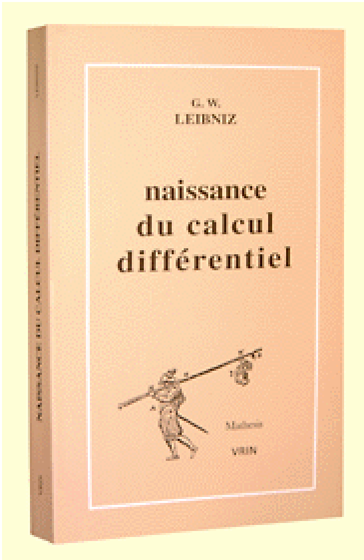
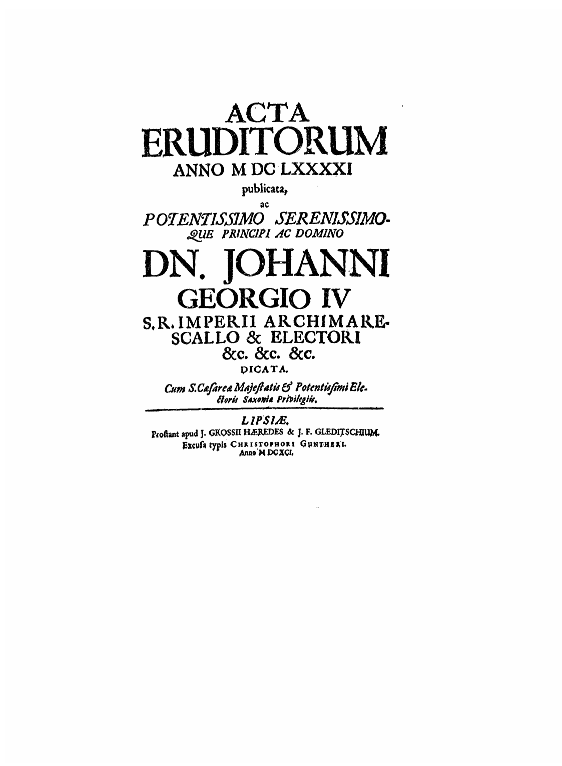
Information du lecteur



La première partie du document ci-après correspond à la traduction française de l'article de Leibniz de 1691 (en latin), p. 192 à 199 d'un volume de textes *Naissance du calcul différentiel* (Vrin 1989, 2° édition 1995), volume traduit et annoté par Marc Parmentier. Ces pages sont reproduites ici avec l'aimable autorisation des éditions Vrin. Les notes de bas de page, numérotées de 20 à 36, sont de Marc Parmentier.



ACTA
ERUDITORUM
ANNO M DC LXXXXI
publicata,
ac
POTENTISSIMO SERENISSIMO-
QUE PRINCIPI AC DOMINO
DN. JOHANNI
GEORGIO IV
S.R.IMPERII ARCHIMARE-
SCALLO & ELECTORI
&c. &c. &c.
DICATA.
Cum S.Cæsareæ Majestatis & Potentissimi Ele-
ctoris Saxoniæ Privilegiis.
LIPSIÆ,
Prostant apud J. GROSSII HÆREDES & J. F. GLEDITSCHIUM.
Excusa typis CHRISTOPHORI GUNTHERI.
Anno M DCXCI.

La deuxième partie du document ci-après correspond à l'original en latin de Leibniz, paru dans la revue *Acta Eruditorum* de 1691, pages 277 à 281 (haut de page), plus une planche de figures située après la page 278.

Le Problème de la *Courbe Funiculaire* ou *Chaînette* présente un double intérêt, premièrement celui d'étendre l'art d'inventer, autrement dit l'Analyse [20], jusqu'à présent incapable d'aborder convenablement de telles questions, deuxièmement celui de faire progresser la technique des constructions. Je me suis aperçu en effet que la fécondité de cette courbe n'a d'égale que la facilité de sa réalisation, ce qui la met en tête de toutes les Transcendantes. De fait, nous pouvons l'obtenir et la tracer à peu de frais, par une *construction de type physique*, en laissant pendre un fil ou mieux une *chaînette* (de longueur invariable). Et dès que nous disposons, grâce à elle, de son tracé, nous pouvons faire apparaître toutes les moyennes proportionnelles et tous les Logarithmes que nous pouvons souhaiter, ainsi que la Quadrature de l'Hyperbole. *Galilée* fut le premier à y réfléchir, mais sans parvenir à en découvrir la nature : contrairement à ses conjectures, il ne s'agit pas en effet de la *Parabole*. *Joachim Jung*, éminent Philosophe et Mathématicien de ce siècle qui, bien avant *Descartes* avait eu de nombreuses et lumineuses idées pour la réforme des sciences, se lança dans les calculs, fit des expériences, et disqualifia la parabole, mais sans lui substituer la véritable courbe [21]. Depuis lors beaucoup s'étaient attaqués à cette question, mais personne ne l'avait résolue, jusqu'à ce que récemment un Mathématicien très savant me donne l'occasion de la traiter. En effet le célèbre *Bernoulli*, après avoir dans différents problèmes employé avec succès cette Analyse des infinis, s'exprimant par le calcul différentiel, que j'ai contribué à introduire, m'a demandé publiquement dans les Acta de Mai de l'année dernière, p. 218 et suivantes, d'examiner, en en faisant l'épreuve, si notre calcul pouvait s'étendre à un problème comme celui de la détermination de la Chaînette. Ayant tenté l'expérience pour lui faire plaisir, non seulement je parvins au résultat en étant, si je ne m'abuse, le premier à résoudre ce célèbre problème, mais je notai de surcroît les remarquables applications de la courbe ; voilà pourquoi, à l'exemple entre autres de *Blaise Pascal*, j'ai convié les Mathématiciens à le chercher à leur tour, dans un délai convenu, pour mettre leurs Méthodes à l'épreuve, et voir à quoi aboutiraient ceux qui éven-

