ANALYSE ALGÉBRIQUE.

Démonstration d'un théorème sur les fractions continues périodiques ;

Par M. Evariste GALOIS, élève au Collége de Louis-le-Grand.

On sait que si, par la méthode de Lagrange, on développe en fraction continue une des racines d'une équation du second degré, cette fraction continue sera périodique, et qu'il en sera encore de même de l'une des racines d'une équation de degré quelconque, si cette racine est racine d'un facteur rationnel du second degré du premier membre de la proposée, auquel cas cette équation aura, tout au moins, une autre racine qui sera également périodique. Dans l'un et dans l'autre cas, la fraction continue pourra d'ailleurs être immédiatement périodique ou ne l'être pas immédiatement, mais, lorsque cette dernière circonstance aura lieu, il y aura du moins une des transformées dont une des racines sera immédiatement périodique.

Or, lorsqu'une équation a deux racines périodiques, répondant à un même facteur rationnel du second degré, et que l'une d'elles est immédiatement périodique, il existe entre ces deux racines une relation assez singulière qui paraît n'avoir pas encore été remarquée, et qui peut être exprimée par le théorème suivant :

THÉORÈME. Si une des racines d'une équation de degré quelconque est une fraction continue immédiatement périodique, cette équation aura nécessairement une autre racine également périodique

que l'on obtiendra en divisant l'unité négative par cette même fraction continue périodique, écrite dans un ordre inverse.

Démonstration. Pour fixer les idées, ne prenons que des périodes de quatre termes ; car la marche uniforme du calcul prouve qu'il en serait de même si nous en admettions un plus grand nombre. Soit une des racines d'une équation de degré quelconque exprimée comme il suit :

$$x=a+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\ldots\ldots ;$$

l'équation du second degré, à laquelle appartiendra cette racine et qui contiendra conséquemment sa corrélative, sera

$$x=a+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{x} ;$$

or, on tire de là successivement

$$a-x=-\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{x}, \qquad \frac{1}{a-x}=-(b+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{x},$$

$$b+\frac{1}{a-x}=-\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{x}; \qquad \frac{1}{b}+\frac{1}{a-x}=-(c+\frac{1}{d}+\frac{1}{x},$$

$$c+\frac{1}{b}+\frac{1}{a-x}=-\frac{1}{d}+\frac{1}{x}, \qquad \frac{1}{c}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a-x}=-(d+\frac{1}{x},$$

$$d+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a-x}}}=-\frac{1}{x}, \qquad \cfrac{1}{d+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a-x}}}}=-x,$$

c'est-à-dire,

$$x=-\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a-x}}}};$$

c'est donc toujours là l'équation du second degré qui donne les deux racines dont il s'agit ; mais en mettant continuellement pour x, dans son second membre, ce même second membre qui en est en effet la valeur, elle donne

$$x=-\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a+\ldots}}}}}}}};$$

c'est donc là l'autre valeur de x, donnée par cette équation ; valeur qui, comme l'on voit, est égale à -1 divisé par la première.

Dans ce qui précède nous avons supposé que la racine proposée était plus grande que l'unité; mais, si l'on avait

$$x=\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\ldots}}}}}}}},$$

on en conclurait, pour une des valeurs de $\frac{1}{x}$,

$$\frac{1}{x}=a+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\ldots\ldots .$$

l'autre valeur de $\frac{1}{x}$ serait donc, par ce qui précède,

$$\frac{1}{x}=-\frac{1}{d}+\frac{1}{c}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a}+\frac{1}{d}+\frac{1}{c}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a}+\ldots\ldots ,$$

d'où on conclurait, pour l'autre valeur de x,

$$x=-(d+\frac{1}{c}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a}+\frac{1}{d}+\frac{1}{c}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a}+\ldots\ldots$$

ou

$$x=-\frac{1}{\frac{1}{d}+\frac{1}{c}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a}+\frac{1}{d}+\frac{1}{c}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a}} ;$$

ce qui rentre exactement dans notre théorème.

Soit A une fraction continue, immédiatement périodique quelconque, et soit B la fraction continue qu'on en déduit en renversant la période; on voit que, si l'une des racines d'une équation est $x=A$, elle aura nécessairement une autre racine $x=-\frac{1}{B}$; or, si A est un nombre positif plus grand que l'unité, $-\frac{1}{B}$ sera négatif et compris entre o et -1; et, à l'inverse, si A est un nombre négatif compris entre o et -1, $-\frac{1}{B}$ sera un nombre positif plus grand que l'unité. Ainsi, lorsque l'une des racines d'une équation du second degré est une fraction continue immédiatement périodique, plus grande que l'unité, l'autre est nécessairement comprise entre o et -1, et réciproquement si l'une d'elles est comprise entre o et -1, l'autre sera nécessairement positive et plus grande que l'unité.

