ŒUVRES

COMPLÈTES

DE NIELS HENRIK ABEL

NOUVELLE ÉDITION

PUBLIÉE AUX FRAIS DE L'ÉTAT NORVÉGIEN

PAR MM. L. SYLOW ET S. LIE

TOME PREMIER

CONTENANT LES MÉMOIRES PUBLIÉS PAR ABEL

CHRISTIANIA

IMPRIMERIE DE GRØNDAHL & SØN

M DCCC LXXXI

N. H. Abel

XIV.

RECHERCHES SUR LA SÉRIE $1 + \frac{m}{1} x + \frac{m(m-1)}{1.2} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} x^3 + \cdots$

Journal für die reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von *Crelle*, Bd. I, Berlin 1826.

1.

Si l'on fait subir au raisonnement dont on se sert en général quand il s'agit des séries infinies, un examen plus exact, on trouvera qu'il est, à tout prendre, peu satisfaisant, et que par conséquent le nombre des théorèmes, concernant les séries infinies, qui peuvent être considérés comme rigoureusement fondés, est très limité. On applique ordinairement les opérations de l'analyse aux séries infinies de la même manière que si les séries étaient finies, ce qui ne me semble pas permis sans démonstration particulière. Si par exemple on doit multiplier deux séries infinies l'une par l'autre, on pose

$$(u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots)(v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + \cdots) = u_0 v_0 + (u_0 v_1 + u_1 v_0) \\ + (u_0 v_2 + u_1 v_1 + u_2 v_0) + \cdots + (u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + u_2 v_{n-2} + \cdots + u_n v_0) + \cdots$$

Cette équation est très juste lorsque les séries $u_0 + u_1 + \cdots$ et $v_0 + v_1 + \cdots$ sont finies. Mais si elles sont infinies, il est d'abord nécessaire qu'elles convergent, car une série divergente n'a pas de somme; ensuite la série du second membre doit de même converger. C'est seulement avec cette restriction que l'expression ci-dessus est juste; mais, si je ne me trompe, jusqu'à présent on n'y a pas eu égard. C'est ce qu'on se propose de faire dans ce mémoire. Il y a encore plusieurs opérations semblables à justifier p. ex.

le procédé ordinaire pour diviser une quantité par une série infinie, celui de l'élévation d'une série infinie à une puissance, celui de la détermination de son logarithme, de son sinus, de son cosinus, etc.

Un autre procédé qu'on trouve fréquemment dans l'analyse, et qui assez souvent conduit à des contradictions, c'est qu'on se sert des séries divergentes pour l'évaluation des valeurs numériques des séries. Une série divergente ne peut jamais être égale à une quantité déterminée; c'est seulement une expression jouissant de certaines propriétés qui se rapportent aux opérations auxquelles la série est soumise.

Les séries divergentes peuvent quelquefois servir avec succès de symboles pour exprimer telle ou telle proposition d'une manière abrégée; mais on ne saurait jamais les mettre à la place de quantités déterminées. Par un tel procédé on peut démontrer tout ce qu'on veut, l'impossible aussi bien que le possible.

Une des séries les plus remarquables dans l'analyse algébrique est celle-ci:

$$1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3+\cdots$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)\cdots[m-(n-1)]}{1.2.3\ldots n}x^n+\cdots$$

Lorsque m est un nombre entier positif, on sait que la somme de cette série, qui dans ce cas est finie, peut s'exprimer par $(1+x)^m$. Lorsque m n'est pas un nombre entier, la série ira à l'infini, et elle sera convergente ou divergente, selon les différentes valeurs qu'on attribuera à m et à x. Dans ce cas on pose de même l'équation

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2+\cdots,$$

mais alors l'égalité exprime seulement que les deux expressions

$$(1+x)^m \quad \text{et} \quad 1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2+\cdots$$

ont certaines propriétés communes desquelles, pour certaines valeurs de m et de x, dépend l'égalité numérique des expressions. On suppose que l'égalité numérique aura toujours lieu, lorsque la série est convergente; mais c'est ce qui jusqu'à présent n'est pas encore démontré. On n'a même pas examiné tous les cas où la série est convergente. Lors même qu'on suppose l'existence de l'équation ci-dessus, il reste encore à chercher la valeur de $(1+x)^m$, car cette expression a en général une infinité de valeurs différentes, tandis que la série $1+mx+\cdots$ n'en a qu'une seule.

Le but de ce mémoire est d'essayer de remplir une lacune par la solution complète du problème suivant:

"Trouver la somme de la série

$$1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3+\cdots$$

"pour toutes les valeurs réelles ou imaginaires de x et de m pour "lesquelles la série est convergente."

2.