20 Dans le *De ortu progressu et natura algebrae* (M.S. VII p. 203) Leibniz corrige cette assimilation : « l'art d'inventer diffère complètement de l'analyse, exactement comme le genre de l'espèce car… certaines choses sont découvertes avec plus de bonheur par la synthèse. »

21 Leibniz avait une grande admiration pour ce géomètre allemand que cette démonstration (publiée en 1627 dans sa *Geometrica empirica*) avait rendu célèbre et qui avait assorti ses travaux en mathématiques et en sciences naturelles de réflexions sur une méthode scientifique inspirée du modèle des démonstrations mathématiques (*Analytica heuretica*). Ainsi s'éclaire l'allusion à Descartes.

tuellement en emploieraient d'autres que celle dont *Bernoulli* et moi-même usons. Deux seulement firent savoir dans les délais qu'ils avaient réussi, *Christian Huygens*, il est inutile d'insister sur ses grands mérites envers la République des Lettres, et *Bernoulli* lui-même, en collaboration avec son jeune frère, dont l'intelligence n'a d'égale que l'érudition ; la contribution de Bernoulli fait apparaître qu'il n'est aucune brillante trouvaille qu'on ne puisse encore attendre de lui. Je juge donc qu'il a de facto prouvé, comme je l'avais annoncé, que notre méthode de calcul s'étend bien jusque là et ouvre désormais la voie aux problèmes réputés autrefois les plus redoutables. Mais il m'appartient d'exposer mes propres résultats ; on verra à quoi ont abouti les autres en se reportant à leurs solutions.

Voici une *construction Géometrique de la courbe*, sans l'aide d'aucun fil ni d'aucune chaînette, et sans présupposer aucune quadrature, construction qu'on doit à mon sens juger la plus parfaite qu'on puisse obtenir pour les Transcendantes et la plus conforme à l'Analyse. Soient deux segments quelconques ayant entre eux un rapport déterminé invariable, représenté ici par D et K, dès qu'on connaît le rapport de ces deux segments tout le reste en découle par simple application de la Géométrie ordinaire.

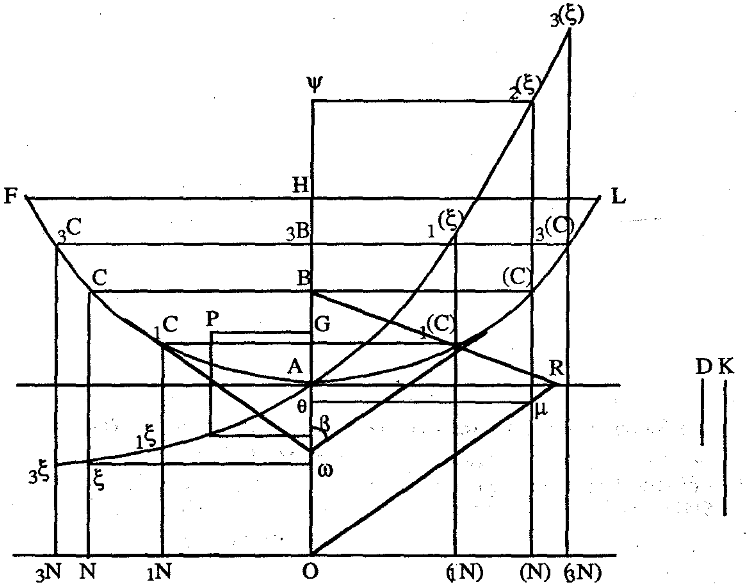


figure 26

Soit ON une droite indéfinie parallèle à l'horizon, OA un segment perpendiculaire égal à O_3N, et au-dessus de $_3N$, un segment vertical $_3N_3\xi$, ayant avec OA le rapport de D à K. Cherchons la moyenne proportionnelle $_1N_1\xi$ de OA et $_3N_3\xi$, puis de $_1N_1\xi$ et $_3N_3\xi$ [22], puis à son tour la moyenne proportionnelle de $_1N_1\xi$ et OA ; à mesure qu'on cherche ainsi des moyennes proportionnelles, puis à partir d'elles des troisièmes proportionnelles, prolongeons le tracé d'une courbe $\xi\xi(A)(\xi)(\xi)$, telle qu'en prenant pour $_3N_3\xi$, $_1NO$, $O_1(N)$, $_1(N)_3(N)$ etc. des intervalles égaux, les ordonnées $_3N_3\xi$, $_1N_1\xi$, OA, $_1(N)_1(\xi)$, $_3(N)_3(\xi)$ soient en progression Géométrique continue, courbe que j'ai coutume d'appeler logarithmique [23]. Dès lors en prenant ON et O(N) égaux, élevons au-dessus de N et (N) les segments NC et (N)(C) égaux à la demi-somme de Nξ et (N)(ξ), C et (C) seront *des points de la Chaînette* FCA(C)L dont nous pouvons ainsi déterminer Géométriquement autant de points que nous le désirons [24].

