 1, 0, 0}, {0, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, 1}}
Boost = (((2 * m) ^ (1 / 2)) * (x^2 + y^2 + z^2) ^ (-3 / 4)) * {0, -x, -y, -z}
RR = {{-1, 0, 0, 0}, {0, 1, 0, 0}, {0, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, 1}}
```

```
{{1, 0, 0, 0}, {0, 1, 0, 0}, {0, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, 1}}
```

$$\left\{0,\ -\frac{\sqrt{2}\ \sqrt{m}\ x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/4}},\ -\frac{\sqrt{2}\ \sqrt{m}\ y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/4}},\ -\frac{\sqrt{2}\ \sqrt{m}\ z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/4}}\right\}$$

```
{{-1, 0, 0, 0}, {0, 1, 0, 0}, {0, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, 1}}
```

Calcul de la tétrade $e_\mu^{\ m} = \delta_\mu^{\ m} - \delta_\mu^{\ 0}\beta^m$ et de la tétrade inverse $e_m^{\ \mu} = \delta_m^{\ \mu} + \delta_m^{\ 0}\beta^\mu$ du modèle

```
tetra = Simplify[Table[(delta[[i, j]] - delta[[i, 1]] * Boost[[j]]), {i, 1, n}, {j, 1, n}]]
invtetra = Simplify[Table[(delta[[i, j]] + delta[[i, 1]] * Boost[[j]]), {i, 1, n}, {j, 1, n}]]
```

$$\left\{\left\{1,\ \frac{\sqrt{2}\ \sqrt{m}\ x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/4}},\ \frac{\sqrt{2}\ \sqrt{m}\ y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/4}},\ \frac{\sqrt{2}\ \sqrt{m}\ z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/4}}\right\},\ \{0,\ 1,\ 0,\ 0\},\ \{0,\ 0,\ 1,\ 0\},\ \{0,\ 0,\ 0,\ 1\}\right\}$$

$$\left\{\left\{1,\ -\frac{\sqrt{2}\ \sqrt{m}\ x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/4}},\ -\frac{\sqrt{2}\ \sqrt{m}\ y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/4}},\ -\frac{\sqrt{2}\ \sqrt{m}\ z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/4}}\right\},\ \{0,\ 1,\ 0,\ 0\},\ \{0,\ 0,\ 1,\ 0\},\ \{0,\ 0,\ 0,\ 1\}\right\}$$

Calcul du symbole d_{kmn} donné par l'équation :

$$d_{kmn} \equiv \eta_{kl}\, e^{l}{}_{\lambda}\, e_{n}{}^{\nu}\, \frac{\partial e_{m}{}^{\lambda}}{\partial x^{\nu}} \qquad (52)$$

renommé ici dkpq pour des raisons techniques propres à Mathematica.

```
dkpq =
 Simplify[
  Table[Sum[Sum[RR[[k, i]] tetra[[l, i]], {i, 1, n}]
     Sum[invtetra[[q, r]]
       D[invtetra[[p, l]], coord[[r]]], {r, 1, n}],
    {l, 1, n}], {k, 1, n}, {p, 1, n}, {q, 1, n}]]
```

Affichage du résultat:

$$\begin{aligned}
&d[2,\ 1,\ 1] && -\frac{m\,x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\\
&d[2,\ 1,\ 2] && \frac{\sqrt{m}\,(x^2-2\,(y^2+z^2))}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}}\\
&d[2,\ 1,\ 3] && \frac{3\sqrt{m}\,x\,y}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}}\\
&d[2,\ 1,\ 4] && \frac{3\sqrt{m}\,x\,z}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}}\\
&d[3,\ 1,\ 1] && -\frac{m\,y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\\
&d[3,\ 1,\ 2] && \frac{3\sqrt{m}\,x\,y}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}}\\
&d[3,\ 1,\ 3] && \frac{\sqrt{m}\,(-2\,x^2+y^2-2\,z^2)}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}}\\
&d[3,\ 1,\ 4] && \frac{3\sqrt{m}\,y\,z}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}}\\
&d[4,\ 1,\ 1] && -\frac{m\,z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\\
&d[4,\ 1,\ 2] && \frac{3\sqrt{m}\,x\,z}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}}\\
&d[4,\ 1,\ 3] && \frac{3\sqrt{m}\,y\,z}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}}\\
&d[4,\ 1,\ 4] && \frac{\sqrt{m}\,(-2\,x^2-2\,y^2+z^2)}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}}
\end{aligned}$$

Calcul de la partie droite du membre de droite (donnant dans la base de Minkowski co_mobile de la rivière les composantes du symbole de Christoffel) de l'équation (57) qui elle donne le coefficient de rotation de Ricci.

$$\Gamma_{kmn} = d_{kmn} + e_{k}{}^{\kappa} e_{m}{}^{\mu} e_{n}{}^{\nu} \Gamma_{\kappa\mu\nu}\ . \qquad (57)$$

```
PartRotricci =
 Simplify[Table[Sum[affine[[p, q, s]] invtetra[[i, p]] invtetra[[j, q]] invtetra[[k, s]], {p, 1, n}, {q, 1, n}, {s, 1, n}],
   {i, 1, n}, {j, 1, n}, {k, 1, n}]]
```

Affichage du résultat:

$$R[1,2,2] \quad \frac{\sqrt{m}\,\left(-x^2+2\,\left(y^2+z^2\right)\right)}{\sqrt{2}\,\left(x^2+y^2+z^2\right)^{7/4}}$$

$$R[1,2,3] \quad -\frac{3\,\sqrt{m}\,x\,y}{\sqrt{2}\,\left(x^2+y^2+z^2\right)^{7/4}}$$

$$R[1,2,4] \quad -\frac{3\,\sqrt{m}\,x\,z}{\sqrt{2}\,\left(x^2+y^2+z^2\right)^{7/4}}$$

$$R[1,3,2] \quad -\frac{3\,\sqrt{m}\,x\,y}{\sqrt{2}\,\left(x^2+y^2+z^2\right)^{7/4}}$$

$$R[1,3,3] \quad \frac{\sqrt{m}\,\left(2\,x^2-y^2+2\,z^2\right)}{\sqrt{2}\,\left(x^2+y^2+z^2\right)^{7/4}}$$

$$R[1,3,4] \quad -\frac{3\,\sqrt{m}\,y\,z}{\sqrt{2}\,\left(x^2+y^2+z^2\right)^{7/4}}$$

$$R[1,4,2] \quad -\frac{3\,\sqrt{m}\,x\,z}{\sqrt{2}\,\left(x^2+y^2+z^2\right)^{7/4}}$$

$$R[1,4,3] \quad -\frac{3\,\sqrt{m}\,y\,z}{\sqrt{2}\,\left(x^2+y^2+z^2\right)^{7/4}}$$

$$R[1,4,4] \quad \frac{\sqrt{m}\,\left(2\,x^2+2\,y^2-z^2\right)}{\sqrt{2}\,\left(x^2+y^2+z^2\right)^{7/4}}$$

$$R[2,1,1] \quad \frac{m\,x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}$$

$$R[3,1,1] \quad \frac{m\,y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}$$

$$R[4,1,1] \quad \frac{m\,z}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}$$

Calcul du coefficient de Ricci complet (équation 57)

```
Rotricci =
 Simplify[Table[dkpq[[i, j, k]] + PartRotricci[[i, j, k]], {i, 1, n},
   {j, 1, n}, {k, 1, n}]]
```

Affichage du résultat: le nombre d'éléments se réduit aux gradients spatiaux.

$$R[1,2,2] \quad \frac{\sqrt{m}\,\left(-x^2+2\,\left(y^2+z^2\right)\right)}{\sqrt{2}\,\left(x^2+y^2+z^2\right)^{7/4}}$$

$$R[1,3,2] \quad -\frac{3\,\sqrt{m}\,x\,y}{\sqrt{2}\,\left(x^2+y^2+z^2\right)^{7/4}}$$

$$R[1,3,3] \quad \frac{\sqrt{m}\,\left(2\,x^2-y^2+2\,z^2\right)}{\sqrt{2}\,\left(x^2+y^2+z^2\right)^{7/4}}$$

$$R[1,4,2] \quad -\frac{3\,\sqrt{m}\,x\,z}{\sqrt{2}\,\left(x^2+y^2+z^2\right)^{7/4}}$$

$$R[1,4,3] \quad -\frac{3\,\sqrt{m}\,y\,z}{\sqrt{2}\,\left(x^2+y^2+z^2\right)^{7/4}}$$

$$R[1,4,4] \quad \frac{\sqrt{m}\,\left(2\,x^2+2\,y^2-z^2\right)}{\sqrt{2}\,\left(x^2+y^2+z^2\right)^{7/4}}$$

Calculons directement les coefficients de Rotation de Ricci par l'équation (60)

$$\Gamma_{kmn} = \frac{1}{2}\left(d_{kmn} - d_{mkn} + d_{nmk} - d_{nkm} + d_{mnk} - d_{knm}\right)$$

```
Rotriccibis =
 Simplify[
  Table[
   (1 / 2) * (dkpq[[i, j, k]] - dkpq[[j, i, k]] + dkpq[[k, j, i]] -
      dkpq[[k, i, j]] + dkpq[[j, k, i]] - dkpq[[i, k, j]]), {i, 1, n},
   {j, 1, n}, {k, 1, n}]]
```

On obtient :

$$R[1,\ 2,\ 2] \qquad \frac{\sqrt{m}\ \left(-x^2+2\left(y^2+z^2\right)\right)}{\sqrt{2}\ \left(x^2+y^2+z^2\right)^{7/4}}$$

$$R[1,\ 3,\ 2] \qquad -\frac{3\sqrt{m}\ x\ y}{\sqrt{2}\ \left(x^2+y^2+z^2\right)^{7/4}}$$

$$R[1,\ 3,\ 3] \qquad \frac{\sqrt{m}\ \left(2\,x^2-y^2+2\,z^2\right)}{\sqrt{2}\ \left(x^2+y^2+z^2\right)^{7/4}}$$

$$R[1,\ 4,\ 2] \qquad -\frac{3\sqrt{m}\ x\ z}{\sqrt{2}\ \left(x^2+y^2+z^2\right)^{7/4}}$$

$$R[1,\ 4,\ 3] \qquad -\frac{3\sqrt{m}\ y\ z}{\sqrt{2}\ \left(x^2+y^2+z^2\right)^{7/4}}$$

$$R[1,\ 4,\ 4] \qquad \frac{\sqrt{m}\ \left(2\,x^2+2\,y^2-z^2\right)}{\sqrt{2}\ \left(x^2+y^2+z^2\right)^{7/4}}$$

Ce qui est identique.

Mais pour comparer avec les coefficients de rotation de Ricci de l'équation.

$$\Gamma^0_{ij} = \Gamma^i_{0j} = \frac{\partial \beta^i}{\partial x^j} \qquad (i,j = 1,2,3)\ . \qquad (17)$$

qui sont mixtes, nous devons élever le premier indice par la métrique de Minkowski inverse (égale à la métrique) qui a pour effet de changer le signe de certaines composantes :

