

RECHERCHES
SUR LES
PRINCIPES MATHÉMATIQUES
DE LA
THÉORIE DES RICHESSES,

PAR **AUGUSTIN COURNOT,**

RECTEUR DE L'ACADÉMIE ET PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES

Ἀνταμιθεσθαι πάντα ἀπάντων, ὡςπερ
χρυσοῦ χρήματα καὶ χρημάτων χρυσός.

Plut. de ei ap. Delph. 8.

PARIS
CHEZ L. HACHETTE,
LIBRAIRE DE L'UNIVERSITÉ ROYALE DE FRANCE,
RUE PIERRE-SARRAZIN, N° 12.

1838

CHAPITRE IV.

De la loi du débit.

20. Pour asseoir les fondements de la théorie des valeurs échangeables, nous ne remonterons pas avec la plupart des écrivains spéculatifs jusqu'au berceau de l'espèce humaine ; nous n'entreprendrons d'expliquer ni l'origine de la propriété, ni celle de l'échange ou de la division du travail. Tout cela appartient sans doute à l'histoire de l'homme, mais n'est d'aucune influence sur une théorie qui ne peut devenir applicable qu'à une époque de civilisation très-avancée, à une époque où (pour parler le langage des géomètres) la part d'action des circonstances *initiales* est entièrement éteinte.

Nous n'invoquerons qu'un seul axiome, ou, si l'on veut, nous n'employerons qu'une seule hypothèse, savoir que chacun cherche à tirer de sa chose ou de son travail la plus grande valeur possible. Mais en déduisant les conséquences rationnelles de ce principe, nous essaierons de fixer mieux qu'on ne l'a fait les éléments, les données que l'observation seule peut fournir. Malheureusement, ce point fondamental est celui que les théoriciens se sont à peu près accordés à présenter, nous ne dirons pas d'une manière fautive, mais d'une manière qui n'offre réellement aucun sens.

« Le prix des choses, a-t-on dit d'une voix pres-

« que unanime, est en raison inverse de la quantité offerte, et en raison directe de la quantité demandée. » Que l'on manque de moyens statistiques, pour évaluer numériquement avec exactitude, soit la quantité offerte, soit la quantité demandée, cela n'a jamais été mis en doute, et n'empêcherait pas qu'on ne pût tirer du principe des conséquences générales, susceptibles d'être utilement appliquées. Mais le principe même en quoi consiste-t-il ? Veut-on dire que, dans le cas où une quantité double de la denrée est mise en vente, le prix baisse de moitié ? Alors, il faudrait s'expliquer plus simplement, et se borner à dire que le prix est en raison inverse de la quantité offerte. Mais le principe, devenu par là intelligible, serait faux : car, en général, de ce qu'il s'est vendu 100 unités d'une denrée au prix de 20 francs, ce n'est pas une raison pour que, dans le même laps de temps et les mêmes circonstances, il s'en vende 200 unités au prix de 10 francs. Quelquefois il s'en débitera moins : souvent il s'en débitera bien davantage.

En outre, qu'entend-on par la quantité demandée ? Ce n'est sans doute pas celle qui se débite effectivement sur la demande des acheteurs ; car, alors il résulterait du prétendu principe la conséquence absurde en général qu'on débite d'autant plus d'une denrée qu'elle est plus chère. Si, par demande, on n'entend qu'un désir vague de posséder la chose, abstraction faite du *prix limité* que chaque demandeur sous-entend dans sa demande, il n'y a guère de denrée dont

on ne puisse considérer la demande comme indéfinie; et, si l'on doit tenir compte du prix auquel chaque demandeur consent à acheter, du prix auquel chaque fournisseur consent à vendre, que signifie le prétendu principe? Ce n'est pas, nous le répétons, une proposition erronée, c'est une proposition dénuée de sens : aussi, tous ceux qui se sont accordés à la proclamer, se sont-ils accordés pareillement à n'en faire aucun usage. Essayons de nous rattacher à des principes moins stériles.

Une denrée est ordinairement d'autant plus demandée qu'elle est moins chère. Le débit ou la demande (car pour nous ces deux mots sont synonymes, et nous ne voyons pas sous quel rapport la théorie aurait à tenir compte d'une demande qui n'est pas suivie de débit), le débit ou la demande, disons-nous, croît en général quand le prix décroît.

