MÉMOIRE

Sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en séries dont les divers termes sont assujettis à satisfaire à une même équation différentielle du second ordre contenant un paramètre variable ;

PAR JOSEPH LIOUVILLE.

(Présenté à l'Académie des Sciences, le 30 novembre 1835.)

I.

Lorsqu'on veut déterminer les lois du mouvement de la chaleur dans une barre hétérogène, placée dans un milieu entretenu à 0°, on tombe sur l'équation aux différences partielles

$$(1) \qquad g\frac{du}{dt} = \frac{d\left(k\frac{du}{dx}\right)}{dx} - lu.$$

Dans cette équation qui doit servir à déterminer la température u de chaque point en fonction du temps t et de l'abscisse x de ce point, les trois lettres g, k, l représentent respectivement la chaleur spécifique, la conductibilité intérieure et le pouvoir émissif : et, puisque la barre est hétérogène, on doit les regarder, non comme des constantes, mais comme des quantités variables données pour chaque valeur de x. Si les abscisses des deux extrémités de la barre sont x et X, on a de plus deux conditions définies de la forme

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{du}{dx} - hu = 0 \text{ pour } x = \mathrm{x}, \\ \dfrac{du}{dx} + \mathrm{H}u = 0 \text{ pour } x = \mathrm{X}, \end{array} \right.$$

h et H étant des constantes qui peuvent avoir des valeurs quelconques depuis o jusqu'à $+\infty$. Enfin, on doit avoir

$$(3) \qquad u = f(x) \text{ pour } t = 0,$$

$f(x)$ étant une fonction arbitraire qui représente l'état initial des températures et qui satisfait aux deux conditions

$$\frac{df(x)}{dx} - hf(x) = 0 \text{ pour } x = \mathrm{x},$$
$$\frac{df(x)}{dx} + \mathrm{H}f(x) = 0 \text{ pour } x = \mathrm{X},$$

lesquelles se déduisent, en posant $t = 0$, des équations (2) que nous avons regardées comme ayant lieu pour la valeur générale de u dont $f(x)$ n'est qu'un cas particulier.

Pour former la valeur de u qui satisfait à l'équation (1) et aux conditions définies (2) et (3), on est conduit à développer la fonction $f(x)$ (pour toutes les valeurs de x comprises entre x et X) en une série dont les termes successifs diffèrent l'un de l'autre par un paramètre r et ont la propriété de satisfaire à la fois à l'équation différentielle générale

$$-rg\mathrm{V} = \frac{d\left(k\frac{d\mathrm{V}}{dx}\right)}{dx} - l\mathrm{V},$$

et aux conditions particulières,

$$\frac{d\mathrm{V}}{dx} - h\mathrm{V} = 0 \text{ pour } x = \mathrm{x},$$
$$\frac{d\mathrm{V}}{dx} + \mathrm{HV} = 0 \text{ pour } x = \mathrm{X}.$$

On peut voir, dans l'ouvrage de M. Poisson sur la chaleur, comment on est porté, par la marche même du calcul, à admettre la possibilité de ce développement pour une fonction quelconque $f(x)$; mais jusqu'à ce jour il a paru difficile d'établir cette possibilité directement et d'une manière rigoureuse. Je me propose de donner ici une méthode très simple pour y parvenir. Je considère en elle-même la série par laquelle les géomètres ont représenté le développement de $f(x)$ dont il est question : sans rien supposer *à priori* sur l'origine de cette série ni sur sa nature, j'en cherche la valeur, et je trouve que cette valeur est précisément $f(x)$, du moins lorsque la variable x est comprise entre les limites x et X.

II.

Soient g, k, l trois fonctions positives données en nombres finis pour chaque valeur de x comprise entre x et X : nous supposerons que les deux premières restent constamment > 0; mais la dernière pourra être nulle, soit pour quelques valeurs particulières de x, soit même dans toute l'étendue des valeurs de cette variable. Soient encore h et H deux constantes qui peuvent avoir toutes les valeurs possibles depuis 0 jusqu'à $+\infty$.

