Euler et le parcours du cavalier dans une grille rectangulaire

par René Descombes
Ingénieur divisionnaire honoraire des travaux publics de l'État

Dans un Mémoire de 1759, intitulé « Solution d'une question curieuse qui parait soumise à aucune analyse », Leonhard Euler étudie essentiellement le parcours du cavalier des échecs dans l'échiquier de 64 cases. Il aborde sommairement le parcours du cavalier dans une grille rectangulaire, dans une seule et unique page que nous nous proposons de commenter et de développer (texte *BibNum*).

LE PARCOURS DU CAVALIER – GÉNÉRALITÉS – PROPRIÉTÉS.

Rappelons que le parcours du cavalier dans une grille carrée, rectangulaire ou cruciforme, peut être « ouvert » lorsque sa première case et sa dernière ne peuvent pas être jointes par un saut du cavalier. Dans ce cas, le parcours du cavalier ne peut être suivi que dans un sens ou dans l'autre.

Ce parcours est dit « fermé » ou « rentrant » dans le cas contraire : le parcours du cavalier peut être suivi, dans un sens ou dans l'autre, à partir d'une case quelconque du circuit.

Un parcours fermé du cavalier dans une grille carrée, est dit « symétrique », lorsque la différence de deux nombres complémentaires, c'est-à-dire diagonalement opposés, est constante Euler en donne un exemple dans l'échiquier de 36 cases, précisément, au bas de la page 336, dernière figure : la différence constante des nombres complémentaires est ainsi de 18.

30	21	6	15	28	19
7	16	29	20	5	14
22	31	8	35	18	27
9	36	17	26	13	4
32	23	2	11	34	25
1	10	33	24	3	12

Un parcours ouvert ou fermé du cavalier dans une grille carrée, est dit « de type associé », lorsque les cases complémentaires ont une somme constante. Dans l'exemple ci-dessous, une grille d'ordre n = 7 de 49 cases, la somme constante est égale à S = 50, soit $S = n^2 + 1$. La case centrale est alors égale à la demi-somme constante.

1	22	19	46	35	40	37
20	7	24	41	38	45	34
23	2	21	18	47	36	39
6	17	8	25	42	33	44
11	14	3	32	29	48	27
16	5	12	9	26	43	30
13	10	15	4	31	28	49

Il n'y a pas de *parcours magique* du cavalier dans l'échiquier de 64 cases – c'est-à-dire un parcours dont la grille constitue un carré magique[1]. On compte cependant 108 *parcours semi-magiques* dans l'échiquier de 64 cases. Le plus petit parcours magique interne du cavalier, a été annoncé le 25 mars 2003 par Awani Kunar, de Lucknow (Inde), dans une grille d'ordre n = 12 de 144 cases. Cependant, on trouve un parcours magique du cavalier, tout-à-fait particulier, dans une grille d'ordre n = 5 de 25 cases !

Marche principale du cavalier : 2 pas à droite, un pas vers le haut.

Marche secondaire (à 5, 10, etc.) : 2 pas vers le haut.

Il faut préciser que ce parcours du cavalier ne se circonscrit pas dans les limites de la grille : lorsque le parcours déborde, il faut le réintégrer dans la grille, selon la technique habituelle.

			9	13	17		5
65	8	12	16	25	4	8	12
65	20	24	3	7	11	20	24
65	2	6	15	19	23	2	11
65	14	18	22	1	10	14	18
65	21	5	9	13	17		
65	65	65	65	65	65	65	

1. Un carré est dit semi-magique quand la somme des chiffres, pour chaque ligne et chaque colonne, est la même. Il est dit magique si, par surcroît, la somme de chacune des deux diagonales a aussi cette même valeur commune aux lignes et aux colonnes. Sur les carrés magiques, on peut consulter R. Descombes, « Le Carré magique du Pape Léon III », *BibNum*, septembre 2014.

42. Avant que de finir, j'ajouterai encore quelques autres figures, & parmi les rectangulaires, la plus ſimple que le cavalier puiſſe parcourir, eſt de 12 caſes, la largeur contenant 3, & la longeur 4, dont voici quelques routes:

10	7	2	5
1	4	9	12
8	11	6	3

3	6	11	8
12	9	2	5
1	4	7	10

3	6	9	12
8	11	2	5
1	4	7	10

12	9	6	3
1	4	11	8
10	7	2	5

Mais on voit aiſément, que des routes rentrantes ne ſauroient ici avoir lieu. Si la largeur contient trois caſes, & la longueur 5 ou 6, il eſt impoſſible de les parcourir: mais, donnant à la longueur 7 ou pluſieurs caſes, on pourra réuſſir, pourtant ſans rentrer:

3	8	5	18	15	10	13
6	19	2	9	12	21	16
1	4	7	20	17	14	11

15	18	21	2	5	8	11
20	1	16	13	10	3	6
17	14	19	4	7	12	9

Or, ſi nous donnons 4 caſes à la largeur, & 5 ou pluſieurs à la longueur, on aura ces routes:

14	7	20	3	16
19	2	15	8	11
6	13	10	17	4
1	18	5	12	9

16	7	22	3	18	11
23	2	17	12	21	4
8	15	6	19	10	13
1	24	9	14	5	20

20	7	26	13	18	5	24
27	14	19	6	25	12	17
8	21	2	15	10	23	4
1	28	9	22	3	16	11

43. Jusqu'ici les routes rentrantes en elles-mêmes ne peuvent pas avoir lieu; mais, donnant 5 caſes à la largeur, & 6 à la longueur, on pourra auſſi remplir cette condition, de même que dans tous les autres rectangles, dont le nombre des caſes eſt pair, pourvu qu'il n'y ait pas moins de 5 caſes dans un côté. En voici des exemples:

3	20	13	24	5	18
12	29	4	19	14	25
21	2	23	8	17	6
28	11	30	15	26	9
1	22	27	10	7	16

30	21	6	15	28	19
7	16	29	20	5	14
22	31	8	35	18	27
9	36	17	26	13	4
32	23	2	11	34	25
1	10	33	24	3	12

où cette autre figure eſt un quarré de 36 caſes, & la route eſt non ſeulement rentrante en elle-même, mais les nombres dans les caſes oppoſées ont partout la même différence de 18.

