Le Carré magique du Pape Léon III

par René Descombes
Ingénieur divisionnaire honoraire des travaux publics de l'État

37	78	29	70	21	62	13	54	5
6	38	79	30	71	22	63	14	46
47	7	39	80	31	72	23	55	15
16	48	8	40	81	32	64	24	56
57	17	49	9	41	73	33	65	25
26	58	18	50	1	42	74	34	66
67	27	59	10	51	2	43	75	35
36	68	19	60	11	52	3	44	76
77	28	69	20	61	12	53	4	45

La grille numérique carrée ci-dessus se trouve telle quelle, sans aucun commentaire, dans un opuscule connu sous le nom d'*Enchiridion du pape Léon*, rédigé par Léon III. À vrai dire, on ne sait pas trop ce que vient faire ici ce carré magique normal, d'ordre n = 9, de constante magique[1] $M_9 = 369$, à tel point que dans certaines éditions modernes de l'*Enchiridion*, cette grille numérique a été supprimée (édition de 1660 par exemple). Un genre de talisman ?

On retrouve ce carré magique dans l'ouvrage de Mouny[2], ainsi que dans les *Curiosités et récréations mathématiques*, de G. Boucheny, Larousse 1939, p. 130, de façon tout aussi insolite que dans l'*Enchiridion*, sans liaison aucune avec le texte du livre.

D'aucuns considèrent ainsi, mais de façon abusive, cette grille numérique comme très mystérieuse.

1. La constante magique est la somme commune à chacune des neuf lignes, neuf colonnes et deux diagonales.
2. Colonel Guy-Claude Mouny, *Nouvelles découvertes sur les carrés magiques*, Éditions des 3 Spirales, 2005.

UN CARRÉ MAGIQUE DE TYPE ASSOCIÉ

Tout d'abord c'est un carré magique de *type associé* : la somme des termes complémentaires[3] est constante et égale à la *constante de polarisation S* (dénomination du général Cazalas, 1934), qui est elle-même égale à $S = n^2 + 1$, soit S = 82 dans le cas qui nous occupe.

Dans le cas d'un carré magique d'ordre impair, ce qui est le cas du carré magique d'ordre n = 9 étudié, la case centrale est égale à la moitié de cette constante de polarisation, soit 41 ; c'est aussi le terme médian de la série des entiers « 1, 2, 3, . . . n^2 », soit ici « 1, 2, 3 . . . 81 ». Dans ce cas particulier, cette case médiane, est égale à la demi somme des termes situés sur les médianes et les diagonales du carré central d'ordre n = 3 (qui est donc « magique » sur ses médianes et diagonales, $M'_3 = 123$)

40	81	32
9	41	73
50	1	42

On peut d'ailleurs faire une remarque analogue à propos des grilles carrées centrées d'ordre n = 5 et n = 7, qui sont « *magiques* » *sur leurs médianes et diagonales.*

39	80	31	72	23
8	40	81	32	64
49	9	41	73	33
18	50	1	42	74
59	10	51	2	43

$M'_5 = 205$

7	39	80	31	72	23	55
48	8	40	81	32	64	24
17	49	9	41	73	33	65
58	18	50	1	42	74	34
27	59	10	51	2	43	75
68	19	60	11	52	3	44

$M'_7 = 287$

3. Dans un carré magique de type associé, les termes complémentaires symétriques par rapport au centre de la grille, ont même somme $S = n^2 + 1$. Ainsi par exemple 37 & 45, 38 & 44, etc.

Le pape Léon III

Homme d'église de l'époque carolingienne, Léon III, né et décédé à Rome (750–816), fut pape de 795 à 816, soit pendant une vingtaine d'années. Ce fut un grand admirateur et ami de Charlemagne ; lorsque sa légitimité fut contestée, en 799, il se réfugia auprès de Charlemagne à Paderborn, en Saxe. Il le couronna empereur, à Noël 800, dans la basilique Saint-Pierre de Rome.

Dans *l'Enchiridion Leonis Papae*, que l'on peut traduire *Manuel du pape Léon*, un « grimoire » rédigé vers 795, on trouve de mystérieuses oraisons, des invocations, des conjurations pour tous les maux et circonstances, des textes des rois antiques, ainsi que des formules pour déclencher les forces sacrées, des sceaux, des pentacles, des talismans… L'*Enchiridion* fut offert par Léon III à Charlemagne. Un exemplaire original en latin est conservé à la bibliothèque du Vatican à Rome. Précisons que Léon III n'était pas mathématicien !

__Figure 1 :__ Une représentation supposée de Léon III, sur une mosaïque d'époque du Palais du Latran, à Rome *(image WikiCommons).*

Gerbert d'Aurillac (945 –1003) qui devint pape sous le nom de Sylvestre II (999 –1003), connu comme « Pape de l'an Mil », fut le seul pape mathématicien. Il favorisa l'introduction et l'essor en Occident de la numération de position, des tables d'opération et des chiffres dits arabes. Le zéro inventé aux Indes, et rapporté en Occident par les invasions arabes, trouva en lui un ardent défenseur : il tentera de l'imposer, mais ce n'est que vers le XIVème siècle que le monde occidental l'acceptera définitivement. Il a publié plusieurs ouvrages de mathématiques.

DES PROGRESSIONS ARITHMÉTIQUES

Dans les diagonales parallèles à la première diagonale[4], dans une diagonale sur deux (représentées sur fond parme ou jaune ci-dessous), tous les termes sont en progression arithmétique de raison r = 1. Dans les diagonales intermédiaires (sur fond blanc), ces progressions sont moins régulières, s'arrêtant en cours de route, et reprenant à partir d'un autre nombre.

Il n'y a apparemment pas d'ordonnancement bien défini.

37	78	29	70	21	62	13	54	5
6	38	79	30	71	22	63	14	46
47	7	39	80	31	72	23	55	15
16	48	8	40	81	32	64	24	56
57	17	49	9	41	73	33	65	25
26	58	18	50	1	42	74	34	66
67	27	59	10	51	2	43	75	35
36	68	19	60	11	52	3	44	76
77	28	69	20	61	12	53	4	45

Parallèlement à la seconde diagonale, on peut faire les mêmes remarques : les termes, dans une diagonale sur deux, sont tous en progression arithmétique régulière de raison r = 9. Ces progressions sont interrompues dans les diagonales intermédiaires, pour reprendre à partir d'un autre nombre, mais toujours avec la même raison r = 9.

37	78	29	70	21	62	13	54	5
6	38	79	30	71	22	63	14	46
47	7	39	80	31	72	23	55	15
16	48	8	40	81	32	64	24	56
57	17	49	9	41	73	33	65	25
26	58	18	50	1	42	74	34	66
67	27	59	10	51	2	43	75	35
36	68	19	60	11	52	3	44	76
77	28	69	20	61	12	53	4	45

4. On appelle *première diagonale* celle qui va du coin en haut à gauche au coin en bas à droite, et *seconde diagonale* celle qui va du coin en haut à droite au coin en bas à gauche.

