ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 24 OCTOBRE 1921.

PRÉSIDENCE DE M. GEORGES LEMOINE.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

MÉCANIQUE. — *La Mécanique classique et la théorie de la relativité.* Note de M. **Paul Painlevé**.

Je voudrais exposer brièvement à l'Académie certaines conclusions d'une étude critique de la théorie de la relativité que je publierai prochainement et où je compare les postulats de la théorie de la relativité (restreinte et généralisée) aux postulats de la mécanique newtonienne. J'y discute notamment la question de savoir s'il existe ou non *des axes privilégiés* parmi tous les modes de référence possibles. La mécanique newtonienne repose tout entière sur cet axiome, qu'on peut appeler l'*axiome de causalité* en mécanique :

« *Il est possible, une fois pour toutes, et pour tout l'univers, de définir une mesure des longueurs, du temps, et un trièdre de référence tels que le principe de causalité soit vrai toujours et partout.* »

Autrement dit, considérons un système matériel dont chaque élément reste identique à soi-même, et qui est très éloigné de tous les autres corps matériels; si les conditions initiales (positions et vitesses des éléments à l'instant considéré t_0) se reproduisent transportées seulement dans l'espace et le temps, le même mouvement se reproduira, au même transport près, dans l'espace et le temps.

Une première conséquence, c'est que les lois du mouvement du système ne dépendront pas explicitement du temps.

Une seconde conséquence, c'est l'*axiome de la symétrie* (corollaire de l'axiome de causalité). Si les conditions initiales présentent une symétrie quelconque (par rapport à un plan, un axe ou un point), la même symétrie persistera dans le mouvement.

Cet axiome de la symétrie entraîne le principe de Képler ou de l'inertie et une foule d'autres conséquences capitales.

Si ces propriétés sont vraies quand on a adopté un repérage *espace-temps* convenable, elles ne le sont plus quand on lui substitue un repérage arbitraire. Sous sa forme positive, le postulat fondamental de la doctrine newtonienne, c'est qu'un tel repérage existe effectivement. Pour les newtoniens, il correspond à une mesure du temps, des longueurs et des mouvements absolus. Bornons-nous à l'appeler *repérage privilégié*.

L'expérience a montré, par un prodigieux ensemble de vérifications, aussi précises que le comportent nos mesures actuelles, qu'il existe effectivement un repérage *espace-temps* possédant à la fois toutes les propriétés attribuées *a priori* par les newtoniens au repérage absolu. Aucun autre repérage ne répond à ces axiomes, sauf ceux qui se déduisent du premier par la substitution aux axes de nouveaux axes animés relativement aux premiers d'une translation rectiligne et uniforme; *les axes privilégiés* sont ainsi définis à une translation rectiligne et uniforme près.

Les doctrines d'Einstein, dont j'admire profondément l'audace de pensée et la puissance constructive, conduiront-elles à abandonner définitivement le postulat fondamental de la mécanique newtonienne? Je crois au contraire qu'il subsistera de ces doctrines un corps de formules qui sans la contredire se fondra dans la science classique, mais que ne subsisteront pas les principes ou conséquences philosophico-scientifiques qui ont été, suivant les jugements, le scandale ou le miracle de la théorie de la relativité.

Lorsqu'on analyse les postulats et raisonnements qui ont conduit Einstein à ses résultats positifs (¹), on voit combien ils sont imprégnés de « newtonisme ».

Insistons notamment sur la formule explicite de la gravitation dans le cas d'un centre unique (²). C'est la célèbre formule qui a donné lieu aux deux vérifications éclatantes: mouvement du périhélie de Mercure, déviation d'un rayon lumineux au voisinage du Soleil.

Rapportons le mouvement de l'élément gravitant à des axes $Oxyz$ ayant

(¹) Cette analyse sera développée dans une Note prochaine.

(²) Cette remarque a déjà été faite par plusieurs auteurs, notamment par M. Le Roux, dans d'intéressantes Communications (*Comptes rendus*, t. 172, 1921, p. 1227, 1467).

le centre matériel comme origine O. Pour un newtonien, si ces axes sont des axes absolus, les équations différentielles du mouvement doivent être indépendantes du temps et symétriques autour du centre O; mais si le centre O est animé d'un mouvement absolu varié, ou si les axes tournent par rapport aux étoiles, il n'en est plus ainsi. Or, pour arriver à leur loi explicite de gravitation, les einsteiniens doivent admettre *a priori* que, le temps t et les coordonnées polaires r, θ, φ étant mesurées à la manière ordinaire, leur formule fondamentale doit ne pas dépendre explicitement du temps et doit être dissymétrique par rapport à r, θ, φ autour de l'origine. Or cette hypothèse n'est vraie que si les axes $Oxyz$ sont des axes privilégiés au sens newtonien et présuppose par conséquent l'existence de tels axes. Cette hypothèse admise, les einsteiniens parviennent au ds^2 (à quatre variables) aujourd'hui célèbre, dont les géodésiques définissent dans leur théorie le mouvement du point gravitant, à savoir

$$(1) \qquad ds^2 = dt^2\left(1-\frac{a}{r}\right) - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) - \frac{dr^2}{1-\frac{a}{r}},$$

a désignant une constante arbitraire que déterminera la masse du centre matériel O.

Mais ce ds^2 n'est pas le seul qui réponde à toutes les conditions einsteiniennes. Il en est une infinité d'autres dépendant de deux fonctions de r et le choix de la formule (1) entre toutes ces formules est purement arbitraire. Parmi ces formules il en est d'aussi simples que la formule (1) et qui entraînent exactement les mêmes vérifications. Telle celle-ci :

$$(2) \qquad ds^2 = dt^2\left(1-\frac{a}{r}\right) + 2\,dr\,dt\sqrt{\frac{a}{r}} - d\sigma^2,$$

avec

$$d\sigma^2 = dr^2 + r^2[d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2]$$

(ds^2 euclidien à trois dimensions).

Or on sait que pour les einsteiniens, le ds^2 a une signification mystique et universelle, contraignant tous les phénomènes à se couler dans une sorte de forme *espace-temps* comme l'eau dans un vase. D'une formule déduite de l'étude du mouvement des corps gravitants et de la propagation de la lumière, ils pensent déduire des conséquences relatives aux phénomènes immobiles ou quasi immobiles. C'est ainsi que de la formule (1) ils concluent :

1° Que les vibrations lumineuses d'un même atome doivent être plus courtes près du Soleil que sur la Terre (le ralentissement étant le même pour tous les atomes);

2° Que nos solides, dits invariables, nos mètres en particulier, doivent se raccourcir tous dans le même rapport dans la direction du Soleil, quand ils sont plus près de celui-ci.

Lors même que la formule (1) serait *imposée* sans aucune ambiguïté, par la doctrine einsteinienne de la gravitation et de la propagation de la lumière, les conclusions que je viens d'énoncer m'apparaîtraient comme des conjonctures des plus audacieuses, et non pas comme des conséquences inévitables de cette doctrine, qui suffiraient (comme l'affirme Einstein avec sa magnifique franchise) à la faire crouler si elles ne se vérifiaient pas. Mais l'existence de la formule (2) et d'une infinité d'autres possibles me paraît suffire à démontrer le caractère plus qu'aventureux de telles prévisions.

Si l'on admet, en effet, la formule (2), on retombe, pour $dt = 0$, sur le ds^2 euclidien ordinaire; d'où (en raisonnant comme les einsteiniens) la conséquence que nos solides ne subissent aucune contraction dans aucun sens quand ils se rapprochent du Soleil. D'autres formules, aussi simples, conduiraient à la conclusion que ces corps se dilatent dans le sens du Soleil au lieu de se contracter; d'autres encore que les corps se dilatent perpendiculairement à la direction du Soleil.

Ma conclusion c'est que c'est pure imagination de prétendre tirer du ds^2 des conséquences de cette nature.