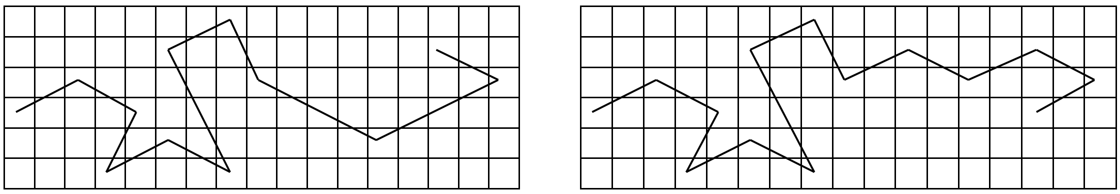
P. 336 (et haut de page 337) du mémoire d'Euler 1759 (extrait du texte BibNum), sur le parcours du cavalier dans un rectangle *(sujet auquel nous nous attachons plus particulièrement dans la suite)*.

Le parcours du cavalier dans la grille rectangulaire : La méthode d'Euler

Leonhard Euler donne une dizaine de parcours du cavalier dans des grilles rectangulaires de diverses tailles. À cette occasion il ne précise pas de façon explicite sa méthode de construction. Cependant, dans son *Mémoire*, il expose, plutôt qu'une méthode, un procédé de construction du parcours du cavalier dans l'échiquier, en annonçant que cette technique est applicable aux grilles rectangulaires et cruciformes.

Leonhard Euler nous dit lui-même qu'il a été conduit à appliquer cette technique, à la suite d'une idée toute particulière qui lui a été donnée par un certain M. Bertrand de Genève : il s'agit du mathématicien Louis Bertrand (1731-1812).

Voici donc cette idée, qui n'apparait elle-même pas directement dans le *Mémoire* d'Euler, mais que l'on peut déduire de ses exemples : Si à l'intérieur d'un trajet, il se trouve quelque(s) case(s), [différente(s)de l'avant-dernière case], qui puisse(nt) être reliée(s) par un saut du cavalier, alors on dispose d'un autre trajet, susceptible de débloquer le parcours en cours.



Voici ci-dessus une illustration de cette idée simple.

En effet, lorsque la dernière case du trajet en cours ne permet pas de joindre une case restée vide par un saut du cavalier, il y a blocage. L'idée de M. Bertrand, en conservant en partie le trajet qui précède, permet de déplacer la case finale de ce trajet, et ainsi, soit immédiatement, soit après plusieurs tentatives, de rejoindre alors l'une des cases encore vierge, qui sera intégrée au parcours en question. De proche en proche, on arrivera ainsi à parcourir toute la grille. La « méthode » qui en résulte est applicable, répétons-le, à toute grille carrée, rectangulaire ou cruciforme.

Leonhard Euler applique systématiquement cette technique très simple en apparence, avec constance, négligeant parfois d'autres possibilités plus simples : c'est ce qui apparait notamment dans les exemples de parcours dans diverses grilles rectangulaires donnés par Euler (à partir de §42, p. 336).

La Méthode de la Grille

Cette méthode était largement connue bien avant Leonhard Euler[2].

5		13		7		15	
12		6		14		8	
	4		10		2		16
	11		3		9		1

5	26	13	32	7	20	15	18
12	31	6	27	14	17	8	21
25	4	29	10	23	2	19	16
30	11	24	3	28	9	22	1

La méthode s'applique à l'origine au demi-échiquier, une grille rectangulaire 4 x 8. On poche la grille comme indiqué ci-dessus. On remplit tout d'abord les cases blanches par un parcours du cavalier, soit la grille centrale ci-dessus ; puis on remplit les cases pochées. Elle s'étend aux grilles rectangulaires paires dont un côté est égal à 4 ou un multiple de 4. Mais pour les grilles carrées de 4 x 4 ou de 8 x 8 (grille carrée), cela semble impossible !

Voici quelques autres exemples d'application de la méthode :

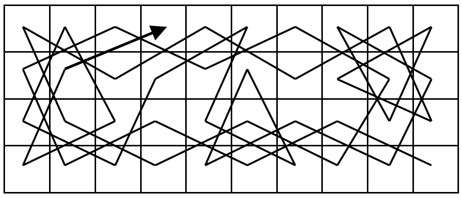
4 x 6

9		5		11	
4		10		6	
	8		2		12
	3		7		1

9	23	5	16	11	14
4	20	10	13	6	17
24	8	22	2	15	12
21	3	19	7	18	1

4 x 10

15	36	7	40	17	32	9	24	19	22
6	39	16	33	8	29	18	21	10	25
35	14	37	4	31	12	27	2	23	20
38	5	34	13	28	3	30	11	26	1



4 x 11

5	34	13	42	7	36	15	38	19	28	21
12	43	6	35	14	39	8	29	22	25	18
33	4	41	10	31	2	37	16	27	20	23
44	11	32	3	40	9	30	1	24	17	26

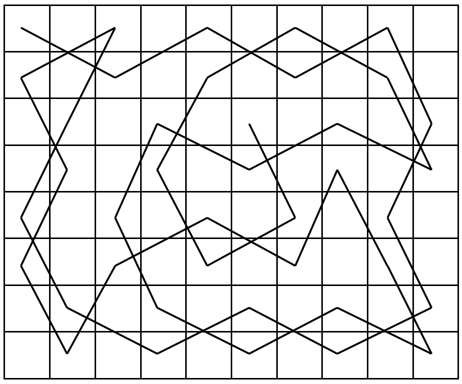
4 x 12

7	46	19	42	9	48	21	36	11	28	23	26
18	41	8	47	20	37	10	33	22	25	12	29
45	6	39	16	43	4	35	14	31	2	27	24
40	17	44	5	38	15	32	3	34	13	30	1

2. D'après Jacques Sesiano, *Euler et le parcours du cavalier, avec une Annexe sur le Théorème des polyèdres,* Presses Polytechniques et Universitaires Romandes – 2015 – 272 pp (cf. p. 153) Le mémoire de Leonhard Euler de 1759 est intégralement reproduit en fac-similé à la fin de cet ouvrage, ainsi que certaines pages des manuscrits de Leonhard Euler.

8 x 10

1	52	15	64	3	54	35	55	5	42
16	65	2	53	36	63	4	41	34	57
51	14	71	30	75	40	55	32	43	6
66	17	74	37	72	31	62	23	58	33
13	50	29	70	21	76	39	78	7	44
18	67	20	73	38	79	22	61	24	59
49	12	69	28	47	10	77	26	45	8
68	19	48	11	80	27	46	9	60	25



Le parcours dans les cases blanches

La Méthode de Moivre (1722)

La « Méthode de Moivre », connue aussi sous le nom de « Méthode des bordures », semble apparaitre pour la première fois dans les *Récréations mathématiques et physiques*, de Jacques Ozanam (Paris, 1724, 4 vol.).