En adoptant pour le nombre r une valeur convenable, on peut toujours trouver une fonction V qui ne devienne identiquement nulle pour aucune valeur déterminée de r, x restant indéterminée (*), et qui

(*) On peut exprimer V en série convergente. Pour cela soit k' ce que devient k quand $x = \mathrm{x}$: représentons par p_0, p_1, p_2,... une suite de quantités liées entre elles par la relation générale $p_{m+1} = \int_{\mathrm{x}}^{x} \frac{dx}{k} \int_{\mathrm{x}}^{x} (l - gr) p_m dx$: prenons en outre $p_0 = 1 + hk' \int_{\mathrm{x}}^{x} \frac{dx}{k}$, et faisons $p_0 + p_1 + p_2 + \ldots = \Pi(x, r)$. La valeur de V qui satisfait à la fois à l'équation indéfinie (A) et aux conditions définies (B) sera $\mathrm{V} = \Pi(x, r)$, r désignant une quelconque des racines de l'équation

$$\text{(C)} \qquad \frac{d\Pi(\mathrm{X}, r)}{d\mathrm{X}} + \mathrm{H}\Pi(\mathrm{X}, r) = 0.$$

Pour $x = \mathrm{x}$, on a $\mathrm{V} = 1$, $\frac{d\mathrm{V}}{dx} = h$, quel que soit r : la fonction V n'est donc identiquement nulle pour aucune valeur de r, x restant indéterminée. Cela posé, les racines de l'équation (C) seront toutes inégales, comme M. Sturm l'a démontré à la page 142 de ce volume : il pourrait n'en être plus de même si l'on employait (et cela est arrivé quelquefois) une valeur de V susceptible de devenir identiquement nulle pour certaines valeurs déterminées de r.

Quand on a $\mathrm{H} = +\infty$, la seconde des équations (B) étant divisée par H se réduit à $\mathrm{V} = 0$ pour $x = \mathrm{X}$, et semblablement l'équation (C) se réduit à $\Pi(\mathrm{X}, r) = 0$. Du reste, la valeur de V demeure la même que ci-dessus. Mais cette valeur change de forme quand on a $h = +\infty$: dans cette nouvelle hypothèse, la première des équations (B) devient $\mathrm{V} = 0$ pour $x = \mathrm{x}$; et, si l'on veut continuer à poser $\mathrm{V} = p_0 + p_1 + p_2 + \ldots = \Pi(x, r)$, il faut prendre $p_0 = k' \int_{\mathrm{x}}^{x} \frac{dx}{k}$, sans satisfasse à la fois à l'équation différentielle indéfinie

$$\text{(A)} \qquad \frac{d\left(k\frac{dV}{dx}\right)}{dx} + (gr - l)V = 0,$$

et aux conditions particulières,

$$\text{(B)} \qquad \begin{cases} \dfrac{dV}{dx} - hV = 0 \text{ pour } x = x, \\ \dfrac{dV}{dx} + HV = 0 \text{ pour } x = X. \end{cases}$$

Cette fonction V, comme on vient de le voir, se présente utilement dans la théorie de la chaleur; mais nous la considérons ici en elle-même, abstraction faite de son usage dans les problèmes de physique mathématique.

Pour que les conditions (B) soient satisfaites, il faut que le paramètre r soit choisi parmi les racines d'une certaine équation transcendante. Nous représenterons cette équation par

$$\text{(C)} \qquad \varpi(r) = 0.$$

Cela posé, notre but dans ce mémoire, est de trouver directement et par un procédé rigoureux la valeur de la série

$$\Sigma \left\{ \frac{V\int_{x}^{X} gVf(x)dx}{\int_{x}^{X} gV^2dx} \right\},$$

dans laquelle le signe Σ s'étend à toutes les valeurs de r qui satisfont à l'équation (C). Quelle que soit la fonction $f(x)$(*), nous montrerons

altérer d'ailleurs la relation établie entre p_m et p_{m+1}. Cela étant, on a, pour $x = x$, $\frac{dV}{dx} = 1$, valeur différente de zéro : par conséquent il n'existe aucune valeur de r qui rende V identiquement nulle, et dès lors, d'après la démonstration déjà citée de M. Sturm, l'équation (C) n'a que des racines inégales.