Nous ajoutons, comme un correctif, ces mots *en général*; effectivement, il y a des objets de fantaisie et de luxe qui ne sont recherchés qu'en raison de leur rareté et de l'élévation de leur prix, qui en est la suite. Si l'on parvenait à opérer à peu de frais la cristallisation du carbone, et à livrer pour un franc le diamant qui en vaut mille aujourd'hui, il n'y aurait rien d'étonnant à ce que le diamant cessât de servir aux parures et d'être un objet de commerce. Dans ce cas, une baisse prodigieuse de prix anéantirait presque la demande. Mais les denrées de cette nature jouent un rôle si peu important dans l'économie sociale, que

l'on peut se dispenser d'avoir égard à la restriction dont nous parlons.

La demande pourrait être en raison inverse du prix ; ordinairement , elle croît ou elle décroît dans une proportion beaucoup plus rapide : observation qui s'applique surtout au plus grand nombre des produits manufacturés. D'autres fois , au contraire , la variation de la demande est moins rapide ; ce qui paraît (chose singulière) s'appliquer également et aux choses les plus nécessaires , et aux choses les plus superflues. Le prix des violons , celui des lunettes astronomiques baisserait de moitié , que probablement la demande ne doublerait pas ; car cette demande est déterminée par le nombre de ceux qui cultivent l'art ou la science auxquels ces instruments se rapportent ; qui ont les dispositions requises , le loisir de les cultiver , le moyen de payer les maîtres et de faire les autres dépenses nécessaires , à la suite desquels le prix des instruments ne figure que comme un accessoire. Le bois de chauffage , qui est au contraire une denrée des plus utiles , pourrait doubler de prix , par suite des progrès du défrichement ou de l'accroissement de la population , probablement bien avant que la consommation annuelle de bois eût été réduite de moitié ; un grand nombre de consommateurs étant disposés à retrancher sur les autres dépenses plutôt que de se passer de bois.

21. Admettons donc que le débit ou la demande annuelle D est, pour chaque denrée, une fonction

particulière $F(p)$ du prix p de cette denrée. Connaître la forme de cette fonction, ce serait connaître ce que nous appelons *la loi de la demande* ou du *débit*. Elle dépend évidemment du mode d'utilité de la chose, de la nature des services qu'elle peut rendre ou des jouissances qu'elle procure, des habitudes et des mœurs de chaque peuple, de la richesse moyenne et de l'échelle suivant laquelle la richesse est répartie.

Puisque tant de causes morales, et qu'on ne peut énumérer ni mesurer, influent sur la loi de la demande, il est clair qu'on ne doit pas s'attendre à ce que cette loi puisse être exprimée par une formule algébrique, pas plus que la loi de mortalité et que toutes celles dont la détermination rentre dans le domaine de la statistique, de ce qu'on appelle également l'arithmétique sociale. Ce serait donc à l'observation à fournir les moyens de dresser entre des limites convenables une table des valeurs correspondantes de D et de p ; après quoi l'on construirait, par les méthodes connues d'interpolation ou par les procédés graphiques, une formule empirique ou une courbe propres à représenter la fonction dont il s'agit; et l'on pourrait pousser la solution des problèmes jusqu'aux applications numériques.

Mais lors même que l'on n'atteindrait jamais ce but (à cause de la difficulté de se procurer des observations assez nombreuses et assez exactes, et aussi à cause des variations progressives que doit éprouver la loi de la demande, dans un pays qui n'est point encore arrivé à un état sensiblement stationnaire), il

ne serait pas moins à propos d'introduire, au moyen d'un signe indéterminé, la loi inconnue de la demande, dans les combinaisons analytiques : car on sait que l'une des fonctions les plus importantes de l'analyse consiste précisément à assigner des relations déterminées entre des quantités dont les valeurs numériques et même les formes algébriques sont absolument inassignables.