```
Rotriccimix = Simplify[Table[Sum[Rotriccibis[[l, j, k]] RR[[l, i]], {l, 1, n}], {i, 1, n}, {j, 1, n}, {k, 1, n}]]
```

Le résultat donné ci-après correspond alors parfaitement (y compris pour le signe) aux composantes que nous avions trouvées en effectuant l'opération donnée par *(17)*: $\partial\beta^i/\partial x^j$.

On voit que les neuf premiers coefficients correspondent à $\Gamma^{0}{}_{ij}$ et les autres à $\Gamma^{i}{}_{0j}$.

R[1, 2, 2] $\frac{\sqrt{m}\ (x^2-2\ (y^2+z^2))}{\sqrt{2}\ (x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$

R[1, 2, 3] $\frac{3\sqrt{m}\ x\ y}{\sqrt{2}\ (x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$

R[1, 2, 4] $\frac{3\sqrt{m}\ x\ z}{\sqrt{2}\ (x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$

R[1, 3, 2] $\frac{3\sqrt{m}\ x\ y}{\sqrt{2}\ (x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$

R[1, 3, 3] $\frac{\sqrt{m}\ (-2\ x^2+y^2-2\ z^2)}{\sqrt{2}\ (x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$

R[1, 3, 4] $\frac{3\sqrt{m}\ y\ z}{\sqrt{2}\ (x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$

R[1, 4, 2] $\frac{3\sqrt{m}\ x\ z}{\sqrt{2}\ (x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$

R[1, 4, 3] $\frac{3\sqrt{m}\ y\ z}{\sqrt{2}\ (x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$

R[1, 4, 4] $\frac{\sqrt{m}\ (-2\ x^2-2\ y^2+z^2)}{\sqrt{2}\ (x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$

R[2, 1, 2] $\frac{\sqrt{m}\ (x^2-2\ (y^2+z^2))}{\sqrt{2}\ (x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$

R[2, 1, 3] $\frac{3\sqrt{m}\ x\ y}{\sqrt{2}\ (x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$

R[2, 1, 4] $\frac{3\sqrt{m}\ x\ z}{\sqrt{2}\ (x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$

R[3, 1, 2] $\frac{3\sqrt{m}\ x\ y}{\sqrt{2}\ (x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$

R[3, 1, 3] $\frac{\sqrt{m}\ (-2\ x^2+y^2-2\ z^2)}{\sqrt{2}\ (x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$

R[3, 1, 4] $\frac{3\sqrt{m}\ y\ z}{\sqrt{2}\ (x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$

R[4, 1, 2] $\frac{3\sqrt{m}\ x\ z}{\sqrt{2}\ (x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$

R[4, 1, 3] $\frac{3\sqrt{m}\ y\ z}{\sqrt{2}\ (x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$

R[4, 1, 4] $\frac{\sqrt{m}\ (-2\ x^2-2\ y^2+z^2)}{\sqrt{2}\ (x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$

Annexe 9 : fondements du formalisme ADM

Solutions de l'équation d'Einstein

Lorsque la résolution analytique de l'équation d'Einstein n'est pas possible (ce qui est le cas général) nous pouvons tenter de la résoudre numériquement pour diverses sources d'énergie et d'impulsion et étudier le comportement de particules de test dans ces solutions.

Problème des conditions initiales et de leur évolution en Relativité générale

Comme la métrique est notre variable fondamentale, notre premier propos sera de considérer les valeurs[999] $g_{\mu\nu}/\Sigma$ de la métrique sur notre hypersurface comme les coordonnées[1000] et les dérivées[1001] par rapport au temps $\partial_t g_{\mu\nu}|\Sigma$ (conformément à certaines coordonnées de temps spécifiées) comme étant l'impulsion, tous deux définissant l'état. (Il y a aussi des coordonnées et une impulsion pour les champs matériels que nous ne considérerons pas explicitement.)

Bien que $G^{\mu\nu}$, dans sa généralité, invoque des dérivées secondes par rapport au temps, l'identité de Bianchi montre que les composantes $G^{0\nu}$ n'en comportent pas.

Sur les dix équations correspondant aux dix composantes indépendantes de l'équation d'Einstein, les quatre représentées par

$$G^{0\nu} = 8\pi G T^{0\nu}, \qquad (82)$$

ne peuvent pas être utilisées pour calculer l'évolution des données initiales $(g_{\mu\nu}, \partial_t g_{\mu\nu})\Sigma$.

Contraintes sur les données initiales

Elles sont en fait des contraintes sur les données initiales.
Nous ne sommes pas libres de spécifier n'importe quelle combinaison de la métrique et de ses dérivées par rapport au temps sur l'hypersurface Σ , car elles doivent satisfaire les relations *(82)*.

Les équations restantes

$$G^{ij} = 8\pi G T^{ij}, \qquad (83)$$

représentent les équations d'évolution dynamique pour la métrique.

Nous n'avons que six équations pour les dix fonctions inconnues $g_{\mu\nu}(x^{\sigma})$, donc la solution va inévitablement impliquer une quadruple indétermination.

[999] Valeurs qui s'évaluent dans une forme de la métrique à sélectionner selon des critères explicités dans Lehner L. (2001) p.5-6, "Suitable coordinates".

[1000] Coordonnées généralisées au sens de celles utilisées dans l'approche Hamiltonienne qui va être mise en œuvre. La coordonnée temporelle va jouer un rôle spécifique du fait de la décomposition 4D en 3D+1D. La construction du Lagrangien associé à la méthode, le choix des variables canoniques permettant le traitement Hamiltonien du problème et les critères de choix sont formellement traités dans **Arnowitt R. Deser S. Misner C.W** (2004)

[1001] En fait, dans le formalisme ADM, on choisit le tenseur qui caractérise la courbure extrinsèque de l'hypersurface spatiale à 3 dimensions imbriquée dans l'espace-temps à 4 dimensions, appelée seconde forme fondamentale, car elle a une interprétation géométrique naturelle.

Elle correspond aux quatre degrés de liberté que nous avons préalablement évoqués correspondant au choix des quatre fonctions de coordonnées de l'espace-temps.

En développant *(83)* on trouve des termes $\partial^2_t g_{ij}$, mais pas de termes $\partial^2_t g_{0v}$.

Un "état" en Relativité générale va consister en une spécification des composantes de type espace de la métrique $g_{ij}|\Sigma$ et de leurs dérivées premières par rapport au temps $\partial_t g_{ij}|\Sigma$ sur l' hypersurface Σ , à partir de laquelle nous allons déterminer la future évolution en utilisant *(83)*, limitée par une ambiguïté incontournable concernant les composantes g_{0v}.

Cette situation est précisément analogue à celle de l'électromagnétisme, où nous savons qu'il n'y a pas suffisamment de données initiales pour déterminer l'évolution de façon unique, car il y a toujours la possibilité de réaliser la transformation de jauge $A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial_\mu \lambda$.

Choix d'une jauge

En relativité générale, les transformations de coordonnées jouent un rôle qui rappelle celui de la transformation de jauge en électromagnétisme.

Une manière de lever cette indétermination consiste à choisir une jauge. En électromagnétisme, cela signifie fixer une condition sur le potentiel vecteur A_μ , qui va contraindre notre liberté de transformation de jauge.

Par exemple on peut choisir la jauge de Lorentz qui impose $\nabla_\mu A^\mu = 0$, ou une jauge temporelle où $A_0 = 0$.

On peut faire l'équivalent en Relativité générale en fixant notre système de coordonnées.

Prenons la jauge harmonique (également connue sous le nom de jauge de Lorentz entre autres) qui recueille un large consensus, elle s'exprime :

$$\Box x^\mu = 0. \qquad (84)$$

Ici $\Box = \nabla^\mu \nabla_\mu$ est le d'alembertien covariant. Précisons que lorsque nous prenons les dérivées covariantes de x^μ, nous considérons les **fonctions scalaires x^μ,** définissant les coordonnées, sur la variété.

La condition est alors :

$$\Box x^\mu = g^{\rho\sigma} \partial_\rho \partial_\sigma x^\mu - g^{\rho\sigma} \Gamma^\lambda_{\rho\sigma} \partial_\lambda x^\mu = - g^{\rho\sigma} \Gamma^\lambda_{\rho\sigma} = 0. \qquad (85)$$

Dans l'espace Euclidien, les coordonnées cartésiennes (dans lesquelles $\Gamma^\lambda_{\rho\sigma} = 0$) sont des coordonnées harmoniques.

Par principe toute fonction telle que $\Box f = 0$ est appelée une fonction harmonique.

Pour vérifier que ce choix de coordonnées fixe bien notre liberté de jauge, réécrivons la condition *(84)* sous une forme plus simple. Nous avons

$$g^{\rho\sigma} \Gamma^\mu_{\rho\sigma} = \tfrac{1}{2}\, g^{\rho\sigma} g^{\mu\nu} (\partial_\rho g_{\sigma\nu} + \partial_\sigma g_{\rho\nu} - \partial_\nu g_{\sigma\rho}), \qquad (86)$$

d'après la définition des symboles de Christoffel.

Parallèlement de $\partial_\rho (g^{\mu\nu} g_{\sigma\nu}) = \partial_\rho \delta^\sigma{}_\mu = 0$, nous tirons :

$$g^{\mu\nu} \partial_\rho g_{\sigma\nu} = - g_{\sigma\nu} \partial_\rho g^{\mu\nu}. \qquad (87)$$

Et en utilisant le résultat de nos investigations antérieures sur la variation du déterminant de la métrique nous avons :

$$\frac{1}{2} g_{\rho\sigma} \partial_\nu g^{\rho\sigma} = \frac{-\partial_\nu \sqrt{-g}}{\sqrt{-g}} \quad . \qquad (88)$$

En mettant tout cela ensemble, il vient (en général) :

$$g^{\rho\sigma} \Gamma^\mu_{\rho\sigma} = \frac{\partial_\lambda \left(\sqrt{-g}\, g^{\lambda\mu} \right)}{\sqrt{-g}} \quad . \qquad (89)$$

La condition de jauge harmonique *(85)* est donc équivalente à :

$$\frac{\partial_\lambda \left(\sqrt{-g}\, g^{\lambda\mu} \right)}{\sqrt{-g}} = 0 \quad . \qquad (90)$$

En prenant la dérivée partielle sachant que $t = x^0$ cela donne :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\sqrt{-g}\, g^{0\nu} \right) = \frac{-\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\sqrt{-g}\, g^{i\nu} \right) \right) \quad . \qquad (91)$$

Cette condition représente une équation différentielle du deuxième ordre sur les composantes libres de la métrique $g^{0\nu}$, en fonction des données initiales fournies. Nous avons donc réussi à fixer les degrés de liberté de jauge et nous pouvons maintenant résoudre l'évolution de la métrique dans sa totalité en coordonnées harmoniques.

Le problème possède toutes les données nécessaires à sa résolution

Du moins localement, car nous avons éludé le fait que notre choix de jauge peut ne pas être bien défini globalement, et que nous pourrions être amenés à travailler sur des "pièces" de la variété qu'il faudrait alors raccorder pour obtenir la variété complète.

Le même problème est présent dans les théories de jauge de la physique des particules. Remarquons qu'il reste quelques degrés de liberté. Notre condition de jauge *(84)* ne restreint que les coordonnées qui s'étendent à partir de la surface initiale Σ à travers l'espace-temps, mais on peut toujours choisir librement des coordonnées x^i sur Σ.

Ceci correspond au fait qu'une transformation de coordonnée $x^\mu \rightarrow x^\mu + \delta^\mu$, avec $\Box \delta^\mu = 0$, est compatible avec la condition de jauge harmonique.

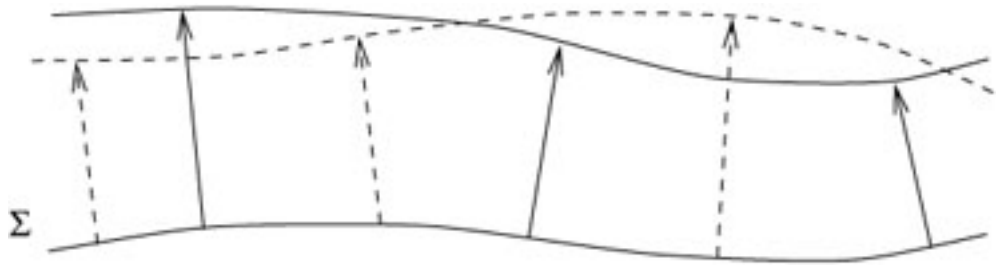
Nous avons maintenant bien défini les conditions initiales pour ce problème de Relativité générale, un état est spécifié par ses composantes d'espace de la métrique et de leurs dérivées par rapport au temps sur une hypersurface de type espace Σ.

Ceci étant donné les composantes de type espace *(83)* des équations d'Einstein nous permettent de faire évoluer la métrique dans le temps, sous réserve d'une ambiguïté, dans le choix des coordonnées que nous pouvons lever par un choix de jauge.

Gardons à l'esprit que les données de départ ne peuvent pas être arbitraires mais doivent satisfaire les contraintes *(82)*. Une fois satisfaites sur une hypersurface de type espace, les équations du mouvement garantissent qu'elles le resteront comme on peut le vérifier.

Ces contraintes garantissent que le résultat restera covariant dans l'espace-temps, après avoir feuilleté notre variété en hypersurfaces de type espace.

En particulier, la contrainte $G^{i0} = 8\pi GT^{i0}$ implique que l'évolution est indépendante de notre choix de coordonnées Σ, alors que $G^{00} = 8\pi GT^{00}$ force l'invariance vis-à-vis des différentes façons de feuilleter l'espace-temps en hypersurfaces de type espace.



Discussion sur l'existence de solutions

Une fois traité le problème d'initialisation des équations d'Einstein, un élément d'importance cruciale est l'étude de l'existence de solutions à ce problème.

Autrement dit, une fois spécifiée une hypersurface de type espace avec ses données initiales, jusqu'à quelle distance un espace-temps unique peut-il être déterminé.

Bien que la réponse précise à cette question soit plutôt ardue, il est assez simple d'examiner les **conditions de non existence** d'une solution bien définie, ce que nous allons faire.

Il est plus simple de considérer l'évolution de champs de matière dans un cadre fixe, que l'évolution de la métrique elle-même. Considérons donc une hypersurface de type espace Σ dans une variété M avec une métrique fixe $g_{\mu\nu}$, et de surcroît examinons un sous ensemble connecté S dans Σ.

Notre ligne de conduite sera qu'aucun signal ne se propage plus vite que la lumière, donc l'information ne va s'écouler que sur des chemins de type temps ou lumière (pas nécessairement des géodésiques).

Domaines de dépendance

Nous définissons le **domaine de dépendance du futur** de S, noté $D^+(S)$, comme l'ensemble des points p tels que toutes les courbes infinies correspondant à un chemin vers le passé à partir de p coupent S.

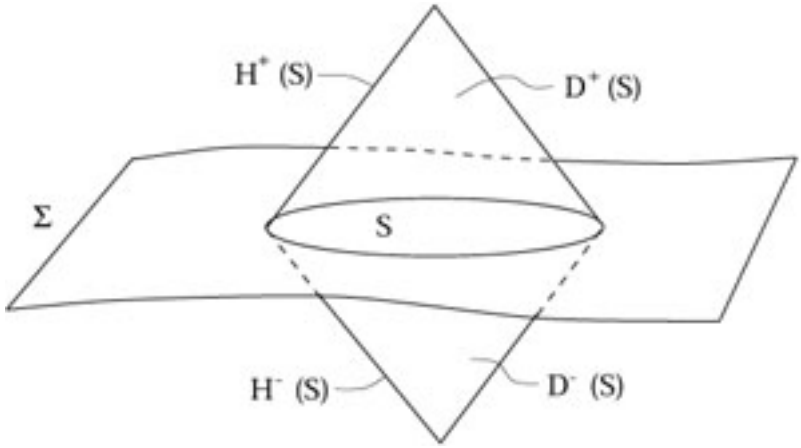
Interprétons cette définition de façon à ce que, S lui-même, soit un sous ensemble de $D^+(S)$.

De même définissons le domaine de **dépendance du passé $\boldsymbol{D^-(S)}$** de la même manière, mais en remplaçant chemin vers le passé par chemin vers le futur

Généralement certains points de *M* vont être dans un des domaines de dépendances et d'autres n'y seront pas.

Définissons la frontière de $D^+(S)$ comme **horizon de Cauchy du futur** $H^+(S)$ et de même la frontière de $D^-(S)$ comme **l'horizon de Cauchy du passé** $H^-(S)$.

Il est clair que les deux horizons sont des surfaces nulles.



Comme rien ne va plus vite que la lumière, les signaux ne peuvent pas se propager à l'extérieur du cône de lumière associé à *p*.

Donc si chaque courbe qui reste à l'intérieur du cône coupe *S*, alors l'information spécifiée sur *S* sera suffisante pour prédire quelle sera la situation à *p (Les données initiales du champ de matière de S peuvent être utilisées pour calculer la valeur des champs en p).*