Nous allons d'abord établir quelques théorèmes nécessaires sur les séries. L'excellent ouvrage de M. *Cauchy* "Cours d'analyse de l'école polytechnique", qui doit être lu par tout analyste qui aime la rigueur dans les recherches mathématiques, nous servira de guide.

Définition. Une série quelconque

$$v_0+v_1+v_2+\cdots+v_m+\cdots$$

sera dite convergente, si pour des valeurs toujours croissantes de m, la somme $v_0+v_1+\cdots+v_m$ s'approche indéfiniment d'une certaine limite. Cette limite s'appellera *la somme de la série*. Dans le cas contraire la série sera dite divergente, et elle n'a pas de somme. D'après cette définition, pour qu'une série soit convergente, il est nécessaire et il suffit que pour des valeurs toujours croissantes de m, la somme $v_m+v_{m+1}+\cdots+v_{m+n}$ s'approche indéfiniment de zéro, quelle que soit la valeur de n.

Donc, dans une série convergente quelconque, le terme général v_m s'approchera indéfiniment de zéro*).

Théorème I. Si en désignant par $\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2 \ldots$ une série de quantités positives, le quotient $\frac{\varrho_{m+1}}{\varrho_m}$, pour des valeurs toujours croissantes de m, s'approche indéfiniment d'une limite α plus grande que 1, la série

*) Pour abréger, on représentera dans ce mémoire par ω une quantité qui peut être plus petite que toute quantité donnée.

$$\varepsilon_0\varrho_0+\varepsilon_1\varrho_1+\varepsilon_2\varrho_2+\cdots+\varepsilon_m\varrho_m+\cdots,$$

où ε_m est une quantité qui pour des valeurs toujours croissantes de m ne s'approche pas indéfiniment de zéro, sera nécessairement divergente.

Théorème II. Si dans une série de quantités positives $\varrho_0+\varrho_1+\varrho_2+\cdots+\varrho_m+\cdots$ le quotient $\frac{\varrho_{m+1}}{\varrho_m}$, pour des valeurs toujours croissantes de m, s'approche indéfiniment d'une limite α plus petite que 1, la série

$$\varepsilon_0\varrho_0+\varepsilon_1\varrho_1+\varepsilon_2\varrho_2+\cdots+\varepsilon_m\varrho_m+\cdots,$$

où ε_0, ε_1, ε_2 etc. sont des quantités qui ne surpassent pas l'unité, sera nécessairement convergente.

En effet, d'après la supposition, on peut toujours prendre m assez grand pour que $\varrho_{m+1}<\alpha\varrho_m$, $\varrho_{m+2}<\alpha\varrho_{m+1}$, $\ldots$ $\varrho_{m+n}<\alpha\varrho_{m+n-1}$. Il suit de là que $\varrho_{m+k}<\alpha^k\varrho_m$ et par suite

$$\varrho_m+\varrho_{m+1}+\cdots+\varrho_{m+n}<\varrho_m(1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^n)<\frac{\varrho_m}{1-\alpha},$$

donc, à plus forte raison

$$\varepsilon_m\varrho_m+\varepsilon_{m+1}\varrho_{m+1}+\cdots+\varepsilon_{m+n}\varrho_{m+n}<\frac{\varrho_m}{1-\alpha}.$$

Or, puisque $\varrho_{m+k}<\alpha^k\varrho_m$ et $\alpha<1$, il est clair que ϱ_m et par conséquent la somme

$$\varepsilon_m\varrho_m+\varepsilon_{m+1}\varrho_{m+1}+\cdots+\varepsilon_{m+n}\varrho_{m+n}$$

aura zéro pour limite. La série ci-dessus est donc convergente.

Théorème III. En désignant par t_0, t_1, t_2, $\ldots$ t_m $\ldots$ une série de quantités quelconques, si $p_m=t_0+t_1+t_2+\cdots+t_m$ est toujours moindre qu'une quantité déterminée δ, on aura

$$r=\varepsilon_0t_0+\varepsilon_1t_1+\varepsilon_2t_2+\cdots+\varepsilon_mt_m<\delta\varepsilon_0,$$

où ε_0, ε_1, ε_2 $\ldots$ sont des quantités positives décroissantes.

En effet, on a

$$t_0=p_0,\ t_1=p_1-p_0,\ t_2=p_2-p_1 \text{ etc.}$$

donc

$$r=\varepsilon_0p_0+\varepsilon_1(p_1-p_0)+\varepsilon_2(p_2-p_1)+\cdots+\varepsilon_m(p_m-p_{m-1}),$$

ou bien

$$r=p_0(\varepsilon_0-\varepsilon_1)+p_1(\varepsilon_1-\varepsilon_2)+\cdots+p_{m-1}(\varepsilon_{m-1}-\varepsilon_m)+p_m\varepsilon_m.$$

Or les différences $\varepsilon_0-\varepsilon_1$, $\varepsilon_1-\varepsilon_2$, ... étant positives, la quantité r sera évidemment moindre que $\delta\varepsilon_0$.