(*) Les fonctions que nous considérons dans ce mémoire [et la fonction $f(x)$ en particulier] peuvent changer de forme ou d'expression analytique dans l'étendue des valeurs de la variable ; mais, aux points où elles changent de forme, nous admettrons toujours qu'elles ne possèdent qu'une seule valeur. D'après cette restriction qui nous est commune avec M. Poisson (*voyez* la page 173 de son grand que la série en question a précisément $f(x)$ pour valeur, du moins lorsque la variable x est comprise entre les limites x, X.

III.

Mais avant d'entrer en matière, il faut rappeler quelques propriétés remarquables dont jouissent et la fonction V et les racines de l'équation (C).

1°. Les racines de l'équation (C) sont, en nombre infini, toutes réelles et inégales : la plus petite de ces racines peut être nulle ou $>$ o : les autres sont $>$o. Nous les désignerons désormais $r_1, r_2, r_3, \ldots r_m, \ldots r_n \ldots$ et nous les supposerons rangées par ordre de grandeur, en sorte que l'on ait $r_1 < r_2 < r_3 \ldots < r_m \ldots < r_n \ldots$ Nous représenterons aussi par $V_1(x)$, $V_2(x)$, $V_3(x), \ldots V_m(x), \ldots V_n(x), \ldots$ les diverses valeurs que prend la fonction V lorsqu'on y pose successivement $r = r_1$, $r = r_2$, $r = r_3, \ldots r = r_m, \ldots r = r_n, \ldots$

2°. Si l'on considère les valeurs de V relatives à deux racines différentes r_m, r_n, l'intégrale définie prise de $x = \mathrm{x}$ à $x = \mathrm{X}$ du produit de ces deux valeurs par gdx est toujours égale à zéro, de manière que l'on a

$$\int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} g V_m(x) V_n(x) dx = 0,$$

toutes les fois que la différence $r_m - r_n$ est autre que zéro.

3°. La fonction V ne devient jamais infinie, et elle ne peut changer de signe qu'en passant par la valeur zéro. L'étude des propriétés des racines de l'équation $V = 0$, dans laquelle on regarde x comme l'inconnue, est très intéressante. Si l'on considère celles des racines des équations $V_1(x) = 0$, $V_2(x) = 0$, $V_3(x) = 0, \ldots V_m(x) = 0, \ldots$ qui sont comprises entre x et X (abstraction faite des racines $x = \mathrm{x}$, $x = \mathrm{X}$, qui dans certains cas existent) on démontre que la première de ces équations est impossible, que la seconde possède une seule racine, que la troisième en possède deux, et ainsi de suite, en sorte

---

ouvrage sur la *Chaleur*), si l'on construit la ligne représentée par l'équation $y = f(x)$, cette ligne aura une seule ordonnée en chacun des points de jonction de deux parties conjuguées ; elle pourra avoir deux tangentes ou deux rayons de courbure différents appartenant à ces deux parties.

que la fonction $V_1(x)$ ne s'évanouit jamais, et que la fonction $V_m(x)$ s'évanouit $(m-1)$ fois pour des valeurs de $x > \mathrm{x}$ et $< \mathrm{X}$.

