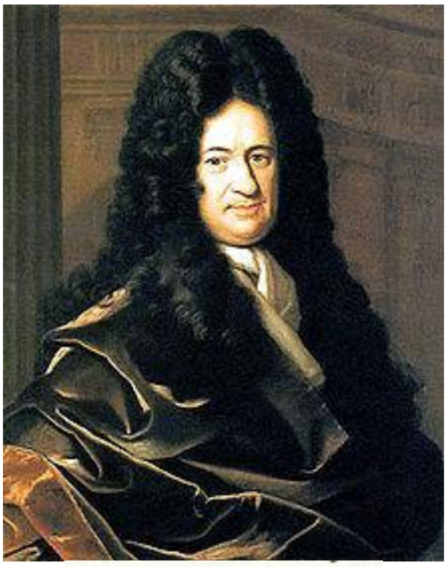
bibnum

Information du lecteur



Leibniz

La première partie du document ci-après correspond au manuscrit de trois pages du 15 mars 1679 de Leibniz, conservé à la bibliothèque de Basse-Saxe à Hanovre. La deuxième partie correspond à la traduction française faite par Yves Serra (pour BibNum) de ce manuscrit.

(ci-contre, Leibniz, tableau de Francke, vers 1700 – musée de Brunswick)

15 Martii 1679.

De Progressione Dyadica – Pars I.

Numeratio

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	10	11	100	101	110	111	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111	10000

17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
10001	10010	10011	10100	10101	10110	10111	11000	11001	11010	11011	11100	11101	11110	11111	100000

		011111
32	100000	100000
33	100001	100001
34	10	100010
35		100011
36	100	100100
37	1	100101
38	10	100110
39	1	100111
40	1000	101000
41	1	etc.
42	10	
43	1	
44	100	
45	1	
46	10	
47	1	
48	10000	
49	1	
50	10	
51	1	
52	100	
53	1	
54	10	
55	1	
56	1000	
57	1	
58	10	
59	1	
60	100	
61	1	
62	10	
63	1	
64	1000000	
65	1	
66	10	
67	1	
68	100	
69	1	
70	10	
71	1	
72	1000	
73	1	
74	10	
75	1	
76	100	
77	1	
78	10	
79	1	
80	10000	
81	1	
82	10	
83	1	
84	100	
85	1	
86	10	
87	1	
88	1000	
89	1	
90	10	
91	1	
92	100	
93	1	
94	10	
95	1	
96	100000	
97	1	
98	10	
99	1	
100	100	

Adjiciam progressio facile continuari potest ~~incipiendo~~ eundo a dextra sinistrorsum, et superstantis numeri unitati ~~[illegible]~~ subscribere 0. donec occurrat in superstante etiam 0. cui subscribitur ~~0~~ I. ~~[illegible]~~ nec ultra pergi opus, nam reliqui characteres manent ut in superstante, ita ex 1010111 (87) fit 1011000 (88).

idem est ac si diceres: 1011000 esse $2^6 + * + 2^4 + 2^3 + * * *$
64 + 16 + 8

64
16
8
—
88

Nam 1 in quarto loco seu 1000 significat cubum fundamenti progressionis ~~seu binarii~~ uti enim in communi progressione significat cubum ~~denarii~~ denarii. ita in nostra cubum a binario, nempe octo. similiter ~~[illegible]~~ 1 in quinto loco significat quadratoquadratum seu 16, et in sexto significat surdesolidum seu 32, et in septimo denique quadratocubum seu ~~8~~ 64.

Notandum ~~[illegible]~~ est si in ~~[illegible]~~ progressione descendas perpendiculariter a charactere numeri superioris ad characteres ~~[illegible]~~ directe subjectos numerorum inferiorum, semper ~~[illegible]~~ unitates redire per saltus, et ~~[illegible]~~ in ultimo loco redire unitatem post unum zero. At in secundo loco seu quadraticam redire post ~~duo~~ tria ~~[illegible]~~ in tertio loco seu cubicam post septem zero intercepta. quarto loco seu quadratoquadraticam post quindecim