Définition. Une fonction fx sera dite *fonction continue* de x entre les limites $x=a$ et $x=b$, si pour une valeur quelconque de x comprise entre ces limites, la quantité $f(x-\beta)$, pour des valeurs toujours décroissantes de β, s'approche indéfiniment de la limite fx.

Théorème IV. Si la série

$$f\alpha=v_0+v_1\alpha+v_2\alpha^2+\cdots+v_m\alpha^m+\cdots$$

est convergente pour une certaine valeur δ de α, elle sera aussi convergente pour toute valeur moindre que δ, et, pour des valeurs toujours décroissantes de β, la fonction $f(\alpha-\beta)$ s'approchera indéfiniment de la limite $f\alpha$, en supposant que α soit égal ou inférieur à δ.

Soit

$$v_0+v_1\alpha+\cdots+v_{m-1}\alpha^{m-1}=\varphi\alpha,$$
$$v_m\alpha^m+v_{m+1}\alpha^{m+1}+\cdots=\psi\alpha,$$

on aura

$$\psi\alpha=\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^m v_m\delta^m+\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^{m+1}v_{m+1}\delta^{m+1}+\cdots;$$

donc, d'après le théorème III, $\psi\alpha<\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^m p$, p désignant la plus grande des quantités $v_m\delta^m$, $v_m\delta^m+v_{m+1}\delta^{m+1}$, $v_m\delta^m+v_{m+1}\delta^{m+1}+v_{m+2}\delta^{m+2}$ etc. On pourra donc pour toute valeur de α, égale ou inférieure à δ, prendre m assez grand pour qu'on ait

$$\psi\alpha=\omega.$$

Or $f\alpha=\varphi\alpha+\psi\alpha$, donc $f\alpha-f(\alpha-\beta)=\varphi\alpha-\varphi(\alpha-\beta)+\omega$.

De plus, $\varphi\alpha$ étant une fonction entière de α, on peut prendre β assez petit pour que

$$\varphi\alpha-\varphi(\alpha-\beta)=\omega;$$

donc on a de même

$$f\alpha-f(\alpha-\beta)=\omega,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Théorème V. Soit

$$v_0+v_1\delta+v_2\delta^2+\cdots$$

une série convergente, dans laquelle v_0, v_1, v_2 ... sont des fonctions continues d'une même quantité variable x entre les limites $x=a$ et $x=b$, la série

$$fx=v_0+v_1\alpha+v_2\alpha^2+\cdots,$$

où $\alpha<\delta$, sera convergente et fonction continue de x entre les mêmes limites.

Il est déjà démontré que la série fx est convergente. On peut démontrer comme il suit, que la fonction fx est continue.

Soit

$$v_0+v_1\alpha+\cdots+v_{m-1}\alpha^{m-1}=\varphi x,$$
$$v_m\alpha^m+v_{m+1}\alpha^{m+1}+\cdots=\psi x,$$

on aura

$$fx=\varphi x+\psi x.$$

Or

$$\psi x=\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^m v_m\delta^m+\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^{m+1} v_{m+1}\delta^{m+1}+\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^{m+2} v_{m+2}\delta^{m+2}+\cdots;$$

donc en désignant par θx la plus grande des quantités $v_m\delta^m$, $v_m\delta^m+v_{m+1}\delta^{m+1}$, $v_m\delta^m+v_{m+1}\delta^{m+1}+v_{m+2}\delta^{m+2}$ etc., on aura en vertu du théorème III:

$$\psi x<\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^m\theta x.$$

Il s'ensuit qu'on peut prendre m assez grand pour qu'on ait $\psi x=\omega$, et que par conséquent on ait aussi

$$fx=\varphi x+\omega,$$

où ω est moindre que toute quantité assignable.

On a de même

$$f(x-\beta)=\varphi(x-\beta)+\omega,$$

donc

$$fx-f(x-\beta)=\varphi x-\varphi(x-\beta)+\omega.$$

Or d'après la forme de φx il est clair qu'on peut prendre β assez petit pour qu'on ait

$$\varphi x-\varphi(x-\beta)=\omega,$$

d'où l'on tire

$$fx-f(x-\beta)=\omega.$$

Donc la fonction fx est continue*).