4°. Les $(m-1)$ racines $> \mathrm{x}$ et $< \mathrm{X}$ de l'équation $V_m(x) = 0$ sont inégales entre elles, et de plus comprises entre les m racines de l'équation suivante : $V_{m+1}(x) = 0$. Ainsi la fonction $V_1(x)$ est la seule qui ne change jamais de signe lorsque x croît d'une manière continue de x à X : la fonction $V_m(x)$ change $(m-1)$ fois de signe dans le même intervalle.

5°. Si l'on désigne par $A_m, A_{m+1}, \ldots A_n$, des constantes qui ne soient pas toutes nulles, et si l'on pose

$$A_m V_m(x) + A_{m+1} V_{m+1}(x) + \ldots + A_n V_n(x) = \Psi(x),$$

la fonction $\Psi(x)$ ne sera jamais identiquement nulle, et l'équation $\Psi(x) = 0$ aura $(m-1)$ racines au moins et $(n-1)$ racines au plus entre x et X. Dans l'énoncé de ce théorème, chaque racine multiple de l'équation $\Psi(x) = 0$ (lorsque cette équation a des racines multiples) doit être comptée autant de fois qu'elle entre dans l'équation : ainsi les racines doubles doivent être comptées deux fois, les racines triples trois fois, etc.

On sait comment M. Poisson s'est servi de l'équation

$$\int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} g V_m(x) V_n(x) dx = 0,$$

pour prouver la réalité de toutes les racines de l'équation (C). Les autres propriétés des racines $r_1, r_2, r_3, \ldots$ ont été découvertes et démontrées en rigueur par M. Sturm (*). Considérées en elles-mêmes et indépendamment de leurs applications, ces propriétés sont déjà très élégantes : l'usage que nous allons en faire leur donnera peut-être plus de prix encore aux yeux des géomètres.

(*) On prendra une idée des méthodes employées par M. Sturm en lisant son *Mémoire sur l'intégration des équations différentielles linéaires du second ordre* (*voyez* page 106 de ce volume). Mais la démonstration complète du 5e théorème (dont nous allons surtout faire usage) n'a été donnée par l'auteur que dans un *Mémoire sur l'intégration des équations aux différences partielles* encore inédit et dont il nous a promis d'enrichir ce journal.

IV.

Nous nous servirons d'abord des théorèmes contenus dans le numéro précédent, pour établir quelques lemmes préliminaires dont nous aurons besoin plus tard.

Lemme 1er. *Soient a, b, c,... des grandeurs inégales comprises entre* x *et* X. *Posons*

$$\begin{aligned}
V_1(a)V_2(x) - V_2(a)V_1(x) &= P_2(x),\\
V_1(a)V_3(x) - V_3(a)V_1(x) &= P_3(x),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
V_1(a)V_m(x) - V_m(a)V_1(x) &= P_m(x),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}
P_2(b)P_3(x) - P_3(b)P_2(x) &= Q_3(x),\\
P_2(b)P_4(x) - P_4(b)P_2(x) &= Q_4(x),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
P_2(b)P_m(x) - P_m(b)P_2(x) &= Q_m(x),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

puis encore

$$\begin{aligned}
Q_3(c)Q_4(x) - Q_4(c)Q_3(x) &= R_4(x),\\
Q_3(c)Q_5(x) - Q_5(c)Q_3(x) &= R_5(x),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
Q_3(c)Q_m(x) - Q_m(c)Q_3(x) &= R_m(x),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

et ainsi de suite. Je dis que, si l'on se borne à considérer les valeurs de $x >$ x *et* $<$ X, *la fonction* $P_2(x)$ *s'évanouira pour* $x=a$ *et seulement pour* $x=a$: *la fonction* $Q_3(x)$ *s'évanouira pour* $x=a$, $x=b$ *et seulement pour* $x=a$, $x=b$; *la fonction* $R_4(x)$ *s'évanouira pour* $x=a$, $x=b$, $x=c$, *et seulement pour* $x=a$, $x=b$, $x=c$, *et ainsi des autres. De plus, toutes ces fonctions* $P_2(x)$, $Q_3(x)$, $R_4(x)$,... *changeront de signe chaque fois qu'elles s'évanouiront.*

D'abord on se rappelle que la fonction $V_1(x)$ ne peut jamais devenir nulle quand x est $>$ x et $<$ X.