Unde jam offerre se videtur modus commodus transformandi ~~[illegible]~~ ~~decadi~~ expressionem dati numeri decadicam in dyadicam. Sit numerus 365 ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ ejus continue ~~[illegible]~~ sumatur dimidium et dimidii dimidium, residuo ~~semper~~ e regione medietates scripto, et characteres ordine ~~[illegible]~~ ita ut imus fit supremus, et ita porro, habebimus expressionem dyadicam quaesitam. Eadem methodus servari potest pro quacunque progressione in aliam ~~[illegible]~~ transformanda.

itaque 365 erit ~~[illegible]~~ 101101101. nempe

365	~~[illegible]~~
182	[illegible]
91	0
45	1
22	1
11	0
5	1
2	1
	~~[illegible]~~
	1

100000000	256
1000000	64
100000	32
1000	8
100	4
1	1
	365

~~[illegible]~~
109

256
109
—
65

Simili arte ~~decadica~~ ~~[illegible]~~ dyadica convertetur in decadicam vel addendo in unum omnes binarii potestates decadice expressas ut hoc loco 256. 64. etc. vel etiam dyadice dividendo per denarium dyadice expressum, residuis ordine collocatis, eodem quo dixi modo:

dividatur per 1010) 101101101 quotiens primus ~~[illegible]~~ 100100 ~~[illegible]~~ 101 Resid. aequ. 5

~~divisor~~ quot. secundus 11 110 Resid. aequ. 6

~~quotiens~~ 11 aequ. 3

~~[illegible]~~ } 100100 } 10 .
100

In progressione Bimali nulla est opus [illegible] in multiplicando [illegible] solam additionem [illegible] Tabula pythagorica [illegible]

Additio Numerorum hac methodo tam facilis est ut non citius possint dictari, quam addi, ita ut non sentiri debeat sit numerus, sed statim scribi possit summa. Exempli causa dictatur mihi primus

1 0 1 1 0
postea
1 1 0 0 1
scribo statim
1 0 0 0 0 0 1

Scribo si columnas plures addendas,
Numero unitates columnae, si numerus par
scribo nihil sub ea unitas, et dimidium numeri
unitatum ascribo alteri columnae sequenti
sive punctis sive numeris communibus
itaque ad addendum in hac progressione non est tantum posse numerare ~~[illegible]~~ unitates, cum in aliis usque sit saltem addere posse numeros simplices, verbi gratia 8 et 5 facit 13. qui hoc non novit commode addere in decadica progressione non potest.

ut
1 0 1 1 0 1 1 0
1 1 1 0 0 1 0 1
1 0 0 1 1 0 0
1 0 1 0 1 0 1
1 1 0 1 1 0 1 1
1 1 0 0 0 1 1 0 0 1

Eadem methodo facillime procedit subtractio, imo et mixtio additionis et subtractionis. tantum enim colligendo unitates. ~~Numerentur~~ quando autem miscetur additioni subtractio, ~~et~~ ~~antitheta~~ subtrahenda respondens numeris addendis: nam hi se invicem destruunt,

verbi gratia:
in columna A. incipio ab L. unde
1 est cum signo + ~~signo~~ punctatur.
simul hoc 1 cum alio 1. quod
est in P. ~~est~~ cum signo −
sumitur in M est +1.
punctatur ~~et cum~~ −1 in S.
Denique in N. est +1 punctatum
una cum −1 in R.
erunt omnia +1. punctata
et restabunt +1, non punctata
quae numerentur, ut si sola adessent, ex sequenti columnae ascendantur cum suo signo, hoc loco +, aliasque − scilicet suffecit −1. Est et hoc notandum pro numero ~~subtrahendo~~ ~~[illegible]~~ subtrahendo posse poni ejus supplementum ~~[illegible]~~ ad 1000000 etc. et ita non opus est subtractione ~~[illegible]~~ sed additione ea methodo qua ut fieri etiam in decadica alibi demonstravi

	A	
L	1	+
M	1	+
N	1	+
P	1	−
Q	0	−
R	1	+
S	1	−
T	1	+
V	1	+
W	1	−

~~vel~~ A
+ 1 0 1 1 0 1 1 0
+ 1 1 0 0 1 1 0 0
+ 1 0 1 0 1 0 0
− 1 1 1 0 0 1 1 1
−
+
−
+
+
−
0
1
1
1
1
1

ut subtrahendus est numerus 110101, ponatur subtrahi debere ab ~~1000~~
1000000
patet fieri
001011
nam si huic addas
110101
redit
1000000