L'ensemble des points pour lesquels on peut prédire l'état, en connaissant celui de S est simplement l'union $D^+(S) \cup D^-(S)$.

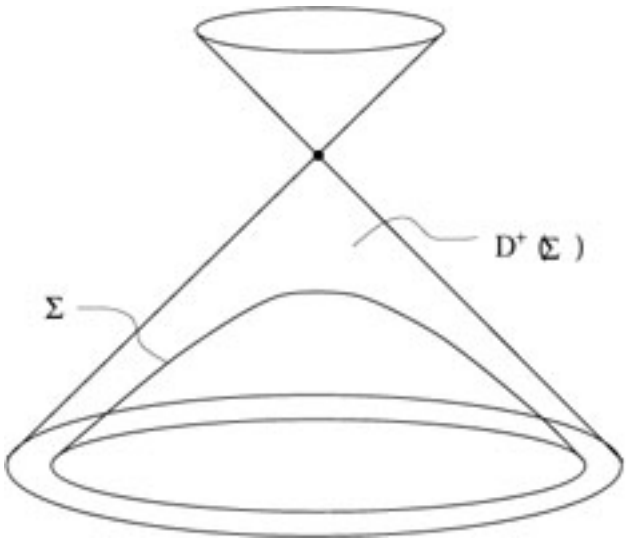
On peut facilement étendre ces idées développées pour le sous ensemble *S* à l'hypersurface Σ dans son intégralité.

Le point important est que $D^+(\Sigma) \cup D^-(\Sigma)$ peut ne pas être *M* dans son intégralité, même si Σ, lui-même, semble être une hypersurface convenable, s'étendant à travers l'espace.

Difficultés qu'on peut rencontrer

Il y a différents types de difficultés. L'une d'entre elle est de choisir une "mauvaise hypersurface", encore qu'il soit difficile de dire quand une hypersurface est mauvaise pour cet usage.

Considérons l'espace de Minkowski et une hypersurface de type espace Σ qui reste dans le passé du cône de lumière d'un certain point.



Dans ce cas Σ est une bonne surface de type espace, mais il est clair que $D^+(\Sigma)$ s'arrête au cône de lumière, et qu'on ne peut pas utiliser l'information sur Σ pour prédire ce qui se passe dans l'espace de Minkowski.

Naturellement, nous aurions pu prendre d'autres hypersurfaces dont le domaine de dépendance aurait été la variété en entier. Aussi ceci ne nous traumatise pas trop.

Espaces temps comportant des boucles temporelles : exemple "Espace de Misner"

C'est un espace bidimensionnel avec la topologie $R^1 \times S^1$, et une métrique pour laquelle le cône de lumière s'incline progressivement au fur et à mesure qu'on avance dans le temps.

Passé un certain point, il est possible de voyager sur des trajectoires de type temps qui s'enroulent autour de S^1 et se referment sur elles-mêmes.

On les appelle des **boucles temporelles**

Si nous avions spécifié une surface Σ dans le passé de ce point, alors aucun des points de la région contenant des boucles temporelles n'est dans le domaine de dépendance de Σ, puisque les boucles temporelles ne coupent pas Σ.

C'est assurément un problème plus sérieux que le précédent, puisqu'il ne semble pas exister dans ce type d'espace-temps de solution au problème de prédiction de l'évolution en partant de valeurs initiales bien définies.

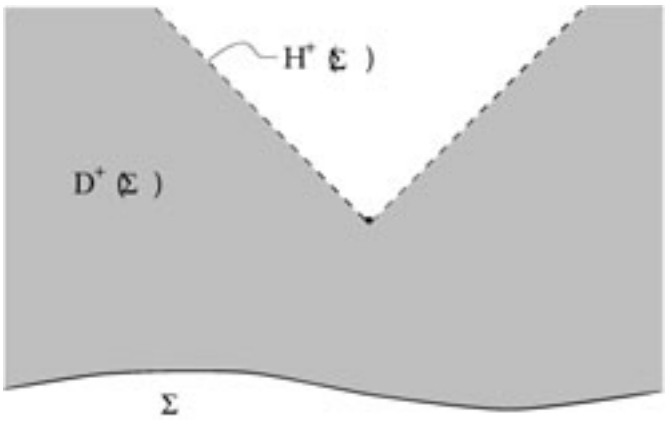
Les problèmes de ce type sont toujours en investigation, donc difficile de dire que cette énigme est réglée.

Singularités

Le dernier exemple est fourni par l'existence de singularités, points qui ne sont pas dans la variété, bien qu'ils puissent être atteint en voyageant sur une géodésique sur une distance finie.

Typiquement, elles apparaissent quand la courbure devient infinie en un point, si cela arrive, le point ne peut plus être considéré comme appartenant à l'espace-temps.

Une telle occurrence peut mener à l'émergence d'un horizon de Cauchy, un point *p* qui est dans le futur de la singularité ne peut pas être dans le domaine de dépendance d'une hypersurface qui est dans le passé de la singularité.



Tous ces obstacles peuvent aussi se produire dans le problème des valeurs initiales en relativité générale, quand on essaie de faire évoluer la métrique, elle-même, depuis des valeurs initiales.

Synthèse des difficultés

La possibilité de prendre une mauvaise hypersurface de départ n'est pas fréquente.

Il faut être attentif, en cas de résolution numérique de l'équation d'Einstein, à ne pas faire un mauvais choix d'hypersurface de départ qui peut conduire à des calculs inextricables, même si, en principe, une solution complète existe.

La relativité générale s'efforce d'éviter les boucles temporelles, il y a des solutions qui les incluent, mais elles ne résultent pas d'une évolution à partir de données initiales.

Les singularités sont par contre incontournables. Le simple fait que la gravitation soit toujours attractive génère une concentration de matière, augmentant la courbure et qui peut dégénérer en une singularité.

Principe de l'approche ADM

Généralités

Ceci synthétise et complète la justification préalable à la méthode que nous avons donnée.

L'approche suppose un découpage (feuilletage) de l'espace-temps en hypersurfaces *S* spatiales *3D* (feuilles) dont les points sont définis par les coordonnées[1002] x^i, chaque feuille étant étiquetée par sa coordonnée temporelle $x^0 = t$.

Les variables dynamiques sont le tenseur métrique *3D* de ces hypersurfaces spatiales $g_{ij}(t,x^k)$ et un moment conjugué noté $\pi^{ij}(t,x^k) = -g^{1/2}(K^{ij} - g^{ij}K)$ qui n'est pas directement la dérivée de g_{ij} par rapport à *t,* mais qui est étroitement relié à la seconde forme fondamentale (courbure extrinsèque). Il a été choisi pour des raisons d'interprétation géométrique.

Dans le chapitre *18,* nous décrivons la forme simple que prend le tenseur K_{ij} qui est la rétroprojection sur l'hypersurface spatiale 3D du tenseur $K_{\mu\nu}$ de courbure extrinsèque (deuxième forme fondamentale), quand le vecteur normal à l'hypersurface est aussi "géodésique".

Ces variables dynamiques permettent d'écrire les équations du mouvement de la relativité générale sous la forme d'équations de Hamilton.

Compte tenu des symétries de ces variables (6 valeurs indépendantes au maximum par variable soit 12 pour les deux), on va réduire les degrés de liberté en imposant des contraintes.

Ces contraintes sont fournies par quatre multiplicateurs de Lagrange, *N* (un scalaire) qui est le "pas temporel" (Lapse) et N^i (un 3-vecteur) qui est le vecteur "d'entraînement" [1003](shift-vector).

Ces contraintes régissent la façon dont les feuilles sont assemblées pour générer l'espace-temps.

Nous avons vu qu'une indétermination sur les coordonnées et les équations y faisant référence liée à l'invariance par changement de coordonnées demeurait mais pouvait être levée par le choix d'une jauge.

La décomposition standard ADM de *4D* en *3D+1D* choisit n^μ, qui est le vecteur normalisé de type temps orthogonal aux feuilles (à *t = constante*), comme unité de temps orienté vers le futur et définit *N* par :

$$n^\mu = N.t^{,\mu} = N.g^{\mu\nu}t;_\nu = N.g^{\mu\nu}\partial_\nu t. \qquad \text{(A9-1)}\ ^{1004}$$

Cette relation traduit l'orthogonalité de n^μ aux hypersurfaces *t = constante* et donne la valeur de *N* puisque $n^\mu n_\mu = -1$ et *t* étant une fonction on peut remplacer la dérivée covariante par la dérivée ordinaire.

[1002]Conformément aux usages, les indices latins comme *i* dénotent les indices spatiaux, ici *i = 1,2,3* et les indices grecs la métrique *4D.*

[1003]Il a été appelé ainsi dans le modèle de la rivière mais dans l'analyse ADM, compte tenu de son interprétation géométrique, on pourrait aussi bien l'appeler "vecteur de glissement"

[1004]L'orthogonalité de $g^{\mu\nu}\partial_\nu t$ aux vecteurs de l'hypersurface définie par *t = cste* se déduit de: $dt/d\lambda = 0$ sur toute courbe appartenant à l'hypersurface. Ceci donne $dt/d\lambda = (\partial t/\partial x^\mu)(dx^\mu/d\lambda) = 0$, produit scalaire du vecteur tangent à la courbe dans l'hypersurface, de composantes $dx^\mu/d\lambda$ et de $V^\nu = g^{\mu\nu}(\partial t/\partial x^\mu)$. Ces vecteurs sont orthogonaux.

Le vecteur d'entraînement N^μ est défini par

$$N^\mu = t^\mu - N.n^\mu, \qquad \text{(A9-2)}$$

où

$$N^\mu n_\mu \equiv 0. \qquad \text{(A9-3)}$$

Ce qui fait que dans ce référentiel, $N^\mu = (0,N^i)$

Si la métrique, euclidienne, dans notre cas, sur chaque feuille S est notée g_{ij} (définie comme rétroprojection de $g_{\mu\nu}$ sur la feuille S), la métrique spatio-temporelle résultante est

$$ds^2 = -N^2\,dt^2 + g_{ij}\,(dx^i+N^i dt)(dx^j+N^j dt), \qquad \text{(A9-4)}$$

où g_{ij} est considérée comme la variable fondamentale, tandis que N et N^i sont les paramètres que nous avons définis précédemment.

Nous avons vu comment cela était utilisé dans les équations d'Einstein et comment il fallait aussi définir les dérivées pour spécifier les conditions initiales.

Interprétation géométrique du vecteur d'entraînement N^i et du pas temporel N

La définition donnée ci-dessus permet de montrer la signification géométrique de N et N^i.

Représentons deux hypersurfaces infiniment proches (feuilles S1 et S2) planes.

Le vecteur *O1-O2* représente le vecteur temps $(\partial_t)^\mu$. Dans la forme de Painlevé ce vecteur (en bleu) n'est pas normal aux hypersurfaces. Le vecteur normal est *O1-O'1*.

Le vecteur d'entraînement (en rouge) de composantes purement spatiales N^i est alors *O2-O'1* dont les composantes sont les projections sur les axes de coordonnées (ici *x* et *y)*.

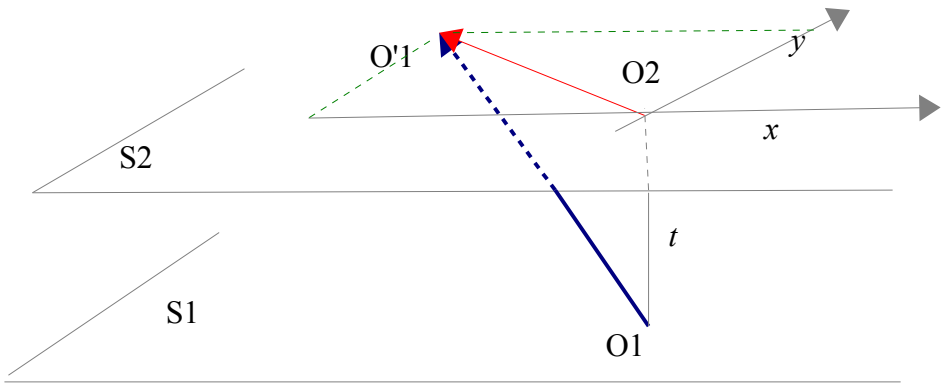


Figure A9-1*. Visualisation de la signification géométrique du vecteur d'entraînement.*

Montrons que le scalaire N vaut $(-g^{00})^{-1/2}$. Par définition n^μ vaut[1005] :

[1005]Comme t est une fonction, la dérivée covariante qui est égale à la dérivée ordinaire $\partial_v t$, est le gradient de t.

$$n^{\mu} = \frac{g^{\mu\nu}\partial_{\nu} t}{[|(g^{\mu\nu}\partial_{\nu} t)(\partial_{\mu} t)|]^{1/2}} = g^{\mu\nu}\partial_{\nu} t\,(-g^{00})^{-1/2}. \qquad (A9\text{-}5)$$

En effet le gradient de la coordonnée *t* n'a qu'une composante non nulle[1006]: $n_{\mu} = \{-1, 0, 0, 0\}$.

Le dénominateur de l'équation (A9-5) ci-dessus vaut donc $[|(g^{00}\partial_0 t)(\partial_0 t)|]^{1/2} = (-g^{00})^{1/2}$.

En rapprochant (A9-5) de (A9-1) on voit que $N = (-g^{00})^{-1/2}$.

Assemblage des feuilles spatiales 3D dans le formalisme ADM

Les feuilles sont à distante constante (mesurée sur le vecteur n^{μ} normal à la feuille) grâce à l'utilisation de *N,* ce qui est adapté à une intégration numérique.

Au cours du parcours temporel, les feuilles subissent un glissement purement spatial par le vecteur d'entraînement de composantes N^i.

Ceci explicite la signification géométrique de *N* et N^i.

Paramètres et équations essentielles de la décomposition 3+1 du champ d'Einstein

En reprenant le chapitre *3-2* de **Arnowitt R. Deser S. Misner C.W** (2004), avec ses notations, nous retenons:

$$g_{ij} \equiv {}^4g_{ij}, \quad N \equiv \frac{1}{\sqrt{-{}^4g^{00}}}, \quad N_i \equiv {}^4g_{0i} \qquad (3.9a),$$

$$\pi^{ij} \equiv \sqrt{-{}^4g}\left({}^4\Gamma^0_{pq} - g_{pq}\,{}^4\Gamma^0_{rs}\,g^{rs}\right)g^{ip}\,g^{jq} \qquad (3.9b).$$

Le moment conjugué π^{ij} dont la signification géométrique est naturelle est utilisé en lieu et place de la dérivée de g_{ij}. En effet, il est étroitement lié au tenseur contravariant de courbure extrinsèque et met en œuvre les dérivées spatiales de la métrique à travers les symboles de Christoffel d'indices spatiaux. Cela s'écrit

$$\pi^{ij} = -\,g^{1/2}(K^{ij} - g^{ij}K),$$

où $K_{ij} = n_{(i;j)}$ est le tenseur de courbure extrinsèque [1007] (deuxième forme fondamentale) et ***n*** le vecteur unitaire normal à l'hypersurface.

Le préfixe indiciel haut 4 indique que nous faisons référence aux entités de l'espace-temps à 4 dimensions. Son absence indique que nous faisons référence aux entités spatiales à 3 dimensions, en particulier g^{ij} dans (3.9) est la métrique inverse de g_{ij}.

La métrique complète ${}^4g_{\mu\nu}$ et ${}^4g^{\mu\nu}$ peut s'écrire avec (3.9a*)*

$${}^4g_{00} = -(N^2 - N_i N^i), \qquad (3.10)$$

où $N^i = g^{ij}N_j$, ${}^4g^{0i} = N^i/N^2$, ${}^4g^{00} = -1/N^2$, (3.11a)

${}^4g^{ij} = g^{ij} - (N^iN^j/N^2)$. (3.11b)

Une relation utile est: $\sqrt{-{}^4g} = N\sqrt{g}$. (3.12)

[1006] La valeur *-1* pour la composante *t* de n_{μ} résulte de l'orientation de n^{μ} vers les *t* croissants et de $n_{\mu}n^{\mu} = -1$.

[1007] C'est l'équation qui est donnée dans Arnowitt R. Deser S. Misner C.W (2004) p.9. Notons que cette équation est valide quand le quadrivecteur ***n*** normal à l'hypersurface est aussi géodésique, ce que les auteurs semblent supposer. Voir chapitre *18* pour la définition du tenseur de courbure extrinsèque dans le cas général.

En termes des éléments définis en (3.9), le Lagrangien de la relativité générale devient

$$L=\sqrt{-^4g}\ {}^4R \ = \ g_{ij}\partial_t\pi^{ij}-N\,R^0-N_i\,R^i-2\partial_i\left(\pi^{ij}N_j-\frac{1}{2}\pi\,N^i+\nabla^i N\sqrt{g}\right) \quad ,(3.13)$$

où

$$R^0\equiv-\sqrt{g}\left[{}^3R+g^{-1}\left(\frac{\pi^2}{2}-\pi^{ij}\pi_{ij}\right)\right] \qquad (3.14a) \ ,$$

$$R^i\equiv-2\nabla_j\pi^{ij} \qquad (3.14b) \ .$$

La composante R^0 associée au temps (donc à l'énergie) est appelée la contrainte Hamiltonienne.

Notons que c'est un scalaire construit à partir du scalaire g dérivé de la métrique, du scalaire de Ricci 3D et de scalaires dérivés du moment conjugué $\pi = g_{ij}\pi^{ij}$ et $\pi_{ij}\pi^{ij}$.

Les composantes R^i définissent un 3-vecteur spatial, construit à partir de π^{ij}, appelé la contrainte des moments spatiaux.

Ces éléments sont définis dans l'hypersurface spatiale.

On note que N et N_i sont des multiplicateurs de Lagrange dans le Lagrangien, contraignant celui-ci par 4 équations supplémentaires.

${}^3R$ est le scalaire de Ricci calculé à partir de la métrique spatiale g_{ij}, | symbolise la dérivée covariante utilisant cette métrique et les indices spatiaux sont élevés ou abaissés en utilisant g^{ij} et g_{ij} et $\pi = \pi^i{}_i$.

On autorise des dérivées spatiales du second ordre pour éliminer des termes tels que Γ^k_{ij}.

On peut vérifier que le Lagrangien au premier ordre[1008] (3.13) permet de dériver les équations d'Einstein.

Dans la suite du document, les auteurs donnent une interprétation géométrique des variables dynamiques et construisent la forme canonique associée à la relativité générale avant de rentrer dans le détail de la résolution et de sa discussion.

Ceci n'étant pas nécessaire à notre propos nous ne le développerons pas.

[1008]Dans le formalisme ADM on utilise la forme de Palatini (action ne comportant que des dérivées premières, ceci est explicité au chapitre *3-1*.

Détails du calcul ADM dans le cas de la forme cartésienne de Painlevé

Ce calcul est fait en utilisant un programme spécifique réalisé dans Mathematica 4 adapté du fichier "Painlevé_4D_ADM_final.nb

Éléments de base utilisés dans le formalisme ADM pour la forme de Painlevé

Initialisation des paramètres.
Définition du nombre de dimensions.