PHYSIQUE. — *Quelques remarques sur la théorie de la relativité.* Note de M. **Émile Picard.**

Ayant écrit, pour l'*Annuaire du Bureau des Longitudes de* 1922, une Notice sur la théorie de la relativité et l'Astronomie, je demande la permission de faire quelques remarques sur cette théorie, à l'occasion de la très intéressante communication que vient de faire M. Painlevé. En traçant une esquisse de la théorie moderne de la relativité, j'ai voulu tout d'abord rester narrateur impartial, n'ayant pas encore une opinion sur la place que l'avenir réservera à l'édifice, si séduisant par certains côtés, construit par Einstein, et me demandant si c'est un progrès de chercher à ramener la Physique à la Géométrie; j'admire d'ailleurs hautement l'effort accompli dans cette audacieuse tentative.

ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 14 NOVEMBRE 1921.

PRÉSIDENCE DE M. GEORGES LEMOINE.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

MÉCANIQUE. — *La gravitation dans la Mécanique de Newton et dans la Mécanique d'Einstein.* Note de M. **Paul Painlevé.**

Le but de cette Note est de préciser les concordances et les divergences des deux théories.

I. *La gravitation d'après Newton.* — Soit $Oxyz$ des axes absolument fixes au sens de Newton, et S une sphère solide matériellement symétrique autour de son centre C. A l'instant t_0, S est abandonné sans vitesse dans une position où C coïncide avec O; si S est très éloigné de tous les autres corps matériels, il restera immobile par rapport au trièdre $Oxyz$ (principe de Kepler).

Supposons maintenant qu'un autre solide analogue S' se trouve, à l'instant t_0, sans rotation initiale, en présence de S, tous les autres corps étant très éloignés du système S', S. En vertu du *postulat des conditions initiales*, le mouvement du système est déterminé par la position et la vitesse de ses éléments à l'instant t_0, c'est-à-dire ici de P (puisque S initialement est sans vitesse, C occupant la position O).

Le plan fixe Π qui contient O, P_0 et la vitesse initiale de P étant un plan de symétrie de ces conditions initiales, la trajectoire de P (comme celle de C) sera contenue dans le plan Π (*axiome de la symétrie*), par suite aussi l'accélération de P. Si, à un autre instant t_1, le système S', S est placé dans les mêmes conditions initiales qu'à l'instant t_0, à une certaine rotation près autour de O, le mouvement du système après l'instant t_1 se déduira par la même rotation du mouvement après l'instant t_1 (*axiome de causalité*). Enfin si la vitesse initiale de P est nulle, la droite fixe OP_0 est axe de symétrie des conditions initiales; le mouvement de P (comme celui de C) a lieu suivant cette droite; l'accélération de P est donc dirigée selon cette droite; elle est nulle (*principe de l'inertie*) si la distance OP_0 est très grande.

Les axes $Oxyz$ jouissent en outre de cette propriété que, *dans le vide et à grande distance de tout corps matériel*, un rayon lumineux se comporte comme la trajectoire d'un point matériel, c'est-à-dire que la lumière se propage en ligne droite avec une vitesse constante.

Nous donnerons à cet ensemble de principes le nom d'*axiomes newtoniens fondamentaux*.

Dans la théorie des ondulations, le dernier principe se complète du suivant que j'appellerai pour abréger *axiome de Fresnel*.

Dans le vide et à grande distance de tout corps matériel, *la vitesse de la lumière est la même dans tous les sens* (1).

Postulat de Galilée. — Les accélérations des éléments du système P, S *à l'instant* t, *ne dépendent que de la position du système à cet instant et non de ses vitesses* (2).

Ce principe a été admis, en fait, par les Newtoniens en vertu des observations astronomiques. Je le distingue néanmoins des précédents, parce que la conception newtonienne de la causalité en Mécanique subsiste même si le principe de Galilée est en défaut.

Admettons ce postulat dans le cas où aucun phénomène électromagnétique ne se mêle à la gravitation. Il entraîne cette conséquence remarquable que *l'accélération de* P *à un instant* t *est dirigée, ainsi que celle de* C, *suivant la droite* PC *comme dans le cas où les vitesses de* P *et de* S *sont nulles*. L'accélération de P (comme celle de C) est indépendante de la rotation des deux corps S' et S autour de leur centre. Elles s'annulent, l'une et l'autre, avec $\frac{1}{r}$, si r désigne la distance PC. Enfin, si S' se réduit à un élément infinitésimal P, l'accélération de S est sensiblement nulle.

En définitive, la théorie newtonienne admet qu'on peut définir une mesure du temps et des distances et choisir des axes *privilégiés* $Oxyz$ de telle façon que tous les principes précédents soient vrais. Si (sans changer la mesure du temps et des distances) on substitue au trièdre $Oxyz$ un trièdre animé

(1) Dans la théorie de *l'émission*, c'est cette vitesse diminuée géométriquement de la vitesse absolue de la source qui est la même dans tous les sens.

(2) Le mouvement de P est, pour Galilée, une sorte de *compromis* continuel entre la vitesse acquise et l'influence du corps S.

d'une translation rectiligne et uniforme, tous les principes précédents subsistent, sauf l'axiome de Fresnel.

Nous nous placerons désormais inclusivement dans l'hypothèse ou LE CORPS S′ EST UN ÉLÉMENT INFINITÉSIMAL. Dans ce cas, C reste sensiblement immobile (si sa vitesse initiale est nulle) ou est animé d'un mouvement sensiblement rectiligne et uniforme.

D'où cette conclusion :

Les axes $Oxyz$ *ayant constamment* C *comme origine et des directions absolument fixes (c'est-à-dire en fait fixes par rapport aux étoiles lointaines), tous les axiomes précédents restent vrais (sauf peut-être celui de Fresnel)* (¹).

Le mouvement du point P sera donc un mouvement plan. Si r, θ désignent les coordonnées polaires dans ce plan, les équations du mouvement (en vertu des axiomes newtoniens fondamentaux) seront de la forme

$$\frac{d^2r}{dt^2} = G\left(r, \frac{dr}{dt}, \frac{d\theta}{dt}\right), \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} = H\left(r, \frac{dr}{dt}, \frac{d\theta}{dt}\right); \tag{1}$$

elles ne dépendront explicitement ni de t, ni de θ.

En vertu du principe de Galilée, l'accélération de P sera centrale et fonction seulement de r; les composantes de l'accélération suivant le rayon vecteur et la normale à ce rayon étant $r'' - r\theta'^2$ et $\frac{d}{dt}r^2\theta'$, les équations (1) prendront la forme

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = F(r), \qquad r^2\frac{d\theta}{dt} = \text{const.}, \tag{2}$$

où F est — ou + suivant que l'accélération est dirigée vers O ou en sens contraire.

Les postulats précédents laissent complètement indéterminée la fonction $F(r)$. Des observations astronomiques, Newton a déduit que :

1° *L'accélération* $F(r)$ *est la même* (r *étant donné*) *pour tous les éléments* P (*infinitésimaux*);

2° $F(r)$ *est négatif et inversement proportionnel au carré de la distance.*

(¹) Si, au postulat de Galilée, on substituait celui-ci (moins restrictif) : « Pour une position déterminée de P et S, *l'accélération de* P (*comme celle de* C) *ne dépend que de la différence géométrique des vitesses absolues de* P *et de* C », une translation rectiligne et uniforme imposée aux axes $Oxyz$ laisserait subsister tous les axiomes précédents, sauf celui de Fresnel, mais on ne pourrait conclure qu'à la forme (1) des équations du mouvement et non à la forme (2).