~~[illegible]~~ Statim autem scribi potest supplementum hoc modo, si in primo ~~dextra~~ a dextra charactere subsequenti latius idem, in reliquis contrarium, mutando scilicet 0 in 1 et 1 in 0. Tandem sub finem notandum, exponenti columnae ad quam nullus est subtrahendo character pertingit subtrahendam unitatem ... ~~[illegible]~~ si subtractionem per solam supplementalem additionem peragere volumus

Sequitur ad Multiplicationes ubi rursus patet nihil facilius fieri ~~[illegible]~~ posse. Neque ullo opus est tabula pythagorica: et hoc loco est multiplicatio nullam aliam multiplicationem jam notam ~~[illegible]~~ praesupponens. Tantum enim subscribitur numerus aut ejus loco 0.

```
      1011101
         1100
  -----------
     10111010
    1011101
  -----------
  10001011100
```

Hic jam modus calculi fieri posset per machinam ~~sine rotis~~ hoc modo ~~[illegible]~~ sane facillime et sine sumtu; scil. ~~[illegible] pyxis perforata [illegible] ubi [illegible] repraesentantur cujus foramina aperiri et claudi possunt~~, aperiantur ~~respondentia ipsis~~ ~~sit machinula cum rotis [illegible]~~, ut quam pyxis perforata ~~[illegible]~~ ut foramina aperiri et claudi possint aperta in locis respondentibus ipsis 1. clausa maneant in locis respondentibus ipsis 0. per loca aperta demittat cubulos vel ~~[illegible]~~ globulos in crenas per alios nihil, et ita promota de columna in columnam transferatur, ut multiplicatio postulat. Crenae repraesentent columnas nec possit globulus ~~[illegible]~~ ex una crena in aliam ire nisi postea mota machinula ubi globuli effluent semper in sequentem crenam demto semper uno qui in foramine ~~[illegible] [illegible] [illegible]~~ manet si quidem ipse per portas transire vult solus ~~[illegible]~~ manens, ita instrui potest ut duo ~~[illegible]~~ semper simul effluant receptui, alioqui non effluant;

Divisio in hoc calculo fit tum sine tabula pythagorica tum etiam sine tentatione

Vulgaris quaerendo compendiosissime.

```
Dividendus  10110101   Residuum
Divisor 1010)  :  100100  quotiens
```

~~Non est opus delere sufficit~~ vel ~~[illegible] melius subtrahere Dividendus subscribendo Divisorem [illegible] quotiens subscribi~~ potest

```
          10110101
   1010)  1001
   ~~10110101~~  Dividendus      residuum
   ~~[illegible]~~               1011|01101
   Divisor  1010)                100100  quotiens

~~1000) 101100~~
          1   1010      |     001
              1100      |     1101
            100100      |   100100    optime
   1010)        11      |  1010)  11
```

Vulgariter sic:

```
  001
  ...
  10100  } 11        2
  ...
```

ubi illud nota, si debeas subtrahere 1 à 0 ~~[illegible]~~ scribere te quasi adjecto 1. loco 0. et in sequenti 1. debet fieri 0. et ipsi quod sinistrorsum non sequitur 1. seu 0. ~~[illegible]~~ omnia 0 quae sequentur mutantur in 1. Et primum 1. quod ~~[illegible]~~ excipit (uti in vulgari decadica, nisi quod ibi mutatur 0 in 9.) mutatur in 0. [illegible]

Traduction du fac-similé du manuscrit de Leibniz du 15 mars 1679, « De Progressione Dyadica »