---

*) Dans l'ouvrage cité de M. *Cauchy* on trouve (p. 131) le théorème suivant: "Lorsque les différens termes de la série, $u_0+u_1+u_2+\cdots$ sont des fonctions d'une

Théorème VI. Lorsqu'on désigne par ϱ_0, ϱ_1, ϱ_2 etc. ϱ_0', ϱ_1', ϱ_2' etc. les valeurs numériques des membres respectifs des deux séries convergentes

$$v_0+v_1+v_2+\cdots=p,$$
$$v_0'+v_1'+v_2'+\cdots=p',$$

si les séries

$$\varrho_0+\varrho_1+\varrho_2+\cdots$$
$$\varrho_0'+\varrho_1'+\varrho_2'+\cdots$$

sont de même convergentes, la série $r_0+r_1+r_2+\cdots$, dont le terme général est,

$$r_m=v_0v_m'+v_1v'_{m-1}+v_2v'_{m-2}+\cdots+v_mv_0',$$

sera de même convergente, et aura pour somme

$$(v_0+v_1+v_2+\cdots)(v_0'+v_1'+v_2'+\cdots).$$

Démonstration. En faisant,

$$p_m=v_0+v_1+\cdots+v_m,$$
$$p_m'=v_0'+v_1'+\cdots+v_m',$$

on voit aisément que

$$\text{(a)}\quad r_0+r_1+r_2+\cdots+r_{2m}=p_mp_m'+[p_0v_{2m}'+p_1v'_{2m-1}+\cdots+p_{m-1}v'_{m+1}\,(=t)$$
$$+p_0'v_{2m}+p_1'v_{2m-1}+\cdots+p'_{m-1}v_{m+1}\,(=t')].$$

Soit

$$\varrho_0+\varrho_1+\varrho_2+\cdots=u,$$
$$\varrho_0'+\varrho_1'+\varrho_2'+\cdots=u',$$

il est clair que, sans égard au signe, on aura,

$$t<u(\varrho'_{2m}+\varrho'_{2m-1}+\cdots+\varrho'_{m+1})$$
$$t'<u'(\varrho_{2m}+\varrho_{2m-1}+\cdots+\varrho_{m+1}).$$

"même variable x, continues par rapport à cette variable dans le voisinage d'une "valeur particulière pour laquelle la série est convergente, la somme s de la série "est aussi, dans le voisinage de cette valeur particulière, fonction continue de x." Mais il me semble que ce théorème admet des exceptions. Par exemple la série

$$\sin x-\tfrac{1}{2}\sin 2x+\tfrac{1}{3}\sin 3x-\cdots$$

est discontinue pour toute valeur $(2m+1)\pi$ de x, m étant un nombre entier. Il y a, comme on sait, beaucoup de séries de cette espèce.

Or les séries $\varrho_0+\varrho_1+\varrho_2+\cdots$ et $\varrho_0'+\varrho_1'+\varrho_2'+\cdots$ étant convergentes, les quantités t et t', pour des valeurs toujours croissantes de m, s'approcheront indéfiniment de la limite zéro. Donc en faisant dans l'équation (a) m infini, on aura

$$r_0+r_1+r_2+r_3+\cdots=(v_0+v_1+v_2+\cdots)(v_0'+v_1'+v_2'+\cdots).$$

Soient $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_0', t_1', t_2' \ldots$ deux séries de quantités positives ou négatives, dont les termes généraux s'approchent indéfiniment de zéro, il suit du théorème II que les séries $t_0+t_1\alpha+t_2\alpha^2+\cdots$ et $t_0'+t_1'\alpha+t_2'\alpha^2+\cdots$, où α désigne une quantité inférieure à l'unité, doivent être convergentes. Il en sera de même en attribuant à chaque terme sa valeur numérique, donc en vertu du théorème précédent:

$$\text{(b)}\quad\left\{\begin{aligned}&(t_0+t_1\alpha+t_2\alpha^2+\cdots)(t_0'+t_1'\alpha+t_2'\alpha^2+\cdots)\\&\qquad=t_0t_0'+(t_1t_0'+t_0t_1')\alpha+(t_2t_0'+t_1t_1'+t_0t_2')\alpha^2+\cdots\\&\qquad\quad+(t_mt_0'+t_{m-1}t_1'+t_{m-2}t_2'+\cdots+t_0t_m')\alpha^m+\cdots\end{aligned}\right.$$

Maintenant si l'on suppose que les trois séries,

$$\begin{gathered}t_0+t_1+t_2+\cdots\\t_0'+t_1'+t_2'+\cdots\\t_0t_0'+(t_1t_0'+t_0t_1')+(t_2t_0'+t_1t_1'+t_0t_2')+\cdots\end{gathered}$$

soient convergentes, on trouvera, en vertu du théorème IV, en faisant dans l'équation (b) α converger vers l'unité:

$$\begin{aligned}&(t_0+t_1+t_2+\cdots)(t_0'+t_1'+t_2'+\cdots)\\&\qquad=t_0t_0'+(t_1t_0'+t_0t_1')+(t_2t_0'+t_1t_1'+t_0t_2')+\cdots\end{aligned}$$

3.

