

Vecteurs

11-1 La symétrie en physique

11-2 Translations

11-3 Rotations

11-4 Vecteurs

11-5 Algèbre vectorielle

11-6 Lois de Newton en notations vectorielles

11-7 Produit scalaire de vecteurs

11-1 La symétrie en physique

Dans ce chapitre nous introduisons un sujet qui est connu techniquement en physique sous le nom de *symétrie dans les lois de physique*. Le mot « symétrie » est utilisé ici avec une signification particulière et doit par conséquent être défini. Quand pouvons-nous dire qu'une chose est symétrique — comment pouvons-nous définir cela? Lorsqu'un dessin est symétrique, un des côtés est en quelque sorte le même que l'autre. Le professeur Hermann Weyl a donné cette définition de la symétrie: une chose est symétrique si on peut la soumettre à une certaine opération et qu'elle apparaisse exactement la même après l'opération. Par exemple, si nous regardons un vase symétrique par rapport à sa gauche et à sa droite, et que nous le tournions de 180 degrés autour de son axe vertical, il apparaît identique. Nous adopterons la définition de la symétrie sous la forme plus générale de Weyl, et c'est dans ces conditions que nous discuterons la symétrie des lois physiques.

Supposons que nous construisions en un certain endroit une machine complexe, avec beaucoup d'interactions compliquées et de balles rebondissant un peu partout avec des forces entre elles, etc. Supposons que nous construisions exactement le même type d'équipement en un autre endroit, réalisant l'équivalence pièce par pièce, avec les mêmes dimensions et la même orientation, tout étant identique à l'exception d'un déplacement latéral sur une certaine distance. Si les deux machines démarrent avec les mêmes conditions initiales, en exacte correspondance, nous demandons: est-ce que l'une des machines va se comporter exactement de la même manière que l'autre? Va-t-elle suivre tout le mouvement selon un parallélisme rigoureux? La réponse peut parfaitement être *négative*, car nous pouvons mettre notre machine à une mauvaise place, elle peut être à l'intérieur d'un mur et les interférences avec le mur peuvent être telles que la machine ne fonctionne pas.

Toutes nos idées en physique demandent, pour être appliquées, une certaine dose de bon sens; ce ne sont pas des idées purement mathématiques ou abstraites. Il nous faut comprendre ce que nous entendons lorsque nous disons que les phénomènes sont les mêmes lorsque nous déplaçons l'appareil vers de nouvelles positions. Nous voulons dire que nous déplaçons tout ce que nous croyons en rapport avec le phénomène; si le phénomène n'est pas le même, nous suggérons que quelque chose en rapport avec lui n'a pas été déplacé, et nous nous mettons à sa recherche. Si nous ne le trouvons pas,

Vectors

11-1 Symmetry in physics

11-2 Translations

11-3 Rotations

11-4 Vectors

11-5 Vector algebra

11-6 Newton's laws in vector notation

11-7 Scalar product of vectors

11-1 Symmetry in physics

In this chapter we introduce a subject that is technically known in physics as *symmetry in physical law*. The word "symmetry" is used here with a special meaning, and therefore needs to be defined. When is a thing symmetrical—how can we define it? When we have a picture that is symmetrical, one side is somehow the same as the other side. Professor Hermann Weyl has given this definition of symmetry: a thing is symmetrical if one can subject it to a certain operation and it appears exactly the same after the operation. For instance, if we look at a vase that is left-and-right symmetrical, then turn it 180° around the vertical axis, it looks the same. We shall adopt the definition of symmetry in Weyl's more general form, and in that form we shall discuss symmetry of physical laws.

Suppose we build a complex machine in a certain place, with a lot of complicated interactions, and balls bouncing around with forces between them, and so on. Now suppose we build exactly the same kind of equipment at some other place, matching part by part, with the same dimensions and the same orientation, everything the same only displaced laterally by some distance. Then, if we start the two machines in the same initial circumstances, in exact correspondence, we ask: will one machine behave exactly the same as the other? Will it follow all the motions in exact parallelism? Of course the answer may well be *no*, because if we choose the wrong place for our machine it might be inside a wall and interferences from the wall would make the machine not work.

All of our ideas in physics require a certain amount of common sense in their application; they are not purely mathematical or abstract ideas. We have to understand what we mean when we say that the phenomena are the same when we move the apparatus to a new position. We mean that we move everything that we believe is relevant; if the phenomenon is not the same, we suggest that something relevant has not been moved, and we proceed to look for it. If we never find it,

nous disons alors que les lois de la physique ne possèdent pas cette symétrie. D'un autre côté, nous pouvons le trouver — nous espérons le trouver — si les lois physiques possèdent cette symétrie; en regardant, nous pouvons découvrir, par exemple, que le mur pousse l'appareil. La question fondamentale est alors: si nous définissons les choses suffisamment bien, si on tient compte de toutes les forces essentielles à l'intérieur de l'appareil, si tout ce qui est nécessaire au fonctionnement est déplacé d'un endroit à l'autre, est-ce que les lois seront les mêmes? Est-ce que le mécanisme marchera de la même manière?

Il est clair que nous voulons déplacer tout l'équipement et les influences *essentiels*, mais que nous ne voulons pas *tout* déplacer dans l'univers — les planètes, les étoiles, etc. — car nous retrouverons exactement le même phénomène pour la raison évidente que nous sommes exactement ramenés au point de départ. Non, nous ne pouvons pas *tout* déplacer. Mais il apparaît en pratique qu'avec un peu d'intelligence sur ce qu'il faut déplacer, la machine fonctionnera. En d'autres termes, si nous n'allons pas à l'intérieur d'un mur, si nous connaissons l'origine des forces extérieures et si nous nous arrangeons pour que celles-ci soient également déplacées, alors la machine fonctionnera *bien* de la même manière aux deux endroits.

11-2 Translations

Nous limiterons notre analyse simplement à la mécanique, sur laquelle nous avons acquis maintenant déjà suffisamment de connaissances. Dans les chapitres précédents nous avons vu que les lois de la mécanique peuvent être résumées par un ensemble de trois équations pour chaque particule:

Ceci signifie qu'il existe une manière de *mesurer* x , y , et z sur trois axes perpendiculaires et les forces suivant ces directions, de telle sorte que ces lois soient vraies. Ces grandeurs doivent être mesurées à partir d'une certaine origine, mais *où placer l'origine?* Tout ce que Newton pourrait nous dire pour commencer est qu'il y a un certain endroit à partir duquel nous pouvons mesurer, peut-être le centre de l'univers, de manière à ce que les lois soient correctes. Mais nous pouvons montrer immédiatement que nous ne pouvons jamais trouver le centre de l'univers, car nous ne verrons pas de différence si nous utilisons une autre origine. En d'autres termes, supposons qu'il y ait deux personnes — Dupont qui a placé son origine en un endroit, et Durand dans un système parallèle dont l'origine est quelque part ailleurs (Fig. 11-1). Lorsque Dupont mesure la position d'un point dans l'espace, il le trouve en x , y , et z (nous laisserons habituellement z de côté parce que le représenter embrouille la figure). D'un autre côté, en mesurant le même point, Durand obtiendra une valeur différente de x (pour pouvoir la distinguer, nous l'appellerons x'), et en principe un y différent, bien que dans notre exemple ils soient

Joe = Dupont
Moe = Durand

Fig. 11-1. Deux systèmes de coordonnées parallèles.

then we claim that the laws of physics do not have this symmetry. On the other hand, we may find it—we expect to find it—if the laws of physics do have this symmetry; looking around, we may discover, for instance, that the wall is pushing on the apparatus. The basic question is, if we define things well enough, if all the essential forces are included inside the apparatus, if all the relevant parts are moved from one place to another, will the laws be the same? Will the machinery work the same way?

It is clear that what we want to do is to move all the equipment and *essential* influences, but not *everything* in the world—planets, stars, and all—for if we do that, we have the same phenomenon again for the trivial reason that we are right back where we started. No, we cannot move *everything*. But it turns out in practice that with a certain amount of intelligence about what to move, the machinery will work. In other words, if we do not go inside a wall, if we know the origin of the outside forces, and arrange that those are moved too, then the machinery *will* work the same in one location as in another.

11-2 Translations

We shall limit our analysis to just mechanics, for which we now have sufficient knowledge. In previous chapters we have seen that the laws of mechanics can be summarized by a set of three equations for each particle:

$$m(d^2x/dt^2) = F_x, \quad m(d^2y/dt^2) = F_y, \quad m(d^2z/dt^2) = F_z. \quad (11.1)$$

Now this means that there exists a way to *measure* x , y , and z on three perpendicular axes, and the forces along those directions, such that these laws are true. These must be measured from some origin, but *where do we put the origin?* All that Newton would tell us at first is that there *is* some place that we can measure from, perhaps the center of the universe, such that these laws are correct. But we can show immediately that we can never find the center, because if we use some other origin it would make no difference. In other words, suppose that there are two people—Joe, who has an origin in one place, and Moe, who has a parallel system whose origin is somewhere else (Fig. 11-1). Now when Joe measures the location of the point in space, he finds it at x , y , and z (we shall usually leave z out because it is too confusing to draw in a picture). Moe, on the other hand, when measuring the same point, will obtain a different x (in order to distinguish it, we will call it x'), and in principle a different y , although in our example they are

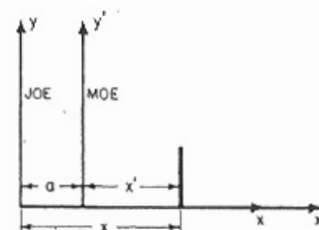


Fig. 11-1. Two parallel coordinate systems.

numériquement égaux. Ainsi nous avons

Pour terminer notre analyse, nous devons savoir quelles forces sont obtenues par Durand. On suppose que la force agit selon une certaine droite, et par force dans la direction x , nous voulons dire la partie de la force totale qui se trouve dans la direction x , ce qui est la grandeur de la force que multiplie le cosinus de son angle avec l'axe des x . Nous voyons maintenant que Durand utiliserait exactement la même projection que Dupont, ce qui nous donne l'ensemble des équations

Ce seront les relations entre les quantités observées par Dupont et Durand.