```
n = 4.
```

Définition des coordonnées.

```
coord= {t, x, y, z}
```

Définition de la métrique 4D.

```
metric = {{-1 + (2*m/(x^2+y^2+z^2)^(1/2)), x*((2*m)^(1/2))/(x^2+y^2+z^2)^(3/4),
   y*((2*m)^(1/2))/(x^2+y^2+z^2)^(3/4), z*((2*m)^(1/2))/(x^2+y^2+z^2)^(3/4)},
  {x*((2*m)^(1/2))/(x^2+y^2+z^2)^(3/4), 1, 0, 0}, {y*((2*m)^(1/2))/(x^2+y^2+z^2)^(3/4), 0, 1, 0},
  {z*((2*m)^(1/2))/(x^2+y^2+z^2)^(3/4), 0, 0, 1}}
```

$$\left\{\left\{-1+\frac{2\,m}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ \frac{\sqrt{2}\,\sqrt{m}\,x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/4}},\ \frac{\sqrt{2}\,\sqrt{m}\,y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/4}},\ \frac{\sqrt{2}\,\sqrt{m}\,z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/4}}\right\},\right.$$
$$\left.\left\{\frac{\sqrt{2}\,\sqrt{m}\,x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/4}},\ 1,\ 0,\ 0\right\},\ \left\{\frac{\sqrt{2}\,\sqrt{m}\,y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/4}},\ 0,\ 1,\ 0\right\},\ \left\{\frac{\sqrt{2}\,\sqrt{m}\,z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/4}},\ 0,\ 0,\ 1\right\}\right\}$$

Calcul de la métrique inverse 4D.

```
inversemetric = Simplify[Inverse[metric]]
```

$$\left\{\left\{-1,\ \frac{\sqrt{2}\,\sqrt{m}\,x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/4}},\ \frac{\sqrt{2}\,\sqrt{m}\,y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/4}},\ \frac{\sqrt{2}\,\sqrt{m}\,z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/4}}\right\},\right.$$
$$\left\{\frac{\sqrt{2}\,\sqrt{m}\,x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/4}},\ \frac{-2\,m\,x^2+(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},\ -\frac{2\,m\,x\,y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},\ -\frac{2\,m\,x\,z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right\},$$
$$\left\{\frac{\sqrt{2}\,\sqrt{m}\,y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/4}},\ -\frac{2\,m\,x\,y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},\ \frac{-2\,m\,y^2+(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},\ -\frac{2\,m\,y\,z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right\},$$
$$\left.\left\{\frac{\sqrt{2}\,\sqrt{m}\,z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/4}},\ -\frac{2\,m\,x\,z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},\ -\frac{2\,m\,y\,z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},\ \frac{-2\,m\,z^2+(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right\}\right\}$$

Calcul des symboles de Christoffel 4D

```
affine := affine = Simplify[Table[(1 / 2) * Sum[(inversemetric[[i, s]]) *
      (D[metric[[s, j]], coord[[k]] ] +
        D[metric[[s, k]], coord[[j]] ] - D[metric[[j, k]], coord[[s]] ]), {s, 1, n}],
    {i, 1, n}, {j, 1, n}, {k, 1, n}] ]
```

Edition de ces symboles de Christoffel, on rappelle que les indices varient de 1 à 4 (1 est le temps, 2,3,4 respectivement x, y, z). Par ailleurs le premier indice est l'indice haut: *Γ[i, j, k] se lit* $\Gamma^{i}_{j\,k}$

$$\Gamma[2,\,4,\,4] \quad \frac{m\,x\,(2\,x^2+2\,y^2-z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

$$\Gamma[3,\,1,\,1] \quad \frac{m\,y\,\left(-2\,m+\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$$\Gamma[3,\,2,\,1] \quad -\frac{\sqrt{2}\,m^{3/2}\,x\,y}{(x^2+y^2+z^2)^{9/4}}$$

$$\Gamma[3,\,2,\,2] \quad \frac{m\,y\,(-x^2+2\,(y^2+z^2))}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

$$\Gamma[3,\,3,\,1] \quad -\frac{\sqrt{2}\,m^{3/2}\,y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{9/4}}$$

$$\Gamma[3,\,3,\,2] \quad -\frac{3\,m\,x\,y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

$$\Gamma[3,\,3,\,3] \quad \frac{m\,y\,(2\,x^2-y^2+2\,z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

$$\Gamma[3,\,4,\,1] \quad -\frac{\sqrt{2}\,m^{3/2}\,y\,z}{(x^2+y^2+z^2)^{9/4}}$$

$$\Gamma[3,\,4,\,2] \quad -\frac{3\,m\,x\,y\,z}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

$$\Gamma[3,\,4,\,3] \quad -\frac{3\,m\,y^2\,z}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

$$\Gamma[3,\,4,\,4] \quad \frac{m\,y\,(2\,x^2+2\,y^2-z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

$$\Gamma[4,\,1,\,1] \quad \frac{m\,z\,\left(-2\,m+\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$$\Gamma[4,\,2,\,1] \quad -\frac{\sqrt{2}\,m^{3/2}\,x\,z}{(x^2+y^2+z^2)^{9/4}}$$

$$\Gamma[4,\,2,\,2] \quad \frac{m\,z\,(-x^2+2\,(y^2+z^2))}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

$$\Gamma[4,\,3,\,1] \quad -\frac{\sqrt{2}\,m^{3/2}\,y\,z}{(x^2+y^2+z^2)^{9/4}}$$

$$\Gamma[4,\,3,\,2] \quad -\frac{3\,m\,x\,y\,z}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

$$\Gamma[4,\,3,\,3] \quad \frac{m\,z\,(2\,x^2-y^2+2\,z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

$$\Gamma[4,\,4,\,1] \quad -\frac{\sqrt{2}\,m^{3/2}\,z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{9/4}}$$

$$\Gamma[4,\,4,\,2] \quad -\frac{3\,m\,x\,z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

$$\Gamma[4,\,4,\,3] \quad -\frac{3\,m\,y\,z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

$$\Gamma[4,\,4,\,4] \quad \frac{m\,z\,(2\,x^2+2\,y^2-z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

$$\Gamma[1,\,1,\,1] \quad \frac{\sqrt{2}\,m^{3/2}}{(x^2+y^2+z^2)^{5/4}}$$

$$\Gamma[1,\,2,\,1] \quad \frac{m\,x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$\Gamma[1,\,2,\,2] \quad \frac{\sqrt{m}\,(x^2-2\,(y^2+z^2))}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$$

$$\Gamma[1,\,3,\,1] \quad \frac{m\,y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$\Gamma[1,\,3,\,2] \quad \frac{3\,\sqrt{m}\,x\,y}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$$

$$\Gamma[1,\,3,\,3] \quad \frac{\sqrt{m}\,(-2\,x^2+y^2-2\,z^2)}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$$

$$\Gamma[1,\,4,\,1] \quad \frac{m\,z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$\Gamma[1,\,4,\,2] \quad \frac{3\,\sqrt{m}\,x\,z}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$$

$$\Gamma[1,\,4,\,3] \quad \frac{3\,\sqrt{m}\,y\,z}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$$

$$\Gamma[1,\,4,\,4] \quad \frac{\sqrt{m}\,(-2\,x^2-2\,y^2+z^2)}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{7/4}}$$

$$\Gamma[2,\,1,\,1] \quad \frac{m\,x\,\left(-2\,m+\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$$\Gamma[2,\,2,\,1] \quad -\frac{\sqrt{2}\,m^{3/2}\,x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{9/4}}$$

$$\Gamma[2,\,2,\,2] \quad \frac{m\,x\,(-x^2+2\,(y^2+z^2))}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

$$\Gamma[2,\,3,\,1] \quad -\frac{\sqrt{2}\,m^{3/2}\,x\,y}{(x^2+y^2+z^2)^{9/4}}$$

$$\Gamma[2,\,3,\,2] \quad -\frac{3\,m\,x^2\,y}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

$$\Gamma[2,\,3,\,3] \quad \frac{m\,x\,(2\,x^2-y^2+2\,z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

$$\Gamma[2,\,4,\,1] \quad -\frac{\sqrt{2}\,m^{3/2}\,x\,z}{(x^2+y^2+z^2)^{9/4}}$$

$$\Gamma[2,\,4,\,2] \quad -\frac{3\,m\,x^2\,z}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

$$\Gamma[2,\,4,\,3] \quad -\frac{3\,m\,x\,y\,z}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

Calcul de *g*, racine carrée de l'opposé du déterminant de la métrique 4D, définition de la métrique spatiale euclidienne 3D *gij*, introduction de *scalar*, scalaire de Ricci 4D qui est nul

(solution dans le vide), et du scalaire de Ricci de l'hypersurface spatiale 3D euclidienne qui vaut aussi 0.