L'équation de Laplace-Poisson. — Si l'on pose

$$U = \int F(r)\,dr,$$

U sera de la forme

$$U = \frac{\mu}{r},$$

μ désignant une constante positive, la même pour tous les éléments P. On sait que U vérifie, en dehors du corps S, l'équation de Laplace,

$$\Delta U \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0, \tag{3}$$

et qu'à l'intérieur de la sphère S (supposée homogène) ΔU est égal à une constante négative (*équation de Poisson*). Inversement, ces conditions imposées à U, jointes à celle de s'annuler à l'infini, imposent à U (en dehors de S) la forme $U = \frac{\mu}{r}$.

Il suit de là, comme on voit, qu'on peut donner à la théorie de la gravitation newtonienne la forme suivante (principe de la moindre action) : *Les trajectoires du point* P *sont les géodésiques du* ds^2

$$ds^2 = (U + h)(dx^2 + dy^2 + dz^2), \qquad (h \text{ constante arbitraire}),$$

où U *est une fonction de* x, y, z *qui s'annule à l'infini dont le* ΔU *est nul à l'extérieur de la sphère* S *et est égal à une constante négative dans* S.

On peut dire encore que U doit être une fonction de r qui satisfait en dehors de S, à l'équation de Laplace.

Substituons maintenant aux coordonnées rectangulaires x, y, z des coordonnées curvilignes quelconques u, v, w. Le ds^2 prend la forme

$$\begin{aligned} ds^2 &= [U(u, v, w) + h]\{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + \ldots\} \\ &= (U + h)\,d\sigma^2, \end{aligned}$$

où E, F, ... satisfont aux conditions INVARIANTES (équations aux dérivées partielles du deuxième ordre) qui expriment que le $d\sigma^2$ est euclidien, et où $U(u, v, w)$ satisfait à une équation aux dérivées partielles du deuxième ordre, dont les coefficients dépendent de E, F, ... équation linéaire où U ne figure pas explicitement, et qui est également invariante. On a mis ainsi les équations newtoniennes du point gravitant sous une forme invariante dans n'importe quel changement de variables *spatiales* (où t n'intervient pas).

Mais il importe de remarquer que, quelle que fût la loi de l'attraction universelle, si par exemple $F(r)$ était en raison inverse de r^{17}, on pourrait encore donner aux équations une forme invariante, qui définirait les lois du mouvement à une transformation près des variables u, v, w. Seulement, cette forme serait beaucoup plus compliquée.

Ces remarques sont importantes pour l'intelligence de ce qui va suivre.

II. *La gravitation d'après Einstein.* — Ayant critiqué avec profondeur la notion de *simultanéité absolue*, et ayant conclu à son inanité, les Einsteiniens posant en principe que, dans toutes nos expériences, nous ne faisons jamais que constater la coïncidence de deux phénomènes au même point de l'espace et au même instant, ou, pour parler leur langage, *au même point de l'espace-temps*. Comme cette coïncidence subsiste quel que soit le changement qu'il nous plaît de faire sur les quatre variables x, y, z, t qui repèrent l'espace-temps, ils concluent au principe suivant que j'appellerai PRINCIPE DE L'INVARIANCE : « *Toutes les conséquences positives de la Science peuvent recevoir une forme invariante dans un changement arbitraire des quatre variables qui définissent l'espace-temps.* »

Ce principe ne me paraît pas contestable, à condition du moins de bien le préciser. Je l'énoncerai, pour ma part, ainsi : « *Il est possible de tirer des lois de la Nature des conséquences invariantes dans tout changement du repérage espace-temps,* ET QUI DÉFINISSENT CES LOIS A UN TEL CHANGEMENT PRÈS. »

Mais précisément parce que ce principe est un truisme incontestable, il ne peut rien donner à lui seul; quelles que soient les lois de la nature qu'il nous plaise d'imaginer, on pourra les y plier. Reprenons, par exemple, les équations newtoniennes du mouvement d'un point gravitant, et effectuons-y sur les quatre variables x, y, z, t le changement en u, v, w, τ le plus général. Nous pourrons en déduire des conséquences *invariantes* dans un tel changement de variables, mais ces conséquences seront ARTIFICIELLES gauches et compliquées.

Ce qu'a cherché tout d'abord Einstein, c'est de substituer aux équations de la Mécanique classique des équations qui leur ressemblent, qui conduisent dans les cas les plus fréquents à des conclusions presque identiques, mais dont la forme naturelle soit invariante dans le changement le plus général des quatre variables espace-temps.

Cette tentative rappelle celle de Lagrange, et en même temps s'en différencie. Lagrange a donné aux équations de la Mécanique une forme invariante dans toute transformation spatiale qui ne touche pas au temps, mais cette forme n'est qu'une autre manière de les écrire. Les Einsteiniens, eux, *font une retouche* à ces équations, pour étendre l'invariance à la transformation espace-temps.

Soient x_1, x_2, x_3, x_4 les quatre variables arbitrairement choisies, qui repèrent dans l'espace-temps un élément matériel quelconque P, et supposons P en présence d'un milieu *donné*. Les Einsteiniens admettent que son mouvement est défini par les géodésiques d'un ds^2 à quatre variables, forme quadratique en dx_1, dx_2, dx_3, dx_4 et somme d'un carré positif et de trois carrés négatifs.

Dans tout mouvement réel, *le* ds^2 *reste positif;* les mouvements qui correspondent à $ds^2 = 0$ définissent les trajectoires et la vitesse des rayons lumineux.

Cas d'un élément P *très éloigné de tout autre corps matériel.* — Le ds^2 dans ce cas est euclidien; autrement dit, ses coefficients satisfont aux conditions *invariantes* du deuxième ordre qui sont nécessaires et suffisantes pour qu'on puisse, par un changement convenable des quatre variables, ramener le ds^2 à la forme

$$dt^2 - dx^2 - dy^2 - dy^2.$$

Ceci revient encore à dire que, moyennant un choix convenable, soit x, y, z, t, des variables espace-temps, x, y, z seront des fonctions linéaires de t pour tout élément matériel P placé loin des autres, et pour la trajectoire des rayons lumineux, ces derniers satisfaisant en outre à la condition

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = dt^2.$$

C'est là une conséquence (invariante dans tout changement des variables espace-temps) des axiomes de Kepler et de Fresnel, mais la réciproque n'est pas vraie. Pour avoir le principe complet de Kepler et l'axiome complet de Fresnel, il faudra ajouter que x, y, z sont alors les coordonnées définies par un trièdre trirectangle convenablement choisi et t le temps ordinaire mesuré par un observateur lié à ce trièdre. Il faudra en outre, pour les vérifications expérimentales, modifier matériellement ce trièdre.

Imaginons, par exemple, que pour un observateur lié à la terre et tournant avec elle ainsi que son trièdre $Oxyz$, les corps très éloignés aient une accélération constante, mais formidable, parallèle à la ligne des pôles, et que les rayons lumineux dessinent par suite des paraboles à courbure très accentuée. Le principe d'inertie einsteinien serait vérifié. Pourtant, il serait en complète discordance avec la mécanique newtonienne; le trièdre par rapport auquel le principe d'inertie serait vrai n'aurait pas ses directions fixes par rapport aux étoiles.

Imaginons encore que, pour les mêmes observateurs, Oz étant parallèle à la ligne des pôles, le mouvement de P soit défini par les équations

$$x = at + b, \qquad y = a_1 t_1 b_1, \qquad z = (a_2 t + b_2)(a_1 t + b_1)(at + b),$$

a, b, a_1, b_1, a_2, b_2 étant six constantes arbitraires.

Le principe d'inertie einsteinien serait vrai, et pourtant il n'existerait aucun trièdre de référence par rapport auquel le principe de Kepler le serait.

Enfin, dernière et importante remarque, le principe d'inertie einsteinien subsisterait même si l'expérience de Michelson avait donné des résultats contraires à ceux qu'elle a effectivement donnés, c'est-à-dire si elle avait mis en évidence le mouvement de la Terre. Il suffit en effet, pour que ce principe soit vrai, qu'il existe *au moins un repérage* pour lequel le principe de Kepler et celui de Fresnel soient vrais simultanément.