La question est alors la suivante: Si Dupont connaît les lois de Newton, ces lois seront-elles également correctes si Durand essaye de les écrire? Obtient-on quelque chose de différent suivant le choix de l'origine à partir de laquelle nous mesurons les points? En d'autres termes en supposant que les équations (11.1) soient vraies, et que les équations (11.2) et (11.3) donnent les relations entre les mesures, est-il vrai ou non que

Pour vérifier ces équations, nous allons dériver deux fois la formule donnant x' . Premièrement

Nous supposons maintenant que l'origine de Durand est fixe (ne se déplace pas) par rapport à celle de Dupont; a est alors une constante et $da/dt = 0$, ainsi nous trouvons que

et donc

nous savons donc que l'équation (11.4a) devient

(Nous supposons également que les masses mesurées par Dupont et Durand sont égales.) Ainsi l'accélération que multiplie la masse est la même pour les deux individus. Nous avons également trouvé la formule de $F_{x'}$, car en substituant dans l'équation (11.1), nous trouvons que

$$F_{x'} = F_x.$$

De ce fait, les lois vues par Durand apparaissent les mêmes; il peut également écrire les lois de Newton, avec des coordonnées différentes, et elles seront encore correctes. Ceci signifie

numerically equal. So we have

$$x' = x - a, \quad y' = y, \quad z' = z. \quad (11.2)$$

Now in order to complete our analysis we must know what Moe would obtain for the forces. The force is supposed to act along some line, and by the force in the x -direction we mean the part of the total which is in the x -direction, which is the magnitude of the force times this cosine of its angle with the x -axis. Now we see that Moe would use exactly the same projection as Joe would use, so we have a set of equations

$$F_{x'} = F_x, \quad F_{y'} = F_y, \quad F_{z'} = F_z. \quad (11.3)$$

These would be the relationships between quantities as seen by Joe and Moe.

The question is, if Joe knows Newton's laws, and if Moe tries to write down Newton's laws, will they also be correct for him? Does it make any difference from which origin we measure the points? In other words, assuming that equations (11.1) are true, and the Eqs. (11.2) and (11.3) give the relationship of the measurements, is it or is it not true that

$$\begin{aligned} (a) \quad m(d^2x'/dt^2) &= F_{x'}, \\ (b) \quad m(d^2y'/dt^2) &= F_{y'}, \\ (c) \quad m(d^2z'/dt^2) &= F_{z'}. \end{aligned} \quad (11.4)$$

In order to test these equations we shall differentiate the formula for x' twice. First of all

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{d}{dt}(x - a) = \frac{dx}{dt} - \frac{da}{dt}.$$

Now we shall assume that Moe's origin is fixed (not moving) relative to Joe's; therefore a is a constant and $da/dt = 0$, so we find that

$$dx'/dt = dx/dt$$

and therefore

$$d^2x'/dt^2 = d^2x/dt^2;$$

therefore we know that Eq. (11.4a) becomes

$$m(d^2x/dt^2) = F_{x'}.$$

(We also suppose that the masses measured by Joe and Moe are equal.) Thus the acceleration times the mass is the same as the other fellow's. We have also found the formula for $F_{x'}$, for, substituting from Eq. (11.1), we find that

$$F_{x'} = F_x.$$

Therefore the laws as seen by Moe appear the same; he can write Newton's laws too, with different coordinates, and they will still be right. That means that

qu'il n'y a pas de manière unique de définir l'origine du monde, car les lois apparaîtront les mêmes, quelles que soient les positions à partir desquelles elles sont observées.

Ce qui suit est également vrai : s'il y a un équipement en un endroit avec un certain type de machine à l'intérieur, le même équipement en un autre endroit se comportera de la même manière. Pourquoi ? Parce qu'une machine analysée par Durand a exactement les mêmes équations que l'autre, analysée par Dupont. Puisque les *équations* sont les mêmes, les *phénomènes* apparaissent les mêmes. Ainsi la preuve qu'un appareil dans une position nouvelle se comporte de la même manière que dans l'ancienne position est la même que la démonstration que les équations se reproduisent identiquement si on les déplace dans l'espace. De ce fait, nous disons que les lois de la physique sont symétriques pour les déplacements de translation, symétriques dans ce sens que les lois ne changent pas lorsque nous opérons une translation de coordonnées. Bien entendu, il est assez évident, intuitivement, que c'est vrai, mais c'est intéressant et amusant d'en discuter la démonstration mathématique.

11-3 Rotations

Ce qui précède est le début d'une série de propositions toujours plus compliquées concernant les symétries d'une loi physique. La proposition suivante est que la *direction* suivant laquelle nous choisissons les axes ne doit pas faire de différence. En d'autres termes, si nous construisons un équipement en un endroit et le regardons fonctionner, et si près de là, nous construisons le même type d'appareil mais le faisons tourner d'un certain angle, va-t-il fonctionner de la même manière ? Évidemment pas, si c'est l'horloge du grand-père par exemple ! Si une horloge à balancier se tient verticale, elle fonctionne correctement, mais si on la penche d'un certain angle, le balancier tombe sur le côté de l'armoire et tout s'arrête. Le théorème est alors faux dans le cas de l'horloge à balancier, tant que nous n'incorporons pas la terre qui attire le pendule. De ce fait, nous pouvons faire une prédiction sur les horloges à balancier, si nous croyons à la symétrie des lois physiques par rapport aux rotations : quelque chose d'autre en plus du mécanisme de l'horloge joue un rôle dans l'opération d'une horloge à balancier, quelque chose d'extérieur que nous devons chercher. Nous pouvons également prédire que les horloges à balancier ne fonctionneront pas de la même manière en des endroits différents relativement à cette mystérieuse source d'asymétrie — peut-être la terre. En fait, nous savons qu'une horloge à balancier, envoyée dans un satellite artificiel, par exemple, ne marchera plus du tout, car il n'y a pas de force effective, et sur Mars elle ira à une vitesse différente. Les horloges à balancier dépendent de quelque chose en plus de leur simple mécanisme interne, elles dépendent de quelque chose d'extérieur. Une fois que nous avons reconnu ce facteur, nous voyons que nous devons tourner la terre en même temps que l'appareil. Bien sûr, nous n'avons pas à nous préoccuper de cela, c'est facile à faire ; il suffit d'attendre quelques instants, la terre a tourné, et l'horloge continue de battre dans la nouvelle position de la même manière qu'auparavant. Quand nous tournons dans l'espace, nos angles changent constamment dans l'absolu ; ces changements ne semblent pas nous affecter beaucoup, car dans la nouvelle position il nous semble que nous soyons dans les mêmes conditions que l'ancienne. Ceci peut nous embrouiller, car il est vrai que dans la nouvelle position tournée, les lois sont les mêmes que dans l'ancienne position non tournée, mais il n'est pas vrai que si nous tournons un objet, il suit les mêmes lois que si nous ne le tournons pas. Si nous réalisons des expériences suffisamment délicates, nous

there is no unique way to define the origin of the world, because the laws will appear the same, from whatever position they are observed.

This is also true: if there is a piece of equipment in one place with a certain kind of machinery in it, the same equipment in another place will behave in the same way. Why? Because one machine, when analyzed by Moe, has exactly the same equations as the other one, analyzed by Joe. Since the *equations* are the same, the *phenomena* appear the same. So the proof that an apparatus in a new position behaves the same as it did in the old position is the same as the proof that the equations when displaced in space reproduce themselves. Therefore we say that the laws of physics are symmetrical for translational displacements, symmetrical in the sense that the laws do not change when we make a translation of our coordinates. Of course it is quite obvious intuitively that this is true, but it is interesting and entertaining to discuss the mathematics of it.