La fonction $P_2(x)$ se ramène à la forme $A_1V_1(x) + A_2V_2(x)$ en posant $A_1 = -V_2(a)$, $A_2 = V_1(a)$, et le coefficient A_2 n'est pas nul.

Donc par le 5^e théorème du n° III, cette fonction ne peut s'annuller plus d'une fois quand x est $>$ x et $<$ X, et il est d'ailleurs évident qu'elle devient nulle quand $x=a$. En vertu du même théorème, la racine a ne peut être qu'une racine simple : par conséquent, la fonction $P_2(x)$ doit changer de signe en même temps qu'elle s'évanouit. Les fonctions $P_3(x)$, $P_4(x)$, ... ne jouissent pas nécessairement des mêmes propriétés que $P_2(x)$: elles s'annullent, il est vrai pour $x=a$, mais la racine a peut être multiple, et des racines autres que a, quoique comprises entre x et X, peuvent satisfaire aux équations $P_3(x)=0$, $P_4(x)=0$, ...

La fonction $Q_3(x)$ s'annulle évidemment pour $x=b$, elle s'annulle aussi pour $x=a$ puisque l'on a $P_2(a)=0$, $P_3(a)=0$. Or, en remplaçant $P_2(x)$ et $P_3(x)$ par leurs valeurs, la fonction $Q_3(x)$ prend la forme $A_1V_1(x)+A_2V_2(x)+A_3V_3(x)$ et le coefficient A_3 n'est pas nul puisqu'on le trouve égal à $P_2(b)V_1(a)$: donc pour des valeurs de $x>$ x et $<$ X, $Q_3(x)$ ne peut s'évanouir plus de deux fois : donc on a bien $Q_3(x)=0$ pour $x=a$, $x=b$, et seulement pour $x=a$, $x=b$: de plus les racines a et b ne peuvent être que des racines simples, ce qui oblige la fonction $Q_3(x)$ à changer de signe chaque fois qu'elle s'évanouit. Les fonctions $Q_4(x)$, $Q_5(x)$, ... deviennent nulles pour $x=a$ et $x=b$; mais elles ne jouissent pas nécessairement des autres propriétés démontrées pour $Q_3(x)$.

La fonction $R_4(x)$ s'annulle évidemment pour $x=c$: elle s'annulle aussi pour $x=a$ et $x=b$, car il est aisé de voir que l'on a $Q_3(a)=0$, $Q_3(b)=0$, $Q_4(a)=0$, $Q_4(b)=0$. Or, en remplaçant $Q_3(x)$ et $Q_4(x)$, puis $P_2(x)$, $P_3(x)$, $P_4(x)$ par leurs valeurs, celle de $R_4(x)$ prend la forme $A_1V_1(x)+A_2V_2(x)+A_3V_3(x)+A_4V_4(x)$, A_4 ayant la valeur suivante $Q_3(c)P_2(b)V_1(a)$ qui ne peut pas être nulle. Donc l'équation $R_4(x)=0$ ne peut avoir entre les limites x, X aucune racine différente de a, b, c, et de plus ces trois racines doivent être simples, en sorte que $R_4(x)$ changera de signe en s'évanouissant.

Il est clair que l'on pourra continuer indéfiniment cette démonstration.

Corollaire. Les $(m-1)$ lettres a, b, c, ... représentant toujours des quantités inégales $<$ x et $>$ X, on peut déterminer les constantes A_1, A_2, A_3, ... A_m, de telle manière que la fonction

$$\Psi(x) = A_1V_1(x) + A_2V_2(x) + A_3V_3(x) + \ldots + A_mV_m(x),$$

sans être identiquement nulle, devienne égale à zéro pour $x=a$, $x=b$, $x=c,\ldots$ En effet, si l'on a $m=2$, il suffira de prendre $\Psi(x)=P_2(x)$: si l'on a $m=3$, il suffira de prendre $\Psi(x)=Q_3(x)$; si l'on a $m=4$, il suffira de prendre $\Psi(x)=R_4(x)$; et ainsi de suite.