En réalité, les Einsteiniens admettent les postulats suivants : soit S un globe matériel ayant la symétrie d'une sphère autour de son centre, très éloigné de tous les autres corps et ne tournant pas par rapport aux étoiles.

Des observateurs sont emportés sur ce globe avec leurs instruments; ils mesurent le temps et les longueurs comme nous les mesurons sur la Terre, et rapportent les positions des autres corps à leur globe; pour ces observateurs, les principes de Kepler et de Fresnel énoncés à la façon ordinaire sont vrais. Ils le seront également pour les observateurs de tout autre globe S', analogue à S, éloigné de tous les autres, et ne tournant pas par rapport aux étoiles : pour les observateurs de S, S' sera animé d'une translation rectiligne et uniforme (et réciproquement).

En un mot, parmi tous les repérages possibles, les Einsteiniens admettent qu'il en est de privilégiés : ces repérages coïncident avec ceux qualifiés d'*absolus* par les Newtoniens et répondent aux mêmes postulats fondamentaux, à cette précision près : dans les deux théories, il existe une infinité d'axes privilégiés absolus; dans la théorie d'Einstein comme dans celle de l'émission, la vitesse de la lumière issue d'une source au repos [1] par rapport aux axes absolus choisis $Oxyz$ est la même dans tous les sens (et la

[1] Des travaux récents semblent prouver que cette vitesse est indépendante du mouvement propre de la source, mais la question mérite d'être approfondie et discutée. Dans la théorie de l'émission, c'est la vitesse du rayon lumineux, diminuée géométriquement de la vitesse de la source (par rapport à $Oxyz$) au moment de l'émission, qui est la même pour tous les rayons.

même pour tous les axes absolus); dans la théorie des ondulations, ce n'est vrai que pour les axes absolus fixes relativement à l'éther.

Cette divergence entraîne une différence essentielle dans les formules qui, dans l'une et l'autre théorie, permettent de passer des mesures des observateurs S aux mesures des observateurs S'. Mais je n'insiste pas aujourd'hui sur ce sujet. Il me suffit de retenir cette conclusion : d'après la théorie classique, S reste indéfiniment immobile par rapport à l'éther s'il l'est initialement. Il y a, dans ce cas, coïncidence complète entre les postulats fondamentaux einsteiniens et newtoniens.

Il importe à ce sujet d'éviter une confusion qui s'est glissée dans beaucoup d'esprits et même chez des physiciens à la lecture superficielle de certaines formules audacieuses et trop ramassées, telles que celle-ci : « L'expression des lois de la nature est indépendante du mode de repérage qu'il nous plaît d'adopter. » Ils en ont conclu que, si le globe S, par exemple, tournait par rapport aux étoiles, les observateurs emportés avec lui ainsi que leurs instruments de mesure, verront encore la lumière se propager en ligne droite, puisque l'expression des lois de la nature devrait rester la même. C'est cette interprétation complètement erronée de la théorie de la relativité qui a provoqué tant de discussions sur des expériences telles que celles de M. Sagnac. En réalité si S tourne relativement aux étoiles, la lumière, d'après la théorie classique, décrira pour les observateurs de S une sorte de spirale, à courbure peu accentuée à cause de la grande vitesse de la lumière, et que les formules classiques du changement d'axes permettent facilement de calculer. Dans la théorie d'Einstein, ces formules sont très légèrement modifiées par l'influence de la rotation sur les mesures des observateurs tournants. Mais cette modification est si faible que la spirale einsteinienne décrite par la lumière coïncide avec la spirale classique à des divergences près imperceptibles dans nos expériences actuelles. Cette simple remarque suffit à couper court à toutes les difficultés qu'on a cru pouvoir susciter à propos de l'expérience de M. Sagnac (1).

III. *Cas d'un élément très petit* P *en présence d'un corps sphérique* S, *tous les autres corps étant très éloignés.* — Si le corps S (de centre O) ne tourne pas par rapport aux étoiles, les Einsteiniens admettent que, pour les observateurs de S, le mouvement de P répond à tous les axiomes newtoniens fondamentaux relatifs au cas où S est *absolument fixe*. Rapporté à des axes $Oxyz$ de

(1) Voir la Communication de M. Langevin du 7 novembre 1921, Communication qui concorde avec ce qui précède.

directions fixes relativement aux étoiles, le mouvement de P sera donc plan et ses équations en coordonnées polaires r et θ (de pôle O) seront de la forme (1), c'est-à-dire ne dépendront explicitement ni de t ni de θ. Pour aller plus loin, la Mécanique classique admet le *principe de Galilée* (à savoir que l'accélération de P à un instant t ne dépend que de la position de P), et elle parvient ainsi aux équations (2). La Mécanique einsteinienne, elle, admet que les équations du mouvement doivent rentrer dans la classe *très étendue, mais pourtant exceptionnelle* des systèmes d'équations du deuxième ordre qui définissent les géodésiques d'un ds^2 à quatre variables. En vertu des postulats précédents, si l'on adopte le repérage des observateurs de S, à savoir les coordonnées polaires de l'espace de centre O et le temps ordinaire, ce ds^2 doit être alors de la forme

$$(3)\qquad ds^2 = A(r)\,dt^2 - 2B(r)\,dt\,dr - C(r)\,[r^2\,d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2] - D(r)\,dr^2.$$

Pour $r = \infty$, en vertu du principe de l'inertie et de l'axiome de Fresnel, on doit avoir $A = V$, $B = 0$, $C = D = 1$, la quantité V désignant la vitesse de la lumière loin de toute matière, vitesse que par un choix convenable d'unités nous supposerons égale à 1.

IV. *Conditions einsteiniennes invariantes.* — Quelles que soient d'ailleurs les fonctions A, B, C, D de r que l'expérience nous conduirait à adopter, il serait toujours possible de former des conditions invariantes auxquelles devraient satisfaire les coefficients de ds^2 quand on y remplace r, θ, φ et t en fonction de quatre variables entièrement quelconques. Mais Einstein veut *a priori* que ces conditions invariantes soient des équations aux dérivées partielles du deuxième ordre d'une forme spéciale, qui s'inspirent à la fois des théories de la gravité newtonienne en coordonnées curvilignes, et de la théorie de la courbure des surfaces ordinaires.

Ce sont ces restrictions capitales, et non le truisme pur et simple de l'invariance, qui parmi les ds^2 de la forme (3) ne laissent subsister que les suivants :

$$(4)\qquad ds^2 = \left[1 - \frac{2\mu}{f(r)}\right][dt - \chi(r)\,dr]^2 - f^2(r)\,[d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2] - \frac{f'^2(r)\,dr^2}{1 - \dfrac{2\mu}{f(r)}},$$

où μ est une constante et où f et χ sont deux fonctions arbitraires de r telles seulement que $\chi(r)$ tende vers zéro et $f'(r)$ (toujours positif) tende vers 1, quand r tend vers l'infini.

V. *Réversibilité des mouvements.* — Admettons en outre que les lois du mouvement ne changent pas quand on change t en $-t$; alors dt ne doit figurer que par son carré, et le ds^2 est nécessairement de la forme (1)

$$(5)\qquad ds^2 = \left[1 - \frac{2\mu}{f(r)}\right] dt^2 - f^2(r)[d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2] - \frac{f'^2(r)\, dr^2}{1 - \frac{2\mu}{f(r)}},$$

où f' doit être positif et tendre vers l'unité pour $r = \infty$.

Les Einsteiniens admettent enfin que *la constante* μ *et la fonction* $f(r)$ *sont les mêmes quel que soit l'élément* P.