11-3 Rotations

The above is the first of a series of ever more complicated propositions concerning the symmetry of a physical law. The next proposition is that it should make no difference in which *direction* we choose the axes. In other words, if we build a piece of equipment in some place and watch it operate, and nearby we build the same kind of apparatus but put it up on an angle, will it operate in the same way? Obviously it will not if it is a Grandfather clock, for example! If a pendulum clock stands upright, it works fine, but if it is tilted the pendulum falls against the side of the case and nothing happens. The theorem is then false in the case of the pendulum clock, unless we include the earth, which is pulling on the pendulum. Therefore we can make a prediction about pendulum clocks if we believe in the symmetry of physical law for rotation: something else is involved in the operation of a pendulum clock besides the machinery of the clock, something outside it that we should look for. We may also predict that pendulum clocks will not work the same way when located in different places relative to this mysterious source of asymmetry, perhaps the earth. Indeed, we know that a pendulum clock up in an artificial satellite, for example, would not tick either, because there is no effective force, and on Mars it would go at a different rate. Pendulum clocks *do* involve something more than just the machinery inside, they involve something on the outside. Once we recognize this factor, we see that we must turn the earth along with the apparatus. Of course we do not have to worry about that, it is easy to do; one simply waits a moment or two and the earth turns; then the pendulum clock ticks again in the new position the same as it did before. While we are rotating in space our angles are always changing, absolutely; this change does not seem to bother us very much, for in the new position we seem to be in the same condition as in the old. This has a certain tendency to confuse one, because it is true that in the new turned position the laws are the same as in the unturned position, but it is *not* true that *as we turn* a thing it follows the same laws as it does when we are not turning it. If we perform sufficiently delicate experiments, we

Joe = Dupont
Moe = Durant

Fig. 11-2. Deux systèmes de coordonnées ayant des orientations angulaires différentes.

pouvons dire que la terre *tourne*, mais pas qu'elle *a tourné*. En d'autres termes, nous ne pouvons pas repérer sa position angulaire, mais nous pouvons dire qu'elle est en train de changer.

Nous pouvons maintenant discuter les effets de l'orientation angulaire sur les lois physiques. Essayons de voir si le même jeu avec Dupont et Durand peut se répéter. Cette fois, pour éviter des complications sans fin, nous supposons que Dupont et Durand utilisent la même origine (nous avons déjà montré que les axes peuvent être déplacés par translation en un autre endroit). Supposons que les axes de Durand aient tourné relativement aux axes de Dupont d'un angle θ . Les deux systèmes de coordonnées sont indiqués sur la Fig. 11-2, qui est limitée à deux dimensions. Considérons un point P ayant les coordonnées (x, y) dans le système de Dupont et (x', y') dans le système de Durand. Nous commencerons, comme dans le cas précédent, par exprimer les coordonnées x' et y' en fonction de x, y et θ . Pour ce faire, nous abaissons d'abord les perpendiculaires de P sur tous les axes, et traçons AB perpendiculaire à PQ . L'étude de la figure nous montre que x' peut être écrit comme la somme de deux longueurs le long de l'axe x' et y' comme la différence de deux longueurs le long de AB . Toutes ces longueurs sont exprimées en fonction de x, y et θ par les équations (11.5), auxquelles nous avons ajouté une équation pour la troisième dimension.

L'étape suivante consiste à calculer suivant la même méthode générale que précédemment la relation entre les forces vues par les deux observateurs. Supposons qu'une force F , déjà analysée en ses composantes F_x et F_y (vue par Dupont agisse sur une particule de masse m , située au point P de la Fig. 11-2. Pour simplifier, déplaçons les deux ensembles d'axes de telle sorte que l'origine soit en P comme indiqué sur la Fig. 11-3. Les composantes de F vues par Durand le long de ses axes, sont $F_{x'}$ et $F_{y'}$. F_x a des composantes le long de x' et de y' , et de la même manière F_y a des composantes le long de ces deux axes. Pour exprimer $F_{x'}$ en fonction de F_x et de F_y , nous additionnons leurs composantes le long de l'axe x' , et d'une manière semblable nous pouvons exprimer $F_{y'}$ en fonction de F_x et F_y . Les résultats sont

Fig. 11-3. Composantes d'une force dans les deux systèmes.

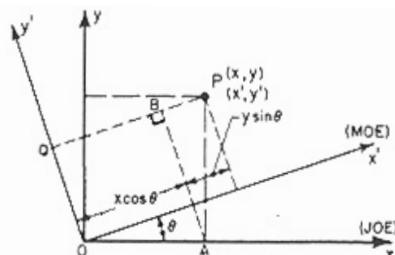


Fig. 11-2. Two coordinate systems having different angular orientations.

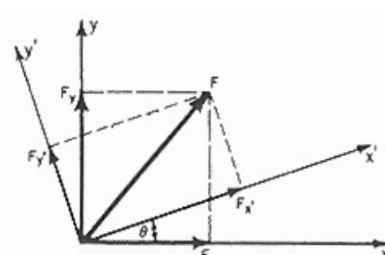


Fig. 11-3. Components of a force in the two systems.

can tell that the earth *is rotating*, but not that it *had rotated*. In other words, we cannot locate its angular position, but we can tell that it is changing.

Now we may discuss the effects of angular orientation upon physical laws. Let us find out whether the same game with Joe and Moe works again. This time, to avoid needless complication, we shall suppose that Joe and Moe use the same origin (we have already shown that the axes can be moved by translation to another place). Assume that Moe's axes have rotated relative to Joe's by an angle θ . The two coordinate systems are shown in Fig. 11-2, which is restricted to two dimensions. Consider any point P having coordinates (x, y) in Joe's system and (x', y') in Moe's system. We shall begin, as in the previous case, by expressing the coordinates x' and y' in terms of x, y , and θ . To do so, we first drop perpendiculars from P to all four axes and draw AB perpendicular to PQ . Inspection of the figure shows that x' can be written as the sum of two lengths along the x' -axis, and y' as the difference of two lengths along AB . All these lengths are expressed in terms of x, y , and θ in equations (11.5), to which we have added an equation for the third dimension.

$$\begin{aligned}x' &= x \cos \theta + y \sin \theta, \\y' &= y \cos \theta - x \sin \theta, \\z' &= z.\end{aligned}\quad (11.5)$$

The next step is to analyze the relationship of forces as seen by the two observers, following the same general method as before. Let us assume that a force F , which has already been analyzed as having components F_x and F_y (as seen by Joe), is acting on a particle of mass m , located at point P in Fig. 11-2. For simplicity, let us move both sets of axes so that the origin is at P , as shown in Fig. 11-3. Moe sees the components of F along his axes as $F_{x'}$ and $F_{y'}$. F_x has components along both the x' - and y' -axes, and F_y likewise has components along both these axes. To express $F_{x'}$ in terms of F_x and F_y , we sum these components along the x' -axis, and in a like manner we can express $F_{y'}$ in terms of F_x and F_y . The results are

$$\begin{aligned}F_{x'} &= F_x \cos \theta + F_y \sin \theta, \\F_{y'} &= F_y \cos \theta - F_x \sin \theta, \\F_{z'} &= F_z.\end{aligned}\quad (11.6)$$

Il est intéressant de remarquer une espèce d'accident d'une extrême importance: les formules (11.5) et (11.6) des coordonnées de P et des composantes de F respectivement, ont une forme identique.

On suppose comme précédemment que les lois de Newton sont vraies dans le système de Dupont, et qu'elles sont exprimées par les équations (11.1). La question est à nouveau de savoir si Durand peut appliquer les lois de Newton — est-ce que les résultats seront corrects pour son système d'axes tournés? En d'autres termes, si nous supposons que les équations (11.5) et (11.6) donnent les relations entre les mesures, est-il vrai ou non que

Pour vérifier ces équations, nous calculons les termes de gauche et de droite indépendamment et comparons les résultats. Pour calculer les termes de gauche, nous multiplions les équations (11.5) par m , et dérivons deux fois par rapport au temps, en supposant l'angle θ constant. Ceci donne

Nous calculons le terme de droite de l'équation (11.7) en substituant les équations (11.1) dans les équations (11.6). Ceci donne

Regardez! Les termes de droite des équations (11.8) et (11.9) sont identiques et, par conséquent, nous concluons que si les lois de Newton sont correctes dans un système d'axes, elles le sont également dans tout autre système. Ce résultat, maintenant établi à la fois pour la translation et la rotation des axes, a certaines conséquences: premièrement, personne ne peut dire que ses axes particuliers sont uniques, mais bien sûr ils peuvent être plus pratiques pour certains problèmes particuliers. Par exemple, il est commode d'avoir la gravitation le long d'un axe, mais ce n'est pas nécessaire physiquement. Deuxièmement, cela signifie que tout équipement qui se suffit à lui-même, avec toutes les sources de forces à l'intérieur de l'appareil, agira exactement de la même manière quand il sera tourné d'un certain angle.

11-4 Vecteurs

Non seulement les lois de Newton, mais pour autant que nous sachions, les autres lois de physique également, ont ces deux propriétés que nous appelons invariance (ou symétrie) pour la translation et la rotation des axes. Ces propriétés sont si importantes qu'une

It is interesting to note an accident of sorts, which is of extreme importance: the formulas (11.5) and (11.6), for coordinates of P and components of F , respectively, are of identical form.