Inversement, si la Chaînette est construite physiquement, en suspendant un fil ou une chaîne, nous pouvons grâce à elle établir autant de moyennes proportionnelles que nous souhaitons, et trouver les Logarithmes de nombres, ou les nombres de Logarithmes, donnés. Cherche-t-on par exemple le Logarithme du nombre Oω, c'est-à-dire, ce qui revient au même, le logarithme du rapport entre OA et Oω, celui de OA (que je choisis comme Unité et que j'appellerai aussi *paramètre*) étant posé égal à 0, il faut prendre la troisième proportionnelle Oφ de Oω et OA, puis choisir comme abscisse la demi-somme OB de Oω et Oφ, l'ordonnée correspondante BC ou ON sur la Chaînette, sera le *Logarithme qu'on cherchait correspondant au nombre*

22 $\frac{_3N_3\xi}{OA} = \frac{D}{K}; \frac{OA}{_1N_1\xi} = \frac{_1N_1\xi}{_3N_3\xi}$.

23 Soient X les abscisses OA, $_1N_1\xi$... et Y les ordonnées O_1N, O_3N... Posons $x = {_1N_1\xi}$, par conséquent $_3N_3\xi = x^2$, et $Y(x^2) = 2Y(x)$, ce qui correspond à la propriété caractéristique des logarithmes. Leibniz disposant les abscisses verticalement, la courbe prend sur la figure l'aspect d'une exponentielle.

24 Posons $Z = NC = (N)(C) = \frac{1}{2}[N\xi + (N)(\xi)] = \frac{1}{2}[X(y) + X(-y)]$, avec $y = \log x$, soit en langage moderne $Z = \frac{1}{2}[\exp(y) + \exp(-y)]$, ce qui correspond à la définition de la fonction cosinus hyperbolique.

proposé[25]. Réciproquement, si un Logarithme ON est donné, il faut prendre le double du segment vertical NC abaissé de la Chaînette et le couper en deux segments dont la moyenne proportionnelle soit égale à OA qui est donné (l'unité), (c'est un jeu d'enfant) ; les deux segments seront les *Nombres qu'on cherchait*, l'un supérieur, l'autre inférieur à un, *correspondant au* Logarithme *proposé*[26]. Autre méthode : après avoir obtenu NC comme je l'ai dit, soit encore OR (le point R étant pris sur l'horizontale AR de telle sorte que OR soit égale à OB ou à NC), la somme et la différence des segments OR et AR seront les deux Nombres, l'un supérieur, l'autre inférieur à un, correspondant au Logarithme donné. La différence entre OR et AR est en effet égale à Nξ, et leur somme à (N)(ξ) ; tout comme OR et AR sont à leur tour la demi-somme et la demi-différence de (N)(ξ) et Nξ[27].

Voici la *solution des principaux Problèmes* habituellement posés à propos d'une courbe. *Tracé de la tangente en un point donné C.*

Sur la droite horizontale AR passant par le sommet A, soit R tel que OR soit égal à OB qui est connu, la droite CT antiparallèle à OR (coupant l'axe OA en T) sera la tangente que nous cherchons. Je nomme ici en abrégé *antiparallèles* les droites OR et TC faisant avec les

25 OA étant choisi comme unité, Oφ correspond à l'inverse de Oω : $\frac{O\varphi}{OA} = \frac{OA}{O\omega}$, par conséquent

$$OB = \frac{1}{2}[O\omega + O\varphi] = \frac{1}{2}[O\omega + \frac{1}{O\omega}] = \frac{1}{2}[\exp(\log O\omega) + \exp(-\log O\omega)]$$

$= \frac{1}{2}\mathrm{ch}(\log O\omega)$; puisque Leibniz compte les abscisses verticalement, « l'ordonnée » BC, qui en langage moderne serait l'ordonnée de la fonction Arg ch (OB), correspond bien à log Oω.

26 ON = log y ; 2NC = exp[log y] + exp[log $\frac{1}{y}$] = y + $\frac{1}{y}$; il faut donc diviser (secare) cette somme en deux segments p et q tels que : $\frac{p}{OA} = \frac{OA}{q}$, on obtient $p = y$ et $q = \frac{1}{y}$. Pour Leibniz x et $\frac{1}{x}$ ont même logarithme, celui-ci étant à ses yeux toujours positif. Plus tard il considérera que le logarithme d'un nombre inférieur à un est négatif, cf. infra *Observatio quod rationes*.

27 Ce point R va jouer dans toute la suite un rôle déterminant, puisque l'ordonnée AR correspond à la fonction sinus hyperbolique. En effet $OR^2 = \mathrm{ch}^2\, y = OA^2 + AR^2 = 1 + AR^2$. En posant OB = OR = $\frac{1}{2}[\exp(\log y) + \exp(-\log y)]$, la règle de Leibniz revient à poser : AR = $\frac{1}{2}[\exp(\log y) - \exp(-\log y)]$, dans ces conditions : OR + AR = exp(log y) = y, et OR – AR = exp(– log y) = $\frac{1}{y}$.

parallèles AR et BC des angles ARO et BCT non pas égaux, mais néanmoins complémentaires. Les triangles rectangles OAR et CBT sont donc semblables [28].