```
g = Simplify[(-Det[metric])^(1/2)]
gij = Table[metric[[i+1, j+1]], {i, 1, n-1}, {j, 1, n-1}]
scalar = 0
scalarspace = 0
```

```
g  = 1
gij = {{1, 0, 0},{0, 1, 0},{0, 0, 1}}        l'espace est euclidien.
scalar = 0                                   Le scalaire de Ricci est nul (espace vide)
scalarspace = 0                              Le scalaire de Ricci de la partie spatiale euclidienne est nul
```

Calcul de la racine carrée du déterminant de l'espace 3D *gij* et du moment conjugué π^{ij}.

$$\pi^{ij} \equiv \sqrt{-{}^4g}\left({}^4\Gamma^0_{pq} - g_{pq}\,{}^4\Gamma^0_{rs}\,g^{rs}\right)g^{ip}\,g^{jq}$$

```
gspace = Simplify[Sqrt[Det[gij]]        on calcule la racine carrée du déterminant
invgij = Simplify[Inverse[gij]]
```

```
momentconj =
 Simplify[
  Table[
   g*
    Sum[
     (affine[[1, p+1, q+1]] -
        gij[[p, q]]*Sum[affine[[1, k+1, l+1]] invgij[[k, l]], {k, 1, n-1}, {l, 1, n-1}])*
      invgij[[i, p]]*invgij[[j, q]], {p, 1, n-1}, {q, 1, n-1}], {i, 1, n-1}, {j, 1, n-1}]]
```

```
gspace = 1                               Le déterminant de la métrique spatiale vaut 1 de façon évidente.

Invgij = {{1, 0, 0},{0, 1, 0},{0, 0, 1}}  La métrique euclidienne est égale à son
                                          inverse
```

Le moment conjugué π^{ij} vaut:

$$\left\{\left\{\frac{\sqrt{m}\ (4x^2+y^2+z^2)}{\sqrt{2}\ (x^2+y^2+z^2)^{7/4}}, \frac{3\sqrt{m}\ x\,y}{\sqrt{2}\ (x^2+y^2+z^2)^{7/4}}, \frac{3\sqrt{m}\ x\,z}{\sqrt{2}\ (x^2+y^2+z^2)^{7/4}}\right\},\right.$$
$$\left\{\frac{3\sqrt{m}\ x\,y}{\sqrt{2}\ (x^2+y^2+z^2)^{7/4}}, \frac{\sqrt{m}\ (x^2+4y^2+z^2)}{\sqrt{2}\ (x^2+y^2+z^2)^{7/4}}, \frac{3\sqrt{m}\ y\,z}{\sqrt{2}\ (x^2+y^2+z^2)^{7/4}}\right\},$$
$$\left.\left\{\frac{3\sqrt{m}\ x\,z}{\sqrt{2}\ (x^2+y^2+z^2)^{7/4}}, \frac{3\sqrt{m}\ y\,z}{\sqrt{2}\ (x^2+y^2+z^2)^{7/4}}, \frac{\sqrt{m}\ (x^2+y^2+4z^2)}{\sqrt{2}\ (x^2+y^2+z^2)^{7/4}}\right\}\right\}$$

Calcul des symboles de Christoffel de l'hypersurface spatiale 3D et du Hamiltonien $H = R^0$. Notons que le scalaire de Ricci spatial ${}^3R$ est nul (espace euclidien)

$$R^0 \equiv -\sqrt{g}\left[{}^3R + g^{-1}\left(\frac{\pi^2}{2} - \pi^{ij}\pi_{ij}\right)\right] \qquad (3.14a)$$

```
affinespace = Simplify[Table[(1 / 2) * Sum[(invgij[[i, s]]) *
      (D[gij[[s, j]], coord[[k + 1]] ] +
        D[gij[[s, k]], coord[[j + 1]] ] - D[gij[[j, k]], coord[[s + 1]] ]), {s, 1, n - 1}],
   {i, 1, n - 1}, {j, 1, n - 1}, {k, 1, n - 1}] ]
H =
 Simplify[
  -gspace *
   (scalarspace + (gspace^(-2)) * (((Sum[metric[[i + 1, j + 1]] momentconj[[i, j]], {i, 1, n - 1}, {j, 1, n - 1}])^2) / 2) -
     Sum[momentconj[[p, s]] Sum[momentconj[[k, l]] metric[[k + 1, p + 1]] metric[[l + 1, s + 1]], {k, 1, n - 1}, {l, 1, n - 1}],
      {p, 1, n - 1}, {s, 1, n - 1}])]
```

```
affinespace = {{{0, 0, 0},{0, 0, 0},{0, 0, 0}},{{0, 0, 0},{0, 0, 0},
{0, 0, 0}},{0, 0, 0},{0, 0, 0},{0, 0, 0}}}
```

```
H = 0
```

Le Hamiltonien est identiquement nul

Calcul de $R^i = -2\pi^{ij};_j$ qui est la divergence covariante en métrique 3D spatiale *gij*. La métrique spatiale étant euclidienne, les dérivées covariantes se réduise à des dérivées ordinaires.

```
Divmoment =
 Simplify[
  Table[
   Sum[(D[momentconj[[i, j]], coord[[j + 1]]] + Sum[affinespace[[i, j, l]] momentconj[[l, j]], {l, 1, n - 1}] +
      Sum[affinespace[[j, j, k]] momentconj[[k, i]], {k, 1, n - 1}]), {j, 1, n - 1}], {i, 1, n - 1}]]
```