Examinons maintenant la série proposée,

$$1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2+\cdots.$$

En la désignant par φm, et faisant pour abréger, $1=m_0$, $\frac{m}{1}=m_1$, $\frac{m(m-1)}{1.2}=m_2$, et en général $\frac{m(m-1)\ldots(m-\mu+1)}{1.2\ldots\mu}=m_\mu$, on aura

(1) $$\varphi m = m_0 + m_1 x + m_2 x^2 + \cdots + m_\mu x^\mu + \cdots$$

Il s'agit d'abord de trouver les valeurs de m et de x pour lesquelles la série est convergente.

Les quantités m et x étant généralement imaginaires, soit*)

$$x = a + bi,\ m = k + k'i,$$

où a, b, k, k' sont des quantités réelles. En substituant ces valeurs dans l'équation (1), elle prendra la forme

$$\varphi m = p + qi,$$

où p et q sont des séries dont les termes ont des valeurs réelles. On peut trouver ces séries de la manière suivante: Soit

$$(a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}} = \alpha,\ \frac{a}{\alpha} = \cos\varphi,\ \frac{b}{\alpha} = \sin\varphi,$$

l'on aura

$$x = \alpha(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

où α et φ sont des quantités réelles, α étant en outre positif. Si l'on fait de plus

$$\frac{m-\mu+1}{\mu} = \delta_\mu(\cos\gamma_\mu + i\sin\gamma_\mu) = \frac{k+k'i-\mu+1}{\mu},$$

on trouvera

$$\delta_\mu = \left[\left(\frac{k-\mu+1}{\mu}\right)^2 + \left(\frac{k'}{\mu}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}};\ \cos\gamma_\mu = \frac{k-\mu+1}{\mu\delta_\mu};\ \sin\gamma_\mu = \frac{k'}{\mu\delta_\mu}.$$

Si dans l'expression

$$\frac{m-\mu+1}{\mu} = \delta_\mu(\cos\gamma_\mu + i\sin\gamma_\mu),$$

on fait successivement μ égal à 1, 2, 3, ... μ, on obtiendra μ équations qui multipliées terme à terme donneront

$$\begin{aligned} m_\mu &= \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-\mu+1)}{1.2.3\ldots.\mu} \\ &= \delta_1\delta_2\delta_3\ldots\delta_\mu[\cos(\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_\mu) + i\sin(\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_\mu)]. \end{aligned}$$

On tire de là, en multipliant par

*) Pour abréger les formules nous écrivons partout dans ce mémoire i au lieu de $\sqrt{-1}$.

Note des éd.

$$x^\mu = \alpha^\mu(\cos\varphi + i\sin\varphi)^\mu = \alpha^\mu(\cos\mu\varphi + i\sin\mu\varphi):$$

$$m_\mu x^\mu = \alpha^\mu \delta_1\delta_2\delta_3\ldots\delta_\mu[\cos(\mu\varphi+\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_\mu) \\ + i\sin(\mu\varphi+\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_\mu)],$$

ou bien en faisant pour abréger

$$\delta_1\delta_2\delta_3\ldots\delta_\mu = \lambda_\mu,\ \mu\varphi+\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_\mu = \theta_\mu:$$

$$m_\mu x^\mu = \lambda_\mu \alpha^\mu(\cos\theta_\mu + i\sin\theta_\mu).$$

L'expression (1) se change par là en celle-ci,

$$\varphi m = 1 + \lambda_1\alpha(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) + \lambda_2\alpha^2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ + \cdots + \lambda_\mu\alpha^\mu(\cos\theta_\mu + i\sin\theta_\mu) + \cdots,$$

ou en celle-ci,

$$\varphi m = 1 + \lambda_1\alpha\cos\theta_1 + \lambda_2\alpha^2\cos\theta_2 + \cdots + \lambda_\mu\alpha^\mu\cos\theta_\mu + \cdots \\ + i(\lambda_1\alpha\sin\theta_1 + \lambda_2\alpha^2\sin\theta_2 + \cdots + \lambda_\mu\alpha^\mu\sin\theta_\mu + \cdots).$$

On a donc

$$(2)\quad \begin{cases} p = 1 + \lambda_1\alpha\cos\theta_1 + \lambda_2\alpha^2\cos\theta_2 + \cdots + \lambda_\mu\alpha^\mu\cos\theta_\mu + \cdots \\ q = \quad\ \lambda_1\alpha\sin\theta_1 + \lambda_2\alpha^2\sin\theta_2 + \cdots + \lambda_\mu\alpha^\mu\sin\theta_\mu + \cdots \end{cases}$$

Or je dis que ces séries seront *divergentes* ou *convergentes*, selon que α est *supérieur* ou *inférieur* à l'unité.