As before, Newton's laws are assumed to be true in Joe's system, and are expressed by equations (11.1). The question, again, is whether Moe can apply Newton's laws—will the results be correct for his system of rotated axes? In other words, if we assume that Eqs. (11.5) and (11.6) give the relationship of the measurements, is it true or not true that

$$\begin{aligned} m(d^2x'/dt^2) &= F_{x'}, \\ m(d^2y'/dt^2) &= F_{y'}, \\ m(d^2z'/dt^2) &= F_{z'}? \end{aligned} \quad (11.7)$$

To test these equations, we calculate the left and right sides independently, and compare the results. To calculate the left sides, we multiply equations (11.5) by m , and differentiate twice with respect to time, assuming the angle θ to be constant. This gives

$$\begin{aligned} m(d^2x'/dt^2) &= m(d^2x/dt^2) \cos \theta + m(d^2y/dt^2) \sin \theta, \\ m(d^2y'/dt^2) &= m(d^2y/dt^2) \cos \theta - m(d^2x/dt^2) \sin \theta, \\ m(d^2z'/dt^2) &= m(d^2z/dt^2). \end{aligned} \quad (11.8)$$

We calculate the right sides of equations (11.7) by substituting equations (11.1) into equations (11.6). This gives

$$\begin{aligned} F_{x'} &= m(d^2x/dt^2) \cos \theta + m(d^2y/dt^2) \sin \theta, \\ F_{y'} &= m(d^2y/dt^2) \cos \theta - m(d^2x/dt^2) \sin \theta, \\ F_{z'} &= m(d^2z/dt^2). \end{aligned} \quad (11.9)$$

Behold! The right sides of Eqs. (11.8) and (11.9) are identical, so we conclude that if Newton's laws are correct on one set of axes, they are also valid on any other set of axes. This result, which has now been established for both translation and rotation of axes, has certain consequences: first, no one can claim his particular axes are unique, but of course they can be more convenient for certain particular problems. For example, it is handy to have gravity along one axis, but this is not physically necessary. Second, it means that any piece of equipment which is completely self-contained, with all the force-generating equipment completely inside the apparatus, would work the same when turned at an angle.

11-4 Vectors

Not only Newton's laws, but also the other laws of physics, so far as we know today, have the two properties which we call invariance (or symmetry) under translation of axes and rotation of axes. These properties are so important that a

technique mathématique a été développée pour en tirer parti lorsqu'on écrit et que l'on utilise les lois de la physique.

L'analyse précitée comprend un travail mathématique considérable et fastidieux. Pour réduire les détails au minimum dans le calcul de semblables questions, on a mis au point une technique mathématique très puissante. Cette technique appelée *le calcul vectoriel* fournit le titre de ce chapitre; à proprement parler, cependant, c'est un chapitre sur la symétrie des lois physiques. Par les méthodes utilisées précédemment nous étions capable de faire tout ce qui était nécessaire pour obtenir les résultats que nous cherchions, mais en pratique nous aimerions faire les choses plus facilement et plus rapidement, c'est pourquoi nous employons la technique vectorielle.

Nous avons commencé en remarquant certaines caractéristiques de deux espèces de grandeurs qui sont importantes en physique. (En réalité il y en a plus de deux, mais limitons-nous au début à ces deux.) Nous appelons l'une des deux, comme par exemple le nombre de pommes de terre dans un sac, une grandeur ordinaire, ou une grandeur sans direction, ou un *scalaire*. La température est un exemple de ce genre de grandeur. D'autres grandeurs qui sont importantes en physique ont une direction, par exemple, la vitesse: nous devons garder trace de la manière dont un corps se déplace, et non pas uniquement de la valeur de sa vitesse. La quantité de mouvement et la force ont également une direction, comme le déplacement: lorsque quelqu'un va d'un endroit à un autre dans l'espace, nous pouvons garder trace de la distance parcourue, mais si nous voulons savoir également où il est allé, nous devons préciser la direction.

Toutes les grandeurs qui ont des directions, telles qu'un déplacement dans l'espace, sont appelées des *vecteurs*.

Un vecteur c'est trois nombres. Dans le but de représenter un déplacement dans l'espace, par exemple, de l'origine à un certain point particulier P de position (x, y, z) , il nous faut réellement trois nombres, mais nous allons inventer un symbole mathématique, $\mathbf{r}$, différent de tout autre symbole mathématique que nous avons utilisé jusqu'à présent*. Ce n'est pas un seul nombre, il représente trois nombres: x , y et z . Il signifie trois nombres, mais en réalité il ne signifie pas qu'eux, parce que si nous utilisons un système de coordonnées différent, les trois nombres se modifieront en x' , y' et z' . Cependant, nous voulons conserver un appareil mathématique simple et nous utiliserons le même symbole pour représenter les trois nombres (x, y, z) et les trois nombres (x', y', z') . C'est-à-dire que nous utilisons le même symbole pour représenter le premier ensemble de trois nombres pour un système de coordonnées, et le deuxième ensemble de trois nombres si nous changeons de système de coordonnées. Ceci a l'avantage que lorsque nous changeons le système de coordonnées, nous n'avons pas besoin de changer les lettres de nos équations. Si nous écrivons une équation en termes de x, y, z , et que nous utilisons alors un autre système, nous devons les changer en x', y' et z' , mais nous pouvons simplement écrire $\mathbf{r}$, avec la convention qu'il représente (x, y, z) si nous utilisons un des systèmes d'axes, ou (x', y', z') si nous utilisons un autre système d'axes, etc. Les trois nombres qui décrivent la grandeur dans un certain système de coordonnées sont appelées les *composantes* du vecteur dans la direction des axes de coordonnées de ce système. C'est-à-dire: nous utilisons le même symbole pour les trois lettres qui correspondent au même objet vu par rapport à des axes différents. Le simple fait que nous puissions dire « le même objet » implique une intuition physique sur la réalité d'un déplacement dans l'espace, qui est indépendant des composantes à partir desquelles nous le mesurons. Ainsi le symbole $\mathbf{r}$ représentera la même chose, quelle que soit la manière dont nous tournons les axes.

* Imprimés, les vecteurs sont représentés par des lettres en caractères gras; manuscrits, ils sont représentés avec une flèche: $\vec{r}$.

mathematical technique has been developed to take advantage of them in writing and using physical laws.

The foregoing analysis involved considerable tedious mathematical work. To reduce the details to a minimum in the analysis of such questions, a very powerful mathematical machinery has been devised. This system, called *vector analysis*, supplies the title of this chapter; strictly speaking, however, this is a chapter on the symmetry of physical laws. By the methods of the preceding analysis we were able to do everything required for obtaining the results that we sought, but in practice we should like to do things more easily and rapidly, so we employ the vector technique.

We began by noting some characteristics of two kinds of quantities that are important in physics. (Actually there are more than two, but let us start out with two.) One of them, like the number of potatoes in a sack, we call an ordinary quantity, or an undirected quantity, or a *scalar*. Temperature is an example of such a quantity. Other quantities that are important in physics do have direction, for instance velocity: we have to keep track of which way a body is going, not just its speed. Momentum and force also have direction, as does displacement: when someone steps from one place to another in space, we can keep track of how far he went, but if we wish also to know *where* he went, we have to specify a direction.

All quantities that have a direction, like a step in space, are called *vectors*.

A vector is three numbers. In order to represent a step in space, say from the origin to some particular point P whose location is (x, y, z) , we really need three numbers, but we are going to invent a single mathematical symbol, $\mathbf{r}$, which is unlike any other mathematical symbols we have so far used*. It is not a single number, it represents three numbers: x , y , and z . It means three numbers, but not really only those three numbers, because if we were to use a different coordinate system, the three numbers would be changed to x' , y' , and z' . However, we want to keep our mathematics simple and so we are going to use the same mark to represent the three numbers (x, y, z) and the three numbers (x', y', z') . That is, we use the same mark to represent the first set of three numbers for one coordinate system, but the second set of three numbers if we are using the other coordinate system. This has the advantage that when we change the coordinate system, we do not have to change the letters of our equations. If we write an equation in terms of x, y, z , and then use another system, we have to change to x', y', z' , but we shall just write $\mathbf{r}$, with the convention that it represents (x, y, z) if we use one set of axes, or (x', y', z') if we use another set of axes, and so on. The three numbers which describe the quantity in a given coordinate system are called the *components* of the vector in the direction of the coordinate axes of that system. That is, we use the same symbol for the three letters that correspond to the same object, as seen from different axes. The very fact that we can say "the same object" implies a physical intuition about the reality of a step in space, that is independent of the components in terms of which we measure it. So the symbol $\mathbf{r}$ will represent the same thing no matter how we turn the axes.

* In type, vectors are represented by boldface; in handwritten form an arrow is used: $\vec{r}$.

Supposons maintenant qu'il y ait une autre grandeur physique dirigée — toute autre grandeur possédant également trois nombres qui lui sont associés — comme la force, et que lorsque nous changeons les axes, ces trois nombres se transforment en trois autres nombres, selon une certaine règle mathématique. Cela doit être la même règle qui transforme (x, y, z) en (x', y', z') . En d'autres termes, toute grandeur physique associée avec trois nombres qui se transforment comme le font les composantes d'un déplacement dans l'espace, est un vecteur. Une équation comme

$$\mathbf{F} = \mathbf{r}$$

sera donc vraie dans *tout* système de coordonnées si elle est vraie dans l'un d'entre eux. Cette équation, bien sûr, tient lieu des trois équations

ou, alternativement, de

Le fait qu'une relation physique puisse être exprimée comme une équation vectorielle nous assure que la relation reste inchangée lors d'une simple rotation du système de coordonnées. C'est la raison pour laquelle les vecteurs sont si utiles en physique.