Trouver le segment égal à un arc de Chaînette .

Si on trace le Cercle de centre O, de rayon OB, coupant la droite horizontale passant par A en R, AR sera égal à l'arc donné AC [29]. On voit également d'après ce qui précède que φω sera égal à la portion de Chaînette CA(C) [30]. Si celle-ci valait deux fois le paramètre, c'est-à-dire si AC ou AR étaient égaux à OA, son inclinaison sur l'horizon au point C, autrement dit l'angle BCT, serait de 45 degrés, et l'angle CT(C) par conséquent, un angle droit.

Quadrature d'une aire comprise entre la Chaînette, une ou plusieurs droites.

Après avoir comme ci-dessus trouvé le point R, le rectangle OAR sera égal au Quadriligne AONCA. La quadrature de tout autre secteur s'en déduit aisément. Nous voyons également que les arcs sont proportionnels aux aires quadrilignes [31].

Centre de gravité d'une Chaînette ou d'une portion de Chaînette quelconque.

Après avoir établi la quatrième proportionnelle OΘ de l'arc AC, autrement dit AR, de l'ordonnée BC et du paramètre OA, ajoutons-lui l'abscisse OB, la demi-somme OG fournira le centre de gravité G de la

28 Deux angles u et v sont complémentaires lorsque leur somme est égale à un angle droit, soit tels que $\mathrm{tg}\ u = \frac{1}{\mathrm{tg}\ v}$. Soit u l'angle ARO, $\mathrm{tg}\ u = \frac{OA}{AR}$; soit v l'angle BCT, par définition $\mathrm{tg}\ v = \frac{dx}{dy}$. La construction de Leibniz revient à poser qu'en prenant OA comme unité, AR est le coefficient directeur de la tangente. En termes modernes, en prenant $x = \frac{1}{2}[\exp y + \exp - y]$, $\frac{dx}{dy} = \mathrm{sh}\ y$.

29 C'est une nouvelle propriété remarquable de la Chaînette : en prenant OA égal à l'unité, l'abscisse curviligne z est égale au coefficient directeur de la tangente. Ceci résulte directement de l'équation différentielle $z = a\frac{dx}{dy}$ (cf. introduction). En notation moderne $\frac{dz}{dy} = \sqrt{1+[\frac{dx}{dy}]^2}$, comme $x = \mathrm{ch}\ y$, $\frac{dx}{dy} = \mathrm{sh}\ y$, or $1 + \mathrm{sh}^2 y = \mathrm{ch}^2 y$, donc $\frac{dz}{dy} = \mathrm{ch}\ y$ et en définitive $z = \mathrm{sh}\ y$. La Chaînette offre donc un nouvel exemple de courbe transcendante rectifiable.

30 $\varphi\omega = O\varphi - O\omega = \exp y - \exp(-y) = 2\mathrm{sh}\ y$.

31 Nous pouvons remarquer en effet d'après les relations précédentes que l'élément d'aire $x dy = \mathrm{ch}\ y . dy$ est égal à l'élément d'abscisse curviligne dz. Il en résulte, en prenant OA égal à 1, que $z = AR =$ l'aire AONCA.

Chaînette CA(C) [32]. En prenant de surcroît l'intersection E de la Tangente CT avec la droite horizontale passant par A, puis en complétant le rectangle GAEP, P sera le centre de gravité de l'arc AC [33]. Celui de tout autre arc C_1C est à une distance AM de l'axe, πM étant le segment perpendiculaire à l'horizontale passant par le sommet, abaissé du point d'intersection π des tangentes $C\pi$ et ${}_1C\pi$; mais nous pouvons également l'obtenir à partir des centres de gravité des arcs AC et A_1C. Nous en déduisons aussi BG, correspondant à la position la plus basse possible du centre de gravité d'un fil, d'une chaînette ou de toute autre ligne flexible non extensible, de longueur $\varphi\omega$ donnée, suspendue aux points C et (C). Pour toute figure autre que la courbe CA(C) dont je m'occupe, le centre de gravité sera plus haut.

Centre de gravité de l'aire comprise entre la Chaînette et une ou plusieurs droites.

Prenons la moitié Oß de OG, puis complétons le rectangle ßAEQ, Q sera le centre de gravité de la figure quadriligne AONCA [34]. Nous en déduisons aisément le centre de gravité de toute autre figure comprise entre la Chaînette et une ou plusieurs droites. Il en résulte encore ceci de remarquable que non seulement les figures quadrilignes comme AONCA sont proportionnelles aux arcs AC, je l'avais déjà noté, mais que les distances de leurs deux centres de gravité à la droite

32 $\frac{1}{O\Theta} = \frac{AR}{BC}$, d'où $OG = \frac{1}{2}[\,OB + \frac{BC}{AR}\,] = \frac{1}{2}[\,\mathrm{ch}\ y + \frac{y}{\mathrm{sh}\ y}\,] = \frac{1}{2\,\mathrm{sh}\ y}[\mathrm{ch}\ y.\mathrm{sh}\ y + y]$, or l'abscisse X_g du centre de gravité de AC est $X_g = \frac{\int x dz}{\int dz} = \frac{\int \mathrm{ch}^2 y dy}{\mathrm{sh}\ y}$. On vérifie que $\frac{1}{2}[\mathrm{ch}\ y.\mathrm{sh}\ y + y]$ est bien une primitive de $\mathrm{ch}^2\ y$.