DES ÉCARTS RÉGULIERS

Considérons maintenant les termes dans les colonnes. On ne constate pas la présence de progression arithmétique dans la suite des termes, mais une certaine régularité dans la différence entre deux termes accolés verticalement, dans chaque colonne : ces différences figurent au droit de chaque colonne du carré magique ci-dessous.

37	78	29	70	21	62	13	54	5
6	38	79	30	71	22	63	14	46
47	7	39	80	31	72	23	55	15
16	48	8	40	81	32	64	24	56
57	17	49	9	41	73	33	65	25
26	58	18	50	1	42	74	34	66
67	27	59	10	51	2	43	75	35
36	68	19	60	11	52	3	44	76
77	28	69	20	61	12	53	4	45

31 - 41	40 - 41	40 - 50	40 - 50	40 - 50	40 - 50	40 - 50	40 - 41	31 - 41

Si l'on considère alors les lignes, nous constatons, à défaut d'un enchaînement systématique, les mêmes différences entre deux nombres accolés, de colonne en colonne – soit une petite « famille » qui se réduit à quatre nombres : 32, 40, 41 & 49 (ci-dessous, en blanc, le carré magique ; les colonnes jaunes représentent la différence entre les deux nombres voisins horizontalement dans le carré).

37	41	78	49	29	41	70	49	21	41	62	49	13	41	54	49	5
6	32	38	41	79	49	30	41	71	49	22	41	63	49	14	32	46
47	40	7	32	39	41	80	49	31	41	72	49	23	32	55	40	15
16	32	48	40	8	32	40	41	81	49	32	32	64	40	24	32	56
57	40	17	32	49	40	9	32	41	32	73	40	33	32	65	40	25
26	32	58	40	18	32	50	49	1	41	42	32	74	40	34	32	66
67	40	27	32	59	49	10	41	51	49	2	41	43	32	75	40	35
36	32	68	49	19	41	60	49	11	41	52	49	3	41	44	32	76
77	49	28	41	69	49	20	41	61	49	12	41	53	49	4	41	45

On peut encore remarquer que dans les colonnes, on assiste à une sorte de *classement numérique* des entiers : la première colonne est réservée aux entiers se terminant par 6 ou 7 ; la seconde par 7 ou 8 ; la troisième par 8 ou 9 ; la quatrième par zéro (avec la présence d'un 9) ; la cinquième aux neuf nombres qui se terminent par 1 ; la sixième par 2 (avec la présence d'un 3) ; la septième par 3 ou 4, la huitième par 4 ou 5 ; et enfin la neuvième par 5 ou 6.

37	78	29	70	21	62	13	54	5
6	38	79	30	71	22	63	14	46
47	7	39	80	31	72	23	55	15
16	48	8	40	81	32	64	24	56
57	17	49	9	41	73	33	65	25
26	58	18	50	1	42	74	34	66
67	27	59	10	51	2	43	75	35
36	68	19	60	11	52	3	44	76
77	28	69	20	61	12	53	4	45

LA POLYMAGIE DU CARRÉ MAGIQUE PAPAL

Dans le carré magique papal, les vingt alignements magiques (lignes, colonnes et diagonales) ne sont pas les seuls à assurer cette magie : il y a en effet un grand nombre *N* de combinaisons de la série des 81 premiers entiers de cette grille pris 9 à 9, dont la somme des termes est « magique », c'est-à-dire égale à M_9 = 369. C'est ce que l'on nomme la « polymagie » d'un carré magique : la connaissance de ces nombreuses combinaisons magiques, et leur catalogue, est tributaire d'un logiciel *ad hoc* (récursif par exemple). Au-delà de *n* = 6, il est nécessaire de disposer d'un ordinateur ayant une capacité-mémoire très importante.

Ordre *n*	3	4	5	6	7	8	9
Constante magique M_n	15	34	65	111	175	260	369
Nombre d'alignements magiques : *2 n + 2*	8	10	12	14	16	18	20
Nombre total de combinaisons C_{n2}^{n}	84	1 820	53 130	1 947 792	8,6 x 10^7	4,4 x 10^9	2,6 x 10^{11}
Nombre *N* de combinaisons C_{n2}^{n} « magiques »	8	86	1 394	32 134	?	?	?

Compte-tenu de la progression rapide de *N*, on peut augurer que le carré magique papal compte un nombre impressionnant de combinaisons de *neuf* termes dont la somme est « magique ».

LE CARRÉ MAGIQUE PAPAL EST AUTOCOMPLÉMENTAIRE

Rappelons que lorsque l'on remplace chaque terme d'un carré magique normal d'ordre *n*, par son complémentaire à $n^2 + 1$, on obtient un carré magique, dit « complémentaire », qui a la même constante linéaire et les mêmes propriétés que le carré d'origine.

Et si ce « complémentaire » se superpose, après rotation(s), avec le carré d'origine, ce dernier est alors dit *« autocomplémentaire ».* On dit aussi de ces deux carrés magiques qu'ils sont *jumeaux.*

C'est précisément le cas du carré magique papal, avec $n^2 + 1 = 82$: le « complémentaire » coïncide après rotation de deux quarts de tour, avec le carré magique papal.

37	78	29	70	21	62	13	54	5
6	38	79	30	71	22	63	14	46
47	7	39	80	31	72	23	55	15
16	48	8	40	81	32	64	24	56
57	17	49	9	41	73	33	65	25
26	58	18	50	1	42	74	34	66
67	27	59	10	51	2	43	75	35
36	68	19	60	11	52	3	44	76
77	28	69	20	61	12	53	4	45

45	4	53	12	61	20	69	28	77
76	44	3	52	11	60	19	68	36
35	75	43	2	51	10	59	27	67
66	34	74	42	1	50	18	58	26
25	65	33	73	41	9	49	17	57
56	24	64	32	81	40	8	48	16
15	55	23	72	31	80	39	7	47
46	14	63	22	71	30	79	38	6
5	54	13	62	21	70	29	78	37

Carré complémentaire

Ceci n'est pas une propriété générale des carrés magiques impairs construits en application de la Méthode par cheminement régulier (que nous détaillerons plus loin) : ces carrés magiques ne sont pas tous autocomplémentaires.

Mais on retrouve cependant certaines coïncidences. Ainsi dans l'exemple ci-dessous d'un carré magique normal d'ordre n = 5, de constante magique $M_5 = 65$:

– Case-départ : n° 7 du carré naturel ;
– Marche principale : une des 8 marches du cavalier aux échecs ;
– Saut secondaire : on saute 2 cases parallèlement à la seconde diagonale, vers le haut et à droite (ex. à g. ci-dessous : 5 à 6, 10 à 11, 15 à 16, 20 à 21).