```
Divmoment = {0, 0, 0}
```

$R^i = -2\pi^{ij};_j$ *est identiquement nul*

On peut aussi calculer l'équation (3.15a) citée précédemment qui donne $\partial_t g_{ij}$ qui donne un résultat nul, comme on pouvait s'y attendre puisque la métrique ne dépend pas de *t*.

Annexe 10 : récapitulatif de quelques formes de métriques de la solution et tétrades associées utilisées dans le document

1- Conventions générales

Métrique

Lorsque la métrique $g_{\mu\nu}$ est décrite sous forme d'un tableau l'indice μ indexe la ligne du tableau et l'indice ν la colonne. Les coordonnées sphériques sont dans l'ordre t, r, θ, φ et les coordonnées cartésiennes t, x, y, z.

Tétrade

Lorsque la tétrade $e_\mu^{\ m}$ est représentée sous forme de tableau l'indice μ indexe la ligne et m la colonne. Pour la tétrade inverse $e_m^{\ \mu}$ c'est l'inverse. Rappelons que la tétrade $e_\mu^{\ m}$ est définie par la relation :

$$g_{\mu\nu} = \eta_{mn}\, e_\mu^{\ m}\, e_\nu^{\ n}.$$

2- Forme de Painlevé

Coordonnées sphériques

Métrique

La forme de Painlevé pour le trou noir s'écrit :

$$ds^2 = -(1 - 2GM/r)dt^2 + 2(2GM/r)^{1/2}\, dt.dr + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2),$$

et

$$ds^2 = -(1 - 2GM/r)dt^2 - 2(2GM/r)^{1/2}\, dt.dr + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2).$$

pour le trou blanc.

Tétrades dans la forme de Painlevé (trou noir) en coordonnées sphériques.

Tétrades inverses $e_m^{\ \mu}$ ($Csc[\theta] = (\sin\theta)^{-1}$)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2}\sqrt{\frac{m}{r}} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\text{Csc}[\theta]}{r} \end{pmatrix}$$

Tétrades $e_\mu^{\ m}$ elles-mêmes s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2}\sqrt{\frac{m}{r}} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r\,\text{Sin}[\theta] \end{pmatrix}$$

Nous pouvons vérifier que la relation

$$g_{\mu\nu} = \eta_{mn}\, e_\mu^{\ m}\, e_\nu^{\ n},$$

est bien vérifiée pour la valeur de la matrice $e_\mu^{\ m}$ donnée.

Coordonnées cartésiennes

Métrique

Rappelons que la forme de la métrique de Painlevé en coordonnées cartésiennes avec,

$$\beta = -(r_s/r)^{1/2}, \qquad \beta^{\mu} = \beta \{0, x/r, y/r, z/r\}, \qquad r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

peut s'écrire très simplement :

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} = \eta_{\mu\nu} (dx^{\mu} - \beta^{\mu} dx^0)(dx^{\nu} - \beta^{\nu} dx^0).$$

Tétrades

Elles se déduisent directement de la forme de la métrique ci-dessus par comparaison à l'équation

$$g_{\mu\nu} = \eta_{mn} e_{\mu}^{\ m} e_{\mu}^{\ m},$$

la tétrade s'écrit

$$e_{\mu}^{\ m} = \delta_{\mu}^{\ m} - \delta_{\mu}^{\ 0} \beta^m,$$

et la tétrade inverse $e_m^{\ \mu}$ s'écrit :

$$e_m^{\ \mu} = \delta_m^{\ \mu} + \delta_m^{\ 0} \beta^{\mu}.$$

On remarque que la tétrade inverse ne diffère, symboliquement, que par le signe du deuxième terme.

3- Forme de Schwarzschild.

Coordonnées sphériques

Métrique

Traitons le cas de cette forme de la métrique qui est souvent donnée comme référence pour cette solution de la relativité générale :

$$ds^2 = -(1-2GM/r)dt^2 - [1/(1-2M/r)]dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2).$$

Tétrades

Les tétrades et tétrades inverses qui déterminent la transformation de coordonnées valent :

Tétrade inverse = $e_m{}^{\mu}$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{1-\frac{2m}{r}} & \sqrt{2}\sqrt{\frac{m}{r}} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}\sqrt{\frac{m}{r}}}{1-\frac{2m}{r}} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\text{Csc}[\theta]}{r} \end{pmatrix}$$

Tétrade = $e_{\mu}{}^{m}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2}\sqrt{\frac{m}{r}} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}\sqrt{\frac{m}{r}}\,r}{2m-r} & \frac{r}{-2m+r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r\,\text{Sin}[\theta] \end{pmatrix}$$

Coordonnées cartésiennes

On connaît bien la forme de Schwarzschild en coordonnées sphériques. Pour définir cette même forme en coordonnées cartésiennes on l'écrit :

$$ds^2 = -(1-2M/r)dt^2 - [1- 1/(1-2M/r)]dr^2 + \{dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)\},$$

La partie entre accolades vaut

$$\{dx^2+dy^2+dz^2\},$$

avec

$$r = (x^2+y^2+z^2)^{1/2},$$

soit

$$dr = (xdx+ydy+zdz)(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}.$$

En substituant et en effectuant, on obtient facilement la forme cartésienne de Schwarzschild donnée ci-dessous sous forme matricielle *(t, x, y, z)*.

$$\begin{pmatrix} -1+\frac{2m}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\frac{2mx^2}{(x^2+y^2+z^2)\left(-2m+\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)} & \frac{2mxy}{(x^2+y^2+z^2)\left(-2m+\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)} & \frac{2mxz}{(x^2+y^2+z^2)\left(-2m+\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)} \\ 0 & \frac{2mxy}{(x^2+y^2+z^2)\left(-2m+\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)} & 1+\frac{2my^2}{(x^2+y^2+z^2)\left(-2m+\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)} & \frac{2myz}{(x^2+y^2+z^2)\left(-2m+\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)} \\ 0 & \frac{2mxz}{(x^2+y^2+z^2)\left(-2m+\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)} & \frac{2myz}{(x^2+y^2+z^2)\left(-2m+\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)} & 1+\frac{2mz^2}{(x^2+y^2+z^2)\left(-2m+\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)} \end{pmatrix}$$

On peut calculer les tétrades et tétrades inverses qui permettent de définir une base orthonormée (minkowskienne) dans ces coordonnées, elles valent respectivement

Tétrade = $e_\mu{}^m$,

$$\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2}\sqrt{\frac{m}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}} & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}\,x\sqrt{\frac{m}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}}{-2m+\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \frac{x}{-2m+\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \frac{xz}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -\frac{\sqrt{2}\,y\sqrt{\frac{m}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}}{-2m+\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \frac{y}{-2m+\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \frac{yz}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -\frac{\sqrt{2}\,z\sqrt{\frac{m}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}}{-2m+\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \frac{z}{-2m+\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & -\sqrt{1-\frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}} & 0 \end{pmatrix}$$

Tétrade inverse= $e_m{}^\mu$.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{1-\frac{2m}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}} & \frac{\sqrt{2}\,x\sqrt{\frac{m}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \frac{\sqrt{2}\,y\sqrt{\frac{m}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \frac{\sqrt{2}\,z\sqrt{\frac{m}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \frac{\sqrt{2}\sqrt{m}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{1/4}}{-2m+\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ 0 & \frac{xz}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \frac{yz}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & -\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ 0 & -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & 0 \end{pmatrix}$$

4- Forme de Finkelstein

Métrique en coordonnées sphériques

Pour le trou noir

$$ds^2 = -\left(1-\frac{2Gm}{r}\right)dt^2 + 2\,dr.dt + r^2\left(\sin^2(\theta)\,d\varphi^2 + d\theta^2\right) \quad ,$$

et pour le trou blanc

$$ds^2 = -\left(1-\frac{2Gm}{r}\right)dt^2 - 2\,dr.dt + r^2\left(\sin^2(\theta)\,d\varphi^2 + d\theta^2\right) \quad .$$

Tétrades (Trou noir seulement): $e_\mu{}^m$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2}\sqrt{\frac{m}{r}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{-1+\sqrt{2}\sqrt{\frac{m}{r}}} & \frac{1}{1-\sqrt{2}\sqrt{\frac{m}{r}}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r\,\mathrm{Sin}[\theta] \end{pmatrix}$$

Métrique en coordonnées cartésiennes du trou noir

La forme cartésienne de la métrique s'écrit.

$$\begin{pmatrix} -1+\frac{2m}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \frac{y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2} & -\frac{xy}{x^2+y^2+z^2} & -\frac{xz}{x^2+y^2+z^2} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & -\frac{xy}{x^2+y^2+z^2} & \frac{x^2+z^2}{x^2+y^2+z^2} & -\frac{yz}{x^2+y^2+z^2} \\ \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & -\frac{xz}{x^2+y^2+z^2} & -\frac{yz}{x^2+y^2+z^2} & \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+z^2} \end{pmatrix}$$

Elle s'obtient facilement à partir de la forme en coordonnées sphériques

$$ds^2 = -(1-2GM/r)dt^2 + 2dt.dr + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2),$$

par la méthode que nous avons déjà utilisée pour la forme de Schwarzschild, en l'écrivant

$$ds^2 = -(1-2M/r)dt^2 + 2dt.dr - dr^2 + \{dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)\},$$

où l'expression entre accolades vaut $dx^2 + dy^2 + dz^2$.

Tétrades (μ donne la ligne, m la colonne) :

$$e_{\mu}{}^{m}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{\sqrt{2}\,\sqrt{m}}{(x^2+y^2+z^2)^{1/4}} & 0 & 0 \\ -\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{1/4}\,(-\sqrt{2}\,\sqrt{m}+(x^2+y^2+z^2)^{1/4})} & \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{1/4}\,(-\sqrt{2}\,\sqrt{m}+(x^2+y^2+z^2)^{1/4})} & \frac{x\,z}{\sqrt{x^2+y^2}\,\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{1/4}\,(-\sqrt{2}\,\sqrt{m}+(x^2+y^2+z^2)^{1/4})} & \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{1/4}\,(-\sqrt{2}\,\sqrt{m}+(x^2+y^2+z^2)^{1/4})} & \frac{y\,z}{\sqrt{x^2+y^2}\,\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{1/4}\,(-\sqrt{2}\,\sqrt{m}+(x^2+y^2+z^2)^{1/4})} & \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{1/4}\,(-\sqrt{2}\,\sqrt{m}+(x^2+y^2+z^2)^{1/4})} & -\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & 0 \end{pmatrix}$$

Tétrade inverse (m donne la ligne, μ la colonne) :

$$e_{m}{}^{\mu}.$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{1-\frac{\sqrt{2}\,\sqrt{m}}{(x^2+y^2+z^2)^{1/4}}} & \frac{\sqrt{2}\,\sqrt{m}\,x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/4}} & \frac{\sqrt{2}\,\sqrt{m}\,y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/4}} & \frac{\sqrt{2}\,\sqrt{m}\,z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/4}} \\ \frac{1}{1-\frac{\sqrt{2}\,\sqrt{m}}{(x^2+y^2+z^2)^{1/4}}} & \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ 0 & \frac{x\,z}{\sqrt{x^2+y^2}\,\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \frac{y\,z}{\sqrt{x^2+y^2}\,\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & -\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ 0 & -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & 0 \end{pmatrix}$$

5- Forme de Kerr-Schild sans rotation.

Métrique en coordonnées sphériques (trou noir) :

$$ds^2 = -(1-2M/r)dt^2 + 2.(2M/r)dt.dr + (1+2M/r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2).$$

Tétrade :

$$e_\mu^{\ m}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2}\sqrt{\frac{m}{r}} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}\sqrt{\frac{m}{r}}}{-1+\sqrt{2}\sqrt{\frac{m}{r}}} & \frac{1+2\sqrt{2}\left(\frac{m}{r}\right)^{3/2}}{1-\frac{2m}{r}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r\,\mathrm{Sin}[\theta] \end{pmatrix}$$

Métrique en coordonnées cartésiennes (trou noir) :

$$\begin{pmatrix} -1+\frac{2m}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \frac{2mx}{x^2+y^2+z^2} & \frac{2my}{x^2+y^2+z^2} & \frac{2mz}{x^2+y^2+z^2} \\ \frac{2mx}{x^2+y^2+z^2} & 1+\frac{2mx^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} & \frac{2mxy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} & \frac{2mxz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \\ \frac{2my}{x^2+y^2+z^2} & \frac{2mxy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} & 1+\frac{2my^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} & \frac{2myz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \\ \frac{2mz}{x^2+y^2+z^2} & \frac{2mxz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} & \frac{2myz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} & 1+\frac{2mz^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \end{pmatrix}$$

.

Tétrade (trou noir) :

$$e_\mu^{\ m}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{\sqrt{2}\sqrt{m}}{(x^2+y^2+z^2)^{1/4}} & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}\sqrt{m}\,x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\left(-\sqrt{2}\sqrt{m}+(x^2+y^2+z^2)^{1/4}\right)} & \frac{x+\frac{2\sqrt{2}\,m^{3/2}x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/4}}}{-2m+\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \frac{xz}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -\frac{\sqrt{2}\sqrt{m}\,y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\left(-\sqrt{2}\sqrt{m}+(x^2+y^2+z^2)^{1/4}\right)} & \frac{y+\frac{2\sqrt{2}\,m^{3/2}y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/4}}}{-2m+\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \frac{yz}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -\frac{\sqrt{2}\sqrt{m}\,z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\left(-\sqrt{2}\sqrt{m}+(x^2+y^2+z^2)^{1/4}\right)} & \frac{z+\frac{2\sqrt{2}\,m^{3/2}z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/4}}}{-2m+\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & -\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & 0 \end{pmatrix}$$

6 -Extension de la forme de Painlevé (avec vitesse non nulle à l'infini)

Nous avons vu que cette forme recouvrait, entre autres, le cas de la forme de Painlevé et celle d'Eddington Finkelstein.

Métrique en coordonnées sphériques

Avec *f = 1-2M/r,* elle s'écrit :

$$ds^2 = -f\,dT^2 + 2\sqrt{1-pf}\,dT\,dr + p\,dr^2 + r^2\,d\Omega^2$$

Métrique en coordonnées cartésiennes (trou noir)