33 Ceci correspond à la propriété mécanique caractéristique indiquée par Leibniz dans la lettre à Jean Bernoulli : le point d'intersection des tangentes est à la verticale du centre de gravité.

34 En notation moderne, pour une fonction $x = f(y)$, $X_g = \frac{1}{2}\frac{\int f^2(y)dy}{\int f(y)dy}$, et $Y_g = \frac{\int y f(y)dy}{\int f(y)dy}$ ici $X_g = \frac{1}{2}\frac{\int \mathrm{ch}^2\ y\ dy}{\mathrm{sh}\ y}$ et $Y_g = \frac{\int y\ \mathrm{ch}\ y\ dy}{\mathrm{sh}\ y}$. On voit que X_g est égal à la moitié de l'abscisse du centre de gravité de la courbe, et que les ordonnées sont égales puisque celle du centre de gravité de la courbe est

$$\frac{\int y dz}{\int dz} = \frac{\int y\ \mathrm{ch}\ y\ dy}{\mathrm{sh}\ y}$$

horizontale passant par O, à savoir OG et Oß, sont proportionnelles, la première étant constamment double de la seconde ; quant à leurs distances à l'axe OB, soit PG et Qß, leur proportionnalité est purement et simplement égalité.

Volume et surface des solides engendrés par rotation autour de toute droite fixe des figures délimitées par la Chaînette et une ou plusieurs droites.

Comme on le sait, ce résultat se déduit des deux problèmes précédents. Si la Chaînette CA(C) tourne par exemple autour de l'axe AB, l'aire engendrée sera égale au cercle ayant pour rayon la racine du double du rectangle EAR [35]. Nous pouvons tout aussi bien évaluer les autres surfaces et volumes engendrés de cette façon.

Je passe sur nombre de Théorèmes et de Problèmes qui sont déjà contenus dans ce qui précède ou en résultent aisément, car je tenais à être bref. Soient par exemple deux points C et $_1C$ d'une Chaînette, soit π l'intersection des tangentes en ces points, abaissons des points $_1C$, π, C les segments $_1C_1J$, πM, CJ, perpendiculaires à la droite horizontale AEE passant par le sommet, nous aurons

$_1JJ.AC - {}_1CC.{}_1JM = {}_1BB.OA$ [36].

Il peut être également opportun de faire intervenir des séries infinies. Par exemple, le paramètre OA étant l'unité, notons a l'arc AC, soit le segment AR, et y l'ordonnée BC, nous aurons :

$y = \frac{1}{1}a - \frac{1}{6}a^3 + \frac{3}{40}a^5 - \frac{5}{112}a^7$ etc., série que nous pouvons poursuivre au moyen d'une règle simple. Nous pouvons en outre, en utilisant ce qui précède, déduire tout le reste à partir des éléments caractéristiques de la courbe. A titre d'exemple, en supposant connus le sommet A, un autre point C, ainsi que la longueur AR de l'arc AC qu'ils délimitent, il est possible d'obtenir le paramètre AO de la courbe, soit en substance le point O : en effet, puisque B est connu lui aussi, traçons BR puis en R menons le segment Rμ tel que l'angle BRμ soit égal à l'angle RBA, dans ces conditions, la droite Rμ (qu'on aura prolongée), coupera l'axe BA (prolongé) au point O souhaité.

35 Leibniz applique ici le théorème de Guldin. La surface engendrée est égale au produit de la longueur AC par la distance parcourue par son centre de gravité. Celui-ci est à une distance AE de l'axe. Il parcourt donc la circonférence 2πAE. La longueur de AC étant AR, on voit que le produit vaut 2πAE.AR.

36 La longueur $_1IM$ est égale à $\frac{[\mathrm{ch}\, y_1 - \mathrm{ch}\, y + \mathrm{sh}\, y\,(y - y_1))]}{\mathrm{sh}\, y - \mathrm{sh}\, y_1}$; $_1CC = \mathrm{sh}\, y_1 - \mathrm{sh}\, y$; $AC = \mathrm{sh}\, y$; $I_1I = y_1 - y$, on vérifie aisément que $_1BB = \mathrm{ch}\, y_1 - \mathrm{ch}\, y$, d'où $_1IM.{}_1CC = \mathrm{ch}\, y - \mathrm{ch} y_1 - \mathrm{sh}\,(y).(y - y_1) = I_1I.AC - {}_1BB$. Le texte de Gerhardt intervertit les lettres I et J.

Je crois que ce que j'ai dit contient bien l'essentiel et permettra de déduire au besoin tout ce qui concerne la courbe. Je me dispense d'y ajouter les démonstrations pour ne pas être prolixe, et surtout parce qu'elles sautent aux yeux lorsqu'on a compris les calculs que j'ai expliqués ici-même et qui constituent notre nouvelle Analyse.

ACTA ERUDITORUM

ANNO M DC LXXXXI

publicata,

ac

POTENTISSIMO SERENISSIMOQUE PRINCIPI AC DOMINO

DN. JOHANNI GEORGIO IV

S. R. IMPERII ARCHIMARESCALLO & ELECTORI &c. &c. &c.

DICATA.