Examinons maintenant certaines des propriétés des vecteurs. Comme exemples de vecteurs nous pouvons mentionner la vitesse, la quantité de mouvement, la force et l'accélération. Pour plusieurs raisons il est commode de représenter une grandeur vectorielle par une flèche qui indique la direction dans laquelle elle agit. Pourquoi pouvons-nous représenter une force, par exemple, par la flèche? Parce qu'elle possède la même possibilité de transformation mathématique qu'un « déplacement dans l'espace ». Nous représentons donc cette force sur un dessin comme si elle était un déplacement, utilisant une échelle de façon qu'une unité de force, ou un newton, corresponde à une certaine longueur convenable. Cela étant fait, toutes les forces peuvent être représentées par des longueurs, parce qu'une équation comme

$$\mathbf{F} = k\mathbf{r},$$

où k est une certaine constante, est une équation parfaitement légitime. Ainsi nous pouvons représenter des forces par des segments de droite, ce qui est très commode, car une fois que nous avons tracé le segment, nous n'avons plus besoin des axes. Nous pouvons, bien sûr, rapidement calculer les trois composantes lorsqu'elles se modifient dans une rotation d'axes, car ce n'est qu'un problème géométrique.

11-5 Algèbre vectorielle

Nous devons maintenant décrire les lois, ou les règles, servant à combiner les vecteurs de diverses manières. La première de ces combinaisons est l'addition de deux vecteurs: supposons que $\mathbf{a}$ soit un vecteur dont les trois composantes sont (a_x, a_y, a_z) , dans un système donné de coordonnées, et que $\mathbf{b}$ soit un autre vecteur de composantes (b_x, b_y, b_z) . Inventons maintenant trois nouveaux nombres $(a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)$. Forment-ils un vecteur? « Bien », pouvez-vous dire, « ce sont trois nombres, et chaque ensemble de trois nombres forme un vecteur ». Non, *chaque ensemble* de trois nombres ne forme pas nécessairement un vecteur! Pour qu'ils forment un vecteur, il doit non seulement y avoir trois nombres, mais ceux-ci doivent être associés à un

Now suppose there is another directed physical quantity, any other quantity, which also has three numbers associated with it, like force, and these three numbers change to three other numbers by a certain mathematical rule, if we change the axes. It must be the same rule that changes (x, y, z) into (x', y', z') . In other words, any physical quantity associated with three numbers which transform as do the components of a step in space is a vector. An equation like

$$\mathbf{F} = \mathbf{r}$$

would thus be true in *any* coordinate system if it were true in one. This equation, of course, stands for the three equations

$$F_x = x, \quad F_y = y, \quad F_z = z,$$

or, alternatively, for

$$F_{x'} = x', \quad F_{y'} = y', \quad F_{z'} = z'.$$

The fact that a physical relationship can be expressed as a vector equation assures us the relationship is unchanged by a mere rotation of the coordinate system. That is the reason why vectors are so useful in physics.

Now let us examine some of the properties of vectors. As examples of vectors we may mention velocity, momentum, force, and acceleration. For many purposes it is convenient to represent a vector quantity by an arrow that indicates the direction in which it is acting. Why can we represent force, say, by an arrow? Because it has the same mathematical transformation properties as a "step in space." We thus represent it in a diagram as if it were a step, using a scale such that one unit of force, or one newton, corresponds to a certain convenient length. Once we have done this, all forces can be represented as lengths, because an equation like

$$\mathbf{F} = k\mathbf{r},$$

where k is some constant, is a perfectly legitimate equation. Thus we can always represent forces by lines, which is very convenient, because once we have drawn the line we no longer need the axes. Of course, we can quickly calculate the three components as they change upon turning the axes, because that is just a geometric problem.

11-5 Vector algebra

Now we must describe the laws, or rules, for combining vectors in various ways. The first such combination is the *addition* of two vectors: suppose that $\mathbf{a}$ is a vector which in some particular coordinate system has the three components (a_x, a_y, a_z) , and that $\mathbf{b}$ is another vector which has the three components (b_x, b_y, b_z) . Now let us invent three new numbers $(a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)$. Do these form a vector? "Well," we might say, "they are three numbers, and every three numbers form a vector." No, *not every* three numbers form a vector! In order for it to be a vector, not only must there be three numbers, but these must be associated with a

système de coordonnées de telle manière que si nous tournons le système de coordonnées, les trois nombres se « transforment » chacun dans les autres, se « mélangent » avec tous les autres selon les lois précises que nous avons déjà décrites. La question est alors: si nous tournons le système de coordonnées de telle sorte que (a_x, a_y, a_z) devienne (a'_x, a'_y, a'_z) et (b_x, b_y, b_z) devienne (b'_x, b'_y, b'_z) , en quoi se transforme $(a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)$? Devient-il ou non $(a'_x + b'_x, a'_y + b'_y, a'_z + b'_z)$? Bien sûr, la réponse est oui, parce que les transformations prototypes de l'équation (11.5) constituent ce que nous appelons une transformation *linéaire*. Si nous appliquons ces transformations à a_x et b_x pour obtenir $a'_x + b'_x$, nous trouvons que la transformée de $a_x + b_x$ est en effet identique à $a'_x + b'_x$. Lorsque a et b sont ainsi « ajoutés » ils forment un vecteur que nous pouvons appeler c . Nous pouvons écrire ceci comme

$$c = a + b.$$

c a la propriété intéressante suivante que

$$c = b + a,$$

comme nous pouvons le voir immédiatement à partir de ses composantes. Alors,

$$a + (b + c) = (a + b) + c.$$

Nous pouvons ajouter les vecteurs dans n'importe quel ordre.

Quelle est la signification géométrique de $a + b$? Supposons que a et b soient représentés par des segments sur un morceau de papier, à quoi c ressemblera-t-il? Ceci est indiqué sur la Fig. 11-4. Nous voyons que nous pouvons ajouter de la manière la plus commode les composantes de b à celles de a si nous plaçons le rectangle représentant les composantes de b à la suite, ainsi qu'il est indiqué, de celui représentant les composantes de a . Puisque b « s'adapte » juste dans son rectangle, comme le fait a dans le sien, ceci est la même chose que de mettre la « queue » de b à la « tête » de a , la flèche allant de la « queue » de a à la « tête » de b représentant le vecteur c . Si nous additionnons a et b dans l'autre sens, nous plaçons la « queue » de a à la « tête » de b , et d'après les propriétés géométriques des parallélogrammes nous obtenons le même résultat pour c . Remarquons que les vecteurs peuvent s'additionner de cette manière sans référence à des axes coordonnés.

Supposons que nous multiplions un vecteur par un nombre α , quelle est la signification de cette opération? Par *définition* nous dirons que cette opération produit un nouveau vecteur dont les composantes sont $\alpha a_x, \alpha a_y$ et αa_z . Nous laissons à l'étudiant, à titre d'exercice, le soin de prouver que c est bien un vecteur.

coordinate system in such a way that if we turn the coordinate system, the three numbers "revolve" on each other, get "mixed up" in each other, by the precise laws we have already described. So the question is, if we now rotate the coordinate system so that (a_x, a_y, a_z) become (a'_x, a'_y, a'_z) and (b_x, b_y, b_z) become (b'_x, b'_y, b'_z) , what do $(a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)$ become? Do they become $(a'_x + b'_x, a'_y + b'_y, a'_z + b'_z)$ or not? The answer is, of course, yes, because the prototype transformations of Eq. (11.5) constitute what we call a *linear* transformation. If we apply those transformations to a_x and b_x to get $a'_x + b'_x$, we find that the transformed $a_x + b_x$ is indeed the same as $a'_x + b'_x$. When a and b are "added together" in this sense, they will form a vector which we may call c . We would write this as

$$c = a + b.$$

Now c has the interesting property

$$c = b + a,$$

as we can immediately see from its components. Thus also,

$$a + (b + c) = (a + b) + c.$$

We can add vectors in any order.

What is the geometric significance of $a + b$? Suppose that a and b were represented by lines on a piece of paper, what would c look like? This is shown in Fig. 11-4. We see that we can add the components of b to those of a most conveniently if we place the rectangle representing the components of b next to that representing the components of a in the manner indicated. Since b just "fits" into its rectangle, as does a into its rectangle, this is the same as putting the "tail" of b on the "head" of a , the arrow from the "tail" of a to the "head" of b being the vector c . Of course, if we added a to b the other way around, we would put the "tail" of a on the "head" of b , and by the geometrical properties of parallelograms we would get the same result for c . Note that vectors can be added in this way without reference to any coordinate axes.

Suppose we multiply a vector by a number α , what does this mean? We *define* it to mean a new vector whose components are $\alpha a_x, \alpha a_y$, and αa_z . We leave it as a problem for the student to prove that it is a vector.

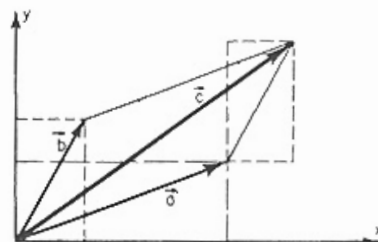


Fig. 11-4. Addition des vecteurs.