1							1
2						1	0
3						1	1
4					1	0	0
5					1	0	1
6					1	1	0
7					1	1	1
8				1	0	0	0
9				1	0	0	1
10				1	0	1	0
11				1	0	1	1
12				1	1	0	0
13				1	1	0	1
14				1	1	1	0
15				1	1	1	1
16			1	0	0	0	0
17			1	0	0	0	1
18			1	0	0	1	0
19			1	0	0	1	1
20			1	0	1	0	0
21			1	0	1	0	1
22			1	0	1	1	0
23			1	0	1	1	1
24			1	1	0	0	0
25			1	1	0	0	1
26			1	1	0	1	0
27			1	1	0	1	1
28			1	1	1	0	0
29			1	1	1	0	1
30			1	1	1	1	0
31			1	1	1	1	1
32		1	0	0	0	0	0
33		1	0	0	0	0	1
34		|	|	|	0	1	0
35		|	|	|	0	1	1
36		|	|	|	1	0	0
37		|	|	|	1	0	1
38		|	|	|	1	1	0
39		|	|	|	1	1	1
40		|	|	1	0	0	0
41		|	|	|	0	0	1
42		|	|	|	0	1	0
43		|	|	|	0	1	1
44		|	|	|	1	0	0
45		|	|	|	1	0	1
46		|	|	|	1	1	0
47		|	|	|	1	1	1
48		|	1	0	0	0	0
49		|	|	|	0	0	1
50		|	|	|	0	1	0
51		|	|	|	0	1	1
52		|	|	|	1	0	0
53		|	|	|	1	0	1
54		|	|	|	1	1	0
55		|	|	|	1	1	1
56		|	|	1	0	0	0
57		|	|	|	0	0	1
58		|	|	|	0	1	0
59		|	|	|	0	1	1
60		|	|	|	1	0	0
61		|	|	|	1	0	1
62		|	|	|	1	1	0
63		|	|	|	1	1	1
64	1	0	0	0	0	0	0
65	|	|	|	|	|	0	1
66	|	|	|	|	|	1	0
67	|	|	|	|	|	1	1
68	|	|	|	|	1	0	0
69	|	|	|	|	|	0	1
70	|	|	|	|	|	1	0
71	|	|	|	|	|	1	1
72	|	|	|	1	0	0	0
73	|	|	|	|	|	0	1
74	|	|	|	|	|	1	0
75	|	|	|	|	|	1	1
76	|	|	|	|	1	0	0
77	|	|	|	|	|	0	1
78	|	|	|	|	|	1	0
79	|	|	|	|	|	1	1
80	|	|	1	0	0	0	0
81	|	|	|	|	|	0	1
82	|	|	|	|	|	1	0
83	|	|	|	|	|	1	1
84	|	|	|	|	1	0	0
85	|	|	|	|	|	0	1
86	|	|	|	|	|	1	0
87	|	|	|	|	|	1	1
88	|	|	|	1	0	0	0
89	|	|	|	|	|	0	1
90	|	|	|	|	|	1	0
91	|	|	|	|	|	1	1
92	|	|	|	|	1	0	0
93	|	|	|	|	|	0	1
94	|	|	|	|	|	1	0
95	|	|	|	|	|	1	1
96	|	1	0	0	0	0	0
97	|	|	|	|	|	0	1
98	|	|	|	|	|	1	0
99	|	|	|	|	|	1	1
100	|	|	|	|	1	0	0

PREMIÈRE PAGE DU MANUSCRIT

15 Mars 1679

Le système de numération binaire

Numération

La séquence ci-contre peut facilement être continuée, en allant de droite à gauche, on écrit des zéros tant que le chiffre à la verticale est un 1 puis quand, également à la verticale, on a un 0, on écrit un 1 et il est inutile d'aller plus loin car les autres chiffres restent les mêmes que sur les lignes supérieures.

Ainsi, nous avons :
1010111   87
1011000   88

C'est la même chose que si on disait 1011000 correspond à
$2^6 + * + 2^4 + 2^3 + * * *$
$64 + \quad 16 + 8 \quad = 88$

Car 1 à la quatrième place, donc 1000, signifie la troisième puissance de la base du système de numération, comme il signifie dans le système habituel la troisième puissance de dix, et mille, il représente ici la troisième puissance de deux, à savoir huit.

De même, le 1 à la cinquième place représente la quatrième puissance, soit 16, dans la sixième, cela représente la cinquième puissance, c'est à dire 32 et dans la septième place la sixième puissance, donc 64.

Il convient de noter que, si on va d'en haut vers le bas dans la séquence, un chiffre du nombre supérieur se retrouve en dessous dans les nombres inférieurs sur un intervalle régulier puis change et alterne à nouveau après le même intervalle. À la deuxième place, qui correspond au carré, le chiffre change après trois lignes, à la troisième place qui vaut pour la troisième puissance, après sept lignes intermédiaires, à la quatrième place qui correspond à la quatrième puissance, après quinze.