Cum S. Cæsareæ Majestatis & Potentissimi Electoris Saxoniæ Privilegiis.

LIPSIÆ,

Proſtant apud J. GROSSII HÆREDES & J. F. GLEDITSCHIUM.

Excuſa typis CHRISTOPHORI GUNTHERI.

Anno M DCXCI.

DE LINEA IN QUAM FLEXILE SE pondere proprio curvat, ejusque usu insigni ad inveniendas quotcunque medias proportionales & Logarithmos. Autore G. G. L.

PRoblema *Lineæ Catenariæ vel Funicularis* duplicem usum habet; unum, ut augeatur ars inveniendi seu Analysis, quæ hactenus ad talia non satis pertingebat, alterum ut praxis construendi promoveatur. Reperi enim hanc lineam ut facillimam factu, ita utilissimam effectu esse, nec ulli Transcendentium secundam. Nam suspensione fili vel potius *catenulæ* (quæ extensionem non mutat) nullo negotio parari & describi potest, *physico* quodam *constructionis genere*. Et ope ejus ubi semel descripta est, exhiberi possunt quotcunq; mediæ proportionales, & Logarithmi, & Quadratura Hyperbolæ. Primus *Galilæus* de ea cogitavit, sed naturam ejus assecutus non est: neq; enim Parabola est, ut ipse erat suspicatus. *Joachimus Jungius*, eximius nostri seculi Philosophus & Mathematicus, qui multa ante *Cartesium* præclara cogitata habuerat circa scientiarum emendationem, calculis initis, & experimentis factis parabolam exclusit, veram lineam non substituit. Ex eo tempore a multis tentata quæstio est, a nemine soluta, donec nuper mihi ab eruditissimo Mathematico præbita ejus tractandæ occasio est. Nam Cl. *Bernoullius*, cum meam quandam Analysin infinitorum, calculo differentiali, me suadente introducto, expressam, feliciter applicuisset ad quædam problemata, a me publice petivit Actorum Anni superioris mense Majo, p. 218, sq. ut tentarem, an nostrum calculi genus etiam ad hujusmodi problemata, quale est lineæ catenariæ inventio, porrigeretur. Re in gratiam ejus tentata, non tantum successum habui, primusque, ni fallor, illustre hoc problema solvi, sed & lineam egregios usus habere deprehendi, quæ res fecit, ut exemplo *Blasii*, *Paschalii* aliorumque ad eandem inquisitionem invitaverim Mathematicos certo tempore præstituto, experiundarum Methodorum causa, ut appareret, quid illi daturi essent, qui fortasse alias adhiberent ab ea qua *Bernoullius* mecum utitur. Tempore nondum elapso, duo tantum significarunt rem se consecutos, *Christianus Hugenius*, cujus magna in rem literariam merita nemo ignorat; & ipse cum fratre ingenioso juvene & pererudito *Bernoullius*, qui his, quæ dedit, effecit, ut præclara quæque

 porro

porro ab iis speremus. Eum igitur reapse expertum puto quod significaveram, huc quoque porrigi nostram calculandi rationem, & quæ antea difficillima habebantur jam aditum admittere. Sed placet exponere quæ a me sunt inventa; quid alii præstiterint, collatio ostendet.

Linea sic construitur Geometrice, sine auxilio fili aut catenæ, & sine suppositione quadraturarum, eo constructionis genere, quo pro Transcendentibus nullum perfectius & magis Analysi consentaneum mea sententia haberi potest. Sint duæ quæcunque lineæ rectæ, determinatam quandam & invariabilem inter se habentes rationem, eam scilicet quam א & ב, hic expositæ, qua ratione semel cognita cætera omnia per Geometriam ordinariam procedunt. Sit recta indefinita ⊙N horizonti parallella, eique perpendicularis ⊙A, æqualis ipsi ⊙3N, & super 3N verticalis 3N3ξ, quæ sit ad ⊙A, ut א ad ב. Inter ⊙A &
TAB. VII, Fig. I. 3N3ξ quæratur media proportionalis 1N1ξ; & inter 1N1ξ & 3N3ξ, itemque inter 1N1ξ & ⊙A quæratur rursus media proportionalis, & ita porro quærendo medias, & inventis tertias proportionales, describatur continueturque linea ξξA(ξ)(ξ) quæ erit talis naturæ, ut ipsis intervallis verbi gr. 3N1N, 1N⊙, ⊙(N), 1(N)3(N), &c. sumtis æqualibus, sint ordinatæ 3N3ξ, 1N1ξ, ⊙A, 1(N)1(ξ), 3(N)3(ξ) in continua progressione Geometrica, qualem lineam *Logarithmicam* appellare soleo. Jam sumtis ⊙N, ⊙(N) æqualibus, super N vel (N) erigatur NC vel (N)(C) æqualis dimidiæ summæ ipsarum Nξ, (N)(ξ), & C vel (C) erit *punctum lineæ catenariæ* FCA(C)L, cujus ita puncta quotcunque assignari Geometrice possunt.