On sélectionne une couronne, ou une bordure, de largeur 2 cases, que l'on remplit avec un parcours du cavalier, en tournant toujours dans le même sens. On n'entre dans la grille centrale rectangulaire que lorsque l'on y est contraint, pour revenir aussitôt dans la couronne. Celle-ci remplie, on passe au parcours du cavalier dans la grille centrale. La méthode de Moivre est « réputée applicable à toutes grilles carrées ou rectangulaires, de tous ordres[3] ».

Cependant on observe quelques restrictions. On sait d'expérience que la grille centrale rectangulaire d'ordre 3 x 5 et 3 x 6 ne peut pas être parcourue par la cavalier ; ainsi la méthode de Moivre ne peut-elle pas s'appliquer aux grilles d'ordre 7 x 9 et 7 x 10 (c'est-à-dire 3 x 5 et 3 x 6 entourées d'une bordure de 2 x 2).

Voici un exemple d'application du parcours du cavalier dans une grille rectangulaire d'ordre 7 x 13 de 91 cases : un parcours ouvert.

43	28	59	12	45	30	61	14	47	32	63	16	1
58	11	44	29	60	13	46	31	62	15	48	33	64
27	42	77	74	71	90	83	80	67	86	65	2	17
10	57	72	89	76	79	70	87	84	81	68	49	34
41	26	75	78	73	88	91	82	69	66	85	18	3
56	9	24	39	54	7	22	37	52	5	20	35	50
25	40	55	8	23	38	53	6	21	36	51	4	19

3. René Descombes, *Les Carrés magiques*, Vuibert 2000, pp. 439 – 442.

Si la couronne peut être assez facilement remplie par un parcours du cavalier, la grille rectangulaire centrale, lorsqu'une ou deux cases sont déjà occupées, s'avère souvent plus difficile, sinon impossible à remplir.

UN CAS PARTICULIER : ABSENCE DE GRILLE CENTRALE.

Dans toutes les grilles qui ont un côté n = 4, la grille centrale disparait.

Après divers essais, on observe que la méthode de Moivre est applicable à toutes grilles mixtes d'ordre 4 x 5, 4 x 7, 4 x 9 . . . , à l'exclusion des grilles paires 4 x 6, 4 x 8, 4 x 10 . . .

Exemples : la case-départ et la case finale sont côte à côte.

4 x 5

9	14	5	20	1
4	19	10	15	6
13	8	17	2	11
18	3	12	7	16

4 x 7

5	26	13	20	7	28	1
12	19	6	27	14	21	8
25	4	17	10	23	2	15
18	11	24	3	16	9	22

D'ailleurs, il semble bien que la Méthode de Moivre ne s'applique pas, en général, aux grilles rectangulaires paires : nous n'avons pas réussi à placer un parcours du cavalier, *en application de la Méthode de Moivre,* dans une grille rectangulaire paire. Mais cela ne veut pas dire que le parcours du cavalier est exclu des grilles paires !

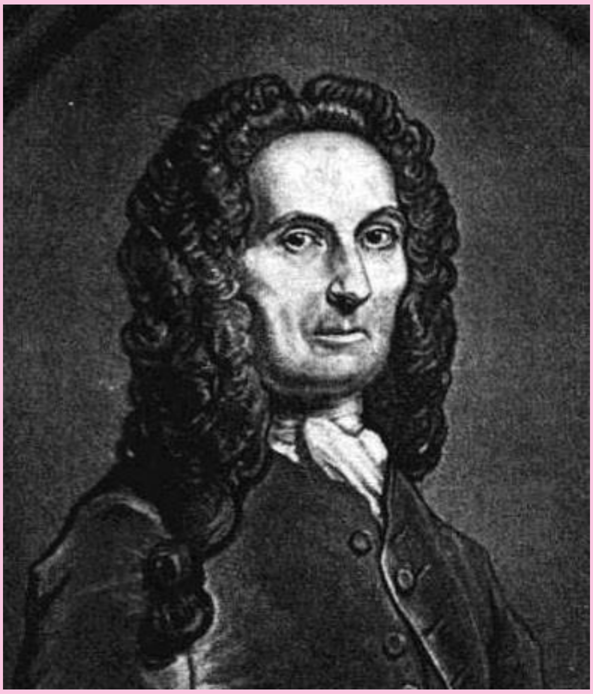
Voici un bel exemple d'un parcours ouvert du cavalier dans une grille rectangulaire paire d'ordre 10 x 12, réalisé par Arsène Durupt[4] :

1	22	19	46	35	40	37	98	105	112	117	100
20	7	24	41	38	45	34	113	118	99	106	111
23	2	21	18	47	36	39	104	97	108	101	116
6	17	8	25	42	33	44	119	114	103	110	107
11	14	3	32	29	48	27	96	109	120	115	102
16	5	12	9	26	43	30	71	84	95	90	77
13	10	15	4	31	28	49	94	89	78	85	82
66	63	60	51	54	57	70	79	72	83	76	91
61	52	65	68	59	50	55	88	93	74	81	86
64	67	62	53	56	69	58	73	80	87	92	75

4. L'auteur et *BibNum* remercient Arsène Durupt pour la confection d'un certain nombre de grilles du présent article.

Euler et la méthode de Moivre

Abraham de Moivre (1667-1754) a mis au point sa méthode en 1722 ; Leonhard Euler (1707-1783) qui a rédigé son Mémoire en 1759, a sans aucun doute eu connaissance de la « Méthode de Moivre », publiée dans l'ouvrage d'Ozanam : on trouve en effet dans le Mémoire de Leonhard Euler un parcours du cavalier dans un carré et un rectangle, construit par cette méthode.
Leonhard Euler n'en dit rien, et n'a pas exploité plus loin cette méthode.



Moivre vers 1736 *(WikiCommons)*

Page 332 du Mémoire d'Euler.

Dans la grille carrée ci-contre, d'ordre n = 5, la grille centrale est réduite à une seule case centrale, qui correspond à la case finale.

7	12	17	22	5
18	23	6	11	16
13	8	25	4	21
24	19	2	15	10
1	14	9	20	3

Page 336 du Mémoire d'Euler.

Dans cet exemple, une grille rectangulaire d'ordre 4 x 7, la grille centrale a disparu. La case-départ et la case finale sont côte-à-côte.

20	7	26	13	18	5	24
27	14	19	6	25	12	17
8	21	2	15	10	23	4
1	28	9	22	3	16	11

Dans les deux grilles ci-dessus, le parcours du cavalier selon la Méthode de Moivre, est bien visible dans la couronne de deux cases de largeur (dans le 2e cas, la grille centrale a disparu, mais le parcours en couronne est bien visible).