Enfin si le corps S (de centre O) tournait par rapport aux étoiles, soient $Oxyz$ des axes de direction fixé par rapport aux étoiles : d'après les Einteiniens l'influence de la rotation sur les instruments de mesure, pour les observateurs du globe S, est négligeable à moins d'une rotation formidable, en sorte que tout ce qui précède s'applique encore au mouvement de P par rapport à $Oxyz$.

Comparaison des postulats des théories de la gravitation d'après Newton et Einstein. — Les directions des axes $Oxyz$ étant fixes par rapport aux étoiles et les variables r, θ, φ, t désignant les coordonnées polaires ordinaires de pôle O (centre de S) et le temps mesurés par les observateurs de S, les deux théories admettent les principes concordants suivants :

1° Le mouvement du point P quand il est très éloigné de tous les autres corps est rectiligne et uniforme.

2° Les lois du mouvement autour de O du point gravitant P ne dépendent pas explicitement de t et répondent à la symétrie d'une sphère autour de son centre O.

Par suite, la trajectoire de P est plane, son plan contenant O ; et en coordonnées polaires planes r, θ, les équations de mouvement sont des équations du deuxième ordre où ni θ, ni t ne figurent explicitement [équations de la forme (1)].

3° Les lois du mouvement ne changent pas quand on change t en $-t$.

4° L'accélération d'un élément P pour une position et une vitesse données de cet élément est la même quel que soit cet élément.

5° Dans l'espace interstellaire la lumière se propage en ligne droite avec une vitesse constante pour une direction donnée.

Postulats divergents. — En employant les équations classiques de la Mécanique sous la forme du principe de la moindre action, on peut mettre en parallèle les postulats divergents ainsi :

(1) Les Einsteiniens qualifient de *statique* tout ds^2 où t ne figure pas explicitement et où dt ne figure que par dt^2. Les propriétés mathématiques de tels ds^2 sont bien connues.

Théorie classique.

1° Si, sans changer le temps, on introduit des coordonnées curvilignes quelconques u, v, w au lieu de x, y, z, les trajectoires du mouvement sont les géodésiques d'un

$$d\sigma^2 = (\mathrm{U} + h)\, d\sigma_1^2,$$

où $d\sigma_1^2$ est une forme quadratique en du, dv, dw, dont les coefficients satisfont aux conditions invariantes (équations aux dérivées partielles du deuxième ordre) qui expriment que le $d\sigma_1^2$ est euclidien et où $\mathrm{U}(u, v, w)$, en dehors du globe S, satisfait à l'équation de Laplace en coordonnées curvilignes, équation invariante du deuxième ordre linéaire et homogène et où U ne figure pas explicitement.

2° Dans la théorie des ondulations, la vitesse de la lumière, loin de tout corps matériel, n'est la même dans tous les sens que si S est absolument fixe et non animé d'une translation par rapport à l'éther.

Dans la théorie de l'émission, la vitesse de la lumière est la même dans tous les sens si la source lumineuse est fixe par rapport aux axes $Oxyz$.

Théorie d'Einstein.

1° Les mouvements de P sont définis par les géodésiques d'un ds^2 à quatre dimensions dont les coefficients doivent satisfaire à certaines conditions invariantes dans n'importe quel changement des variables espace-temps, conditions aux dérivées partielles du deuxième ordre, de forme spéciale et qui laissent au problème le degré d'indétermination que l'expérience semble indiquer.

2° La vitesse de la lumière loin de tout corps matériel est la même dans tous les sens, et les géodésiques pour lesquelles ds^2 est nul définissent les trajectoires et le mouvement de la lumière.

Conclusions de tous les postulats (avec l'emploi des variables t, r, θ, φ).

Théorie classique :

$$d\sigma^2 = \left(\frac{\mu_1}{r} + h\right) \times [dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)],$$

μ_1 constante.

Théorie d'Einstein :

$$ds^2 = \left[1 - \frac{2\mu}{f(r)}\right] dt^2 - f^2(r)[d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2] - \frac{f'^2(r)\, dr^2}{1 - \dfrac{2\mu}{f(r)}},$$

μ constante, f fonction arbitraire de r telle que $f'(r)$ soit positif et tende vers zéro avec $\frac{\mu}{r}$.

Comparaison avec les observations astronomiques. — Dans ces observations, le maximum et le minimum r_1 et r_2 de la distance de la planète P au centre du soleil S sont parmi les éléments les mieux mesurés. Soit ω l'angle de ces deux rayons vecteurs r_1, r_2 et posons :

$$r_1 + r_2 = 2a, \qquad \frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2} = e;$$

dans la théorie newtonienne, a est le demi-grand axe et e l'excentricité de l'ellipse keplérienne. Soit enfin T l'intervalle de temps qui s'écoule entre deux périhélies successifs. Dans la théorie newtonienne, des formules classiques donnent

$$\mu_1 = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}, \qquad \omega = \pi. \tag{6}$$

Dans la théorie einsteinienne, la trajectoire de P ne se ferme pas [1], et si l'on pose

$$f(r_1) = f_1, \qquad f(r_2) = f_2, \qquad 2\alpha = f_1 + f_2,$$

on a

$$\frac{\mu}{1 + 6\dfrac{\mu}{\alpha}} = 4\pi \frac{\alpha^3}{T^2} \qquad \text{et} \qquad \omega - \pi = 3\pi\mu \frac{f_1 + f_2}{f_1 f_2}. \tag{7}$$

En outre, la déviation δ d'un rayon lumineux issu d'une étoile et passant près du bord du Soleil pour un observateur très éloigné placé de l'autre côté du Soleil est

$$\delta = \frac{4\mu}{f(l)}, \tag{8}$$

l désignant le rayon du Soleil.

Dans toutes ces formules, les unités sont choisies de façon que la vitesse de la lumière V soit égale à 1.

La comparaison des formules (6) et (7) montre que μ doit différer très peu de μ_1 et $\frac{f(r)}{r}$ très peu de l'unité (du moins dans le champ des observations astronomiques). La quantité $\frac{4\pi^2\alpha^2}{T^2}$ différera donc très peu de $\frac{4\pi^2 a^2}{T^2}$ et de $\frac{\mu}{l}\,\frac{l}{a} = \frac{4\,l}{10^6 a}$ (en chiffres ronds). Pour chaque planète, la quantité $\frac{\mu}{r}$ sera inférieure à $\frac{4}{10^6}\,\frac{l}{a(1-e)} < \frac{4}{10^6}$.

Einstein admet que $f(r) \equiv r$; cette identification n'est donc pas une conséquence de la relativité, mais elle est imposée *approximativement* par une première confrontation avec les observations astronomiques.

---

[1] L'année sidérale T′ (temps nécessaire pour que le rayon vecteur SP reprenne la même direction stellaire) diffère alors de T; elle est plus courte d'une petite durée qui dépend de la direction stellaire SE prise comme repère; la différence est maxima si SE coïncide avec la direction de l'aphélie (au début de l'année mesurée) et minima si SE coïncide avec la direction du périhélie.

Si on l'admet, on peut écrire

$$(9) \qquad \omega - \pi = \frac{6\pi\mu_1}{(1-e^2)a}(1+\eta), \qquad \delta = \frac{4\mu_1}{l}(1+\eta_1),$$

μ_1 désignant la valeur keplérienne $\frac{4\pi^2 a^3}{T^2}$ très approximativement commune à toutes les planètes, et η, η_1 deux quantités très petites devant l'unité.

Les formules (9) sont vérifiées pour l'avance du périhélie de Mercure et pour la déviation d'un rayon lumineux rasant le bord du Soleil. Mais on n'en peut conclure que la loi rigoureuse de la gravitation soit donnée par $f(r) \equiv r$.