La fonction $\Psi(x)$ étant ainsi déterminée, l'équation $\Psi(x)=0$ ne peut avoir que $(m-1)$ racines au plus (5ᵉ théorème du nº III) : or, les quantités $a, b, c,\ldots$ sont par hypothèse au nombre de $(m-1)$: on voit donc, comme nous l'avons déjà fait observer, 1°. que les racines de l'équation $\Psi(x)=0$ sont toutes inégales et comprises dans la série $a, b, c,\ldots$ 2°. que par suite la fonction $\Psi(x)$ change de signe chaque fois qu'elle s'évanouit. Il est bien entendu que la variable x ne sort pas des limites x, X.

LEMME 2ᵉ. *Soit $\varphi(x)$ une fonction de x : si l'équation*

$$(\alpha) \qquad \int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} \varphi(x)\,V\,dx = 0$$

a lieu en remplaçant r par une quelconque des racines de l'équation (C), *je dis que l'on a nécessairement $\varphi(x)=0$, de $x=\mathrm{x}$ à $x=\mathrm{X}$.*

D'abord, si la fonction $\varphi(x)$, sans être identiquement nulle, conservait toujours le même signe depuis $x=\mathrm{x}$ jusqu'à $x=\mathrm{X}$, l'équation (α) serait absurde, car en posant $r=r_1$ on aurait

$$\int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} \varphi(x)V_1(x)dx = 0,$$

et cela ne se peut, puisque la fonction $V_1(x)$ ne change pas non plus de signe entre les limites $x=\mathrm{x}$, $x=\mathrm{X}$.

Supposons maintenant que lorsqu'on fait croître x de x à X, $\varphi(x)$ change de signe $(m-1)$ fois, et soient $a, b, c,\ldots$ les $(m-1)$ valeurs de x pour lesquelles ce changement s'effectue. En faisant successivement $r=r_1$, $r=r_2,\ldots r=r_m$, dans l'équation (α), on en déduira m équations nouvelles que l'on pourra ajouter membre à membre après les avoir multipliées respectivement par les constantes $A_1, A_2,\ldots A_m$. En posant

$$A_1V_1(x) + A_2V_2(x) + \ldots + A_mV_m(x) = \Psi(x),$$

on trouvera ainsi

$$\int_{x}^{X} \varphi(x)\Psi(x)dx = 0.$$

Mais, d'après le corollaire du lemme 1[er], on peut déterminer les constantes $A_1, A_2, \ldots A_m$, de telle manière que la fonction $\Psi(x)$ change de signe toutes les fois que x atteint et dépasse infiniment peu une des $(m-1)$ valeurs $a, b, c, \ldots\ldots$ et ne change de signe pour aucune autre valeur de x. En adoptant les valeurs de $A_1, A_2, \ldots A_m$, qui produisent cet effet, l'élément $\varphi(x)\ \Psi(x)dx$ conservera toujours le même signe dans toute l'étendue de l'intégration, et par conséquent, on ne pourra pas avoir $\int_{x}^{X} \varphi(x)\Psi(x)dx = 0$, à moins qu'on n'ait aussi $\varphi(x) = 0$, du moins pour les valeurs de x comprises entre x et X.

V.

Maintenant nous pouvons résoudre le problème qui fait l'objet spécial de ce mémoire.