8	23	13	3	18		
11	1	16	6	21	11	16
19	9	24	14	4	19	
22	12	2	17	7	22	
5	20	10	25	15	5	
	23	13	3	18	8	

18	3	13	23	8
15	25	10	20	5
7	17	2	12	22
4	14	24	9	19
21	6	16	1	11

Complémentaire

Dans le « Complémentaire », avec $n^2 + 1 = 26$, on retrouve les alignements horizontaux inversés (ce qui correspond à une symétrie dont l'axe vertical se trouverait entre les deux grilles), mais les lignes correspondantes ont subi une permutation circulaire.

Remarquons que les termes des cycles successifs de $n = 5$, sont bien situés sur une permutation figurée dans les deux grilles (cases pochées – voir plus loin).

DES SOUS-CARRÉS MAGIQUES

On peut aussi considérer ce carré magique d'ordre $n = 9$, de 81 cases, comme formé de neuf sous-carrés[5] d'ordre $n = 3$ de 9 cases, numérotés ci-dessous, de 1 à 9, tels qu'ils sont placés dans ce carré magique :

	37	78	29	
1	6	38	79	123
	47	7	39	
114		123		114

	70	21	62	
2	30	71	22	123
	80	31	72	
213		123		213

	13	54	5	
3	63	14	46	123
	23	55	15	
42		123		42

	16	48	8	
4	57	17	49	123
	26	58	18	
51		123		51

	40	81	32	
5	9	41	73	123
	50	1	42	
123		123		123

	64	24	56	
6	33	65	25	123
	74	34	66	
195		123		195

	67	27	59	
7	36	68	19	123
	77	28	69	
204		123		204

	10	51	2	
8	60	11	52	123
	20	61	12	
33		123		33

	43	75	35	
9	3	44	76	123
	53	4	45	
132		123		132

5. Dans ce cas, un peu comme les sous-grilles d'un sudoku. La comparaison s'arrête là.

On observe alors les propriétés suivantes :

- Les médianes *ont toutes la même somme*, S = 123, soit $M_9/3$;
- Les sommes des diagonales sont égales dans chaque sous-carré pris individuellement ;
- Dans le sous-carré central, les sommes des médianes et des diagonales sont égales, S = 123.

@@@@@@@

Maintenant, si l'on place les sommes des différentes diagonales de chaque sous-carré, dans une grille d'ordre n = 3 (ci-dessous), on forme un carré magique type associé, de constante magique M'_3 = 369, et de constante de polarisation[6] *S* = 246, soit le double de la case centrale.

Dans la Lyre[7] correspondante, chaque ligne est en progression arithmétique de raison r = 9.

On peut naturellement faire la même manipulation avec les sommes des médianes, avec le même résultat.

	114	213	42	369
	51	123	195	369
	204	33	132	369
369	369	369	369	369

33	42	51	r = 9
114	123	132	r = 9
195	204	213	r = 9

La Lyre

UNE CONSTRUCTION MYSTÉRIEUSE ?

Dans son ouvrage *Nouvelles découvertes sur les carrés Magiques*[8], le colonel Guy-Claude Mouny écrit à propos du carré magique du pape Léon III :

> *Certes, nous n'avons pas découvert le mode de construction de* [ce carré magique]… *Comme les choses vont vite, nous sommes attentif à un long développement de M. Alain Becquart (que nous avions consulté) pour la construction de ce carré. Il la décrit comme simple, ce qui est vrai pour le montage numérique. Mais nous ne la reproduirons pas, car cela*

6. Rappelons que la constante de polarisation se définit comme la somme des termes complémentaires symétriques par rapport au centre de la grille.
7. On définit la lyre d'un carré magique comme le résultat du placement des termes en ordre croissant d'une ligne à l'autre, dans une grille de même ordre.
8. *Op. cit.*

demanderait plusieurs pages. Nous restons à la disposition des lecteurs qui en voudraient copie.

Le colonel Mouny (1930-2007) n'est hélas plus là pour nous communiquer cette fameuse méthode de M. Alain Becquart pour la construction du carré magique du pape Léon III…

Voici néanmoins une méthode de construction de ce carré magique papal, très simple, et qui *ne nécessite que quelques lignes* d'explications :

– On établit un *cheminement régulier*, parallèle à la première diagonale principale.
– On part de la case numérotée « 1 », juste au-dessous de la case centrale (n° 50 du carré naturel correspondant), en procédant aux reports habituels lorsque l'on tombe en dehors de la grille, et l'on saute une case vers le bas en fin de cycle, après 9 sauts : soit dans ce premier cycle, après le 9, on poursuit par le 10, en sautant une case vers le bas.

37	78	29	70	21	62	13	54	5	
6	38	79	30	71	22	63	14	46	6
47	7	39	80	31	72	23	55	15	47
16	48	8	40	81	32	64	24	56	16
57	17	49	9	41	73	33	65	25	57
26	58	18	50	1	42	74	34	66	26
67	27	59	10	51	2	43	75	35	67
36	68	19	60	11	52	3	44	76	36
77	28	69	20	61	12	53	4	45	77
	78	29	70	21	62	13	54	5	

– On continue ce cheminement, toujours en observant le décalage d'une case vers le bas, tous les 9 sauts. On ne peut pas se tromper : on remplit ainsi une diagonale brisée après l'autre, dans toute la grille. Les cases pochées en couleurs ci-dessus représentent les trois premiers cycles de 9 sauts.