Fig. 11-5. Soustraction de vecteurs.

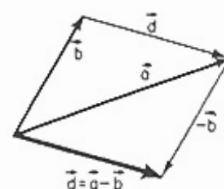


Fig. 11-4. The addition of vectors.

Fig. 11-5. The subtraction of vectors.

Considérons maintenant la soustraction vectorielle. Nous pouvons définir la soustraction de la même manière que l'addition, mais au lieu d'ajouter, nous soustrayons les composantes. Ou nous pouvons définir la soustraction en définissant un vecteur négatif, $-\mathbf{b} = -1\mathbf{b}$, et nous ajoutons alors les composantes. On obtient la même chose. Le résultat est indiqué sur la Fig. 11-5. Cette figure montre $\mathbf{d} = \mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$; nous remarquons également que la différence $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ peut être trouvée très facilement à partir de $\mathbf{a}$ et de $\mathbf{b}$ en utilisant la relation équivalente $\mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{d}$. Ainsi la différence est même plus facile à trouver que la somme: nous traçons simplement le vecteur de $\mathbf{a}$ vers $\mathbf{b}$, pour obtenir $\mathbf{a} - \mathbf{b}$!

Voyons maintenant la vitesse. Pourquoi la vitesse est-elle un vecteur? Si la position est donnée par les trois coordonnées (x, y, z) , quelle est la vitesse? La vitesse est donnée par dx/dt , dy/dt , et dz/dt . Est-ce oui ou non un vecteur? Nous pouvons le voir en dérivant les expressions de l'équation (11-5) pour vérifier si oui ou non dx'/dt se transforme de la manière correcte. Nous voyons que les composantes dx/dt et dy/dt se transforment selon les mêmes lois que x et y , et on peut dire ainsi que la dérivée par rapport au temps est bien un vecteur. La vitesse est donc un vecteur. Nous pouvons écrire la vitesse d'une manière intéressante comme

$$\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt.$$

On peut comprendre d'une manière plus descriptive ce qu'est la vitesse et pourquoi c'est un vecteur: De combien se déplace une particule dans un court intervalle de temps Δt ? Réponse: $\Delta \mathbf{r}$, ainsi si une particule est « ici » à un moment et « là » à un autre instant, alors la différence vectorielle des positions $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, qui est dans la direction du mouvement indiqué sur la Fig. 11-6, divisée par l'intervalle de temps $\Delta t = t_2 - t_1$, est le vecteur « vitesse moyenne ».

Fig. 11-6. Le déplacement d'une particule pendant un petit intervalle de temps $\Delta t = t_2 - t_1$.

En d'autres termes, par vecteur vitesse nous voulons dire la limite, lorsque Δt tend vers zéro, de la différence entre les rayons vecteurs au temps $t + \Delta t$ et au temps t , divisée par Δt :

Ainsi la vitesse est un vecteur parce qu'elle est la différence de deux vecteurs. C'est également la bonne définition de la vitesse parce que ses composantes sont dx/dt , dy/dt , et dz/dt . En fait, nous voyons à partir de cette démonstration que si nous dérivons tout vecteur par rapport au temps, nous produisons un nouveau vecteur. Ainsi nous avons plusieurs manières de produire de nouveaux vecteurs: (1) en multipliant par une constante, (2) en dérivant par rapport au temps, (3) en additionnant ou en soustrayant deux vecteurs.

Now let us consider vector subtraction. We may define subtraction in the same way as addition, but instead of adding, we subtract the components. Or we might define subtraction by defining a negative vector, $-\mathbf{b} = -1\mathbf{b}$, and then we would add the components. It comes to the same thing. The result is shown in Fig. 11-5. This figure shows $\mathbf{d} = \mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$; we also note that the difference $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ can be found very easily from $\mathbf{a}$ and $\mathbf{b}$ by using the equivalent relation $\mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{d}$. Thus the difference is even easier to find than the sum: we just draw the vector from $\mathbf{b}$ to $\mathbf{a}$, to get $\mathbf{a} - \mathbf{b}$!

Next we discuss velocity. Why is velocity a vector? If position is given by the three coordinates (x, y, z) , what is the velocity? The velocity is given by dx/dt , dy/dt , and dz/dt . Is that a vector, or not? We can find out by differentiating the expressions in Eq. (11.5) to find out whether dx'/dt transforms in the right way. We see that the components dx/dt and dy/dt do transform according to the same law as x and y , and therefore the time derivative is a vector. So the velocity is a vector. We can write the velocity in an interesting way as

$$\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt.$$

What the velocity is, and why it is a vector, can also be understood more pictorially: How far does a particle move in a short time Δt ? Answer: $\Delta \mathbf{r}$, so if a particle is "here" at one instant and "there" at another instant, then the vector difference of the positions $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, which is in the direction of motion shown in Fig. 11-6, divided by the time interval $\Delta t = t_2 - t_1$, is the "average velocity" vector.

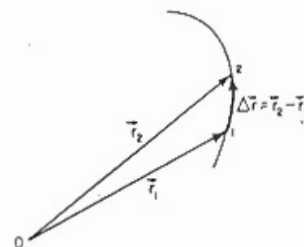


Fig. 11-6. The displacement of a particle in a short time interval $\Delta t = t_2 - t_1$.

In other words, by vector velocity we mean the limit, as Δt goes to 0, of the difference between the radius vectors at the time $t + \Delta t$ and the time t , divided by Δt :

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\Delta \mathbf{r} / \Delta t) = d\mathbf{r} / dt. \quad (11.10)$$

Thus velocity is a vector because it is the difference of two vectors. It is also the right definition of velocity because its components are dx/dt , dy/dt , and dz/dt . In fact, we see from this argument that if we differentiate any vector with respect to time we produce a new vector. So we have several ways of producing new vectors: (1) multiply by a constant, (2) differentiate with respect to time, (3) add or subtract two vectors.

11-6 Les lois de Newton en notations vectorielles

Afin d'écrire les lois de Newton sous une forme vectorielle, il nous faut simplement aller un petit peu plus loin, et définir le vecteur accélération. C'est la dérivée par rapport au temps du vecteur vitesse, et il est facile de démontrer que ses composantes sont les dérivées seconde de x , y et z , par rapport à t :

Avec cette définition, nous pouvons alors écrire les lois de Newton de cette manière:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} \quad (11.13)$$

ou

$$m(d^2\mathbf{r}/dt^2) = \mathbf{F}. \quad (11.14)$$

Le problème de prouver l'invariance des lois de Newton dans une notation des coordonnées est alors le suivant: prouvons que $\mathbf{a}$ est un vecteur; c'est ce que nous venons justement de faire. Prouvons que $\mathbf{F}$ est un vecteur; nous *supposons* qu'il l'est. Ainsi, si la force est un vecteur, et puisque nous savons que l'accélération en est un aussi, l'équation (11.13) sera la même dans tout système de coordonnées. En l'écrivant sous une forme qui ne contient pas explicitement les x , y et z , nous avons l'avantage qu'à partir de maintenant il n'est plus nécessaire d'écrire *trois* lois chaque fois que nous écrivons les équations de Newton ou d'autres lois de physique. Nous écrivons ce qui semble être *une seule* loi, mais qui est en réalité un groupe de trois lois dans tout système d'axes particuliers, parce que toute équation vectorielle contient l'affirmation que *chacune des composantes est égale*.

Le fait que l'accélération soit le taux de changement de la vitesse vectorielle nous aide à calculer l'accélération dans certaines circonstances assez compliquées. Supposons, par exemple, qu'une particule soit en mouvement sur une certaine courbe compliquée (Fig. 11-7) et que à un certain instant t , elle ait une certaine vitesse $\mathbf{v}_1$, mais que lorsque nous regardons les choses à un instant t_2 un petit peu plus tard, elle possède une vitesse différente $\mathbf{v}_2$. Quelle est l'accélération? Réponse: L'accélération est la différence des vitesses divisée par le petit intervalle de temps; nous devons donc obtenir la différence des deux vitesses. Comment obtenons-nous cette différence? Nous traçons le vecteur entre les extrémités de $\mathbf{v}_2$ et $\mathbf{v}_1$ pour soustraire ces vecteurs; c'est-à-dire que nous traçons Δ comme étant la différence des deux vecteurs. Juste? *Non!*

11-6 Newton's laws in vector notation

In order to write Newton's laws in vector form, we have to go just one step further, and define the acceleration vector. This is the time derivative of the velocity vector, and it is easy to demonstrate that its components are the second derivatives of x , y , and z with respect to t :

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \left(\frac{d}{dt}\right)\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}, \quad (11.11)$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}. \quad (11.12)$$

With this definition, then, Newton's laws can be written in this way:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} \quad (11.13)$$

or

$$m(d^2\mathbf{r}/dt^2) = \mathbf{F}. \quad (11.14)$$

Now the problem of proving the invariance of Newton's laws under rotation of coordinates is this: prove that $\mathbf{a}$ is a vector; this we have just done. Prove that $\mathbf{F}$ is a vector; we *suppose* it is. So if force is a vector, then, since we know acceleration is a vector, Eq. (11.13) will look the same in any coordinate system. Writing it in a form which does not explicitly contain x 's, y 's, and z 's has the advantage that from now on we need not write *three* laws every time we write Newton's equations or other laws of physics. We write what looks like *one* law, but really, of course, it is the three laws for any particular set of axes, because any vector equation involves the statement that *each of the components is equal*.