On trouve également parmi les manuscrits de Leonhard Euler à propos du parcours du cavalier, publiés par Jacques Sésiano (p. 42, fig. 39), un parcours ouvert du cavalier dans l'échiquier de 64 cases, construit en grande partie par la Méthode de Moivre (ci-dessous). Mais Euler fait plusieurs incursions dans la grille centrale (à partir de 25), avant de retourner dans la couronne. Peut-on éviter ces incursions intempestives ?

1	26	13	46	3	58	15	44
24	47	2	27	14	45	4	57
49	12	25	34	59	28	43	16
36	23	48	31	62	33	56	5
11	50	35	64	29	60	17	42
22	37	30	61	32	63	6	55
51	10	39	20	53	8	41	18
38	21	52	9	40	19	54	7

LE CAVALIER, À L'ORIGINE DU RECTANGLE MAGIQUE

À ce jour, en 2015, on ne connait pas de parcours magique du cavalier dans une grille rectangulaire[5]. Ce qui ne veut pas dire que ce parcours magique n'existe pas dans une grille rectangulaire d'ordre élevé. On peut dire que c'est un problème qui n'a pas encore trouvé de solution. Le parcours du cavalier est cependant à l'origine de la construction de la grille rectangulaire magique.

5. Un rectangle magique est un rectangle dont les sommes de nombres, en ligne et en colonnes, sont constantes (mais elle n'est pas la même pour lignes et colonnes).

Un parcours du cavalier dans le rectangle primaire

Rappelons que le parcours du cavalier peut se développer dans toute grille carrée, ou rectangulaire d'ordre impair, pair ou mixte, à l'exclusion des rectangles d'ordre 3 x 5 et 3 x 6 : Euler le précise lui-même dans son Mémoire :

> *Si la largeur contient 3 cases, & la longueur 5 ou 6, il est impossible de les parcourir* [p. 336]

Cela étant, on se propose alors de rendre magique, par diverses manipulations, la grille numérique rectangulaire contenant ce parcours, lorsque c'est possible.

La magie dans les rectangles mixtes n'étant pas possible, il nous reste à étudier le parcours du cavalier dans un rectangle primaire d'ordre impair et pair.

Dans ces conditions, la construction d'un rectangle magique comprend donc en principe deux phases :

1. La construction du parcours du cavalier remplissant toute la grille rectangulaire, comme rectangle primaire (phase abordée précédemment) ;
2. La construction du rectangle magique proprement dite.

On ne prête qu'aux riches (Euler, en l'occurrence)

À ce sujet, voici une occasion de rétablir les faits : On attribue souvent à Leonhard Euler le parcours ci-après du cavalier dans l'échiquier de 64 cases. Cette grille numérique est un carré semi-magique : les lignes et les colonnes sont magiques, de constante magique $M_8 = 260$, mais les diagonales principales ne sont pas magiques.

1	48	31	50	33	16	63	18
30	51	46	3	62	19	14	35
47	2	49	32	15	34	17	64
52	29	4	45	20	61	36	13
5	44	25	56	9	40	21	60
28	53	8	41	24	57	12	37
43	6	55	26	39	10	59	22
54	27	42	7	58	23	38	11

De plus, toutes les demi-lignes et les demi-colonnes ont pour somme 130, la demie constante magique. De ce fait, les quatre quadrants sont des carrés magiques, non normaux, d'ordre n = 4 et de constante magique $M'_4 = 130$. De plus, dans les 4 coins 4 × 4 de chacun des 4 quadrants, chaque formation de 4 cases a également pour somme 130 (ex. 21 + 60 + 12 + 37 = 130).

J'ai moi-même attribué à Leonhard Euler ce parcours semi-magique, dans mon livre « Les carrés Magiques », Vuibert 2000, p. 438 : *on ne prête qu'aux riches !* Or, il s'avère que ce parcours semi-magique du cavalier dans l'échiquier de 64 cases, aux propriétés extraordinaires, a été publié bien plus tard, par William Beverly (1812-1889), dans le *Philosophical Magazine,* de 1848. Dont acte.

Le parcours du cavalier dans un rectangle primaire d'ordre impair

1^er^ exemple : rectangle 5 x 9.

Le parcours du cavalier, la case-départ étant fixée dans une case d'angle, en utilisant une marche uniforme du cavalier, remplit toute la grille (avec la possibilité d'en sortir, suivant les règles habituelles), et celle-ci est immédiatement exploitable.

1	6	11	16	21	26	31	36	41	189	+ 18
37	42	2	7	12	17	22	27	32	198	+ 9
28	33	38	43	3	8	13	18	23	207	
19	24	29	34	39	44	4	9	14	216	- 9
10	15	20	25	30	35	40	45	5	225	- 18
95	120	100	125	105	130	110	135	115		
+ 20	- 5	+ 15	- 10	+ 10	- 15	+ 5	- 20			

Rétablissons la magie des colonnes (somme 115) – hors parcours de cavalier :

11	1	36	6	31	26	41	16	21	189
37	42	2	7	12	22	17	27	32	198
38	33	28	43	3	18	13	23	8	207
19	24	29	34	39	44	4	14	9	216
10	15	20	25	30	5	40	35	45	225
115	115	115	115	115	115	115	115	115	

Et celle des lignes (somme 207) :

38	1	28	6	31	18	41	23	21	207
37	24	2	7	39	22	17	27	32	207
11	42	36	43	12	26	13	16	8	207
19	33	29	25	30	44	4	14	9	207
10	15	20	34	3	5	40	35	45	207
115	115	115	115	115	115	115	115	115	

Voici d'autres parcours du cavalier dans un rectangle d'ordre impair, susceptibles d'être utilisés comme *rectangle primaire* pour la construction d'un rectangle magique :

3 x 7

3	8	5	18	15	10	13
6	19	2	9	12	21	16
1	4	7	20	17	14	11

3 x 9

11	14	9	24	27	18	5	2	21
8	25	12	15	6	23	20	17	4
13	10	7	25	19	16	3	22	1

5 x 7

25	28	9	6	23	34	11
8	17	24	27	10	5	22
29	26	7	18	33	12	35
16	19	2	31	14	21	4
1	30	15	20	3	32	13

5 x 9

11	20	25	30	9	18	35	32	7
26	29	10	19	24	31	8	17	34
21	12	27	42	39	36	33	6	45
28	41	2	23	14	43	4	37	16
1	22	13	40	3	38	15	44	5

Le parcours du cavalier dans un rectangle primaire d'ordre pair

Le premier parcours du cavalier dans un rectangle d'ordre pair qui nous vient à l'esprit, est le demi-échiquier : un rectangle 4 x 8. Le cavalier peut en effet parcourir de façon indépendante les deux demi-grilles de l'échiquier de 64 cases.