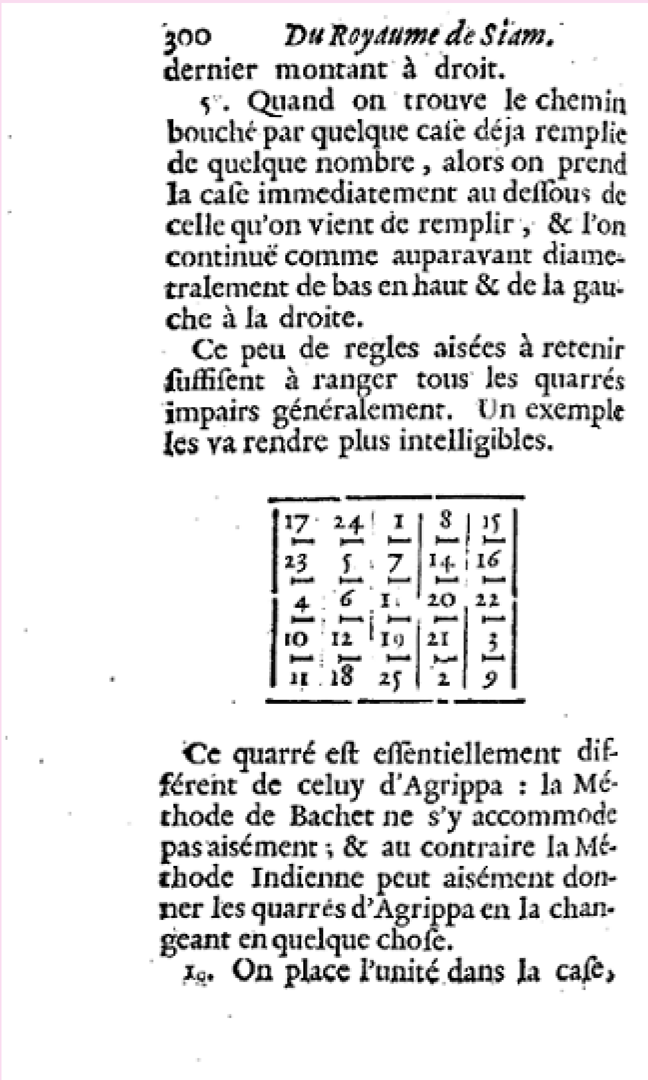
La Loubère, retour de Siam

Il s'agit de la « Méthode siamoise » rapportée par Simon de La Loubère (1642–1729), qui fut ambassadeur extraordinaire de Louis XIV auprès de Naraï, roi de Siam (Thaïlande actuelle), vers 1687–1688.

Il consacre une soixantaine de pages aux carrés magiques dans le second volume de son ouvrage *Du Royaume de Siam* (1691) ; c'est lui qui introduisit en Occident le qualificatif de carré « magique ».

La Loubère était, entre autres, mathématicien : il a laissé un ouvrage posthume De la résolution des équations, ou de l'extraction de leurs racines, publié en 1732. Il fut élu membre de l'Académie Française en 1693.

Cependant on peut penser que la « Méthode siamoise », dite de Simon de La Loubère, ou « Méthode par cheminement régulier », était connue en Occident bien avant lui.



300 *Du Royaume de Siam.*

dernier montant à droit.

5°. Quand on trouve le chemin bouché par quelque caſe déja remplie de quelque nombre, alors on prend la caſe immediatement au deſſous de celle qu'on vient de remplir, & l'on continuë comme auparavant diametralement de bas en haut & de la gauche à la droite.

Ce peu de regles aisées à retenir ſuffiſent à ranger tous les quarrés impairs généralement. Un exemple les va rendre plus intelligibles.

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	1[illegible]	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

Ce quarré eſt eſſentiellement différent de celuy d'Agrippa : la Méthode de Bachet ne s'y accommode pas aisément ; & au contraire la Méthode Indienne peut aisément donner les quarrés d'Agrippa en la changeant en quelque choſe.

10. On place l'unité dans la caſe,

Figure 2 : ***S. de La Loubère,*** **Du Royaume de Siam** ***(1691), Tome 2, p. 300*** *(image Gallica BnF)*

DES PERMUTATIONS FIGURÉES

On constate immédiatement que les cycles ci-dessus, sur diagonales brisées, correspondent à des *permutations figurées* : ces neuf permutations figurées (1-9 en saumon, 10-18 en jaune,... 73-81 en bistre) remplissent toutes la grille.

37	78	29	70	21	62	13	54	5
6	38	79	30	71	22	63	14	46
47	7	39	80	31	72	23	55	15
16	48	8	40	81	32	64	24	56
57	17	49	9	41	73	33	65	25
26	58	18	50	1	42	74	34	66
67	27	59	10	51	2	43	75	35
36	68	19	60	11	52	3	44	76
77	28	69	20	61	12	53	4	45

C'est une propriété générale des carrés magiques construits par la Méthode par cheminement régulier. Cependant, ces diagonales brisées ou ces permutations figurées, ne sont pas magiques : le carré magique normal *papal* n'est pas diabolique[9], ce qui serait un comble !

@@@@@@

Il existe de nombreuses variantes de cette méthode de construction d'un carré magique d'ordre impair. Au départ de l'une des cases de la grille d'ordre n = 9, on peut imaginer 4 marches principales diagonales, et 16 sauts secondaires en fin de cycle[10], soit : 81 x 4 x 16 = 5 184 carrés magiques de type papal.

Voici une application, qui conduit bien à un carré magique normal de type papal, M_9 = 369 : case-départ n° 22 du carré naturel d'ordre n = 9 ; marche principale diagonale vers le haut et à gauche ; saut secondaire orthogonal : 2 cases à droite.

9. Un carré magique est dit « diabolique » lorsqu'en sus des lignes, des colonnes et des deux diagonales principales, les diagonales brisées sont également magiques.
10. Par exemple, après le 9, on peut placer le 10 dans les 8 cases de la ligne du 9, ou les 8 cases de sa colonne.

44	4	54	14		24	65	34	75		
74	43	3	53	13	63	23	64	33	74	
32	73	42	2	52	12	62	22	72	32	73
71	31	81	41	1	51	11	61	21	71	
20	70	30	80	40	9	50	10	60	20	
59	19	69	29	79	39	8	49	18	59	19
17	58	27	68	28	78	38	7	48	17	
47	16	57	26	67	36	77	37	6	47	
5	46	15	56	25	66	35	76	45	5	46
	4	54	14	55	24	65	34	75	44	

On peut envisager divers sauts secondaires orthogonaux, mais aussi diagonaux, l'ensemble atteignant ainsi au premier saut toutes les cases disponibles de la grille. Dans cette éventualité, on peut construire : 81 x 4 x 72 = 23 328 carrés magiques de ce type.

UNE MÉTHODE TRÈS PROLIFIQUE

La méthode dite « par cheminement régulier », applicable aux ordres impairs n > 3, compte-tenu des choix de la case-départ, de la marche principale, et du saut secondaire, peut être considérée comme très prolifique, même si elle ne donne pas toujours un carré magique, mais souvent un carré semi-magique, ou un carré avec une seule diagonale magique. Voici un exemple, d'ordre n = 5, un carré magique de constante magique M_5 = 65, de type associé, S = 26 : on saute 2 cases vers le bas en fin de cycle.

11	5	19	8	22	
23	12	1	20	9	23
10	24	13	2	16	10
17	6	25	14	3	17
4	18	7	21	15	4
11	5	19	8	22	

On dénombre les solutions comme suit : compte tenu du choix de la case-départ (25 choix), du cheminement (4 directions diagonales possible à partir de la case départ), et de toutes les possibilités de saut secondaire, dans les cases disponibles lors du premier saut secondaire, soit $n^2 - n$ = 20 cases, le nombre de solutions est alors, dans ce cas particulier N = 25 x 4 x 20 = 2 000.

@@@@@@

Voici un autre exemple d'application de la Méthode par cheminement régulier, pour un carré *semi-magique normal* d'ordre n = 7 :

- Case départ : case centrale (n° 25 du carré naturel) ;
- Marche principale : une des marches du cavalier aux échecs ;
- Saut secondaire orthogonal : une case à gauche en fin de cycle (ex. ci-dessous de 7 à 8)[11] ;
- Constante magique M_7 = 175 ;
- Lignes et colonnes sont magiques, mais seule la seconde diagonale l'est.