De l'expression de λ_μ on tire $\lambda_{\mu+1} = \delta_{\mu+1}\lambda_\mu$, donc

$$\lambda_{\mu+1}\alpha^{\mu+1} = \alpha\delta_{\mu+1}\lambda_\mu\alpha^\mu,$$

et

$$\frac{\lambda_{\mu+1}\alpha^{\mu+1}}{\lambda_\mu\alpha^\mu} = \alpha\delta_{\mu+1};$$

mais on a

$$\delta_{\mu+1} = \left[\left(\frac{k-\mu}{\mu+1}\right)^2 + \left(\frac{k'}{\mu+1}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

donc pour des valeurs toujours croissantes de μ, δ_μ s'approchera de la limite 1, et par suite $\frac{\lambda_{\mu+1}\alpha^{\mu+1}}{\lambda_\mu\alpha^\mu}$ de la limite α. Donc en vertu des théorèmes I et II du paragraphe précédent les séries p et q seront divergentes ou convergentes, suivant que α est supérieur ou inférieur à l'unité. Il en est donc de même de la série proposée φm.

Le cas où $\alpha = 1$, sera traité plus bas.

Comme la série φm est convergente pour toute valeur de α inférieure à l'unité, la somme en sera une certaine fonction de m et de x. On peut, comme il suit, établir une propriété de cette fonction à l'aide de laquelle on peut la trouver: On a

$$\varphi m = m_0 + m_1 x + m_2 x^2 + \cdots + m_\mu x^\mu + \cdots,$$
$$\varphi n = n_0 + n_1 x + n_2 x^2 + \cdots + n_\mu x^\mu + \cdots,$$

où n_μ désigne la valeur de m_μ pour $m = n$. On en conclut d'après le théorème VI:

$$\varphi m . \varphi n = t_0 t_0' + (t_0 t_1' + t_1 t_0') + (t_0 t_2' + t_1 t_1' + t_2 t_0') + \cdots$$
$$+ (t_0 t_\mu' + t_1 t'_{\mu-1} + t_2 t'_{\mu-2} + \cdots + t_\mu t_0') + \cdots,$$

où $t_\mu = m_\mu x^\mu$, $t_\mu' = n_\mu x^\mu$, en supposant que la série du second membre soit convergente. En substituant les valeurs de t_μ et t_μ', on aura

$$\varphi m . \varphi n = m_0 n_0 + (m_0 n_1 + m_1 n_0)x + (m_0 n_2 + m_1 n_1 + m_2 n_0)x^2 + \cdots$$
$$+ (m_0 n_\mu + m_1 n_{\mu-1} + m_2 n_{\mu-2} + \cdots + m_\mu n_0)x^\mu + \cdots$$

Or, d'après une propriété connue de la fonction m_μ, on a

$$(m+n)_\mu = m_0 n_\mu + m_1 n_{\mu-1} + m_2 n_{\mu-2} + \cdots + m_\mu n_0,$$

$(m+n)_\mu$ désignant la valeur de m_μ lorsqu'on y substitue $m+n$ pour m. On aura donc par substitution

$$\varphi m . \varphi n = (m+n)_0 + (m+n)_1 x + (m+n)_2 x^2 + \cdots + (m+n)_\mu x^\mu + \cdots$$

Or d'après ce qui précède, le second membre de cette équation est une série convergente et précisément la même chose que $\varphi(m+n)$; donc

$$\varphi m . \varphi n = \varphi(m+n). \tag{3}$$

Cette équation exprime une propriété fondamentale de la fonction φm. De cette propriété nous déduirons une expression de la fonction sous forme finie à l'aide des fonctions exponentielles, logarithmiques et circulaires.

Comme on l'a vu plus haut, la fonction φm est de la forme $p + qi$, p et q étant toujours réels et fonctions des quantités k, k', α et φ, et $m = k + k'i$, $x = \alpha(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Soit

$$p + qi = r(\cos s + i \sin s),$$

on trouvera

$$(p^2+q^2)^{\frac{1}{2}} = r,\quad \frac{p}{r} = \cos s,\quad \frac{q}{r} = \sin s,$$

r étant toujours positif et s une quantité réelle. Soit

$$r=f(k,k'),\quad s=\psi(k,k'),$$

on aura

$$(3') \qquad p+qi=\varphi(k+k'i)=f(k,k')[\cos\psi(k,k')+i\sin\psi(k,k')].$$

On en tire, en mettant successivement l, l' et $k+l$, $k'+l'$ à la place de k et k',

$$\varphi(l+l'i)=f(l,l')[\cos\psi(l,l')+i\sin\psi(l,l')],$$
$$\varphi[k+l+(k'+l')i]$$
$$=f(k+l,k'+l')[\cos\psi(k+l,k'+l')+i\sin\psi(k+l,k'+l')].$$