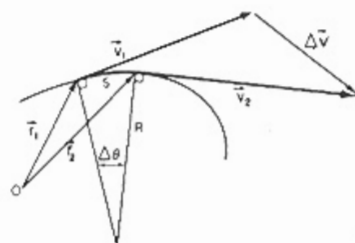


Fig. 11-7. Une trajectoire courbe.

Fig. 11-7. A curved trajectory.

The fact that the acceleration is the rate of change of the vector velocity helps us to calculate the acceleration in some rather complicated circumstances. Suppose, for instance, that a particle is moving on some complicated curve (Fig. 11-7) and that, at a given instant t , it had a certain velocity $\mathbf{v}_1$, but that when we go to another instant t_2 a little later, it has a different velocity $\mathbf{v}_2$. What is the acceleration? Answer: Acceleration is the difference in the velocity divided by the small time interval, so we need the difference of the two velocities. How do we get the difference of the velocities? To subtract two vectors, we put the vector across the ends of $\mathbf{v}_2$ and $\mathbf{v}_1$; that is, we draw Δ as the difference of the two vectors, right? *No!*

Fig. 11-8. Diagramme pour calculer l'accélération.

Cela ne peut marcher que lorsque les « queues » des deux vecteurs sont au même endroit! Si nous plaçons le vecteur quelque part ailleurs et que nous traçons une ligne entre les extrémités, cela ne veut plus rien dire, alors faites attention! Nous devons tracer un nouveau diagramme pour soustraire les vecteurs. Sur la Fig. 11-8, v_1 et v_2 sont tous les deux dessinés parallèles et égaux à leurs correspondants dans la Fig. 11-7, et nous pouvons maintenant discuter l'accélération. Bien sûr, l'accélération est simplement $\Delta v/\Delta t$. Il est intéressant de remarquer que nous pouvons décomposer la différence des vitesses en deux parts; nous pouvons considérer que l'accélération a deux composantes, Δv dans une direction tangente à la trajectoire et $\Delta v_\perp$ à angle droit de la trajectoire, comme indiqué sur la Fig. 11-8. L'accélération tangente à la trajectoire n'est bien sûr que le changement de *longueur* du vecteur, c'est-à-dire le changement de la *célérité* v :

L'autre composante de l'accélération, à angle droit de la courbe, est facile à calculer en utilisant les Fig. 11-7 et 11-8. Dans le court intervalle de temps Δt , le changement de l'angle entre v_1 et v_2 sera le petit angle $\Delta\theta$. Si la grandeur de la vitesse est appelée v , alors bien sûr

et l'accélération a sera

Il nous faut maintenant connaître $\Delta\theta/\Delta t$, qui peut être trouvé de la façon suivante: Si, au moment considéré, la courbe est remplacée approximativement par un cercle d'un certain rayon R , la distance s parcourue pendant un temps Δt est alors $v\Delta t$, v étant la vitesse.

Ainsi nous trouvons

comme nous l'avions vu auparavant.

11-7 Produit scalaire de vecteurs

Allons maintenant un peu plus loin dans l'étude des propriétés des vecteurs. Il est facile de voir que la *longueur* d'un déplacement dans l'espace est la même dans tout système de coordonnées. Cela signifie que si un déplacement donné r est représenté par x, y, z dans un système de coordonnées, et par x', y', z' dans un autre système de coordonnées, la distance $r = |\mathbf{r}|$ sera certainement la même dans les deux cas. Or

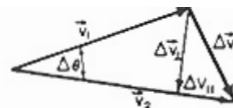


Fig. 11-8. Diagram for calculating the acceleration.

That only works when the *tails* of the vectors are in the same place! It has no meaning if we move the vector somewhere else and then draw a line across, so watch out! We have to draw a new diagram to subtract the vectors. In Fig. 11-8, v_1 and v_2 are both drawn parallel and equal to their counterparts in Fig. 11-7, and now we can discuss the acceleration. Of course the acceleration is simply $\Delta v/\Delta t$. It is interesting to note that we can compose the velocity difference out of two parts; we can think of acceleration as having *two components*, $\Delta v_{||}$ in the direction tangent to the path and $\Delta v_\perp$ at right angles to the path, as indicated in Fig. 11-8. The acceleration tangent to the path is, of course, just the change in the *length* of the vector, i.e., the change in the *speed* v :

$$a_{||} = dv/dt. \quad (11.15)$$

The other component of acceleration, at right angles to the curve, is easy to calculate, using Figs. 11-7 and 11-8. In the short time Δt let the change in angle between v_1 and v_2 be the small angle $\Delta\theta$. If the magnitude of the velocity is called v , then of course

$$\Delta v_\perp = v \Delta\theta$$

and the acceleration a will be

$$a_\perp = v (\Delta\theta/\Delta t).$$

Now we need to know $\Delta\theta/\Delta t$, which can be found this way: If, at the given moment, the curve is approximated as a circle of a certain radius R , then in a time Δt the distance s is, of course, $v \Delta t$, where v is the speed.

$$\Delta\theta = v (\Delta t/R), \quad \text{or} \quad \Delta\theta/\Delta t = v/R.$$

Therefore, we find

$$a = v^2/R, \quad (11.16)$$

as we have seen before.

11-7 Scalar product of vectors

Now let us examine a little further the properties of vectors. It is easy to see that the *length* of a step in space would be the same in any coordinate system. That is, if a particular step $\mathbf{r}$ is represented by x, y, z , in one coordinate system, and by x', y', z' in another coordinate system, surely the distance $r = |\mathbf{r}|$ would be the same in both. Now

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

et également

Nous voulons vérifier que ces deux quantités sont égales. Il est beaucoup plus commode de ne pas s'ennuyer à prendre la racine carrée; nous considérons donc le carré de ces distances; voyons donc si

Il vaudrait mieux qu'il en soit ainsi — et si nous substituons l'équation (11.5), nous trouvons que c'est bien vérifié. Nous voyons ainsi qu'il y a d'autres types d'équations qui sont vraies pour tout couple de systèmes de coordonnées.

C'est quelque chose de nouveau. Nous pouvons produire une nouvelle grandeur en fonction de x , y et z , appelée *fonction scalaire*, une grandeur sans direction, mais qui est la même dans les deux systèmes. A partir d'un vecteur nous pouvons faire un scalaire. Il faut trouver une règle générale pour cela. La règle dans ce cas est facile à trouver: additionner les carrés des composantes. Définissons maintenant une nouvelle chose que nous appelons $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$. Ce n'est pas un vecteur, mais un scalaire; c'est un nombre qui reste le même dans tous les systèmes de coordonnées, et il est défini comme étant la somme des carrés des trois composantes du vecteur:

Vous dites: « Mais dans quels axes? » Cela ne dépend pas des axes, la réponse est la même pour *tout* ensemble d'axes. Nous avons ainsi un nouveau *type* de quantité, un nouvel *invariant* ou *scalaire* produit par un seul vecteur « élevé au carré ». Si nous définissons maintenant la quantité suivante pour n'importe lequel des deux vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$:

nous trouvons que cette quantité, calculée dans le système avec l'indice prime et celui sans prime, reste également la même. Pour le montrer, nous remarquons que cela est vrai pour $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$, $\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}$, et $\mathbf{c} \cdot \mathbf{c}$, où $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$. Donc la somme des carrés $(a_x + b_x)^2 + (a_y + b_y)^2 + (a_z + b_z)^2$ sera invariante:

Si on développe les deux côtés de cette équation, on trouvera des produits croisés du type de ceux apparaissant dans l'équation (11.19), en même temps que la somme des carrés des composantes de $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$. L'invariance des termes de la forme de l'équation (11.18) conduit donc à l'invariance des produits croisés.

La quantité $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ est appelée le *produit scalaire* des deux vecteurs, $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$, et elle a beaucoup de propriétés intéressantes et utiles. Par exemple, il est facile de prouver que

Il existe également une manière géométrique simple de calculer $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ sans avoir à calculer

and also

$$r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}.$$

So what we wish to verify is that these two quantities are equal. It is much more convenient not to bother to take the square root, so let us talk about the square of the distance; that is, let us find out whether

$$x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2. \quad (11.17)$$

It had better be—and if we substitute Eq. (11.5) we do indeed find that it is. So we see that there are other kinds of equations which are true for any two coordinate systems.