36	35	27	19	11	3	44	
16	8	7	48	40	32	24	16
45	37	29	28	20	12	4	45
25	17	9	1	49	41	33	25
5	46	38	30	22	21	13	5
34	26	18	10	2	43	42	34
14	6	47	39	31	23	15	14
		27	19	11	3		

Ce cas particulier se dénombre ainsi : avec le choix de la case-départ parmi les n^2 = 49 cases de la grille, le choix du cheminement dans l'une des 8 marches du cavalier, et le choix de l'un des 12 sauts secondaires orthogonaux possibles en fin de cycle, le nombre *N* de carrés magiques ou semi-magiques que l'on peut ainsi construire théoriquement est *N* = 49 x 8 x 12 = 4 704.

UN TAPIS MAGIQUE

Soit le « tapis » ci-dessous, formé de quatre carrés magiques du Pape Léon III juxtaposés. Si l'on promène à l'intérieur de ce tapis une grille d'ordre *n* = 9 de 81 cases, on obtient toujours un carré magique ou semi-magique, avec souvent une seule diagonale magique.

11. Puisque la case où viendrait le 8 par marche du cavalier depuis le 7 est déjà prise par le 1.

37	78	29	70	21	62	13	54	5	37	78	29	70	21	62	13	54	5
6	38	79	30	71	22	63	14	46	6	38	79	30	71	22	63	14	46
47	7	39	80	31	72	23	55	15	47	7	39	80	31	72	23	55	15
16	48	8	40	81	32	64	24	56	16	48	8	40	81	32	64	24	56
57	17	49	9	41	73	33	65	25	57	17	49	9	41	73	33	65	25
26	58	18	50	1	42	74	34	66	26	58	18	50	1	42	74	34	66
67	27	59	10	51	2	43	75	35	67	27	59	10	51	2	43	75	35
36	68	19	60	11	52	3	44	76	36	68	19	60	11	52	3	44	76
77	28	69	20	61	12	53	4	45	77	28	69	20	61	12	53	4	45
37	78	29	70	21	62	13	54	5	37	78	29	70	21	62	13	54	5
6	38	79	30	71	22	63	14	46	6	38	79	30	71	22	63	14	46
47	7	39	80	31	72	23	55	15	47	7	39	80	31	72	23	55	15
16	48	8	40	81	32	64	24	56	16	48	8	40	81	32	64	24	56
57	17	49	9	41	73	33	65	25	57	17	49	9	41	73	33	65	25
26	58	18	50	1	42	74	34	66	26	58	18	50	1	42	74	34	66
67	27	59	10	51	2	43	75	35	67	27	59	10	51	2	43	75	35
36	68	19	60	11	52	3	44	76	36	68	19	60	11	52	3	44	76
77	28	69	20	61	12	53	4	45	77	28	69	20	61	12	53	4	45

ET ENCORE DES SOUS-CARRÉS MAGIQUES !

37	78	29
6	38	79
47	7	39

70	21	62
30	71	22
80	31	72

13	54	5
63	14	46
23	55	15

16	48	8
57	17	49
26	58	18

40	81	32
9	41	73
50	1	42

64	24	56
33	65	25
74	34	66

67	27	59
36	68	19
77	28	69

10	51	2
60	11	52
20	61	12

43	75	35
3	44	76
53	4	45

Les sommes des termes des sous-carrés magiques d'ordre 3 forment elles-mêmes, ci-dessous, un carré magique d'ordre 3, de constante magique $M'_3 = 1107$ (1107 = 3 x 369) et de type associé, de constante de polarisation S = 738 (738 = 3 x 246)

360	459	288	1107
297	369	441	1107
450	279	378	1107

1107 1107 1107 1107 1107

279	288	297	r = 9
360	369	378	r = 9
441	450	459	r = 9

La Lyre

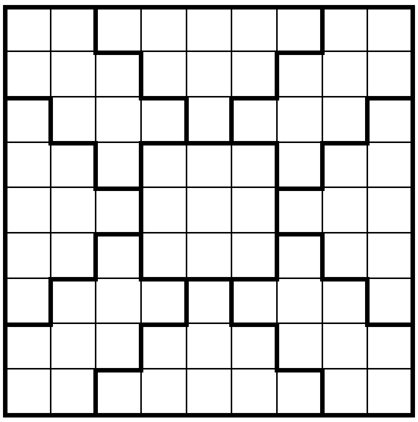
Dans les lignes de la lyre correspondante, ces sommes sont en progression arithmétique : r = 9.

Notons qu’avec les *termes homologues* des sous-carrés de 9 cases, on peut former 9 grilles numériques, lesquelles sont autant de carrés magiques de type associé, on de carrés semi magiques.

UN PROBLÈME DE PAVAGE

On peut toujours paver une grille carrée d’ordre *n*, avec *n* polyminos d’ordre *n*, identiques ou bien différents.

Ainsi la grille d’ordre *n* = 9 du carré magique papal, peut être pavée de *n* = 9 polyminos d’ordre n = 9. Il existe de nombreuses solutions (il y a 1285 9-ominos, sans compter les rotations ni les symétries…) ; ci-dessous un exemple de pavage à symétrie centrale.



On peut également paver cette grille avec 27 triminos : une des solutions se déduit aisément de l’exemple ci-dessus.

@@@@@@

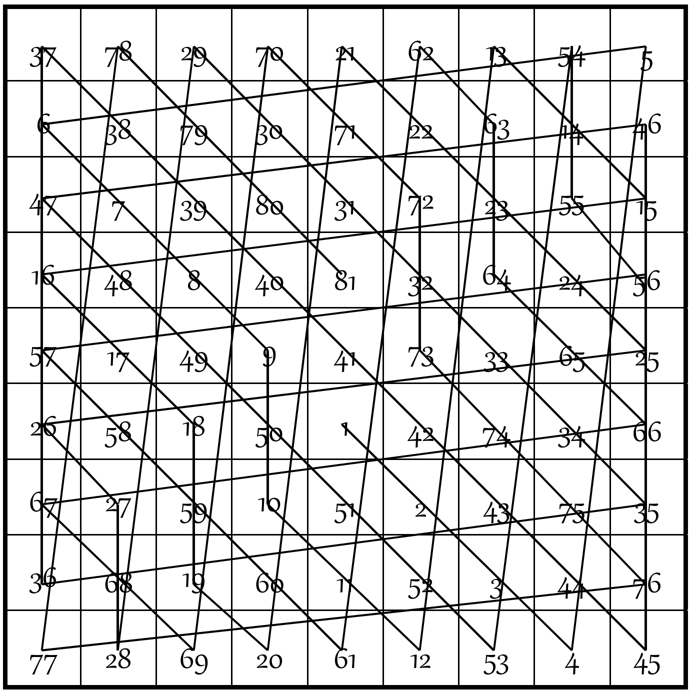
Mais peut-on paver la grille du carré magique papal avec 9 polyminos d’ordre *n* = 9 « magiques », c’est-à-dire dont la somme S des neuf termes soit égale à la constante magique de ce carré magique, soit $S = M_9 = 369$? C'est un problème très difficile – peut-être insoluble ?