Problème. *Trouver la valeur de la série*

$$\Sigma \left\{ \frac{V\int_{x}^{X} gVf(x)dx}{\int_{x}^{X} gV^2dx} \right\}$$

dans laquelle le signe Σ *s'étend à toutes les valeurs de* r *qui sont racines de l'équation* (C). *La variable* x *est comprise entre* x *et* X, *et la fonction* $f(x)$ *est donnée arbitrairement entre ces limites.*

En représentant par $F(x)$ la valeur cherchée et remplaçant le signe Σ par la série qu'il représente, on a

$$F(x) = \frac{V_1(x)\int_{x}^{X} gV_1(x)f(x)dx}{\int_{x}^{X} gV_1(x)^2dx} + \frac{V_2(x)\int_{x}^{X} gV_2(x)f(x)dx}{\int_{x}^{X} gV_2(x)^2dx} +$$

$$\ldots\ldots + \frac{V_m(x)\int_{x}^{X} gV_m(x)f(x)dx}{\int_{x}^{X} gV_m(x)^2dx} + \ldots\ldots$$

Je multiplie les deux membres par $gV_m(x)dx$ et j'intègre ensuite par rapport à x en prenant x et X pour les limites de l'intégrale. Puisque pour deux indices m et n différents, on a

$$\int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} g\mathrm{V}_m(x)\mathrm{V}_n(x)dx = 0,$$

cette intégration fera disparaître tous les termes du second membre à l'exception d'un seul, et l'on aura

$$\int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} g\mathrm{V}_m(x)\,\mathrm{F}(x)dx = \int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} g\mathrm{V}_m(x)f(x)dx,$$

d'où l'on tire

$$\int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} g[\mathrm{F}(x) - f(x)]\,\mathrm{V}_m(x)dx = 0.$$

Cette égalité devant avoir lieu pour toutes les valeurs possibles de l'indice m et la fonction g étant constamment > 0, il résulte du lemme 2e que, pour toutes les valeurs de x comprises entre x et X, on doit avoir $\mathrm{F}(x) - f(x) = 0$, d'où $\mathrm{F}(x) = f(x)$. La valeur cherchée de la série est donc $f(x)$, entre ces limites de la variable, ce qui s'accorde avec le résultat que les géomètres ont obtenu par d'autres méthodes moins directes et moins rigoureuses que la nôtre.

D'après les équations de condition (B), qui sont remplies pour la fonction V, la valeur $\mathrm{F}(x)$ de la série

$$\Sigma\left\{\frac{\mathrm{V}\int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} g\mathrm{V}f(x)dx}{\int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} g\mathrm{V}^2dx}\right\}$$

satisfait aux égalités

$$\frac{d\mathrm{F}(x)}{dx} - h\mathrm{F}(x) = 0 \text{ pour } x = \mathrm{x},$$
$$\frac{d\mathrm{F}(x)}{dx} + \mathrm{H}\mathrm{F}(x) = 0 \text{ pour } x = \mathrm{X};$$

si donc on veut que l'égalité $\mathrm{F}(x) = f(x)$ soit exacte aux limites mêmes $x = \mathrm{x}$, $x = \mathrm{X}$, il faudra regarder la fonction $f(x)$ comme assujettie aux deux conditions

$$\frac{df(x)}{dx} - hf(x) = 0 \text{ pour } x = \mathrm{x},$$
$$\frac{df(x)}{dx} + \mathrm{H}f(x) = 0 \text{ pour } x = \mathrm{X},$$

que nous avons admises en effet au nº I.

VI.

Nous croyons devoir ajouter à la démonstration précédente quelques remarques qui ne seront pas sans intérêt.