D'une part, des fonctions inconnues peuvent cependant jouir de propriétés ou de caractères généraux qui sont connus, par exemple d'être indéfiniment croissantes ou décroissantes, ou d'être périodiques, ou de n'être réelles qu'entre de certaines limites. De semblables données, quelque imparfaites qu'elles paraissent, peuvent toutefois, en raison de leur généralité même, et à l'aide des signes propres à l'analyse, conduire à des relations également générales, qu'on aurait difficilement découvertes sans ce secours. C'est ainsi que, sans connaître la loi de décroissement des forces capillaires, et en partant du seul principe que ces forces sont insensibles à des distances sensibles, les géomètres ont démontré les lois générales des phénomènes de la capillarité, lois confirmées par l'observation.

D'autre part, l'analyse, en faisant voir quelles relations déterminées subsistent entre des quantités inconnues, réduit les inconnues au plus petit nombre possible, et guide l'observateur dans le choix des observations les plus propres à en faire découvrir les valeurs. Elle réduit et coordonne les documents sta-

tistiques ; elle diminue en même temps qu'elle éclaire les travaux des statisticiens.

Par exemple, on ne peut point assigner à *a priori* de forme algébrique à la loi de mortalité ; on ne peut pas assigner davantage la forme de la fonction qui exprime la répartition de la population suivant les âges, dans une population stationnaire ; mais ces deux fonctions sont liées l'une à l'autre par une relation fort simple ; tellement que, dès que les observations statistiques auront permis de construire une table de mortalité, on pourra, sans recourir à des observations nouvelles, déduire très-simplement de cette table celle qui exprime la proportion des divers âges au sein d'une population stationnaire, ou même au sein d'une population pour laquelle on connaît l'excès annuel des naissances sur les décès¹.

Qui doute que, dans la statistique de l'économie sociale, il n'y ait une foule de chiffres ainsi liés les uns aux autres par des rapports assignables, d'après lesquels on pourrait choisir le chiffre le plus facile à déterminer empiriquement, pour en déduire ensuite théoriquement tous les autres ?

22. Nous admettrons que la fonction $F(p)$ qui

¹ L'Annuaire du Bureau des Longitudes contient ces deux tables, la seconde déduite de la première comme on vient de le dire, et calculée dans l'hypothèse d'une population stationnaire.

L'ouvrage de Duvillard, intitulé *De l'influence de la petite vérole sur la mortalité*, contient beaucoup de beaux exemples de liaisons mathématiques entre des fonctions essentiellement empiriques.

exprime la loi de la demande ou du débit est une fonction *continue*, c'est-à-dire une fonction qui ne passe pas soudainement d'une valeur à une autre, mais qui prend dans l'intervalle toutes les valeurs intermédiaires. Il en pourrait être autrement si le nombre des consommateurs était très-limité : ainsi, dans tel ménage, on pourra consommer précisément la même quantité de bois de chauffage, que le bois soit à 10 francs ou à 15 francs le stère ; et l'on pourra réduire brusquement la consommation d'une quantité notable, si le prix du stère vient à dépasser cette dernière somme. Mais plus le marché s'étendra, plus les combinaisons des besoins, des fortunes ou même des caprices, seront variées parmi les consommateurs, plus la fonction $F(p)$ approchera de varier avec p d'une manière continue. Si petite que soit la variation de p , il se trouvera des consommateurs placés dans une position telle que le léger mouvement de hausse ou de baisse imprimé à la denrée influera sur leur consommation, les engagera à s'imposer quelques privations, ou à réduire leurs exploitations industrielles, ou à substituer une autre denrée à la denrée renchérie, par exemple, la houille au bois, ou l'anthracite à la houille. C'est ainsi que le thermomètre de la bourse accuse, par de très-petites variations du cours, les variations les plus fugitives dans l'appréciation des chances auxquelles les fonds publics sont sujets, variations qui ne sont point une raison suffisante de vendre ni d'acheter pour la plupart de ceux qui ont leur fortune engagée dans les fonds publics.

Si la fonction $F(p)$ est continue, elle jouira de la propriété commune à toutes les fonctions de cette nature, et sur laquelle reposent tant d'applications importantes de l'analyse mathématique : *les variations de la demande seront sensiblement proportionnelles aux variations du prix, tant que celles-ci seront de petites fractions du prix originaire.* D'ailleurs, ces variations seront de signes contraires, c'est-à-dire qu'à une augmentation de prix correspondra une diminution de la demande.