Voici, par Leonard Euler (in Sesiano, p.66, fig. 75) un parcours du cavalier dans l'échiquier, de façon indépendante dans les deux demi-échiquiers. C'est un parcours fermé ou rentrant, présentant la curieuse propriété suivante : la différence des nombres complémentaires est constante, et égale à Δ = 32.

50	43	60	39	56	45	62	37	
59	40	49	44	61	38	55	46	
42	51	34	57	48	53	36	63	
33	58	41	52	35	64	47	54	
22	15	32	3	20	9	26	1	128 (+ 4)
31	4	21	16	25	2	19	10	128 (+ 4)
14	23	6	29	12	17	8	27	136 (- 4)
5	30	13	24	7	28	11	18	136 (- 4)
72	72	72	72	64	56	64	56	
- 6	- 6	- 6	- 6	+ 2	+ 10	+ 2	+ 10	

Peut-on considérer ce rectangle comme « rectangle primaire », et rendre magiques ses colonnes et ses lignes ? Les constantes magiques rectangulaires étant alors 66 pour les colonnes et 132 pour les lignes.

Rétablissement de la magie à la fois dans colonnes et dans les lignes :

22	15	32	7	26	9	20	1	132
31	4	21	6	25	16	19	10	132
8	17	2	29	12	23	14	27	132
5	30	11	24	3	18	13	28	132
66	66	66	66	66	66	66	66	

Rappelons à ce sujet, avec Euler, que le parcours du cavalier peut être *rentrant ou fermé* dans toute grille carrée ou rectangulaire dont le *nombre de cases est pair*, sous réserve qu'il n'y ait pas moins de 5 cases sur un côté :

> *Jusqu'ici les routes rentrantes en elles-mêmes ne peuvent pas avoir lieu ; mais, donnant 5 cases à la largeur, et 6 à la longueur, on pourra aussi remplir cette condition, de même que dans tous les autres rectangles, dont le nombre de cases est pair, pourvu qu'il n'y ait pas moins de 5 cases dans un côté* [§43, p. 336]

Le plus petit parcours rentrant du cavalier se trouve ainsi dans la grille rectangulaire 5 x 6 :

3	20	13	24	5	18
12	29	4	19	14	25
21	2	23	8	17	6
28	11	30	15	26	9
1	22	27	10	7	16

Voici un autre exemple de parcours du cavalier dans un rectangle d'ordre 4 x 6, donné également par Euler (in Sésiano, p.115, fig. 166) :

16	7	22	3	18	11	77
23	2	17	12	21	4	79
8	15	6	19	10	13	71
1	24	9	14	5	20	73
48	48	54	48	54	48	

15	11	22	18	7	3
23	2	17	4	21	12
10	13	6	19	8	15
1	24	5	9	14	20
50	50	50	50	50	50

23	2	22	18	7	3	75
10	13	17	9	14	12	75
16	11	6	19	8	15	45
1	24	5	4	21	20	75
50	50	50	50	50	50	

Si le principe de ces méthodes, inspirées de la Méthode du Dr Planck, est simple, le rétablissement de la magie dans les colonnes et les lignes, peut conduire à des essais infructueux parfois relativement nombreux, ce qui peut rebuter quelque peu l'amateur. La patience est donc de rigueur !

PROPRIÉTÉS DU RECTANGLE MAGIQUE

Nous éloignant d'Euler et de la marche du cavalier, saisissons l'occasion qui se présente d'offrir quelques propriétés du rectangle magique, bien négligé dans la littérature des figures magiques !

La construction d'un cube magique

il s'agit d'un cas particulier du rectangle magique normal d'ordre 3 x 9. Voici l'une des solutions de ce rectangle magique normal d'ordre 3 x 9 :

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	
4	17	21	18	19	5	20	6	16	126 = 42 x 3
26	3	13	1	14	27	15	25	2	126 = 42 x 3
12	22	8	23	9	10	7	11	24	126 = 42 x 3
42	42	42	42	42	42	42	42	42	

On peut permuter certaines colonnes (ainsi que les lignes) sans altérer la magie de ce rectangle magique. Ainsi, en regroupant 3 par 3 les colonnes (1, 4, 7), (2, 5, 8) et (3, 6, 9), on obtient le rectangle magique ci-après, qui peut être décomposés en trois carrés magiques ou semi-magiques d'ordre n = 3, lesquels, *superposés*, forment un *cube magique normal* d'ordre n = 3, de constante magique $M_3^3 = 42$:

4	18	20
26	1	15
12	23	7

Niveau 3

17	19	6
3	14	25
22	9	11

Niveau 2

21	5	16
13	27	2
8	10	24

Niveau 1

Voici ci-dessous les 15 coupes réglementaires de ce cube magique normal : 9 coupes orthogonales et 6 coupes diagonales, soit au total 120 alignements de 3 nombres (3 lignes, 3 colonnes, 2 diagonales, le tout multiplié par 15 grilles). On compte 88 alignements magiques (ceux où apparaît la somme 42), 2 carrés magiques et 6 carrés semi-magiques.

	4	18	20	42
	26	1	15	42
	12	23	7	42
33	42	42	42	12

	12	26	4	42
	22	3	17	42
	8	13	21	42
15	42	42	42	36

	4	18	20	42
	17	19	6	42
	21	5	16	42
60	42	42	42	39

	4	1	7	12
	17	14	11	42
	21	17	24	72
63	42	42	42	42

	12	1	20	33
	22	14	6	42
	8	27	19	51
42	42	42	42	35

Niveau 3

Coupes diagonales verticales

	17	19	6	42
	3	14	25	42
	22	9	11	42
42	42	42	42	42

	23	1	8	32
	9	14	19	42
	10	27	5	42
32	42	42	32	42

	26	1	15	42
	3	14	25	42
	13	27	2	42
42	42	42	42	42

	4	19	16	39
	26	14	2	42
	12	9	24	45
42	42	42	42	42

	21	19	20	60
	13	14	15	42
	8	9	7	24
42	42	42	42	42

Niveau 2

Coupes diagonales frontales

	21	5	16	42
	13	27	2	42
	8	10	24	42
51	42	42	42	72

	7	15	20	42
	11	25	6	42
	24	2	16	42
69	42	42	42	48

	12	23	7	42
	22	9	11	42
	8	10	24	42
24	42	42	42	45

	7	25	16	48
	23	14	5	42
	12	3	21	36
42	42	42	42	42

	24	25	20	69
	10	14	8	32
	8	3	4	15
42	42	42	32	42

Niveau 1

Coupes horizontales — Coupes frontales — Coupes latérales — Coupes diagonales latérales