Posons, en effet,

$$(10) \qquad f(r) = r[1+\varepsilon(u)] \qquad \text{avec} \qquad u = \frac{\mu}{r},$$

la fonction $\varepsilon(u)$ étant assujettie à être très petite pour $r > l$ $\left(\text{par exemple inférieure à } \frac{1}{10^3} \text{ pour } u < \frac{4}{10^6}\right)$ et telle de plus que $u\frac{d\varepsilon}{du} - \varepsilon(u)$ tende vers zéro avec u et reste inférieur à 1 pour $u < \frac{4}{10^6}$. *Les deux formules* (9) *subsistent* (η et η_1 restant très petits devant l'unité) et les deux vérifications qui ont si justement frappé l'opinion sont exactement aussi satisfaisantes.

Mais la première des formules (7) donne alors, en appelant ε_1 et ε_2 les valeurs de ε qui correspondent à r_1 et r_2,

$$(11) \qquad \frac{4\pi^2 a^3}{T^2} = \mu\left[1 - \frac{6\mu}{a} + \frac{3\varepsilon_1}{2}(1+e) - \frac{3\varepsilon_2}{2}(1-e)\right].$$

Einstein choisit $\varepsilon \equiv 0$ et l'on peut prendre pour μ la valeur

$$\frac{4\pi^2 a^3}{T^2}\left(1 + \frac{24\pi^2 a^2}{T^2}\right)$$

calculée pour Mercure (¹). Mais il n'en résulte pas que le choix $\varepsilon \equiv 0$ soit celui qui rende le mieux compte des observations astronomiques.

L'étude des *trajectoires seules* (trajectoire d'une planète ou trajectoire d'un rayon lumineux) ne permet pas de choisir aucune de ces fonctions $\varepsilon(r)$ de préférence aux autres; dans l'état actuel de nos mesures, toutes se valent.

(¹) Cette valeur coïncide avec la constante μ_1 de Kepler, à une erreur *relative* près moindre que $\frac{1}{7 \times 10^6}$.

Seule l'étude très précise du *temps* (durée des années de chaque planète) peut déterminer la fonction $\varepsilon(r)$. Encore faut-il que la planète soit sans satellite; sinon, il faut aborder le problème de trois corps au moins en présence, et les complications de la théorie einsteinienne deviennent formidables. D'une manière générale, il faudrait, en partant de la formule einsteinienne, où la fonction $\varepsilon(r)$ est indéterminée, refaire les Tables de Le Verrier suivant la nouvelle doctrine, et déterminer la fonction $\varepsilon(r)$ qui s'accorde le mieux avec les observations astronomiques. Dans l'état actuel des choses, nous pouvons aussi bien, au lieu de $f(r) \equiv r$, choisir $f(r)$ par exemple par la condition

$$\frac{f^2}{1-\frac{2\mu}{f}} = r^2;$$

le ds^2 devient alors

$$\left(1-\frac{2\mu}{f}\right)[dt^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)] - \frac{f'^2\, dr^2}{1-\frac{2\mu}{f}}; \tag{12}$$

l'accélération de P passe par O; elle est *centrale*, au lieu que, d'après la loi d'Einstein, elle a une composante normale à OP.

Approximativement $\left(\text{en négligeant } \frac{\mu^2}{r^2} \text{ devant l'unité}\right)$, on a

$$f = r - \mu,$$

et le dernier ds^2 peut s'écrire

$$\left(1-\frac{2\mu}{r}\right)[dt^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)] - \frac{dr^2}{1-\frac{2\mu}{r}}. \tag{12 bis}$$

On peut choisir encore $f(r)$ par la condition

$$\frac{f'^2}{1-\frac{2\mu}{f}} = 1,$$

ou *approximativement*

$$f = r\left[1 - \frac{\mu}{r}\log\frac{r}{\mu}\right],$$

d'où

$$ds^2 = \left(1-\frac{2\mu}{r}\right)dt^2 - r^2\left(1-\frac{2\mu}{r}\log\frac{r}{\mu}\right)(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) - dr^2. \tag{13}$$

On pourrait prendre encore

$$\frac{f'^2}{\left(1-\frac{2\mu}{f}\right)^2} = 1,$$

d'où approximativement

$$f = r\left(1 - \frac{2\mu}{r}\log\frac{r}{\mu}\right)$$

et

$$(14)\qquad ds^2 = \left(1 - \frac{2\mu}{r}\right)(dt^2 - dr^2) - r^2\left(1 - \frac{4\mu}{r}\log\frac{\mu}{r}\right)(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2).$$

En outre, si l'un des ds^2 ainsi adoptés présente des divergences avec les *durées* astronomiques observées, on pourrait toujours les faire disparaître par l'addition à ε de termes de la forme

$$b\left(\frac{\mu}{r}\right)^n \qquad (n > 1.$$

Enfin, on pourra toujours, *ad libitum*, ajouter à ε un terme arbitraire de cette forme, n étant assez grand pour que ce terme soit petit mais appréciable pour $r = e$ (surface du Soleil), mais complètement négligeable pour Mercure et les planètes plus éloignées. Il ne sera donc pas *logiquement* possible, si loin qu'on pousse les vérifications, de choisir entre trois ds^2 de la forme (5) où le coefficient de dr^2 est respectivement plus grand que 1, égal à 1 et plus petit que 1.

D'après certaines conceptions d'Einstein, que je considère quant à moi, je l'ai dit déjà, comme audacieuses et spéculatives, sa loi de gravitation entraînerait cette conséquence que tous les corps se contractent *de la même manière* $\left(\text{à savoir dans le rapport } \sqrt{1 - \frac{2\mu}{r}}\right)$ dans le sens du Soleil, quand ils s'en rapprochent. Pour qu'une telle affirmation fût admissible, il faudrait que la loi de gravitation d'Einstein fût la loi UNIQUE imposée par sa doctrine; mais il n'en est rien, et la même conception, appliquée au ds^2 (14), conduirait à la conclusion inverse. Il est vrai qu'en ce qui concerne l'influence de la gravitation sur la fréquence des vibrations d'un atome, le coefficient de dt^2 est à peine modifié par les divers choix de $\varepsilon(r)$, et par conséquent le sens de la conclusion n'est pas renversé. Mais si l'esprit même de la conception est contestable dans le cas des longueurs, comment ne le serait-il pas pour les durées?

Mais si intéressantes qu'elles soient, ces conceptions métaphysiques scientifiques peuvent crouler, sans que soit détruite la théorie positive de la gravitation, construite par Einstein.

ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 1er MAI 1922.

PRÉSIDENCE DE M. ÉMILE BERTIN.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE

MÉCANIQUE. — *La théorie classique et la théorie einsteinienne de la gravitation.* Note (¹) de M. **Paul Painlevé.**

1. Les discussions récentes auxquelles ont donné lieu les doctrines relativistes m'engagent à préciser, sous une forme que je voudrais aussi positive que possible, les corrélations et les divergences qui existent entre la théorie classique et la théorie einsteinienne de la gravitation.

L'exposé qui suit est entièrement différent de ceux qu'adoptent les relativistes; en particulier il ne suit aucunement le processus d'idées qui ont conduit Einstein et ses disciples à leur audacieuse et grandiose théorie. Mais peut-être est-ce le meilleur moyen d'en faire bien comprendre le sens aux adeptes de la Mécanique classique, en même temps que de mettre en évidence les postulats sur lesquels repose la nouvelle doctrine.

Plaçons-nous d'abord dans la théorie classique.