On peut prouver que, réciproquement, si l'une des deux racines d'une équation du second degré est positive, est plus grande que l'unité, et que l'autre soit comprise entre o et -1, ces racines seront exprimables en fractions continues immédiatement périodiques. En effet, soit toujours A une fraction continue immédiatement périodique quelconque, positive et plus grande que l'unité, et B la fraction continue immédiatement périodique qu'on en déduit, en renversant la période, laquelle sera aussi, comme elle, positive et plus grande que l'unité. La première des racines de la proposée ne pourra être de la forme $x=p+\frac{1}{A}$, car alors, en vertu de notre théorème, la seconde devrait être $x=a+\cfrac{1}{-\frac{1}{B}}=a-B$; or, $a-B$ ne saurait être compris entre o et -1 qu'autant que la partie entière de B serait égale à p; auquel cas, la première valeur serait immédiatement périodique. On ne pourrait avoir davantage, pour la première valeur de x, $x=p+\cfrac{1}{q+\frac{1}{A}}$, car alors l'autre serait $x=p+\frac{1}{q-B}$ ou $x=p-\frac{1}{B-q}$; or, pour que cette valeur fût comprise entre o et -1, il faudrait d'abord que $\frac{1}{B-q}$ fût égal à p plus une fraction ; il faudrait donc que $B-q$ fût plus petit que l'unité, ce qui exigerait que B fût égal à q, plus une fraction ; d'où l'on voit que q et p devraient être respectivement égaux aux deux premiers termes de la période qui répond à B ou aux deux derniers de la période qui répond à A ; de sorte que, contrairement à l'hypothèse, la valeur $x=p+\frac{1}{q}+\frac{1}{A}$ serait immédiatement périodique. On prouverait, par un raisonnement analogue, que les périodes ne sauraient être précédées d'un plus grand nombre de termes n'en faisant pas partie.

Lors donc qu'on traitera une équation numérique par la méthode de Lagrange, on sera sûr qu'il n'y a point de racines périodiques à espérer tant qu'on ne rencontrera pas une transformée ayant au moins une racine positive plus grande que l'unité, et une autre comprise entre o et -1 ; et si, en effet, la racine que l'on poursuit doit être périodique, ce sera tout au plus à cette transformée que les périodes commenceront.

Si l'une des racines d'une équation du second degré est non seulement immédiatement périodique mais encore symétrique, c'est-à-dire, si les termes de la période sont égaux à égale distance des extrêmes, on aura $B=A$; de sorte que ces deux racines seront A et $-\frac{1}{A}$; l'équation sera donc

$$Ax^2-(A^2-1)x-A=0 .$$

Réciproquement, toute équation du second degré de la forme

$$ax^2-bx-a=0 ,$$

aura ses racines à la fois immédiatement périodiques et symétriques. En effet, en mettant tour à tour pour x l'infini et -1, on obtient des résultats positifs, tandis qu'en faisant $x=1$ et $x=0$; on obtient des résultats négatifs; d'où l'on voit d'abord que cette équation a une racine positive plus grande que l'unité et une racine négative comprise entre o et -1, et qu'ainsi ces racines sont immédiatement périodiques; de plus, cette équation ne change pas en y changeant x en $-\frac{1}{x}$; d'où il suit que si A est une de ses racines l'autre sera $-\frac{1}{A}$, et qu'ainsi, dans ce cas, $B=A$.

Appliquons ces généralités à l'équation du second degré

$$3x^2-16x+18=0 ;$$

on lui trouve d'abord une racine positive comprise entre 3 et 4; en posant

$$x=3x+\frac{1}{y} ;$$

on obtient la transformée

$$3y^2-2y-3=0 ,$$

dont la forme nous apprend que les valeurs de y sont à la fois immédiatement périodiques et symétriques; en effet, en posant, tour à tour,

$$y=1+\frac{1}{z} , \quad z=2+\frac{1}{t} , \quad t=1+\frac{1}{u} ,$$

on obtient les transformées

$$2z^2-4z-3=0 ,$$

$$3t^2-4t-2=0 ,$$

$$3u^2-2u-3=0 ,$$

l'identité entre les équations en u et en y prouve que la valeur positive de y est

$$y=-\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\ldots}}}}}$$

sa valeur négative sera donc

$$y=-\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\ldots}}}}}}$$

les deux valeurs de x seront donc

$$x=3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\ldots}}}}}} \qquad x=3-\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\ldots}}}}}}$$

dont la dernière, en vertu de la formule connue

$$p-\frac{1}{q}=p-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{q-1}},$$

devient

$$x=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\ldots}}}}}}}}} \quad (*)$$

(*) On trouve diverses recherches sur le même sujet, dans le présent recueil, tom. IX, pag. 261, tom. XIV, pag. 324 et 337.

J. D. G.