Supposons que, dans un pays comme la France, la consommation de sucre soit de 100 millions de kilogrammes, quand le prix est de 2 fr. le kilogramme, et qu'on l'ait vue s'abaisser à 99 millions de kilogrammes, quand le prix s'est élevé à 2 fr. 10 cent. On pourra, sans erreur notable, évaluer à 98 millions de kilogrammes la consommation qui correspondrait au prix de 2 fr. 20 cent., et à 101 millions de kilogrammes la consommation correspondante au prix de 1 fr. 90 cent. On conçoit combien ce principe, qui n'est que la conséquence mathématique de la continuité des fonctions, peut faciliter les applications de la théorie, soit en simplifiant les expressions analytiques des lois qui régissent le mouvement des valeurs, soit en réduisant le nombre des données qu'il faudra emprunter à l'expérience, si la théorie devient assez avancée pour se prêter à des déterminations numériques.

N'oublions pas d'observer que le principe énoncé ci-dessus peut à la rigueur admettre des exceptions,

par la raison qu'une fonction continue peut, en quelques points de son cours, éprouver des solutions de continuité; mais, de même que le frottement use les aspérités et adoucit les contours, ainsi la triture du commerce tend à supprimer ces cas exceptionnels, en même temps que le mécanisme commercial modère les variations dans les prix et tend à les maintenir entre des limites qui facilitent l'application de la théorie.

23. Pour définir avec exactitude la quantité D , ou la fonction $F(p)$ qui en est l'expression, nous avons admis que D représentait la quantité débitée *annuellement*, dans l'étendue du pays ou du marché¹ que l'on considère. En effet, l'année est l'unité naturelle du temps, surtout quand il s'agit de recherches qui ont trait à l'économie sociale. C'est dans cette période que se reproduisent tous les besoins de l'homme, toutes les ressources qu'il tire de la nature et de son travail. Cependant, le prix d'une denrée peut varier notablement dans le cours d'une année, et, à la rigueur, la loi de la demande peut varier aussi dans le même intervalle, si le pays éprouve un mouvement rapide de progrès ou de décadence. En conséquence, il faut, pour plus d'exactitude, concevoir que dans l'expression $F(p)$, p désigne le prix moyen annuel, et que la courbe qui représente la fonction F est elle-même

¹ On sait que les économistes entendent par *marché*, non pas un lieu déterminé où se consomment les achats et les ventes, mais tout un territoire dont les parties sont unies par des rapports de libre commerce, en sorte que les prix s'y nivellent avec facilité et promptitude.

une moyenne entre toutes celles qui représenteraient la fonction à diverses époques de l'année. Mais, au reste, cette extrême précision ne deviendrait nécessaire que si l'on pouvait se proposer de passer à des applications numériques, et elle demeure superflue dans les recherches qui n'ont pour objet que d'obtenir une expression générale des résultats moyens, indépendants des oscillations périodiques.

24. Puisque la fonction $F(p)$ est continue, la fonction $p F(p)$, qui exprime la valeur totale de la quantité débitée annuellement le sera aussi. Cette fonction deviendrait nulle si p était nul, puisque la consommation d'une denrée reste toujours finie, même dans l'hypothèse d'une absolue gratuité; ou, en d'autres termes, on peut toujours assigner par la pensée au nombre p une valeur assez petite pour que le produit $p F(p)$ soit sensiblement nul. La fonction $p F(p)$ s'évanouit encore quand p devient infini, ou en d'autres termes on peut toujours assigner par la pensée au nombre p une valeur assez grande pour que la denrée cesse d'être demandée et produite à ce prix. Donc, puisque la fonction $p F(p)$ va d'abord en croissant avec p , puis finalement en décroissant, il y a une valeur de p qui la rend un maximum, et qui est donnée par l'équation

$$(1) \quad F(p) + p F'(p) = 0,$$

F' désignant, suivant la notation de Lagrange, le coefficient différentiel de la fonction F .

Si l'on trace la courbe anb (fig. 1) dont les abscisses oq et les ordonnées qn représentent les variables p et D , la racine de l'équation (1) sera l'abscisse du point n pour lequel le triangle ont , formé par la tangente nt et par le rayon vecteur on , est isoscèle, de sorte qu'on a $oq = qt$.