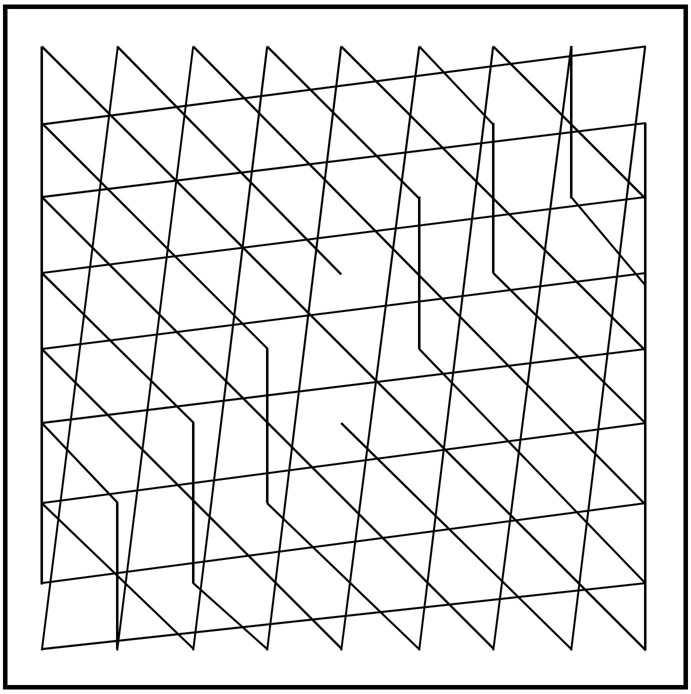
Est-ce plus facile avec 27 triminos de somme $S = M_9/3 = 123$?

37	78	29	70	21	62	13	54	5
6	38	79	30	71	22	63	14	46
47	7	39	80	31	72	23	55	15
16	48	8	40	81	32	64	24	56
57	17	49	9	41	73	33	65	25
26	58	18	50	1	42	74	34	66
67	27	59	10	51	2	43	75	35
36	68	19	60	11	52	3	44	76
77	28	69	20	61	12	53	4	45

Un tracé remarquable

Voici à présent le tracé régulier remarquable du carré magique du pape Léon III, à symétrie centrale : la méthode de construction par cheminement apparait nettement.





LA DUPLICATION DU CARRÉ MAGIQUE DU PAPE LÉON III – LA MÉTHODE DES QUATRE CARRÉS.

C'est une opération délicate qui exige beaucoup d'attention, qui passe par l'intermédiaire d'un carré auxiliaire, lequel n'est pas toujours facile à établir.

37	78	29	70	21	62	13	54	5
6	38	79	30	71	22	63	14	46
47	7	39	80	31	72	23	55	15
16	48	8	40	81	32	64	24	56
57	17	49	9	41	73	33	65	25
26	58	18	50	1	42	74	34	66
67	27	59	10	51	2	43	75	35
36	68	19	60	11	52	3	44	76
77	28	69	20	61	12	53	4	45

On prépare une grille d'ordre n = 18, de 324 cases, que l'on divise en quatre quadrants. On remplit cette grille avec la série « 0, 1, 2, 3 », en nombre égal dans chaque ligne et chaque colonne, de façon à avoir 3p = 27 (*p* étant la constante du carré papal, égale à 9) comme constante linéaire. Voici une solution ci-dessus, parmi d'autres.

	3	3	3	3	3	3	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	27
	3	3	3	3	3	3	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	27
	3	3	3	3	3	3	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	27
	3	3	3	0	0	0	3	3	3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	27
	3	3	3	0	0	0	3	3	3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	27
	3	3	3	0	0	0	3	3	3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	27
	3	3	3	3	3	3	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	27
	3	3	3	3	3	3	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	27
	3	3	3	3	3	3	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	27
	0	0	0	0	0	0	3	3	3	2	2	2	2	2	2	2	2	2	27
	0	0	0	0	0	0	3	3	3	2	2	2	2	2	2	2	2	2	27
	0	0	0	0	0	0	3	3	3	2	2	2	2	2	2	2	2	2	27
	0	0	0	3	3	3	0	0	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	27
	0	0	0	3	3	3	0	0	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	27
	0	0	0	3	3	3	0	0	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	27
	0	0	0	0	0	0	3	3	3	2	2	2	2	2	2	2	2	2	27
	0	0	0	0	0	0	3	3	3	2	2	2	2	2	2	2	2	2	27
	0	0	0	0	0	0	3	3	3	2	2	2	2	2	2	2	2	2	27
27	27	27	27	27	27	27	27	27	27	27	27	27	27	27	27	27	27	27	27

	148	312	116	280	84	248	49	213	17	146	310	114	278	82	246	50	214	18	2925
	24	152	316	120	284	88	249	53	181	22	150	314	118	282	86	250	54	182	2925
	188	28	156	320	124	288	89	217	57	186	26	154	318	122	286	90	218	58	2925
	64	192	32	157	321	125	256	96	224	62	190	30	158	322	126	254	94	222	2925
	228	68	196	33	161	289	132	260	100	226	66	194	34	162	290	130	258	98	2925
	104	232	72	197	1	165	296	136	264	102	230	70	198	2	166	294	134	262	2925
	268	108	236	40	204	8	169	297	137	266	106	234	38	202	6	170	298	138	2925
	144	272	76	240	44	208	9	173	301	142	270	74	238	42	206	10	174	302	2925
	308	112	276	80	244	48	209	13	177	306	110	274	78	242	46	210	14	178	2925
	145	309	113	277	81	245	52	216	20	147	311	115	279	83	247	51	215	19	2925
	21	149	313	117	281	85	252	56	184	23	151	315	119	283	87	251	55	183	2925
	185	25	153	317	121	285	92	220	60	187	27	155	319	123	287	91	219	59	2925
	61	189	29	160	324	128	253	93	221	63	191	31	159	323	127	255	95	223	2925
	225	65	193	36	164	292	129	257	97	227	67	195	35	163	291	131	259	99	2925
	101	229	69	200	4	168	293	133	261	103	231	71	199	3	167	295	135	263	2925
	265	105	233	37	201	5	172	300	140	267	107	235	39	203	7	171	299	139	2925
	141	269	73	237	41	205	12	176	304	143	271	75	239	43	207	11	175	303	2925
	305	109	273	77	241	45	212	16	180	307	111	275	79	243	47	211	15	179	2925
2925	2925	2925	2825	2825	2925	2925	2925	2925	2925	2925	2925	2925	2925	2925	2925	2925	2925	2925	2925

Explication de la duplication ci-dessus : dans une grille vierge d'ordre n = 18, on applique la relation opérationnelle : « 4 a + r – 3 », case par case : « a » étant le nombre donné par le carré papal, et « r » par le carré auxiliaire K. Ainsi la case en haut à gauche du duplicat est obtenue comme suit[12] : 4*37 + 3 – 3 = 148 ; la case en bas à droite est obtenue par 4*45 + 2 – 3 = 179 ; la 10^e case de la première ligne du duplicat est obtenue par 4*37 (on reprend ici la case en haut à gauche du carré initial) + 1 – 3 = 146.