On peut penser que, suivant les mêmes errements, on peut construire un cube magique d'ordre n = 4, n = 5, n = 6 . . . avec pour base un rectangle magique d'ordre 4 x 16, 5 x 25, 6 x 36…

Le produit de deux rectangles magiques normaux

(a)	q				
p	4	6	1	7	18
	5	3	8	2	18
	9	9	9	9	

(b)	v		
	1	8	9
	6	3	9
u	4	5	9
	7	2	9
	18	18	

(c)									
	4	60	6	62	1	57	7	63	260
	44	20	46	22	41	17	47	23	260
	28	36	30	38	25	33	31	39	260
	52	12	54	14	49	9	55	15	260
	5	61	3	59	8	64	2	58	260
	45	21	43	19	48	24	42	18	260
	29	37	27	35	32	40	26	34	260
	53	13	51	11	56	16	50	10	260
384	260	260	260	260	260	26	260	260	136

$c = a + 8 (b – 1)$

On se propose d'effectuer le produit des deux rectangles magiques normaux de 4 x 2 ci-dessus, et d'examiner les propriétés particulières du résultat de cette opération ; une idée tirée des recherches de *Simon Falconoras et fils*[6].

Rappelons que dans un rectangle magique, le nombre de cases sur chaque côté doit être de même parité ; il n'y a pas de rectangle magique « mixte ».

Soit « a » un terme du rectangle magique « p q », « b » un terme du rectangle magique « uv » et « c » le nombre de la grille « produit » issu de la manipulation décrite ci-dessous, en fonction de « a » et « b ».

Première solution (figure ci-dessus) : On applique la relation :

$$c = a + pq\,(b - 1), \text{ avec } \; p\,q = 8,$$

soit $c = a + 8\,(b - 1)$ dans les conditions suivantes :

- L'implantation du chiffre « a » dans la grille « pq » correspond à l'implantation du sous-rectangle de 8 cases dans la grille « produit » ;
- L'implantation du chiffre « b » dans la grille « uv », correspond à l'implantation du nombre « c » dans le sous-rectangle défini ci-dessus.

Expl. b = 1 en uv=(1,1), donc c = a, on place chacun des chiffres du rectangle pq, 4, 6, 1, etc. au coin supérieur gauche (1,1) de chacun des 8 sous-rectangles définis en encadré gras dans la grille produit ; b = 8 en uv=(1,2), donc c = a + 56, on place chacun des chiffres c issu des a du rectangle pq, soit 60, 62, 57… à la place (1,2) de chacun des 8 sous-rectangles définis en encadré gras dans la grille produit) ; etc.

---

6. Leur site, avec leur ouvrage en libre accès, est ici.

On obtient un carré semi-magique normal, de constante linéaire M_8 = 260.

Deuxième solution : On applique la relation « symétrique » : c = b + uv (a – 1), avec uv = 8, soit c = b + 8 (a – 1), dans des conditions analogues aux précédentes, *mutatis mutandis.*

Expl. a = 1 en pq=(1,3), donc c = b, on place chacun des chiffres du rectangle uv, 1, 8, 6, etc. à la place (1,3) de chacun des 8 sous-rectangles définis en encadré gras dans la grille produit ; b = 2 en pq=(2,4), donc c = b + 8, on place chacun des chiffres c issu des b du rectangle uv, soit 9, 16, 14… à la place (2,4), de chacun des 8 sous-rectangles définis en encadré gras dans la grille produit) ; etc.

On obtient un carré semi-magique normal de constante magique M_8 = 260, différent du précédent.

(a)

	q				
p	4	6	1	7	18
	5	3	8	2	18
	9	9	9	9	

(b)

	v		
u	1	8	9
	6	3	9
	4	5	9
	7	2	9
	18	18	

(c)

	25	41	1	49	32	48	8	56	260
	33	17	57	9	40	24	64	16	260
	30	46	6	54	27	43	3	51	260
	38	22	62	14	35	19	59	11	260
	28	44	4	52	29	45	5	53	260
	36	20	60	12	37	21	61	13	260
	31	47	7	55	26	42	2	50	260
	39	23	63	15	34	18	58	10	260
396	260	260	260	260	260	260	260	260	124

c = b + 8 (a – 1)

Cependant, on observe que les mêmes sommes des termes des sous-rectangles se retrouvent dans les deux carrés magiques. On remarque aussi que ces sommes sont, dans chaque grille carrée, en progression arithmétique, de raison r = 8 (grilles ci-dessous).

256	272	232	280
264	248	288	240

c = a + 8 (b – 1)

232	288
272	248
256	264
280	240

c = b + 8 (a – 1)

232	240	248	256
264	272	280	288

Prog. arith. r = 8

Propriétés du carré semi magique « produit »

Première solution : Les sous-rectangles sont des rectangles magiques, et leurs constantes magiques forment elles-mêmes des rectangles magiques, dont les termes sont en progression arithmétique.

4	60	64
44	20	64
28	36	64
52	12	64
128	128	

6	62	68
46	22	68
30	38	68
54	14	68
136	136	

1	57	58
41	17	58
25	33	58
49	9	58
116	116	

7	63	70
47	23	70
31	39	70
55	15	70
140	140	

5	61	66
45	21	66
29	37	66
53	13	66
132	132	

3	59	62
43	19	62
27	35	62
51	11	62
124	124	

8	64	72
48	24	72
32	40	72
56	16	72
144	144	

2	58	60
42	18	60
26	34	60
50	10	60
120	120	

64	68	58	70	260
66	62	72	60	260
130	130	130	130	

Constantes Mh

128	136	116	140	520
132	124	144	120	520
260	260	260	260	

Constantes Mv

58	60	62	64
66	68	70	72

Prog arith r = 2

116	12	124	128
132	136	140	144

Prog arith r = 4

Deuxième solution. On observe des propriétés analogues aux précédentes :