2. *Les axiomes de la Mécanique classique.*

Postulat I. — *Les solides naturels, maintenus dans des conditions telles que leurs dimensions relatives, comparées en un même lieu, d'ailleurs quelconque, restent constantes, répondent aux propriétés que la géométrie euclidienne attribue aux figures invariables.*

En particulier, un tel solide (le sol par exemple) étant regardé comme fixe, un autre solide, soit S, dont on fixe deux éléments A et B, peut occuper par rapport à S une infinité de positions : dans ces diverses positions, une file d'éléments restent fixes comme A et B, et la ligne qu'ils dessinent possède

---

(¹) Séance du 24 avril 1922.

les propriétés de la droite euclidienne. Nous adoptons comme *mètre* une telle droite solide ou règle, divisée en parties aliquotes. Mesurés avec un tel mètre, les solides matériels transportés avec lui dans l'espace gardent les mêmes dimensions. La longueur d'une courbe qui joint les points A et B d'un solide s'obtient en portant bout à bout sur cette courbe, de A jusqu'en B, le mètre (ou plutôt une partie aliquote très petite de ce mètre); la ligne de longueur minima qui joint A et B est la droite AB, et sa longueur définit la distance AB.

3. Considérons maintenant, dans l'éther immobile, un astre très éloigné de tous les autres corps matériels et immobile, et sur cet astre un groupe d'observateurs qui rapportent les mouvements de l'univers à leur astre ou, si l'on veut, à des axes trirectangles $Oxyz$ liés invariablement à cet astre (donc à l'éther). Ils peuvent mesurer (au moins théoriquement) la distance de deux points fixes A et B à l'aide de leur mètre et construire la droite qui joint A et B. Ceci posé, la doctrine classique admet qu'il leur est possible de définir *le temps* une fois pour toutes et en tout point de l'espace, de façon que les deux postulats suivants soient vrais :

Postulat II. — *Un élément matériel très éloigné de tous les autres décrit une droite avec une vitesse constante. En particulier, il reste immobile si sa vitesse initiale est nulle.* (Principe de Kepler.)

Postulat III. — *La lumière dans le vide se propage en ligne droite avec la même vitesse en tout point et dans tous les sens.* (Postulat de Fresnel.)

Le temps t étant mesuré localement en un point A de l'astre O par la répétition d'un phénomène toujours le même ([1]), on peut *donner l'heure* en un autre point fixe B par l'envoi d'un signal lumineux de A : si ce signal part de A à l'instant t, il est reçu par B à l'instant $t + \frac{l}{V}$, l désignant la distance AB et V la vitesse de la lumière ([2]). Imaginons qu'on substitue à A un autre point fixe A_1 dont les chronomètres sont réglés sur ceux de A par ce procédé : l'heure donnée par A_1 au point fixe B quelconque concordera avec l'heure donnée par A. Il en serait tout autrement si la vitesse de la lumière n'était pas la même dans tous les sens.

([1]) On vérifiera que le phénomène se répète identiquement en comparant sa durée à celle de multiples phénomènes, qu'on s'efforce de répéter chacun dans des conditions identiques en ce même lieu A : les durées *relatives* de ces phénomènes les unes par rapport aux autres doivent rester invariables.

([2]) Cette vitesse est mesurée par les procédés classiques, par exemple par la durée (mesurée en A) d'un certain nombre d'aller et retour d'un rayon lumineux issu de A et renvoyé en A par un miroir.

Ceci est vrai quelque éloignés que soient les points A et B. En particulier, d'après les postulats précédents, le triangle formé par trois rayons lumineux qui se rencontrent, si grands que soient ses côtés, jouit des propriétés d'un triangle rectiligne euclidien. La somme de ses angles est égale à deux droites.

4. *La gravitation newtonienne.* — Soit P ou (x, y, z) un élément matériel de très petite masse en présence d'un certain nombre de masses matérielles *immobiles*, les autres étant extrêmement éloignées. Les trajectoires de P dans l'espace sont les géodésiques d'un ds^2 de la forme

$$(\mathrm{U}+h)\,[dx^2+dy^2+dz^2] \equiv (\mathrm{U}+h)\,d\sigma^2, \tag{1}$$

où h est une constante arbitraire et U est une fonction de x, y, z qui satisfait à l'équation classique de Laplace-Clairaut dans tout l'espace et qui s'annule à l'infini, conditions qui la déterminent. Le temps t est donné par

$$dt = \frac{d\sigma}{\sqrt{2(\mathrm{U}+h)}}. \tag{2}$$

Si, sans changer t, on emploie, au lieu des coordonnées cartésiennes x, y, z, des coordonnées obliques ou des coordonnées curvilignes quelconques x_1, x_2, x_3 (indépendantes de t), le $d\sigma^2$ (carré de la distance de deux points infiniment voisins) devient une forme quadratique :

$$d\sigma^2 = \sum a_{jk}\,dx_j\,dx_k \qquad (j, k = 1, 2, 3) \tag{3}$$

et U une fonction $\mathrm{U}_1(x_1, x_2, x_3)$: les coefficients de $a_{jk}(x_1, \ldots, x_k)$ satisfont aux conditions classiques qui expriment que $d\sigma^2$ donné par (3) est un ds^2 euclidien, et U_1 satisfait à l'équation de Laplace-Clairaut en coordonnées curvilignes; ces conditions forment un ensemble d'équations aux dérivées partielles du second ordre, linéaire par rapport aux dérivées secondes, et invariant dans un changement quelconque des variables x_1, x_2, x_3.

En particulier, supposons que les masses se réduisent à une sphère de centre O formée de courbes concentriques homogènes, c'est-à-dire ayant du point de vue mécanique comme du point de vue géométrique la symétrie de la sphère : les trajectoires de P seront les géodésiques du ds^2

$$ds^2 = \left(\frac{\mu}{r} + h\right)\{dr^2 + r^2(\sin^2\theta\,d\varphi^2 + d\theta^2)\},$$

r, θ, φ désignant les coordonnées polaires de l'espace $Oxyz$.

5. *La gravitation einsteinienne.* — Nous ne pouvons réaliser que diffici-

lement et toujours imparfaitement les mesures théoriques des longueurs et du temps définies plus haut. D'autre part, nos expériences (quand on les analyse à fond) ne font jamais que constater la coïncidence de deux faits, au même instant, en un même point de l'espace. Or cette coïncidence subsiste quel que soit le changement (biunivoque) qu'on effectue sur les quatre variables x, y, z, t. D'où l'idée de modifier les équations de la Mécanique, en particulier de la gravitation, de telle façon qu'elles revêtent une forme invariante *simple*, non pas seulement dans le changement des variables spatiales x, y, z, mais dans le changement des quatre variables espace-temps.

6. Quand il s'agit du mouvement d'un élément P (ou de la propagation de la lumière) LOIN DE TOUTE MATIÈRE, la chose est immédiate.

Considérons en effet le ds^2 à quatre variables :

$$ds^2 = V^2\,dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2; \tag{4}$$

dans un mouvement quelconque de P, les coordonnées x, y, z sont linéaires en t; autrement dit, ces mouvements sont définis par les géodésiques du ds^2 précédent; les trajectoires des rayons lumineux sont les géodésiques pour lesquelles ds^2 est nul. Si l'on fait sur x, y, z, t un changement de variables quelconques, le ds^2 prend la forme (x_1, x_2, x_3, x_4 désignant les nouvelles variables) :

$$ds^2 = \sum A_{jk}(x_1, x_2, x_3, x_4)\,dx_j\,dx_k \qquad (j, k = 1, 2, 3, 4), \tag{5}$$

où les coefficients A_{jk} satisfont aux conditions classiques (équations linéaires par rapport aux dérivées partielles du deuxième ordre) qui expriment que le ds^2 donné par (5) est un ds^2 euclidien (à quatre variables).

Donc, — *quel que soit le repérage adopté,* — *loin de toute matière, les mouvements du point* P *sont définis par les géodésiques d'un ds^2 euclidien (à quatre variables) et les trajectoires de la lumière par les géodésiques du même ds^2, pour lesquelles ds^2 est nulle.*

Ce principe est une conséquence du principe de Kepler et du principe de Fresnel, mais il ne leur est pas équivalent. Il exprime en effet simplement que, par un choix convenable des variables (et qui d'ailleurs est possible d'une infinité de façons), le ds^2 en question est réductible à la forme $V^2dx_4^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2$. Pour obtenir intégralement les principes de Kepler et de Fresnel, il faut ajouter que, pour l'un au moins de ces choix des variables privilégiées, x_4 *est le temps et* $dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$ *le carré de la* *distance de deux points de l'espace infiniment voisins* mesurée à l'aide du mètre matériel.