On obtient un carré magique normal d'ordre n = 18 et de constante magique M_{18} = 2 925, soit un *duplicat* du carré magique du pape Léon III. Il y a de nombreuses solutions pour le carré auxiliaire K, conduisant ainsi à un duplicat différent du carré papal.

QUELQUES PROPRIÉTÉS DU DUPLICAT

148	312	116	280	84	248	49	213	17	146	310	114	278	82	246	50	214	18
24	152	316	120	284	88	249	53	181	22	150	314	118	282	86	250	54	182
188	28	156	320	124	288	89	217	57	186	26	154	318	122	286	90	218	58
64	192	32	157	321	125	256	96	224	62	190	30	158	322	126	254	94	222
228	68	196	33	161	289	132	260	100	226	66	194	34	162	290	130	258	98
104	232	72	197	1	165	296	136	264	102	230	70	198	2	166	294	134	262
268	108	236	40	204	8	169	297	137	266	106	234	38	202	6	170	298	138
144	272	76	240	44	208	9	173	301	142	270	74	238	42	206	10	174	302
308	112	276	80	244	48	209	13	177	306	110	274	78	242	46	210	14	178
145	309	113	277	81	245	52	216	20	147	311	115	279	83	247	51	215	19
21	149	313	117	281	85	252	56	184	23	151	315	119	283	87	251	55	183
185	25	153	317	121	285	92	220	60	187	27	155	319	123	287	91	219	59
61	189	29	160	324	128	253	93	221	63	191	31	159	323	127	255	95	223
225	65	193	36	164	292	129	257	97	227	67	195	35	163	291	131	259	99
101	229	69	200	4	168	293	133	261	103	231	71	199	3	167	295	135	263
265	105	233	37	201	5	172	300	140	267	107	235	39	203	7	171	299	139
141	269	73	237	41	205	12	176	304	143	271	75	239	43	207	11	175	303
305	109	273	77	241	45	212	16	180	307	111	275	79	243	47	211	15	179

12. Cette Méthode de duplication du carré magique, dite « Méthode des quatre carrés », est donnée et expliquée en détail dans René Descombes, *Les Carrés magiques*, Éditions Vuibert, 2ème édition, 2000 (494 p.), p. 359-361.

On divise ce duplicat en 6 x 6 = 36 sous-carrés d'ordre n = 3, de 9 cases (cf. ci-dessus ce découpage). Les sommes des 9 termes de chaque sous-carré forment alors un carré magique d'ordre n = 6, de constante linéaire M_6 = 8 775, dans les lignes, les colonnes et les deux diagonales principales.

	1440	1836	1125	1422	1818	1134	8775
	1188	1449	1764	1170	1458	1746	8775
	1800	1116	1485	1782	1098	1494	8775
	1413	1809	1152	1431	1827	1143	8775
	1161	1476	1734	1179	1467	1755	8775
	1773	1089	1512	1791	1107	1503	8775
8775	8775	8775	8775	8775	8775	8775	8775

1089	1098	1107	1116	1125	1134	r = 9
1143	1152	1161	1170	1179	1188	r = 9
1413	1422	1431	1440	1449	1458	r = 9
1467	1476	1485	1494	1503	1512	r = 9
1737	1746	1755	1764	1773	1782	r = 9
1791	1800	1809	1818	1827	1836	r = 9

La Lyre

Dans la « Lyre » correspondant à ce carré magique, on constate que les termes sont en progression arithmétique régulière de raison r = 9 *dans toutes les lignes. Dans les colonnes*, on constate certaines différences Δ égales :

– dans les termes des lignes 1/2, 3/4 et 5/6, deux à deux : Δ = 54 ;
– dans les termes des lignes 2/3 et 4/5 : Δ = 270 ;
– dans les termes des lignes 6/1 : Δ = 702

Toutes ces différences Δ sont des multiples de 9.

@@@@@@

On divise encore ce nouveau carré magique d'ordre n = 6 (à gauche ci-dessus), en sous-carrés de 4 cases, soit 3 x 3 = 9 sous-carrés d'ordre n = 2. Les sommes des termes de ces 9 sous-carrés forment à leur tour un carré semi-magique d'ordre 3, de constante linéaire M'_3= 17 550 ; les deux diagonales principales ne sont pas magiques, mais leur somme est égale à 2 M'_3 : 17 505 + 17 595 = 35 100.

1440	1836	1125	1422	1818	1134
1188	1449	1764	1170	1458	1746
1800	1116	1485	1782	1098	1494
1413	1809	1152	1431	1827	1143
1161	1476	1734	1179	1467	1755
1773	1089	1512	1791	1107	1503

	5913	5481	6156	17550
	6138	5850	5562	17550
	5499	6219	5832	17550
17505	17550	17550	17550	17595

13203	13122
13122	13203

Remarquons encore que les *quartiers opposés* de ce carré magique d'ordre n = 6 ci-dessus, comme d'ailleurs les *quartiers opposés du duplicat* lui-même, ont même somme : 13 203 suivant la première diagonale principale, et 13 122 suivant la seconde (cf. petite grille ci-dessus à droite)

LE CARRÉ PAPAL À LA PUISSANCE DEUX ?...

On pourrait envisager de compléter ces manipulations par l'élévation au carré du carré papal, c'est-à-dire faire le produit du carré papal par lui-même. Et obtenir un carré magique d'ordre n = 81, de 6 561 cases, de constante magique M_{81} = 265 761, et rechercher alors les propriétés caractéristiques de ce carré papal à la puissance deux[13] !

...ET LA RACINE CARRÉE D'UN CARRÉ MAGIQUE ?

On peut remarquer à ce sujet, que certains carrés magique normaux d'ordre n = 9, peuvent être considérés comme le produit de deux carrés magiques normaux d'ordre n = 3. Si ces deux carrés magiques normaux d'ordre n = 3 sont identiques, le produit d'ordre n = 9 correspond alors à l'élévation au carré du carré formateur.

Ceci ne semble pas être le cas du carré magique papal : peut-on à cet égard, pour le vérifier, extraire la racine carrée d'un carré magique : est-ce une opération possible ?

À titre documentaire, voici l'élévation au carré de deux formes identiques du Lo Shu : on obtient un carré magique normal d'ordre n = 9, et de constante magique M_9 = 369.