La transformation en coordonnées cartésiennes est laborieuse mais ne présente pas de difficultés nous avons noté *a* le paramètre *p* dans les calculs réalisés avec Mathematica.

Sous forme matricielle elle s'écrit :

$$\begin{pmatrix}
-1+\frac{2m}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \frac{x\sqrt{2am+(1-a)\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/4}} & \frac{y\sqrt{2am+(1-a)\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/4}} & \frac{z\sqrt{2am+(1-a)\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/4}} \\
\frac{x\sqrt{2am+(1-a)\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/4}} & \frac{ax^2+y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2} & \frac{(-1+a)xy}{x^2+y^2+z^2} & \frac{(-1+a)xz}{x^2+y^2+z^2} \\
\frac{y\sqrt{2am+(1-a)\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/4}} & \frac{(-1+a)xy}{x^2+y^2+z^2} & \frac{x^2+ay^2+z^2}{x^2+y^2+z^2} & \frac{(-1+a)yz}{x^2+y^2+z^2} \\
\frac{z\sqrt{2am+(1-a)\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/4}} & \frac{(-1+a)xz}{x^2+y^2+z^2} & \frac{(-1+a)yz}{x^2+y^2+z^2} & \frac{x^2+y^2+az^2}{x^2+y^2+z^2}
\end{pmatrix}$$

Références

Antoci S. & Dierck-Ekkehard Liebscher (2004): "Reinstating Schwarzschild's original manifold and its singularity", gr-qc/0406090, traduction anglaise de l'article de Schwarszschild 'Massenpunktes' (1916).
Antoci S. & Dierck-Ekkehard Liebscher (2003): Gen. Rel. Grav. Vol **35** p. 945.
Appell P. (1904): "Traité de mécanique rationnelle", Gauthier-Villars Paris.
Arnowitt R. Deser S. Misner C.W (2004) The dynamics of General relativity arXiv:gr-qc/0405109v1 19 May 2004. Cet article est une ré-édition du chapitre 7, pp 227-264 de: Gravitation: an introduction to current research, L.Witten ed. Wiley, New York 1962.
Balibar F., Darrigol O. Eisenstaedt J. Pottier L., Ritter J., Stachel J. (1993) "Albert Einstein oeuvres choisies, Relativités I et II", Source du Savoir, Edition du Seuil, Edition du CNRS.
Barbour Julian (2003): "Scale invariant gravity: Particle dynamic". Class Quant. Grav. **20**, 1543-1570, gr-qc 0211021.
Barbour Julian (2011): "The nature of Time and the structure of space". http://platonia.com/FQXi_Full_Proposal_2011.pdf
Barth J.A (1922**)** Vier Vorlessungen über Relativitätstheorie, gehalten in Mai 1921, an der Universität Princeton. Wieweg 1922.
Beaulieu L. Introduction à la Relativité, générale http://www-cosmosaf.iap.fr/beaulieu.pdf.
Becquerel J. (1922) Le principe de relativité et la théorie de la gravitation. Paris.
Becquerel J. (1923) Champ de gravitation d'une sphère matérielle et signification physique de la sphère de Schwarzschild . Paris – Hermann 1923-32p.
Bell J. S. (1987) "Speakable and unspeakable in quantum mechanics" (Cambridge University Press).
Bergmann P.G (1947) "Introduction to the theory of Relativity" (NewYork 1947) Chaps xii, xiii.
Bergström L. & Goobar A. (1999): "Cosmology and Particle astrophysics" Wiley-Praxis.
Bertrand G. (1921) "La loi de Newton et la formule d'Einstein pour le périhélie des planètes" C.R.A.S Note T.173 438-441.
Bizouard C. "E = mc², l'équation de Poincaré, Einstein et Planck" Observatoire de Paris SYRTE. http://annales.org/archives/x/poincaBizouard.pdf.
Blanchet L. (1996-1997), Introduction à la relativité générale DEA d'astrophysique.
Blanchet L. (2003), Introduction à la relativité générale I.A.P, DEA d'astrophysique.
Bompiani E. (1922)"La géométrie des espaces courbes et le tenseur d'énergie d'Einstein" C.R. A.S Note T.174 737-740.
Bondi H. (1957) "Negative Mass in General Relativity, Review of Modern Physics, vol 29, number 3, July 1957.
Borel E.(1921) "Sur les hypothèses fondamentales de la physique et de la géométrie" C.R. A.S Note T.173 189-191.
C. Brans C & Dicke R.H (1961) "Mach's principle and a Relativistic Theory of Gravitation" Physical review,1961.
Brillouin M. (1922a) "Champ isotrope, Sphère fluide hétérogène (Gravitation einsteinienne)" C.R.A.S Note T.174 1585-1589.
Brillouin M. (1922 b) "Gravitation einsteinienne et gravitation newtonienne ; à propos d'une récente note de M. Le Roux" C.R.A.S Note T.175 923.
Brillouin M. (1922c)"Gravitation einsteinienne. Statique. Points singuliers. Le point matériel. Remarques diverses" C.R.A.S Note T.175 1009-1012.
Buhl A. (1921) "Sur le rôle des symétries analytiques dans les théories relativistes" C.R.A.S Note T.173 829-831.

C.R.A.S:http://www.academie-siences.fr/membres/in_memoriam/Einstein/Einstein_publi.htm
Carroll S. (1998) Lectures notes on general relativity. Chapitre 4.
Carroll S. (2003) Spacetime and geometry (Pearson Addison Wesley- 2003).
Cartan E.(1922a) "Sur une définition géométrique du tenseur d'énergie d'Einstein", C.R.A.S Note T.174 437-439.
Cartan E. (1922b)"Sur les espaces généralisés et la théorie de la relativité" C.R.A.S Note T.174 734-737.
Cartan E. (1922c) "Sur les espaces conformes généralisés et l'Univers optique" de E.. C.R.A.S Note T.174 857-860.
Cartan. E. (1922d)"Sur les équations de structure des espaces généralisés et l'expression analytique du tenseur d'Einstein" . C.R.A.S Note T.174 1104-1107.
Carter.B (1968) Global Structure of the Kerr family of gravitational Field Phys. Rev.Vol 174, number 5, oct 1968.
Chandrasekar (1983) The mathematical theory of black holes Oxford.U.
Chazy J. (1921) " Sur les fonctions arbitraires figurant dans le ds² de la gravitation einsteinienne"C.R.A.S Note T.173 905-907.
Chazy J. (1922)"Sur les vérifications astronomiques de la théorie de la relativité" C.R.A.S Note T.174 1157-1160.
Chazy J. (1923a) "Sur l'expression de la loi d'Einstein en coordonnées cartésiennes" C.R.A.S Note T.176 285-286.
Chazy. J.(1923b) "Sur la correction apportée par la théorie de la relativité à la durée de révolution newtonienne des planètes" C.R.A.S Note T.176 666-668.
Chazy J. (1923c) " Sur les effets séculaires de la théorie de la relativité dans les mouvements " C.R.A.S Note T.176 1542-1544.
Damour T. Deser S.(1995) Encyclopédie Universalis "Relativité"Vol 19, p 739-747.
Darmois G. (1923 " Sur l'intégration locale des équations d'Einstein" C.R.A.S Note T.176 646-648 et 731-733.
De Donder : (1921) La gravifique einsteinienne. Obs Roy. Belg. Ann. Juin 1921 et Paris Gauthier Villars.
Delamotte B. (1997): "Un soupçon de théorie des groupes: Groupes des rotations et groupe de Poincaré". LPTHE, Université Paris 7- Denis Diderot, Université Paris 6 -Pierre et Marie Curie.
Doran C. (2000). New form of the kerr metric. Physical review D. Vol 61, 067503.
Droste .J. (1916) "Het van eenenkel centrumin Einstein's theorie des zwaartekracht en de beweging van een stoffelijk punkt in dat veld. Versl. Gewone Vergad Akad.Amst.25,163-180. English translation : the field of a single centre in Einstein's theory of gravitation and the motion of a particle in that field. Proc.Acad. Sci. Amst.,19(i):197-215.
Earman J. & Eisenstaedt J.(1999). Einstein and Singularities. Stud.Hist.Mod.Phys. Vol 30.N°2 pp185-235. Elsevier Science Ltd GB.
Estabrook Frank, Wahlquist Hugo, Christensen Steven, DeWitt Bryce, Smarr Larry, Tsiang Elaine (1973) "Maximally Slicing a Black Hole", Phys. Rev. D 7, 2814–2817**.**
Eddington A. (1921) : traduit par Rossignol, introduction de P. Langevin, Hermann Paris. Exposé théorique de la relativité généralisée.
Einstein A. (1905) : "Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energiegehalt abhängig ?" *Annalen der Physik*., vol. 18: 639 18:639, 905.
Einstein A. (1907) Jahrbuch der Radioaktivität und Electronik, vol IV, p. 411-462; vol V, p 98-99 (corrections).
Einstein A (1916)**.** "Die grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie". Annalen der Physik vol XLIX, 1916, p.769-882.
Einstein A. (1918) Annalen der Physik vol LV, 1918, p. 241-244.

Einstein A. (1939) . Stationnary system with spherical symetry consisting of many gravitating masses. Ann. Math.40 : 922-936.
Eisenstaedt J. (1982). "Histoire et singularités de la solution de Schwarzschild". Archive for history of exact sciences, Vol 27, Number 2, 157-198.
Eisenstaedt J. (1987). Trajectoires et impasses de la solution de Schwarzschild. Archives for History of Exact Sciences. Vol 37, Number 4, p 275-357.
Eisenstaedt J.(1986) La Relativité à l'étiage. Archives for the history of exact sciences. Springer Berlin/Heidelberg, Volume 35,Nb2, p 115-185.
Eisenstaedt J.(1993) "Lemaître and the Schwarzschild Solution." In New Studies in the History of General Relativity. Proceedings of the Third International Conference on the History and Philosophy of General Relativity. Einstein Studies, Vol. 5, John Earman, Michel Janssen, and John D. Norton, eds. Boston: Birkhäuser.
Eddington A.S (1921). espace-temps, gravitation (traduction Rossignol) et Proceedings of the Royal Society of London (A,vol 99, mai 1921).
Eddington A.S (1923) The mathematical theory of gravitation. Cambridge Un. Press, 336 p.
Finkelstein D.(1958) Past-Future asymmetry of a gravitationnal Field of a point particle. Phys. Rev. 110 : p 965-967.
Friedman A. (1922): "Über die Krümmung des Raumes". Zeitschrift für Physik 10, 377-386 Traduction anglaise: "On the curvature of Space" General Relativity and Gravitation, Vol 31, N°12, 1999.
Gautreau R & Hoffmann B.(1978) The Schwarzschild radial coordinate as a measure of proper distance. Phys.Rev.D V.17, Numb.10 p.2552-55.
Gautreau R.(1995) "Light cones inside the Schwarzschild radius", Am. J. Phys. 63, 431–439.
Gell-Mann M. (1994) **,** "The Quark and the Jaguar, Adventure in the simple and the complex". Traduction, "Le Quark et le Jaguar" Champ Flammarion (1995).
Giraud-Héraud Y.(1997)**:** Very high energy phenomena in the universe, proceeding of the XXXIInd rencontres de Moriond, series Moriond workshops [XVII], Les Arcs, France, January 18-25 1997.
Gourgoulhon E. (2005) Cours de relativité générale (CT7) Master Astronomie et Astrophysique M2 (2005-2006).
Gourgoulhon E (2010): Relativité restreinte Des particules à l'astrophysique, Savoirs actuels (EDP, Sciences/CNRS édition) & conférence IMCCE_syrte: http://luth.obspm.fr/~luthier/gourgoulhon/fr/present_rec/imcce_syrte10.pdf.
Gullstrand A. (1922)**."**Allgemeine Lösung des statischen Einkörper-problems in der Einsteinchen Gravitations theorie", Arkiv.Mat.Astron.Fys. 16(8), 1-15.
Haag J. (1923) "Le problème des n corps dans la théorie de la relativité" C.R.A.S, Note T.176 163-166 et 826-82.
Hamilton A. & Lisle J.,(2006)**,** The river model of black holes", arXiv:gr-qc/0411060 v2 31 Aug 2006. AM. J.Phys. **76**, 519 (2008).
Hawking S.W & Ellis G.F.R.(1973). The large scale structure of space time. Cambridge university press.
Hawking S.W. & Penrose R. (1969). The singularities of gravitational collapse and cosmology. Proc. Roy. Soc. London A 314,529-548.
Hawking S.W. & Penrose R. (1997). La nature de l'espace et du temps. Nrf essais. Galimard (trad. F. Balibar), préface de Marc Lachièze Rey.
Hawking S.W. (1966b). The occurence of singularities. Proc. R. Society . London A 294. 511-521.
Hawking S.W. (1973).The event horizon. In DeWitt and DeWitt , §34.1-34.5.
Hawking S.W.(1966a). Singularities and the geometry of spacetime. Adam prize essay. Cambridge univers.UK.

Hawking S.W.(1971b) Gravitationnal radiation from colliding black holes. Phys. Rev. Letters 26,1344-1346.
Hawking. S.W.(1972a). Black holes in general relativity. Commun. Math.Phys. 25, 152-166.
Juvet M. (1921) "Les formules de Fresnel pour un espace de M. Weyl" C.R.A.S Note T.172 1647-1650.
Kerr R.P-Schild.A (1964), Am.Math.Soc.Symposium, New York.
Kraus Per & Wilczek Frank "A Simple stationary line element for the Schwarzschild Geometry, and some applications", Mod. Phys. Lett. A. 9, 3713–3719 (1994).
Kretchmann E. 1917, "Uber den physikalischen Sinn der Relativitätspostutate, Einsteins neue und seine ursprünglishe Relativitätstheorie", Annalen der physik vol LIII 1917, p.575-614.
Lachièze Rey M. (2003) : Au-delà de l'espace et du temps, Ed. Le Pommier.
Lachièze Rey M.(1993) : L'infini : De la philosophie à l'astrophysique : Volume 225 de Optiques (Paris 1993), Volume 225 de Optiques Philosophie.
Lachièze Rey M.(1996) : Préface de : La nature de l'espace et du temps de S. Hawking, R. Penrose, Folio essais.
Lake K (1994a) arXiv:gr-qc/9407005 v1 Jul 94.
Lake Kayll, (1994b) "A Class of quasistationary regular line elements unpublished, gr-qc/9407005.
Landau L. & Lifchitz E. (1994). Théorie des champs, Ed 5. Mir –Ellipse.
Landau L. & Lifchitz E. (1951).« The Classical Theory of Fields » Pergamon Press, ISBN 7-5062-4256-7 chapter 11, section #96.(pseudo-tensor).
Langevin P. (1911) "l'évolution de l'espace et du temps" Scienta, n° 10 p. 31-54.
Langevin P. (1921) ."Sur la théorie de relativité et l'expérience de M. Sagnac" C.R.A.S Note T.173 831-834.
Laplace Pierre-Simon (1799) "Exposition du système du monde".
Laschkarew W. (1926) "Zure Theorie der Gravitation", Zeitschrift für Physik, 35, 473–476. A translation of the abstract is: "The Einstein equivalence principle can be satisfied from the point of view of an aether theory, if one permits accelerated aether currents. All consequences of the Einstein theory of gravitation are derived in elementary way by connection of the theory of special relativity with the above hypothesis.
Lasenby Anthony, Doran Chris & Gull Stephen,"Gravity, gauge theories and geometric algebra", Phil.Traduction. R. Soc. Lond. A. 356, 487–582 (1998).
Lecornu L. (1922) "Quelques remarques sur la relativité" C.R.A.S Note T.174 337-342.
Lehner L. (2001). "Numerical relativity": A review. arXiv:gr-qc/0106072v3 29 Juin 2001.
Lemaître G. (1927). "Un univers homogène de masse constante et de rayon croissant rendant compte de la vitesse radiale des nébuleuses extra-galactiques." Annales de la Société scientifique de Bruxelles, Tome XLVII, série A,* première partie. Comptes rendus des séances, p.49. Session du 25 avril 1927 Première section..
Lemaître G. (1931) "The expanding universe", In : Monthly notices of the Royal Astronomical Society, 91, p. 490-501.
Lemaître G. (1932) "L'univers en expansion" Publications du laboratoire d'astronomie et de géodésie de l'université de Louvain. Vol IX (N°85 et 86) p. 171-205.
Lemaître G. (1933) "L'univers en expansion" Annales de la Société Scientifique de Bruxelles A53, 51.