Une manière commode de convertir l'expression décimale d'un certain nombre en binaire peut maintenant être présentée. Prenons le nombre 365, on prend successivement la moitié, puis la moitié de la moitié et on écrit respectivement le reste à côté de ces demi valeurs. Ces nombres montrent, une fois écrits l'un à côté de l'autre en mettant tout à fait à gauche le plus bas des chiffres l'expression binaire cherchée.

La même méthode peut être appliquée pour convertir un nombre quelconque d'un système à l'autre.

365	
182	1
91	0
45	1
22	1
11	0
5	1
2	1
1	0
	1

Ainsi, 365 s’écrit 101 101 101, à savoir :

100000000	256
1000000	64
100000	32
1000	8
100	4
1	1
	365

Selon une procédure semblable, un nombre binaire est également transformé en décimal, il suffit d’ajouter les puissances de deux exprimées en décimal, comme ici 256, 64, etc., ou aussi, en divisant le nombre binaire donné par l'expression binaire de dix, auquel cas il faut écrire respectivement le reste de manière déjà mentionnée, p. ex. :

0n divise 101101101 par 1010
100100 (1. Quotient)
Le reste est 101 soit 5
11 (2. Quotient)
Le reste est 110 soit 6
Reste 11 soit 3

														1							
												~~1~~	~~1~~	~~0~~	1						
~~1~~	~~0~~	~~1~~	~~1~~	~~0~~	~~1~~	1	0	1	∫		~~1~~	~~0~~	~~0~~	~~1~~	~~0~~	0		∫	1	1	
~~1~~	~~0~~	~~1~~	~~0~~	~~0~~	~~1~~	~~0~~						~~1~~	~~0~~	~~1~~	~~0~~	~~0~~					
			~~1~~										~~1~~	~~0~~	~~1~~						

PREMIÈRE PAGE DU MANUSCRIT, EN HAUT À GAUCHE

De là il est évident que les 0 et 1 se suivent : d'abord en changeant à chaque ligne, puis toutes les quatre, ensuite toutes les huit etc., dans une progression géométrique. De la même manière, la succession des nombres de deux chiffres puis trois, etc. est également à examiner pour clarifier leur progression avec la valeur de la base dont ils sont dérivés. De même la progression des puissances.

PREMIÈRE PAGE DU MANUSCRIT, EN HAUT À DROITE

Dans le système de numération binaire, la multiplication est parfaite, car elle se fait par simple addition sans avoir besoin, comme d'habitude, de la table de Pythagore.

DEUXIÈME PAGE DU MANUSCRIT

Additionner les nombres par cette méthode est tellement facile que vous pouvez écrire directement les totaux sans écrire de nombres intermédiaires. Par exemple, j'écris le premier nombre : 10110
Puis 11011
Et j'écris immédiatement : 1000001 *(*NdT en fait 110001)*

Ou, si plusieurs nombres sont à ajouter en colonne par exemple :

1332223210
10110110
11100101
1001100
1010111
11011011
1100011001

Il faut compter les 1 dans une colonne, si leur nombre est pair, alors il faut écrire zéro dessous et transférer la moitié du nombre d'unités à la colonne suivante, soit en points ou en chiffres ordinaires. Il suffit de compter les unités dans ce système, alors que dans le système décimal, il est nécessaire au minimum que vous puissiez ajouter des chiffres simples, par exemple : 8 + 5 = 13; celui qui ne sait pas ce résultat ne peut additionner commodément dans le système décimal.
Avec la même méthode, la soustraction va également très facilement et même également le mélange de soustraction et d'addition. En effet il suffit de regrouper des unités ensemble. Si, cependant, l'addition et la soustraction sont mélangées, une unité à additionner doit être imputée sur chaque unité à soustraire, pour qu'elles s'annulent mutuellement.

Par exemple, on commence dans la colonne A avec un L, où 1 est présent avec un signe plus. C'est donc 1 qui est compensé avec l'autre 1 avec un signe négatif dans P, que l'on marque d'un point. De même +1 en M est également compensé par -1 en S et on met un point. Enfin, le +1 en N, avec -1 en W et on met un point.