On peut ainsi construire huit carrés magiques normaux d'ordre n = 9 différents (ci-dessous, application de la Méthode Kraitchik).

13. Appel aux amateurs courageux et entreprenants, qui pourront s'inspirer des méthodes pour faire le produit de deux carrés magiques, par celles décrites dans René Descombes, *Les Carrés magiques*, *op. cit* ., pp. 357-359.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

m = 3

x

8	1	6
3	5	7
4	9	2

n = 3

=

71	64	69	8	1	6	53	46	51
66	68	70	3	5	7	48	50	52
67	72	65	4	9	2	49	54	47
26	19	24	44	37	42	62	55	60
21	23	25	39	41	43	57	59	61
22	27	20	40	45	38	58	63	56
35	28	33	80	73	78	17	10	15
30	32	34	75	77	79	12	14	16
31	36	29	76	81	74	13	18	11

P = 9

$m \times n = p = 3 \times 3 = 9$

$m^2\ (k-1) = 9\ (k-1)$

Chaque bloc d'ordre n = 3 de la grille-produit d'ordre n = 9, est issu du carré magique d'ordre m = 3, auquel on ajoute, à chaque terme, la quantité $m^2\ (k-1)$, k étant la valeur de la case correspondante dans le second carré magique d'ordre 3. Les valeurs des quantités $m^2\ (k-1)$ sont données dans le tableau ci-dessous.

63	0	45
18	36	54
27	72	9

Cette méthode dans un mode inverse, permettrait-elle, étant donné un carré magique normal d'ordre n = 9, d'en extraire la racine carrée, comme c'est possible par ailleurs pour tout nombre positif ?

LES MOSAÏQUES MAGIQUES DU CARRÉ PAPAL

Les mosaïques magiques ont été inventées par Bernard Gervais[14]. On poche les cases paires, ou bien les cases impaires, les autres restant alors vierges. Voici les deux applications au carré magique du pape Léon III.

Apparait une belle symétrie centrale, à laquelle on ne s'attendait pas, avec une croix centrale bienvenue dans notre contexte (ci-dessous).

14. Gervais a particulièrement étudié les mosaïques magiques d'ordre 5, dans son ouvrage *Les carrés magiques de 5*, Éditions Eyrolles, 1998, 195 pp.

37	78	29	70	21	62	13	54	5
6	38	79	30	71	22	63	14	46
47	7	39	80	31	72	23	55	15
16	48	8	40	81	32	64	24	56
57	17	49	9	41	73	33	65	25
26	58	18	50	1	42	74	34	66
67	27	59	10	51	2	43	75	35
36	68	19	60	11	52	3	44	76
77	28	69	20	61	12	53	4	45

37	78	29	70	21	62	13	54	5
6	38	79	30	71	22	63	14	46
47	7	39	80	31	72	23	55	15
16	48	8	40	81	32	64	24	56
57	17	49	9	41	73	33	65	25
26	58	18	50	1	42	74	34	66
67	27	59	10	51	2	43	75	35
36	68	19	60	11	52	3	44	76
77	28	69	20	61	12	53	4	45

Remarquons que les mosaïques magiques de *deux carrés magiques jumeaux ou complémentaires*, sont identiques ou superposables. Application au carré magique papal qui est autocomplémentaire :

37	78	29	70	21	62	13	54	5
6	38	79	30	71	22	63	14	46
47	7	39	80	31	72	23	55	15
16	48	8	40	81	32	64	24	56
57	17	49	9	41	73	33	65	25
26	58	18	50	1	42	74	34	66
67	27	59	10	51	2	43	75	35
36	68	19	60	11	52	3	44	76
77	28	69	20	61	12	53	4	45

45	4	53	12	61	20	69	28	77
76	44	3	52	11	60	19	68	36
35	75	43	2	51	10	59	27	67
66	34	74	42	1	50	18	58	26
25	65	33	73	41	9	49	17	57
56	24	64	32	81	40	8	48	16
15	55	23	72	31	80	39	7	47
46	14	63	22	71	30	79	38	6
5	54	13	62	21	70	29	78	37

Autocomplémentaire

Voici un second exemple : des carrés magiques jumeaux *complémentaires.*

8	23	13	3	18
11	1	16	6	21
19	9	24	14	4
22	12	2	17	7
5	20	10	25	15

18	3	13	23	8
15	25	10	20	5
7	17	2	12	22
4	14	24	9	19
21	6	16	1	11

Complémentaire

La « réduction » du carré magique papal

	37	78	29	70	21	62	13	54	5	369
	6	38	79	30	71	22	63	14	46	369
	47	7	39	80	31	72	23	55	15	369
	16	48	8	40	81	32	64	24	56	369
	57	17	49	9	41	73	33	65	25	369
	26	58	18	50	1	42	74	34	66	369
	67	27	59	10	51	2	43	75	35	369
	36	68	19	60	11	52	3	44	76	369
	77	28	69	20	61	12	53	4	45	369
369	369	369	369	369	369	369	369	369	369	369

	1	6	2	7	3	8	4	9	5	45
	6	2	7	3	8	4	9	5	1	45
	2	7	3	8	4	9	5	1	6	45
	7	3	8	4	9	5	1	6	2	45
	3	8	4	9	5	1	6	2	7	45
	8	4	9	5	1	6	2	7	3	45
	4	9	5	1	6	2	7	3	8	45
	9	5	1	6	2	7	3	8	4	45
	5	1	6	2	7	3	8	4	9	45
45	45	45	45	45	45	45	45	45	45	45

Considérons les restes ou résidus *r* de la division par 9 de chaque terme « N » de la grille papale : N = 9 d + r.

Cette division par 9 correspond par ailleurs à ce que les numérologues nomment *la réduction d'un nombre*, soit la recherche de sa *racine numérique* ou *racine digitale :* on additionne tous les chiffres du nombre en cause, et on recommence cette addition jusqu'à ce que l'on obtienne un seul chiffre. Exemple :

645 : 6 + 4 + 5 = 15 ; 1 + 5 = 6. 6 est la *racine digitale* de 645.

Ceci correspond bien aussi au reste *r* = 6, avec d = 71 dans la relation N = 9 d + r : 645 = (9 x 71) + 6

Appliquons donc cette *réduction* aux termes du carré magique papal : on obtient une curieuse grille « magique », de somme linéaire constante M'_9 = 45 (ci-dessus). Et la relation suivante apparaît : 369 = (8 x 45) + 9

On ne retrouve pas cette propriété dans tous les carrés magiques : c'est l'une des propriétés spécifiques du carré magique du pape Léon III.

@@@@@@

Ainsi, le carré magique du pape Léon III, s'il demeure une énigme au sein de l'Enchiridion, n'a rien de mystérieux en lui-même, et n'en présente pas moins, après décryptage, des propriétés tout-à-fait intéressantes, sinon remarquables.

■

(septembre 2014)