7. Supposons maintenant, comme au n° 4, que P soit en présence d'un certain nombre de masses matérielles données. Nous sommes conduits, par ce qui précède, à admettre ce postulat :

Postulat IV. — *Le mouvement d'un point matériel quelconque, en présence de masses données, sous la seule influence de la gravitation, est défini par les géodésiques d'un ds^2 de la forme (5), où les A_{jk} satisfont à un ensemble de conditions invariantes dans tout changement des quatre variables x_1, x_2, x_3, x_4.*

Les trajectoires de la lumière sont définies par les géodésiques qui correspondent à $ds^2 = 0$.

Par analogie avec la Mécanique newtonienne et avec le cas où toutes les masses sont très éloignées de P, *on admet* en outre :

1° *Que ces conditions doivent être des équations aux dérivées partielles du second ordre linéaires par rapport aux dérivées du deuxième ordre;*

2° *Qu'elles doivent laisser aux A_{jk} l'exacte indétermination nécessaire que comporte la question.*

C'est ainsi qu'on parvient aux conditions einsteiniennes qui astreignent les $A_{jk}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ dits *potentiels de gravitation*.

Quand les masses sont immobiles, si l'on prend comme paramètre x_4 le temps t, on admet encore ces deux postulats :

Postulat V. — *Le ds^2 ne renferme pas t explicitement.* (Principe de causalité.)

Postulat VI. — *Le ds^2 ne change pas quand on change t en $-t$.* (Principe de la réversibilité.)

Le ds^2 est alors nécessairement de la forme

$$ds^2 = \frac{dt^2}{U(x_1, x_2, x_3)} - d\sigma^2 \qquad (U > 0), \tag{6}$$

où $d\sigma^2$ est de la forme (3), mais n'est plus euclidien (à 3 variables).

On sait (de par la corrélation entre le principe d'Hamilton et le principe de la moindre action) que les trajectoires de P sont alors données par les géodésiques du ds_1^2 à trois variables $ds_1^2 = (U + h)\,d\sigma^2$, h constante arbitraire, et t par $dt = \frac{U\,d\sigma}{\sqrt{U+h}}$. Les trajectoires de la lumière s'obtiennent en faisant $h = 0$, d'où alors $dt = \sqrt{U}\,d\sigma$.

Remarquons que le postulat III (Principe de Fresnel) est modifié; il n'est plus vrai que loin de toute matière; et ainsi modifié il rentre dans le postulat IV. Mais nous gardons jusqu'ici tous les autres postulats et notamment le postulat I.

8. Insistons sur le cas particulier où les masses se réduisent à une masse unique ayant la symétrie d'une sphère de centre O, et soit toujours r, θ, φ les coordonnées polaires de l'espace $Oxyz$. La symétrie et les conditions einsteiniennes montrent que le ds^2 est nécessairement de la forme trouvée par Schwarzschild (les unités étant choisies de façon que $V=1$)

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2\mu}{\rho}\right) dt^2 - \rho^2(\sin^2\theta\, d\varphi^2 + d\theta^2) - \frac{dr^2}{1 - \frac{2\mu}{\rho}}, \tag{7}$$

μ désignant une constante et ρ une certaine fonction de r, fonction inconnue dont nous savons seulement qu'elle devient infinie avec r.

La comparaison avec les lois de Kepler et de Newton montre aussitôt que μ est positif ([1]) et diffère très peu de la constante d'attraction newtonienne, et que ρ diffère très peu de r au moins dans les limites de notre système solaire. Si posant $\rho = r$, on calcule l'avance du périhélie de Mercure et la déviation des rayons lumineux par le Soleil, les observations, comme on sait, sont conformes au calcul. Mais la discordance avec la troisième loi de Kepler (*quand on suppose connus les grands axes des ellipses képleriennes*), entraîne par siècle des écarts, de l'ordre de 10 minutes de temps, soit pour Mercure de l'ordre de 2 minutes d'angle; seulement les grands axes ne sont pas connus avec assez de précision pour permettre de trancher entre les deux lois. Si, par la suite, le progrès des observations faisait ressortir des divergences appréciables entre la réalité et les conséquences de la formule de Schwarzschild ([1]), la théorie telle que nous l'avons exposée permettrait d'y parer en posant $\rho = r[1 + \varepsilon(r)]$, ε étant une fonction de r très petite pour r variant dans les limites du système solaire. Cette correction n'entraînerait qu'une modification *relative* très faible de l'avance périhélique et la déviation du rayon lumineux ([2]).

9. Le point de vue qui précède est celui auquel je me suis placé dans mes Communications antérieures. Il conserve (conformément aux conceptions

([1]) *A priori*, μ, dans (8), pourrait être négatif et les trajectoires de P tourneraient leur convexité vers O comme dans le cas d'une répulsion.

([2]) Le rayon vecteur n'est pas mesuré directement au mètre, mais par des observations optiques; l'influence de l'incurvation des rayons lumineux, comme plus loin l'abandon de la géométrie euclidienne, n'entraîne, dans la détermination des parallaxes, que des corrections actuellement imperceptibles à nos mesures.

de Poincaré) la géométrie euclidienne. Appelons, pour abréger, la théorie précédente la théorie *semi-einsteinienne* de la gravitation. Mais on peut adopter un autre point de vue qui consiste à renoncer au postulat I et à le remplacer par le postulat I *bis* :

Postulat I *bis*. — *Lorsque le ds^2 de la gravitation a reçu la forme* (6) *où t désigne le temps, $d\sigma$ mesure la distance de deux points fixes infiniment voisins.*

Si l'on veut encore, le plus court chemin mesuré avec le mètre matériel entre deux points fixes A et B de l'éther est une géodésique du $d\sigma^2$: le voisinage d'une masse matérielle influe sur les propriétés géométriques des solides naturels.

La divergence entre les deux théories des nos 7 et 9 est, dans le domaine astronomique, imperceptible à nos mesures actuelles. La théorie du n° 9 coïncide, dans ce domaine, avec celle d'Einstein, mais l'exposé précédent ne fait intervenir ni modification du temps, ni aucune considération de la relativité restreinte. Il reste à le comparer avec la doctrine *intégrale* d'Einstein : ce sera l'objet d'une prochaine Communication.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Le théorème de Cauchy sur l'intégrale d'une fonction entre les limites imaginaires.* Note de M. G. Mittag-Leffler.

Il paraît que je me suis mal exprimé dans ma Note (1), puisque M. Goursat tient à préciser dans une Note (2) que sa démonstration du théorème de Cauchy est la première qui ne fasse intervenir aucune condition du genre de la sienne. Autant que je sache, c'est aussi le cas, et personne n'a plus que moi admiré cette belle démonstration qui suppose essentiellement moins que la démonstration admise en général comme celle de Cauchy. Mais cela n'empêche pas que j'ai publié déjà en 1873 (3) une autre démonstration qui suppose elle aussi moins que la condition de Cauchy. C'est seulement en ajoutant à ma condition B (4) la condition C qu'on obtient la condition D de Cauchy. Voilà pourquoi j'ai pu dire, chose sans importance du reste, que j'avais publié une démonstration supposant moins que celle de Cauchy 27 ans avant M. Goursat.

(1) *Comptes rendus*, t. 174, 1922, p. 789.
(2) *Ibid.*, p. 836.
(3) *Svenska Vet. Ak.*, traduction allemande *Göttinger Nachrichten*, 1874.
(4) *Comptes rendus*, t. 174, 1922, p. 790.