25	41	1	49	116
33	17	57	9	116
58	58	58	58	

32	48	8	56	144
40	24	64	16	144
72	72	72	72	

30	46	6	54	136
38	32	62	14	136
68	68	68	68	

27	43	3	51	124
35	19	59	11	124
62	62	62	62	

28	44	4	52	128
36	20	60	12	128
64	64	64	64	

29	45	5	53	132
37	21	61	13	132
66	66	66	66	

31	47	7	55	140
39	23	63	15	140
70	70	70	70	

26	42	2	50	120
34	18	58	10	120
60	60	60	60	

116	144	260
136	124	260
128	132	260
140	120	260
520	520	

116	120
124	128
132	136
140	144
r + 4	

58	72	130
68	62	130
64	66	130
70	60	130
260	260	

58	60
62	64
66	68
70	72
r = 2	

<u>Second exemple – Première solution.</u>

Voici un autre exemple de produit de deux rectangles magiques, tiré du site de Simon Falconoras, « Loi de composition des rectangles magiques » :

(a) q

p	1	6	4	7	18
	8	3	5	2	18
	9	9	9	9	

(b) v

u	8	15	1	24
	10	2	12	24
	7	14	3	24
	9	4	11	24
	6	5	13	24
	40	40	40	

(c)

8	83	53	98	15	90	60	105	1	76	46	91	726
113	38	68	23	120	45	75	30	106	31	61	16	726
10	85	55	100	2	77	47	92	12	87	57	102	726
115	40	70	25	107	32	62	17	117	42	72	27	726
7	82	52	97	14	89	59	104	3	78	48	93	726
112	37	67	22	119	44	74	29	108	33	63	18	726
9	84	54	99	4	79	49	94	11	86	56	101	726
114	39	69	24	109	34	64	19	116	41	71	26	726
6	81	51	96	5	80	50	95	13	88	58	103	726
111	36	66	21	110	35	65	20	118	43	73	28	726
605	605	605	605	605	605	605	605	605	605	605	605	

c = b + 15 (a – 1)

On applique la relation c = b + uv (a – 1) [solution 2 de l'exemple précédent], avec uv = 5 x 3 = 15, soit : c = b + 15 (a – 1). On obtient un rectangle magique normal d'ordre 12 x 10, de constante horizontale Mh = 726, et de constante verticale Mv = 605.

<u>Second exemple – Seconde solution.</u>

Mais ce qui n'apparait pas clairement, semble-t-il, pas chez Simon Falconoras, c'est, comme on l'a vu précédemment, qu'une autre solution, avec les mêmes rectangles magiques « pq » et « uv » peut être obtenue, en appliquant la relation « symétrique » : c = a + pq (b – 1), soit avec pq = 8 : c = a + 8(b – 1).

Voici cette seconde solution : un rectangle magique normal de mêmes constantes magiques Mh et Mv que le précédent.

(a) q, p

1	6	4	7	18
8	3	5	2	18
9	9	9	9	

(b) v, u

8	15	1	24
10	2	12	24
7	14	3	24
9	4	11	24
6	5	13	24
40	40	40	

(c)

57	113	1	62	118	6	60	116	4	63	119	7	726
73	9	89	78	14	94	76	12	92	79	15	95	726
49	105	17	54	110	22	52	108	20	55	111	23	726
65	25	81	70	30	86	68	28	84	71	31	87	726
41	33	97	46	38	102	44	36	100	47	39	103	726
64	120	8	59	115	3	61	117	5	58	114	2	726
80	16	96	75	11	91	77	13	93	74	10	90	726
56	112	24	51	107	19	53	109	21	50	106	18	726
72	32	88	67	27	83	69	29	85	66	26	82	726
48	40	104	43	35	99	45	37	101	42	34	98	726
605	605	605	605	605	605	605	605	605	605	605	605	

c = a + 8 (b – 1)

Propriétés des rectangles « produits »

Les sommes des termes des sous-rectangles forment des rectangles magiques, en progression arithmétique :

484	540	428	1452
500	436	516	1452
476	532	444	1452
492	452	508	1452
468	460	524	1452
2420	2420	2420	

428	436	444
452	460	468
476	484	492
500	508	516
524	532	540

Prog. arith. - r =

855	930	900	945	3630
960	855	915	870	3630
1815	1815	1815	1815	

855	870	885	900
915	930	945	960

Progression arith. r = 15

Les sous-rectangles sont des rectangles magiques, dont les constantes forment elles-mêmes des rectangles magiques en progression arithmétique.

Première solution

8	83	53	98	242
113	38	68	23	242
121	121	121	121	

15	90	60	105	270
120	45	75	30	270
135	135	135	135	

1	76	46	91	214
106	31	61	16	214
107	107	107	107	

10	85	55	100	250
115	40	70	25	250
125	125	125	125	

2	77	47	92	218
107	32	62	17	218
109	109	109	109	

12	87	57	102	258
117	42	72	27	258
129	129	129	129	

7	82	52	97	238
112	37	67	22	238
119	119	119	119	

14	89	59	104	266
119	44	74	29	266
133	133	133	133	

3	78	48	93	222
108	33	63	18	222
127	127	127	127	

9	24	54	99	246
114	39	69	24	246
123	123	123	123	

4	79	49	94	226
109	34	64	19	226
113	113	113	113	

11	86	56	101	254
116	41	71	26	254
127	127	127	127	

6	81	51	96	234
111	36	66	21	234
117	117	117	117	

5	80	50	95	230
110	35	65	20	230
115	115	115	115	

13	88	58	103	262
118	43	73	28	262
131	131	131	131	

242	270	214	726
250	218	258	726
238	266	222	726
246	226	254	726
234	230	262	726
1210	1210	1210	1210

121	135	107	363
125	109	129	363
119	133	111	363
123	113	127	363
117	115	131	363
605	605	605	

214	218	222
226	230	234
238	242	246
250	254	258
262	266	270

Prog arith r = 4

107	109	111
113	115	117
119	121	123
125	127	129
131	133	135

Prog arith r = 2

Deuxième solution

57	113	1	171
73	9	89	171
49	105	17	171
65	25	81	171
41	33	97	171
285	285	285	

62	118	6	186
78	14	94	186
54	110	22	186
70	30	86	186
46	38	102	186
310	310	310	

60	116	4	180
76	12	92	180
52	108	20	180
68	28	84	180
44	36	100	180
300	300	300	

63	119	7	189
79	15	95	189
55	111	23	189
71	31	87	189
47	39	103	189
315	315	315	

64	120	8	192
80	16	96	192
56	112	24	192
72	32	88	192
48	40	104	192
320	320	320	

59	115	3	177
75	11	91	177
51	107	19	177
67	27	83	177
43	35	99	177
295	295	295	

61	117	5	183
77	13	93	183
53	109	21	183
69	29	85	183
45	37	101	183
305	305	305	

58	114	2	174
74	10	90	174
50	106	18	174
66	26	82	174
42	34	98	174
290	290	290	

171	186	181	189	726
192	177	183	174	726
363	363	363	363	

285	310	300	315	1210
320	295	305	290	1210
605	605	605	605	

171	174	177	180
183	186	189	192

r = 3

285	290	295	300
305	310	315	320

r = 5

Ainsi observe-t-on que le produit de deux rectangles magiques de *même ordre* (premier exemple, 2 × 4 par 4 × 2, tous deux d'ordre pair, à huit cases) conduit à *un carré semi-magique* normal ; tandis que le produit de deux rectangles magiques *d'ordres différents* conduit à un *rectangle magique normal* (deuxième exemple, 2 × 4 par 5 × 3, le premier d'ordre pair, le second d'ordre impair), et l'on a dans chaque cas *au moins* deux solutions à disposition.