A			
L	1.	+	10110111
M	1.	+	1001101
N	1.	+	1010101
P	1.	-	1110011
Q	0	-	0
R	1	+	1
S	1.	-	-1
T	1	+	1
V	1	+	1
W	1.	-	-1

Tous les (-1) sont marqués par un point, et il ne reste qu'à compter les (+1) non marqués d'un point, et à les transférer avec leur signe sur la colonne suivante, soit ici avec +, ou avec - si il y avait plus de (-1) que de (1).

Il doit aussi être considéré que pour un nombre à soustraire on peut utiliser son complément à 1000000 (par exemple), et alors on n'a pas besoin de soustraction, mais seulement d'addition, selon la procédure que j'ai aussi énoncée par ailleurs pour le système décimal.

Exemple: Soustraire le nombre:	110101
qui est à soustraire de:	1000000
Alors, le résultat est manifestement	001011
Alors si vous rajoutez ceci:	110101
Cela donne à nouveau:	1000000

On peut immédiatement noter les chiffres du complément, en partant du premier chiffre de la droite, en prenant le contraire du chiffre original (nombre à soustraire), soit 0 transformé en 1 et 1 en 0. En outre, il est noté qu'à la fin, il faut soustraire une unité de la colonne suivante, et ajouter une unité si l'on veut effectuer la soustraction par une simple addition au moyen du complément.

TROISIÈME PAGE DU MANUSCRIT

Je voudrais passer maintenant à la multiplication. Ici, il est encore clair que l'on ne peut imaginer quoi que ce soit de plus facile. Parce que vous n'avez pas besoin de table de Pythagore, et cette multiplication est la seule qui ne nécessite pas de connaissances. On n'écrit en effet que le nombre lui-même ou à sa place un 0.

			1	0	1	1	1	0	1	
							1	1	1	0
			1	0	1	1	1	0	1	0
		1	0	1	1	1	0	1		
	1	0	1	1	1	0	1			
1	0	1	0	0	0	1	0	1	1	0

Ce type de calcul pourrait également être réalisé avec une machine (sans roues), de la manière suivante certainement très facilement et sans effort. Avec une boîte munie de trous, qui peuvent être ouverts et fermés. Ils sont ouverts ou fermés aux places qui correspondent avec une petite roue à 2 dents.

Les trous sont ouverts à l'endroit qui correspond à 1 et restent fermés à l'endroit qui correspond à 0. Par les trous ouverts, tomberont des petits cubes ou des billes dans des rigoles, et rien au travers des trous fermés. La boite est décalée de colonne en colonne, comme la multiplication l'exige.

Les rigoles représentent les colonnes, et aucune bille ne devrait pouvoir sortir d'une rigole vers l'autre, à moins d’un mouvement de la machine.

Ensuite toutes les billes roulent dans la rigole suivante, une étant prise et l'autre tombant dans un trou (et remplit alors une base), une seule bille passant par la porte. Car la chose peut être organisée ainsi que deux billes sortent nécessairement toujours ensemble, et autrement ne doivent pas sortir.

La division se fait par ce calcul sans table de Pythagore et sans tâtonnements.
Voyons quel est le chemin le plus court :

Dividende ~~101101~~101 Reste
Diviseur 1010 100100 quotient

On n'a pas besoin de rayer, il suffit ainsi de l'écrire.
Vous écrivez le dividende mieux ainsi : 101101101
Puis le diviseur, 1010 100100 quotient

001
1101
100100
1010 11

Et le mieux, comme habituellement ainsi:

01
~~110~~1
~~10010~~0 ∫ 11
~~10100~~
~~101~~

Il faut considérer que lorsqu'on doit enlever 1 de 0, on écrit ainsi, comme si 1 était à la place de 0. Mais avec le mécanisme que le 1 suivant devient 0. Si ce n'est toutefois pas 1, mais 0 qui suit, alors le mécanisme change chaque 0 suivant en 1, jusqu'au premier 1, qui met fin à la série de 0 (si on va de droite à gauche), et ce 1 est transformé en 0, tout comme en notation décimale on aurait transformé 0 en 9.

■

(traduction d'Yves Serra, décembre 2010)