Lémeray M. E (1922a)" La relativité générale et la voie lactée" C.R.A.S Note T.175 91-94.
Lémeray M. E.(1922b) "La structure de l'univers et la relativité générale" C.R. A.S Note T.175 261-263.
Le Roux J. (1921a) "Sur la théorie de la relativité et le mouvement séculaire du périhélie de Mercure", C.R.A.S, Note T.172 1227-1230.

Le Roux J. (1921b) "La loi de la gravitation et ses conséquences", C.R.A.S Note T.172 1467-1469.
Le Roux J. (1921c) " Le temps dans la Mécanique classique et dans la théorie de la relativité" C.R.A.S Note T.173 1074-1077.
Le Roux J. (1922a) "Sur la gravitation dans la mécanique classique et dans la théorie d'Einstein" C.R. A.S Note T.175 809-811.
Le Roux J. (1922b)" La Mécanique de Newton n'est pas une approximation de celle d'Einstein" .C.R.A.S Note T.175 1395-1397.
Le Roux J. (1923) "Sur le champ de gravitation" C.R.A.S, Note T.176 1544-1546.
Le Roux J. (1924) "La coordination des mouvements et la notion de temps" Note CR T. 177 316-319.
Levinson H.C (1923) " Sur la gravitation einsteinienne des systèmes" C.R.A.S Note T.176 234-236.
Lin C.Y &Soo C. (2009) Phys. Lett. B **671**, 493.
Linet B. **N**otes de Cours de Relativité générale Laboratoire de Mathématiques et Physique Théorique CNRS/UMR 6083, Université F. Rabelais Tours**.**
Marcolongo R. : (1921): Sulla teoria speciale e generale della Relatività, Zanicelli Bologna, con prefazione di Levi Civita.
Marchal C. (1994) : Annexe "La transformation de Lorentz" de l'article "Henri Poincaré, une contribution décisive à la Relativité". Henri Poincaré : a decisive contribution to Relativity C. Marchal General Scientific Direction, ONERA, BP 72, 92322 Châtillon cedex, FRANCE.
Martel K. & Poisson E. (2000) Regular coordinate systems for Schwarzschild and other spherical spacetimes. ArXiv.gr-qc/0001069 v4 18 Oct 2000.
Maxima 5.9.2 http://maxima.sourceforge.net, Using Lisp GNU Common Lisp (GCL) GCL 2.6.7 (aka GCL), Distributed under the GNU Public License.
Merleau -Ponty J. (1965): Cosmologie du XXe siècle : NRF, Gallimard.
Merleau -Ponty J. (1993): Einstein, Champs, Flammarion.
Michell John (1784) "On the means of discovering the distance magnitude, etc., of the fixed stars, in consequence of the diminution of their light , in case such a diminution should be found to take place in any of them, and such other data shiuld be procured from observations, as would be further necessary for that purpose" Phil. Trans. Roy. Soc. London 74, 35, 1784.
Misner C.W. & Thorne K. & Wheeler J.A.(1973) Gravitation, Freeman New York.
Mizony M. & Lachièze Rey M. (2004) Cosmological effect in the local static frame arXiv.gr-qc/0412084 v1 17 Dec 2004.
Mizony M. (2011) "Sur la forme de Painlevé d'une métrique à symétrie sphérique" http://math.univ-lyon1.fr/~mizony/metriquePainleve.pdf.
Mizony M. (2003) "La relativité générale aujourd'hui ou l'observateur oublié" Ed. ALEAS.
Moatti A (2007): "Einstein: Un siècle contre lui"; Ed. Odile Jacob.
J. Nash. (1954) C1 isometric imbeddings. *Annals of Mathematics*, 60(3):383–396.
Novikov. I.D. (1963) doctoral dissertation, Shternberg Astronomical Institute, Moscow (§31,4).
Nurowski, Pawel Engelbert Schucking & Trautman Andrzej, "Relativistic gravitational fields with close Newtonian analogs", Ch. 23 of On Einstein's path:Essays in honor of Engelbert Schucking, ed. Alex Harvey.
Painlevé P. (1918) "Discours de prise de possession du fauteuil de la présidence".CR.A.S, T. 166, p. 17-19.
Painlevé P. (1921a) La mécanique classique & la théorie de la relativité. C.R.A.S T 173, 677-680.
Painlevé P. (1921b) "La gravitation dans la Mécanique de newton et dans la Mécanique d'Einstein" C.R.A.S Note T.173 873-887.

Painlevé P..(1922) "La théorie classique et la théorie einsteinienne de la gravitation" C.R. A.S Note T.174 1137-1143.
Paty M. (1993): Einstein Philosophe PUF.
Paty M. (2003)**:** La physique au XXe siècle « Sciences et histoire » EDP sciences.
Penrose R. (1965). Gravitationnal collapse and space time singularities. Phys. Rev. Letters Vol 14, N.3 p 57-59.
Penrose R. (1968a). Structure of spacetime in "DeWitt and Wheeler". §34.1-34.4,41.7-41.11.
Penrose R. (1969). Gravitationnal collapse : The role of general relativity. Nuevo Cimento 1, special number 252-276.
Penrose R. (1972a). Techniques of differential Topology in Relativity. Soc.of Ind. and Applied Math. Regional.
Perez Jérôme: (2006) Gravitation classique , Cours ENSTA, IAP.
Perot A.(1920) "Comparaison des longueurs d'onde d'une raie de bande du cyanogène dans la lumière du Soleil et dans celle d'une source terrestre" C.R.A.S Note T.170 229-232.
Petrov A. Z.(1954). Classification of space defining gravitationanl fields. Sci. Not. Kazan State Univ.114. 55.
Picard E. (1921) "Quelques remarques sur la théorie de la relativité" C.R.A.S Note T.173 680-682.
Picard E. (1922) "M. Émile Picard présente à l'Académie une brochure intitulée: "Le principe de relativité et ses applications à l'Astronomie"", .C.R.A.S Note T.174 81-82.
Picard E. (1923) " Observations à l'occasion de cette communication" C.R.A.S Note T.176 236-237.
Pirani F.A.E (1957). Invariant formulation of gravitational radiation theory. Phys. Rev. 105: 1085.
Robertson H.P & Noonan T.W (1968) Relativity and Cosmology, Chapter 9 General Relativity. Philadelphia, Pennsylvania: Sauders.
Rothman T. (2002) The Field of a Single Centre in Einstein's Theory of Gravitation, and theMotion of a Particle in That Field", Gen. Rel. and Gravitation 34, 1541–1543 comments on the fact that the Schwarzschild metric was discovered independently by Johannes Droste in 1916.
Rovelli C. (1997) "Loop quantum gravity" Living Reviews in Relativity (1997), Institut Max-Planck pour la Gravitation (Postdam), ISSN 1433-8351.
Sagnac G (1923)"Sur le spectre variable périodique des étoiles doubles: incompatibilité des phénomènes observés par la théorie de la relativité générale (relativité restreinte) C.R.A.S Note T.176 161-163.
Sauger. M. (1922) "Sur une coïncidence remarquable dans la théorie de la relativité", C.R.A.S Note T.174 1002-1003.
Schutz. B (1980) "Geometrical methods of mathematical Physics", (Cambridge 1980)).
Scholz E. (1999): The concept of manifold, 1850-1950 chapter 2 of « history of topology » Elsevier Science B.V, editor I.M James- 2006,
http://www.maths.ed.ac.uk/~aar/papers/scholz.pdf.
Scholz E.: Hermann Weyl's, Raum-Zeit-Matirie and a General Introduction to His Scientific Work, DMV Seminar, Erhard Scholz Editor.
Senovilla J. (2006) "New editorial note on K. Schwarzschild's Golden Oldie", Gen. Rel. Grav. Vol 39 Number 5 (2007).
Société Astronomique de France: Bulletin et revue mensuelle 1922.
Schwarzschild. K. (1916a) "Uber das Gravitationsfeld eines Masspunktes nach der Einsteinchen Theorie". Sitzber.Deut. Akad. Wiss. Berlin, Kl. Math. Phys.. Tech. 189-196.

Schwarzschild. K. (1916b) "Uber das Gravitationsfeld einer kügel aus inkompressibler Flussigkeit nach der Einsteinchen Theorie". Sitzber.Deut. Akad. Wiss. Berlin, Kl. Math. Phys.. Tech. 424-434.
Synge J.L. (1950). "The gravitationnal field of a particle". Proc. R. Irish Acad. A 53, 83-114
Szczeciniarz J.J (1998) : Copernic et la révolution copernicienne, Flammarion.
F. Norguet, S. Ofman, **Szczeciniarz J.J**(1996), *Géométrie complexe*, Hermann, 1996.
D. Flament, J. Kouneiher, P. Nabonnand, **Szczeciniarz J.J** (2005), *Géométrie au XXe siècle*, Hermann.
Szczeciniarz J.J (2010) « La cosmologie comme science spéculative et expérimentale », in Kouneiher ed., *Philosophie de la nature*, Hermann, 2010.
F. J Tipler, C. J. S Clarke & G. F. R Ellis, **"**Singularities and Horizons" — A review Articles. In: A. Held, Editor, General Gravity and Gravitation Vol. 2, Plenum, New York (1980).
Tolman R.C (1934a)"Relativity, Thermodynamics and Cosmology (Oxford 1934) p. 239-241.
Tolman R.C (1934b), "Effect of Inhomogeneity on Cosmological Models". national Academy of Sciences. Proceedings 20 :169-176.
Trautman Andrzej (1966)**"**Comparison of Newtonian and relativistic theories of space-time", in Perspectives in geometry and relativity; essays in honor of Vaclav Hlavaty, 413–425**.**
Trousset J. (1922) "Les lois de Kepler et les orbites relativistes" C.R.A.S Note T.174 1160-1161.
Visser Matt (1998)."Acoustic black holes: Horizons, ergospheres, and Hawking radiation", Class. Quant. Grav. 15, 1767– 1791.
Visser Matt (2003)"Heuristic approach to the Schwarzschild geometry", gr-qc/0309072 **.**
Wald R.M (1984), General Relativity, University of Chicago, Chicago.
Weyl H : (1919), Zeit, Raum,, Materie" ed 3 de H. Weyl, Berlin, Julius Springer.
Weyl H. : (1922), Temps, espace, matière (traduite de l'édition 4 de "Zeit, Raum,, Materie" de H. Weyl par G. Juvet et R.Leroy), Librairie scientifique A. Blanchard, Paris.
Wikipedia (pour la biographie de Painlevé).
Whitehead : (1922) The principe of Relativity with application to Physical Science, Cambr. Univ. Press., The Moon motion (Lune, Terre, Soleil).
Zakir Zahid (1999) "New exact solution of the Einstein equation as Revised Schwarzschild's Solution Without Black hole", arXiv:gr-qc/9905068 v3 5 jul 1999.

C.R.A.S sur le débat à l'Académie des Sciences, extraits des références, période 1921-1924, classés par ordre chronologique.

Comparaison des longueurs d'onde d'une raie de bande du cyanogène dans la lumière du Soleil et dans celle d'une source terrestre
Note de A.Perot. C.R. T.170 (1920) 229-232

Sur la théorie de la relativité et le mouvement séculaire du périhélie de Mercure
Note de J. Le Roux. C.R. T.172 (1921) 1227-1230

La loi de la gravitation et ses conséquences
Note de J. Le Roux. C.R. T.172 (1921) 1467-1469

Les formules de Fresnel pour un espace de M. Weyl
Note de M. Juvet . C.R. T.172 (1921) 1647-1650

Sur les hypothèses fondamentales de la physique et de la géométrie
Note de E. Borel. C.R. T.173 (1921) 189-191

La loi de Newton et la formule d'einstein pour le périhélie des planètes.
Note de G. Bertrand. C.R. T.173 (1921) 438-441

La Mécanique classique et la théorie de la relativité
Note de P. Painlevé. C.R. T.173 (1921) 677-680

Quelques remarques sur la théorie de la relativité
Note de E. Picard. C.R. T.173 (1921) 680-682

Sur la théorie de relativité et l'expérience de M. Sagnac
Note de P. Langevin. C.R. T.173 (1921) 831-834

Sur le rôle des symétries analytiques dans les théories relativistes
Note de A. Buhl. C.R. T.173 (1921) 829-831

La gravitation dans la Mécanique de Newton et dans la Mécanique d'Einstein
Note de P. Painlevé. C.R. T.173 (1921) 873-887

Sur les fonctions arbitraires figurant dans le *ds2* de la gravitation einsteinienne
Note de J. Chazy. C.R. T.173 (1921) 905-907

Le temps dans la Mécanique classique et dans la théorie de la relativité
Note de J. Le Roux. C.R. T.173 (1921) 1074-1077

M. Émile Picard présente à l'Académie une brochure intitulée: "Le principe de relativité et ses applications à l'Astronomie"
Note de E. Picard. C.R. T.174 (1922) 81-82

Quelques remarques sur la relativité
Note de L. Lecornu. C.R. T.174 (1922) 337-342

Sur une définition géométrique du tenseur d'énergie d'Einstein
Note de E. Cartan. C.R. T.174 (1922) 437-439

Sur les espaces généralisés et la théorie de la relativité
Note de E. Cartan. C.R. T.174 (1922) 734-737

La géométrie des espaces courbes et le tenseur d'énergie d'Einstein
Note de E. Bompiani. C.R. T.174 (1922) 737-740

Sur les espaces conformes généralisés et l'Univers optique
Note de E. Cartan. C.R. T.174 (1922) 857-860

Sur une coïncidence remarquable dans la théorie de la relativité
Note de M. Sauger. C.R. T.174 (1922) 1002-1003

Sur les équations de structure des espaces généralisés et l'expression analytique du tenseur d'Einstein
Note de E. Cartan. C.R. T.174 (1922) 1104-1107

La théorie classique et la théorie einsteinienne de la gravitation
Note de P. Painlevé. C.R. T.174 (1922) 1137-1143

Sur les vérifications astronomiques de la théorie de la relativité
Note de J. Chazy. C.R. T.174 (1922) 1157-1160

Les lois de Kepler et les orbites relativistes
Note de J. Trousset. C.R. T.174 (1922) 1160-1161

Note de M. Painlevé sur les deux communications précédentes
Note de P. Painlevé. C.R. T.174 (1922) 1161-1162

Champ isotrope. Sphère fluide hétérogène (Gravitation einsteinienne)
Note de M. Brillouin. C.R. T.174 (1922) 1585-1589

La relativité générale et la voie lactée
Note de M. E. M. Lémeray CR. T.175 (1922) 91-94
La structure de l'univers et la relativité générale
Note de M. E. M. Lémeray CR. T.175 (1922) 261-263

Sur la gravitation dans la mécanique classique et dans la théorie d'Einstein
Note de J. Le Roux. C.R. T.175 (1922) 809-811

Gravitation einsteinienne et gravitation newtonienne ; à propos d'une récente Note de M. Le Roux
Note de M. Brillouin. C.R. T.175 (1922) 923

Gravitation einsteinienne. Statique. Points singuliers. Le point matériel. Remarques diverses
Note de M. Brillouin. C.R. T.175 (1922) 1009-1012

La Mécanique de Newton n'est pas une approximation de celle d'Einstein
Note de J. Le Roux. C.R. T.175 (1922) 1395-1397

Sur le spectre variable périodique des étoiles doubles : incompatibilité des phénomènes observés par la théorie de la relativité générale (relat
Note de G. Sagnac. C.R. T.176 (1923) 161-163

Le problème des n corps dans la théorie de la relativité
Note de J. Haag. C.R. T.176 (1923) 163-166 et 826-827

Sur la gravitation einsteinienne des systèmes
Note de H.-C. Levinson. C.R. T.176 (1923) 234-236

Observations à l'occasion de cette communication
Note de E. Picard. C.R. T.176 (1923) 236-237

Sur l'expression de la loi d'Einstein en coordonnées cartésiennes
Note de J. Chazy. C.R. T.176 (1923) 285-286

Sur l'intégration locale des équations d'Einstein
Note de G. Darmois. C.R. T.176 (1923) 646-648 et 731-733

Sur la correction apportée par la théorie de la relativité à la durée de révolution newtonienne des planètes
Note de J. Chazy. C.R. T.176 (1923) 666-668

Sur les effets séculaires de la théorie de la relativité dans les mouvements planétaires
Note de J. Chazy. C.R. T.176 (1923) 1542-1544

Sur le champ de gravitation.
Note de J. Le Roux. C.R. T.176 (1923) 1544-1546

La coordination des mouvements et la notion de temps

Note de J. Le Roux CR T. 177 (1924) 316-319