On peut dire en effet *« au moins »,* car peut-être y a-t-il d'autres méthodes et manipulations pour effectuer le produit de deux rectangles magiques ?

On peut aussi constater que ces carrés semi-magiques et ces rectangles « produits » sont dotés de propriétés remarquables.

De curieux rectangles magiques !

On prépare trois grilles rectangulaires identiques, susceptibles d'être magiques : par exemple trois grilles 3 x 5 de 15 cases.

On se propose alors de remplir ces grilles avec la suite des entiers couvrant ces trois grilles, soit depuis 1 jusqu'à 3 x 15 = 45 dans l'exemple ci-dessus, de telle manière que ces trois grilles soient magiques, avec les mêmes constantes magiques dans les lignes et les colonnes.

Une idée comme une autre ! Exemple : tous les nombres de 1 à 45 sont bien représentés.

31	3	38	13	30	115
24	41	12	36	2	115
14	25	19	20	37	115
69	69	69	69	69	

20	40	4	35	7	115
1	18	23	28	45	115
39	11	42	6	17	115
69	69	69	69	69	

9	26	27	21	32	115
44	10	34	5	22	115
16	33	8	43	15	115
69	69	69	69	69	

D'après la terminologie anglo-saxonne, on nomme cet ensemble « 3-dimensional magic rectangle », soit « rectangle magique tridimensionnel ». On pourrait dire aussi que ce sont là trois grilles complémentaires.

Voici d'autres exemples, émanant du japonais Mitsutoshi Nakamura 2004/2005 (Kagoschima, Japon) :

Trois grilles 5 x 7, 35 cases ; un remplissage avec les entiers de 1 à 3 x 35 = 105.

70	54	35	99	22	87	4	371
63	29	93	45	92	24	25	371
89	94	38	9	18	67	56	371
41	34	40	34	48	76	101	371
2	57	59	78	85	11	79	371
265	265	265	265	265	265	265	

62	10	103	32	90	23	51	371
91	100	8	42	1	60	69	371
20	26	33	53	73	80	86	371
37	46	105	64	98	6	15	371
55	83	16	74	3	96	44	371
265	265	265	265	265	265	265	

27	95	21	28	47	49	104	371
5	30	58	72	66	75	65	371
50	39	88	97	68	12	17	371
81	82	14	61	13	77	43	371
102	19	84	7	71	52	36	371
265	265	265	265	265	262	265	

Trois grilles 5 x 11, 55 cases : un remplissage avec les entiers de 1 à 3 x 55 = 165

51	28	120	79	145	44	124	75	5	109	133	913
101	152	20	50	13	130	96	110	128	106	7	913
119	62	67	17	151	24	126	90	78	31	148	913
49	141	131	164	22	158	3	1	64	150	30	913
95	32	77	105	84	59	66	139	140	19	97	913
415	415	415	415	415	415	415	415	415	415		

129	74	103	143	4	98	43	113	155	6	45	913
12	81	127	34	73	111	9	137	86	118	125	913
112	52	94	156	58	83	108	10	72	114	54	913
41	48	80	29	157	55	93	132	39	85	154	913
121	160	11	53	123	68	162	23	63	92	37	913
415	415	415	415	415	415	415	415	415	415	415	

69	147	26	27	100	107	82	61	89	134	71	913
136	16	102	165	163	8	144	2	35	25	117	913
18	135	88	76	40	142	15	149	99	104	47	913
159	60	38	56	70	36	153	116	146	14	65	913
33	57	161	91	42	122	21	87	46	138	115	913
415	415	415	415	415	415	415	415	415	415	415	

Trois grilles 5 x 13, 65 cases : un remplissage avec les entiers de 1 à 3 x 65 = 195

37	106	131	13	116	121	58	74	171	182	187	26	52	1274
84	69	55	180	173	93	175	70	18	31	85	91	150	1274
193	134	36	44	43	101	89	167	54	78	15	192	128	1274
166	79	155	124	12	38	148	2	190	99	8	120	133	1274
10	102	113	129	146	137	20	177	57	100	195	61	27	1274
490	490	490	490	490	490	490	490	490	490	490	490	490	

88	53	162	185	39	154	60	161	73	45	24	174	56	1274
147	149	51	17	115	7	71	66	92	191	168	86	114	1274
33	156	77	132	109	164	98	32	87	64	119	40	163	1274
82	110	28	5	104	130	125	189	81	179	145	47	49	1274
140	22	172	151	123	35	136	42	157	11	34	143	108	1274
490	490	490	490	490	490	490	490	490	490	490	490	490	

169	135	1	96	139	19	176	59	50	67	83	94	186	1274
63	76	188	97	6	194	48	158	184	72	41	117	30	1274
68	4	181	118	142	29	107	95	153	152	160	62	3	1274
46	105	111	165	178	126	21	103	23	16	141	127	112	1274
144	170	9	14	25	122	138	75	80	183	65	90	159	1274
490	490	490	490	490	490	490	490	490	490	490	490	490	

Calcul des constantes magiques associées

Soit m : nombre de lignes ; n : *nombre total de colonnes* (somme des colonnes des trois grilles)

Les relations suivantes donnent les constates magiques :

Constante magique des lignes : $M_m = \frac{n\,(m\,.\,n\,+1)}{6}$

Constante magique des colonnes : $M_n = \frac{m\,(m\,.\,n\,+1)}{2}$

On pourra faire l'application numérique avec les (m, n) ce chacun des exemples ci-dessus.

@@@@@@@

En conclusion, le décryptage de la page intéressant le parcours du cavalier dans une grille rectangulaire du Mémoire de Leonhard Euler de 1759, nous permet d'aborder des sujets proches, qui restent dans le cadre des préoccupations du savant bâlois.

■

(septembre 2015)