Contra si linea catenaria physice construatur ope fili vel catenæ pendentis, ejus ope exhiberi possunt quotcunque mediæ proportionales, & Logarithmi inveniri datorum numerorum vel numeri datorum Logarithmorum. Sic si quæratur Logarithmus numeri ⊙ω, posito ipsius ⊙A, (tanquam Unitatis, quam & *parametrum* vocabo) Logarithmum esse nihilo æqualem. Seu quod eodem redit, si quæratur Logarithmus rationis inter ⊙A & ⊙ω, sumatur ipsis ⊙ω & ⊙A tertia proportionalis ⊙ψ, & ipsarum ⊙ω & ⊙ψ summæ dimidiæ ⊙B, tanquam abscissæ, respondens Lineæ Catenariæ ordinata BC vel ⊙N, erit *Logarithmus quæsitus Numeri dati.* Contra, dato Logarithmo ⊙N inde ductæ ad Curvam Catenariam verticalis NC duplam, oportet secare in duas partes tales, ut media proportionalis inter segmenta sit

æqualis

TAB. VII. ad A. 1691. pag. 278. sqq.

Fig. 1.

G. G. L. De Linea Catenaria

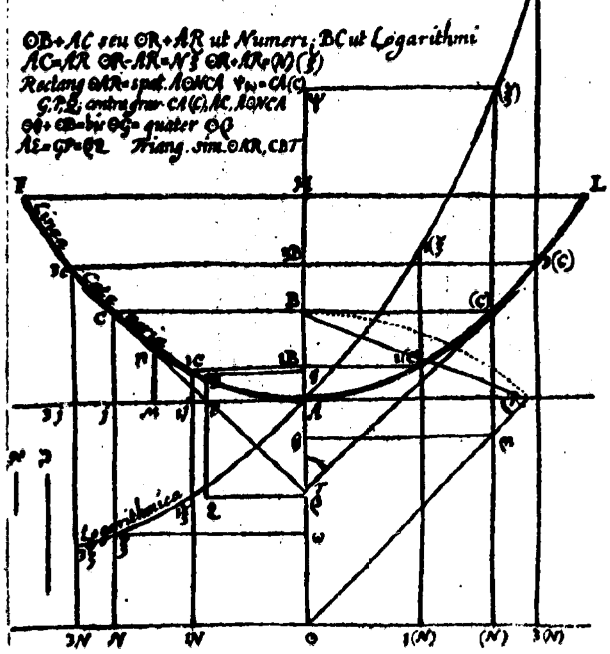
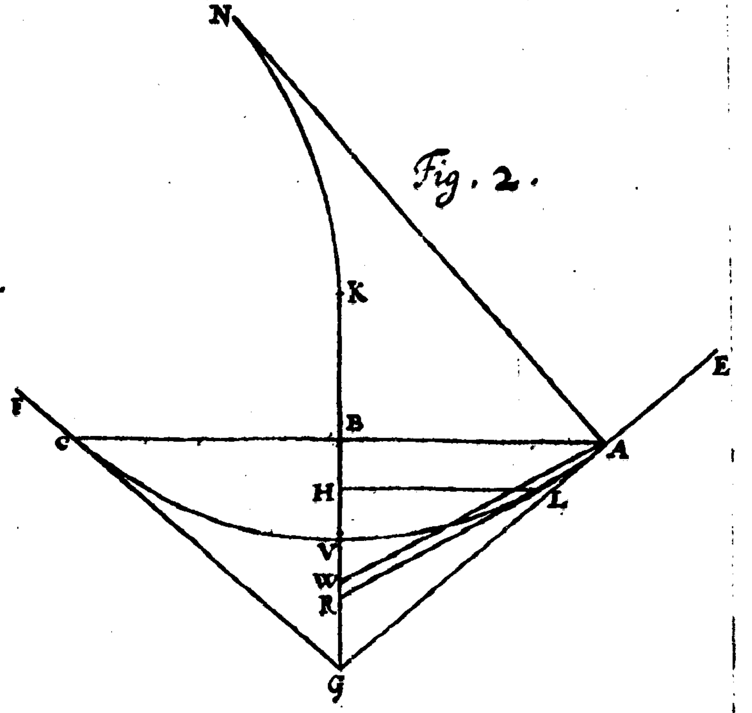


Fig. 2.



æqualis datæ (Unitati) ⊙A, (quod facillimum eſt) & duo ſegmenta erunt *reſpondentes dato Logarithmo Numeri quæſiti*, unus major, alter minor unitate. Aliter: inventa, ut dictum eſt, NC ſeu ⊙R (ſumto ita puncto R in horizontali AR, ut habeamus ⊙R æqualem ⊙B vel NC) erunt ſumma ac differentia rectarum ⊙R & AR duo reſpondentes Logarithmo dato Numeri, unus major, alter minor Unitate. Nam differentia ipſarum ⊙R & AR eſt Nξ, & ſumma earum eſt (N)(ξ); uti viciſſim ⊙R eſt ſemiſumma, & AR ſemidifferentia ipſarum (N)(ξ) & Nξ.

Sequuntur *ſolutiones Problematum primariorum*, quæ circa lineas proponi ſolent. *Tangentem ducere ad punctum lineæ datum* C; in AR horizontali per verticem A ſumatur R, ut fiat ⊙R æqualis ⊙B datæ, & ipſi ⊙R ducta Antiparallela CT (occurrens axi A⊙ in T) erit tangens quæſita. *Antiparallelas* compendii cauſa hic voco ipſas ⊙R & TC, ſi ad parallelas AR & BC faciant non quidem eosdem angulos, ſed tamen complemento ſibi exiſtentes ad rectum, AR⊙ & BCT. Et Triangula rectangula ⊙AR & CBT, ſunt ſimilia.