Par un raisonnement semblable à celui dont nous nous sommes servis pour démontrer le 2e lemme du n° IV, on peut encore établir la proposition suivante : *Si l'équation*

$$(\beta) \qquad \int_{x}^{X} \varphi(x) V dx = 0$$

a lieu en remplaçant r *par une quelconque des racines* $r_1, r_2, \ldots$ *jusqu'à* r_n, *je dis que la fonction* $\varphi(x)$ *change de signe au moins* n *fois, lorsqu'on fait croître* x *depuis* x *jusqu'à* X. En effet, supposons, s'il est possible, que la fonction $\varphi(x)$, dans cet intervalle, change de signe $(m-1)$ fois seulement, m étant $\leq n$, et soit (comme au n° IV) $\Psi(x)$ une fonction de la forme $A_1V_1(x) + A_2V_2(x) + \ldots + A_mV_m(x)$, qui change de signe aussi $(m-1)$ fois et pour les mêmes valeurs que $\varphi(x)$, le produit $\varphi(x)\Psi(x)dx$ ne changera jamais de signe, et par suite on ne pourra pas avoir

$$\int_{x}^{X} \varphi(x)\Psi(x)dx = 0,$$

ce qui résulte pourtant de l'équation (β) en y posant successivement $r = r_1$, $r = r_2, \ldots r = r_m$, puis ajoutant membre à membre les équations ainsi obtenues, après les avoir multipliées par les facteurs respectifs A_1, $A_2 \ldots A_m$. Il est donc absurde d'admettre que la fonction $\varphi(x)$ s'annulle $(m-1)$ fois seulement, m étant $\leq n$: ce qui démontre la proposition énoncée.

Désignons par σ_n la somme des n premiers termes de la série

$$\Sigma \left\{ \frac{V \int_{x}^{X} gVf(x)dx}{\int_{x}^{X} gV^2 dx} \right\}$$

dont on n'a pas besoin de supposer que la somme soit connue. Pour un indice m égal ou inférieur à n, nous obtiendrons immédiatement

$$\int_{x}^{X} g\sigma_n V_m(x)dx = \int_{x}^{X} gV_m(x)f(x)dx,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$(\gamma) \qquad \int_{x}^{X} g\rho_n V_m(x)dx = 0,$$

ρ_n représentant la différence $f(x) - \sigma_n$. En comparant cette équation à l'équation (β), on conclut de la proposition qui vient d'être démontrée, que la quantité ρ_n s'annulle au moins $(n-1)$ fois lorsque x croît depuis x jusqu'à X.

Soit Q une fonction quelconque de la forme $A_1V_1(x) + A_2V_2(x) + \ldots + A_nV_n(x)$ (ce qui comprend comme cas particulier la fonction σ_n). En posant dans l'équation (γ) successivement $r = r_1$, $r = r_2, \ldots r = r_n$, puis ajoutant les équations ainsi obtenues, après les avoir multipliées par $A_1, A_2, \ldots A_n$, on a :

$$\int_{x}^{X} g\rho_n Q dx = 0;$$

ce qui, en posant $Q = \sigma_n$, devient :

$$\int_{x}^{X} g\rho_n \sigma_n dx = 0.$$

Maintenant multiplions par $g\sigma_n dx$ et intégrons entre les limites x, X les deux membres de l'équation $f(x) = \sigma_n + \rho_n$, puis effaçons le terme $\int_{x}^{X} g\rho_n \sigma_n dx$, qui est égal à zéro; nous obtiendrons ainsi

$$\int_{x}^{X} g\sigma_n f(x)dx = \int_{x}^{X} g\sigma_n^2 dx :$$

nous obtiendrons une autre formule plus remarquable encore, savoir,

$$\int_{x}^{X} gf(x)^2 dx = \int_{x}^{X} g(\sigma_n^2 + \rho_n^2)dx,$$

en multipliant par gdx et intégrant le carré $f(x)^2 = \sigma_n^2 + 2\sigma_n\rho_n + \rho_n^2$. Cette dernière formule nous prouve que l'intégrale $\int_{x}^{X} g\sigma_n^2 dx$, quelque grand qu'on prenne l'indice n, ne peut jamais avoir une valeur numérique supérieure à la limite $\int_{x}^{X} gf(x)^2 dx$ avec laquelle elle coïncide lorsque $n = \infty$.