Or en vertu de l'équation $\varphi m.\varphi n=\varphi(m+n)$, on a

$$\varphi[k+l+(k'+l')i]=\varphi(k+k'i)\varphi(l+l'i),$$

en faisant $m=k+k'i$, $n=l+l'i$. Donc en substituant, on obtient

$$f(k+l,k'+l')[\cos\psi(k+l,k'+l')+i\sin\psi(k+l,k'+l')]$$
$$=f(k,k')f(l,l')[\cos(\psi(k,k')+\psi(l,l'))+i\sin(\psi(k,k')+\psi(l,l'))].$$

Cette équation donne, lorsqu'on sépare les termes réels des termes imaginaires,

$$f(k+l,k'+l')\cos\psi(k+l,k'+l')=f(k,k')f(l,l')\cos[\psi(k,k')+\psi(l,l')],$$
$$f(k+l,k'+l')\sin\psi(k+l,k'+l')=f(k,k')f(l,l')\sin[\psi(k,k')+\psi(l,l')].$$

En faisant les carrés et ajoutant les équations membre à membre, on aura

$$[f(k+l,k'+l')]^2=[f(k,k')f(l,l')]^2,$$

d'où

$$(4) \qquad f(k+l,k'+l')=f(k,k')f(l,l').$$

En vertu de cette équation les précédentes se transforment en celles-ci:

$$\cos\psi(k+l,k'+l')=\cos[\psi(k,k')+\psi(l,l')],$$
$$\sin\psi(k+l,k'+l')=\sin[\psi(k,k')+\psi(l,l')],$$

d'où l'on tire,

$$(5) \qquad \psi(k+l,k'+l')=2m\pi+\psi(k,k')+\psi(l,l'),$$

m étant un nombre entier positif ou négatif.

Maintenant il s'agit de tirer les fonctions $f(k,k')$ et $\psi(k,k')$ des équations (4) et (5). D'abord je dis qu'elles sont des fonctions continues de k et k' entre des limites quelconques de ces variables. En effet, d'après le théorème V, p et q sont évidemment des fonctions continues. Or on a

$$f(k,k')=(p^2+q^2)^{\frac{1}{2}},\quad \cos\psi(k,k')=\frac{p}{f(k,k')},\quad \sin\psi(k,k')=\frac{q}{f(k,k')};$$

donc $f(k,k')$, de même que $\cos\psi(k,k')$ et $\sin\psi(k,k')$, est une fonction continue. On peut donc supposer que $\psi(k,k')$ est aussi une fonction continue. Nous allons d'abord examiner l'équation (5). $\psi(k,k')$ étant une fonction continue, il faut que m ait la même valeur pour toutes les valeurs de k, k', l, l'. En faisant donc successivement $l=0$, $k=0$, on obtient

$$\psi(k,k'+l')=2m\pi+\psi(k,k')+\psi(0,l'),$$
$$\psi(l,k'+l')=2m\pi+\psi(0,k')+\psi(l,l').$$

En éliminant entre ces équations et l'équation (5) les deux quantités $\psi(k,k')$ et $\psi(l,l')$, on trouvera

$$\psi(k,k'+l')+\psi(l,k'+l')=2m\pi+\psi(0,k')+\psi(0,l')+\psi(k+l,k'+l').$$

Soit pour abréger

$$(6)\qquad \begin{cases} \psi(k,k'+l')=\theta k, \\ 2m\pi+\psi(0,k')+\psi(0,l')=a, \end{cases}$$

on aura

$$(7)\qquad \theta k+\theta l=a+\theta(k+l).$$

En faisant ici successivement $l=k, 2k, \ldots \varrho k$, on aura

$$2\theta k=a+\theta(2k),$$
$$\theta k+\theta(2k)=a+\theta(3k),$$
$$\theta k+\theta(3k)=a+\theta(4k),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\theta k+\theta(\varrho-1)k=a+\theta(\varrho k).$$