Rectam invenire arcui catenæ æqualem. Centro ⊙ radio ⊙B deſcribendo Circulum, qui horizontalem per A ſecet in R, erit AR æqualis arcui dato AC. Patet etiam ex dictis fore $\psi\omega$ æqualem catenæ CA(C). Si catena CA(C) æqualis eſſet duplæ parametro, ſeu ſi AC vel AR æqualis ⊙A, foret catenæ in C inclinatio ad horizontem, ſeu angulus BCT, 45 graduum; adeoque angulus CT(C) rectus.

Quadrare ſpatium lineâ catenariâ & rectâ vel rectis comprehenſum. Scilicet invento puncto R, ut ante, erit rectangulum ⊙AR æquale Quadrilineo A⊙NCA. Unde alias quasvis portiones quadrare in proclivi eſt. Patet etiam, arcus eſſe areis quadrilineis proportionales.

Invenire centrum gravitatis catenæ, aut partis ejus cujuscunque. Arcui AC vel AR, ordinatæ BC, parametro ⊙A inventa quarta proportionalis ⊙θ, addatur abſciſſæ ⊙B, & ſummæ dimidia ⊙G, dabit G centrum gravitatis catenæ CA(C). Porro tangens CT ſecet horizontalem per A, in E, compleatur rectangulum GAEP, erit P centrum gravitatis arcus AC. Cujuscunque arcus alterius ut C1C diſtantia centri gr. ab axe, eſt AM, poſito πM eſſe perpendicularem in horizontem verticis, demiſſam ex π concurſu tangentium Cπ, 1Cπ. Quanquam & centrum ejus ex centris arcuum AC, A1C facile habeatur.

Hinc

Hinc & habetur BG, maximus deſcenſus poſſibilis centri funiculi ſeu catenæ aut lineæ flexilis non extendibilis cujuscunque, duabus extremitatibus C & (C) ſuſpenſæ, longitudinem habentis datam ψω; quamcunque enim figuram aliam aſſumat, minus deſcendet centrum grav, quam ſi in noſtram CA(C) curvetur.

Invenire centrum gravitatis figuræ, linea catenaria & recta vel rectis comprehenſæ. Sumatur ⊙β dimidia ipſius ⊙G, & compleatur rectangulum βAEQ, erit Q centrum gravitatis quadrilinei A⊙NCA. Unde & cujuscunque alterius ſpatii linea catenaria & recta vel rectis terminati centrum facile habetur. Hinc porro ſequitur illud memorabile, non tantum quadrilinea ut A⊙NCA arcubus AC proportionalia eſſe, ut jam notavimus, ſed & amborum centrorum gravitatis diſtantias ab horizontali per ⊙, nempe ⊙G & ⊙β eſſe proportionales, cum illa ſit ſemper hujus dupla; & diſtantias ab axe ⊙B, nempe PG, Qβ adeo eſſe proportionales, ut ſint plane æquales.

Invenire contenta & ſuperficies ſolidorum, rotatione figurarum linea catenaria & recta vel rectis comprehenſarum, circa rectam immotam quamcunque genitorum. Habetur ex duobus problematibus præcedentibus, ut notum eſt. Sic ſi catena CA(C) rotetur circa axem AB, generata ſuperficies æquabitur circulo, cujus radius poſſit duplum rectangulum EAR. Nec minus aliæ ſuperficies vel etiam ſolida dicto modo genita menſurari poſſunt.

Multa Theoremata ac Problemata prætereo, quæ vel in his continentur quæ diximus, vel non magno negotio inde derivantur, cum brevitati conſulere viſum ſit. Sic ſumtis duobus catenæ punctis, ut C & 1C, quorum tangentes ſibi occurrant in π, ex punctis 1C, π, C, in ipſam AEE horizontalem verticis demittantur perpendiculares 1C1J, πM, CJ: fiet 1JJ in AC minus 1CC in 1JM æquale 1BB in ⊙A. Poſſunt & ſeries infinitæ utiliter adhiberi. Sic ſi parameter ⊙A ſit unitas, & arcus AC, vel recta AR, dicatur a, & ordinata BC vocetur y, fiet $y = a - \frac{1}{6}a^3 + \frac{3}{40}a^5 - \frac{5}{112}a^7$, &c. quæ ſeries facili regula continuari poteſt. Datis quoque lineam determinantibus, haberi poſſunt reliqua ex dictis. Sic dato vertice A, & alio puncto C, & AR longitudine catenæ interceptæ AC, haberi poteſt lineæ parameter A⊙, vel punctum ⊙; quoniam enim datur & B, jungatur BR, & ex R educatur recta Rμ, ita ut angulus BRμ ſit æqualis angulo RBA, & ipſa Rμ (producta) occurret Axi BA (producto) in puncto ⊙ quæſito.

Atque

Atque his quidem potissima contineri arbitror, unde cætera circa hanc lineam, ubi opus, facile duci poterunt. Demonstrationes adjicere supersedeo, prolixitatis vitandæ gratia, præsertim cum novæ nostræ Analyseos calculos in his actis explicatos intelligenti sponte nascantur.