Or, en admettant qu'il soit impossible de déterminer empiriquement pour chaque denrée la fonction $F(p)$, il s'en faut bien que les mêmes obstacles s'opposent à la détermination approximative de la valeur de p qui satisfait à l'équation (1) ou qui rend le produit $p F(p)$ un maximum. La construction d'une table où l'on trouverait ces valeurs serait le travail le plus propre à préparer la solution pratique et rigoureuse des questions qui se rattachent à la théorie des richesses.

Mais, lors même que l'on ne pourrait pas tirer des documents statistiques la valeur de p propre à rendre le produit $p F(p)$ un maximum, il serait facile de savoir, au moins pour toutes les denrées auxquelles on a essayé d'étendre la statistique commerciale, si le prix courant tombe en-deçà ou au-delà de cette valeur. Supposons que le prix étant devenu $p + \Delta p$, la consommation annuelle, accusée par des documents statistiques tels que les registres des douanes, soit devenue $D - \Delta D$, selon que l'on aura

$$\frac{\Delta D}{\Delta p} < \frac{D}{p}, \text{ ou } \frac{\Delta D}{\Delta p} > \frac{D}{p},$$

l'accroissement de prix Δp fera augmenter ou diminuer le produit $p F(p)$; et l'on saura conséquemment si les deux valeurs $p, p \Delta + p$ (Δp étant censé une petite fraction de p) tombent en-deçà ou au-delà de la valeur qui porte au maximum le produit en question.

On devra donc demander d'abord à la statistique commerciale de distribuer les denrées d'une haute importance économique en deux catégories, selon que leurs prix courants restent inférieurs ou supérieurs à la valeur productrice du maximum de $p F(p)$. Nous verrons que beaucoup de problèmes économiques comportent des solutions différentes, selon que la denrée dont il s'agit appartient à l'une ou à l'autre de ces deux catégories.

25. On sait, par la théorie des maxima et minima, que l'équation (1) convient aux valeurs de p qui rendent $p F(p)$ un minimum, comme à celles qui rendent ce produit un maximum. Le raisonnement employé au commencement de l'article précédent montre bien que la fonction $p F(p)$ a nécessairement un maximum, mais elle pourrait en avoir plusieurs et passer dans l'intervalle par des valeurs minima. La racine de l'équation (1) correspond à un maximum ou à un minimum selon que l'on a

$$2 F'(p) + F''(p) < \text{ ou } > 0 ,$$

ou bien, en substituant pour p sa valeur, et en ayant

égard au signe essentiellement négatif de $F'(p)$,

$$2 [F'(p)]^2 - F(p) \cdot F''(p) > \text{ ou } < 0 .$$

Par conséquent, lorsque $F''(p)$ est négatif, ou lorsque la courbe $D = F(p)$ tourne sa concavité du côté de l'axe des abscisses, il est impossible qu'il y ait un minimum, ni plus d'un maximum. Dans le cas contraire, l'existence de plusieurs minima et de plusieurs maxima n'est pas démontrée impossible.

Mais si l'on cesse d'envisager la question sous un point de vue purement abstrait, on reconnaît promptement combien il est peu probable que dans l'intervalle des limites entre lesquelles peut osciller la valeur de p , la fonction $p F(p)$ passe par plusieurs maxima et par des minima intermédiaires; et, comme nous pouvons nous dispenser d'avoir égard aux maxima, s'il en existe, qui tombent hors de ces limites, toutes les questions sont les mêmes que si la fonction $p F(p)$ n'admettait qu'un seul maximum. Il s'agit toujours essentiellement de savoir si, dans l'étendue des limites entre lesquelles p peut osciller, la fonction $p F(p)$ est croissante ou décroissante pour des valeurs croissantes de p .

On doit, dans toute exposition, procéder du simple au composé : l'hypothèse la plus simple, quand on se propose de rechercher d'après quelles lois les prix s'établissent, est celle du monopole, en prenant ce mot dans le sens le plus absolu, ce qui suppose que la production de la denrée est dans une seule

main. Cette hypothèse n'est pas purement fictive ; elle se réalise dans certains cas ; et d'ailleurs , après que nous l'aurons étudiée , nous pourrons analyser avec plus de précision les effets de la concurrence des producteurs.