Something new is involved. We can produce a new quantity, a function of x , y , and z , called a *scalar function*, a quantity which has no direction but which is the same in both systems. Out of a vector we can make a scalar. We have to find a general rule for that. It is clear what the rule is for the case just considered: add the squares of the components. Let us now define a new thing, which we call $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$. This is not a vector, but a scalar; it is a number that is the same in all coordinate systems, and it is defined to be the sum of the squares of the three components of the vector:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2. \quad (11.18)$$

Now you say, "But with what axes?" It does not depend on the axes, the answer is the same in *every* set of axes. So we have a new *kind* of quantity, a new *invariant* or *scalar* produced by one vector "squared." If we now define the following quantity for any two vectors $\mathbf{a}$ and $\mathbf{b}$:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z, \quad (11.19)$$

we find that this quantity, calculated in the primed and unprimed systems, also stays the same. To prove it we note that it is true of $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$, $\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}$, and $\mathbf{c} \cdot \mathbf{c}$, where $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$. Therefore the sum of the squares $(a_x + b_x)^2 + (a_y + b_y)^2 + (a_z + b_z)^2$ will be invariant:

$$(a_x + b_x)^2 + (a_y + b_y)^2 + (a_z + b_z)^2 = (a_x' + b_x')^2 + (a_y' + b_y')^2 + (a_z' + b_z')^2. \quad (11.20)$$

If both sides of this equation are expanded, there will be cross products of just the type appearing in Eq. (11.19), as well as the sums of squares of the components of $\mathbf{a}$ and $\mathbf{b}$. The invariance of terms of the form of Eq. (11.18) then leaves the cross product terms (11.19) invariant also.

The quantity $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ is called the *scalar product* of two vectors, $\mathbf{a}$ and $\mathbf{b}$, and it has many interesting and useful properties. For instance, it is easily proved that

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}. \quad (11.21)$$

Also, there is a simple geometrical way to calculate $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, without having to cal-

les composantes de $\mathbf{a}$ et de $\mathbf{b}$: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ est le produit de la longueur de $\mathbf{a}$ par la longueur de $\mathbf{b}$ que multiplie le cosinus de l'angle entre eux. Pourquoi? Supposons que nous choisissons un système de coordonnées spécial dans lequel l'axe x soit le long de $\mathbf{a}$; dans ces conditions, la seule composante de $\mathbf{a}$ sera a_x , qui vaut bien sûr la longueur totale de $\mathbf{a}$. Ainsi l'équation (11.19) se réduit dans ce cas à $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x$, ceci étant la longueur de $\mathbf{a}$ que multiplie la composante de $\mathbf{b}$ dans la direction de $\mathbf{a}$, c'est-à-dire $b \cos \theta$:

Nous avons prouvé que dans ce système de coordonnées spécial, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ est égal à la longueur de $\mathbf{a}$ que multiplie la longueur de $\mathbf{b}$ que multiplie $\cos \theta$. Mais si c'est vrai dans un système de coordonnées, c'est vrai dans tous les autres, car $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ est indépendant du système de coordonnées; c'est là notre démonstration.

Quel est l'intérêt du produit scalaire? Y a-t-il des cas en physique où nous en avons besoin? Oui, nous en avons besoin tout le temps. Par exemple, au Chapitre 4 l'énergie cinétique était appelée $\frac{1}{2}mv^2$, mais si l'objet se déplace dans l'espace, ce doit être la vitesse élevée au carré dans la direction x , dans la direction y et dans la direction z , et ainsi la formule pour l'énergie cinétique selon l'analyse vectorielle est

$$\text{E.C.} = \frac{1}{2}m(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2). \quad (11.22)$$

L'énergie n'a pas de direction. La quantité de mouvement possède une direction; c'est un vecteur et c'est la masse que multiplie le vecteur vitesse.

Un autre exemple d'un produit scalaire est le travail réalisé par une force lorsque quelque chose est poussé d'un point à un autre. Nous n'avons pas encore défini le travail, mais il est équivalent à un changement d'énergie, à des poids soulevés, lorsqu'une force $\mathbf{F}$ agit sur une distance $\mathbf{s}$:

$$\text{Travail} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} \quad (11.23)$$

Il est quelquefois très commode de parler des composantes d'un vecteur dans une certaine direction (disons la direction verticale parce que c'est la direction de la gravitation). Pour cela, il est utile d'inventer ce que nous appelons un *vecteur unité* dans la direction que nous voulons étudier. Par vecteur-unité, nous voulons dire un vecteur dont le produit scalaire avec lui-même soit égal à l'unité. Appelons ce vecteur unité $\mathbf{i}$; alors $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1$. Si nous voulons les composantes d'un certain vecteur dans la direction de $\mathbf{i}$, nous voyons que le produit scalaire $\mathbf{a} \cdot \mathbf{i}$ sera $a \cos \theta$, c'est-à-dire la composante de $\mathbf{a}$ dans la direction de $\mathbf{i}$. C'est une manière très agréable d'obtenir la composante; en fait, cela nous permet d'obtenir toutes les composantes et d'écrire une formule assez amusante. Supposons que dans un certain système de coordonnées x, y, z , nous inventions trois vecteurs: $\mathbf{i}$, un vecteur unité dans la direction x ; $\mathbf{j}$, un vecteur unité dans la direction y ; et $\mathbf{k}$, un vecteur unité dans la direction z . Remarquez d'abord que $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1$. Que vaut $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j}$? Lorsque deux vecteurs sont perpendiculaires, leur produit scalaire est nul. Ainsi

calculer les composantes de $\mathbf{a}$ et de $\mathbf{b}$: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ est le produit de la longueur de $\mathbf{a}$ et la longueur de $\mathbf{b}$ times the cosine of the angle between them. Why? Suppose that we choose a special coordinate system in which the x -axis lies along $\mathbf{a}$; in those circumstances, the only component of $\mathbf{a}$ that will be there is a_x , which is of course the whole length of $\mathbf{a}$. Thus Eq. (11.19) reduces to $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x$ for this case, and this is the length of $\mathbf{a}$ times the component of $\mathbf{b}$ in the direction of $\mathbf{a}$, that is, $b \cos \theta$:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab \cos \theta.$$

Therefore, in that special coordinate system, we have proved that $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ is the length of $\mathbf{a}$ times the length of $\mathbf{b}$ times $\cos \theta$. But if it is true in one coordinate system, it is true in all, because $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ is independent of the coordinate system; that is our argument.

What good is the dot product? Are there any cases in physics where we need it? Yes, we need it all the time. For instance, in Chapter 4 the kinetic energy was called $\frac{1}{2}mv^2$, but if the object is moving in space it should be the velocity squared in the x -direction, the y -direction, and the z -direction, and so the formula for kinetic energy according to vector analysis is

$$\text{K.E.} = \frac{1}{2}m(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2). \quad (11.22)$$

Energy does not have direction. Momentum has direction; it is a vector, and it is the mass times the velocity vector.

Another example of a dot product is the work done by a force when something is pushed from one place to the other. We have not yet defined work, but it is equivalent to the energy change, the weights lifted, when a force $\mathbf{F}$ acts through a distance $\mathbf{s}$:

$$\text{Work} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} \quad (11.23)$$

It is sometimes very convenient to talk about the component of a vector in a certain direction (say the vertical direction because that is the direction of gravity). For such purposes, it is useful to invent what we call a *unit vector* in the direction that we want to study. By a unit vector we mean one whose dot product with itself is equal to unity. Let us call this unit vector $\mathbf{i}$; then $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1$. Then, if we want the component of some vector in the direction of $\mathbf{i}$, we see that the dot product $\mathbf{a} \cdot \mathbf{i}$ will be $a \cos \theta$, i.e., the component of $\mathbf{a}$ in the direction of $\mathbf{i}$. This is a nice way to get the component; in fact, it permits us to get all the components and to write a rather amusing formula. Suppose that in a given system of coordinates, x, y , and z , we invent three vectors: $\mathbf{i}$, a unit vector in the direction x ; $\mathbf{j}$, a unit vector in the direction y ; and $\mathbf{k}$, a unit vector in the direction z . Note first that $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1$. What is $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j}$? When two vectors are at right angles, their dot product is zero. Thus

$$\begin{aligned} \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} &= 1 \\ \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} &= 0 & \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} &= 1 \\ \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} &= 0 & \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} &= 0 & \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} &= 1 \end{aligned} \quad (11.24)$$

Avec ces définitions tout vecteur peut maintenant être écrit de cette manière:

Nous pouvons passer ainsi des composantes d'un vecteur au vecteur lui-même.

Cette discussion des vecteurs n'est évidemment pas complète. Cependant, plutôt que d'essayer de poursuivre tout de suite plus avant dans ce sujet, nous allons d'abord apprendre à utiliser dans des situations physiques certaines idées que nous venons de discuter. Lorsque nous saurons vraiment dominer ces notions de base, nous trouverons alors qu'il est plus facile d'approfondir le sujet sans trop s'embrouiller. Nous verrons plus tard qu'il est utile de définir un autre type de produit de deux vecteurs, appelé le produit vectoriel, écrit $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. Toutefois nous discuterons ces notions dans un chapitre ultérieur.

Now with these definitions, any vector whatsoever can be written this way:

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}. \quad (11.25)$$

By this means we can go from the components of a vector to the vector itself.

This discussion of vectors is by no means complete. However, rather than try to go more deeply into the subject now, we shall first learn to use in physical situations some of the ideas so far discussed. Then, when we have properly mastered this basic material, we shall find it easier to penetrate more deeply into the subject without getting too confused. We shall later find that it is useful to define another kind of product of two vectors, called the vector product, and written as $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. However, we shall undertake a discussion of such matters in a later chapter.