En ajoutant ces équations, on trouve

$$(7')\qquad \varrho\,\theta k=(\varrho-1)a+\theta(\varrho k).$$

On en tire, en faisant $k=1$,

$$\theta\varrho=\varrho[\theta(1)-a]+a,$$

ou bien en faisant $\theta(1)-a=c$,

(8) $$\theta\varrho=c\varrho+a.$$

Voilà donc la valeur de la fonction θk, lorsque k est un nombre entier. Mais la fonction θk aura la même forme pour toute valeur de k, ce qu'on peut démontrer aisément comme il suit. Si l'on pose dans l'équation (7') $k=\frac{\mu}{\varrho}$, μ étant un nombre entier, on en tire $\varrho.\theta\left(\frac{\mu}{\varrho}\right)=(\varrho-1)a+\theta\mu$. Or en vertu de l'équation (8)

$$\theta\mu=c\mu+a,$$

donc en substituant et divisant par ϱ, on trouve

$$\theta\left(\frac{\mu}{\varrho}\right)=c\left(\frac{\mu}{\varrho}\right)+a.$$

L'équation (8) a donc lieu pour toute valeur positive et rationnelle de ϱ.

Soit $l=-k$, l'équation (7) deviendra,

$$\theta k+\theta(-k)=a+\theta(0).$$

Il s'ensuit, en posant $k=0$,

$$\theta(0)=a,$$

et par conséquent

$$\theta(-k)=2a-\theta k.$$

Or k étant rationnel et positif, on a $\theta k=ck+a$, donc

$$\theta(-k)=-ck+a.$$

L'équation

(9) $$\theta k=ck+a,$$

a donc lieu pour toute valeur rationnelle de k et par conséquent, puisque θk est une fonction continue, pour toute valeur réelle de k.

Or $\theta k=\psi(k,k'+l')$, et $a=2m\pi+\psi(0,k')+\psi(0,l')$; faisant donc $c=\theta(k',l')$, on obtient

(10) $$\psi(k,k'+l')=\theta(k',l').k+2m\pi+\psi(0,k')+\psi(0,l').$$

On tire de là, en faisant $k=0$,

$$\psi(0,k'+l')=2m\pi+\psi(0,k')+\psi(0,l').$$

Cette équation étant de la même forme que l'équation (7), elle donnera de la même manière

$$\psi(0,k')=\beta' k'-2m\pi,$$

β' étant une quantité indépendante de k'.

En mettant l' à la place de k', on obtient $\psi(0,l')=-2m\pi+\beta' l'$. En substituant ces valeurs de $\psi(0,k')$ et de $\psi(0,l')$ dans l'équation (10) on en tirera

$$\psi(k,k'+l')=\theta(k',l').k+\beta'(k'+l')-2m\pi.$$

On voit par là que $\theta(k',l')$ est une fonction de $k'+l'$. En la désignant par $F(k'+l')$, on aura

$$\psi(k,k'+l')=F(k'+l').k+\beta'(k'+l')-2m\pi,$$

et par conséquent, en faisant $l'=0$,

$$\psi(k,k')=Fk'.k+\beta' k'-2m\pi.$$

En remarquant que

$$\psi(k,k'+l')=2m\pi+\psi(k,k')+\psi(0,l'),$$
$$\psi(0,l')=\beta' l'-2m\pi,$$

l'équation précédente donne

$$F(k'+l').k+\beta'(k'+l')-2m\pi=2m\pi+Fk'.k+\beta' k'-2m\pi+\beta' l'-2m\pi,$$

c'est-à-dire:

$$F(k'+l')=Fk'.$$

Donc faisant $k'=0$, on obtient $Fl'=F(0)=\beta=Fk'$. Par suite la valeur de $\psi(k,k')$ prend la forme,

$$\psi(k,k')=\beta k+\beta' k'-2m\pi, \tag{11}$$

β et β' étant deux constantes. Cette valeur de $\psi(k,k')$ satisfera à l'équation (5) dans toute sa généralité comme il est aisé de le voir.

Maintenant, examinons l'équation,

$$f(k+l,k'+l')=f(k,k')f(l,l').$$

Puisque $f(k,k')$ est toujours une quantité positive, on peut poser

$$f(k,k')=e^{F(k,k')},$$

$F(k,k')$ désignant une fonction réelle continue de k et k'. En substituant et en prenant les logarithmes des deux membres, on trouvera

$$F(k+l,k'+l')=F(k,k')+F(l,l').$$

Comme cette équation coïncide avec l'équation (5), en mettant F à la place de ψ, et 0 à la place de m, elle donnera en vertu de l'équation (11)

$$F(k,k')=\delta k+\delta' k', \tag{12}$$

δ et δ', de même que β et β', étant deux quantités indépendantes de k et de k'. La fonction $f(k,k')$ prendra donc la forme,

$$f(k,k')=e^{\delta k+\delta' k'}$$

Les fonctions $\psi(k,k')$ et $f(k,k')$ étant trouvées de cette manière, on aura, d'après l'équation (3'),

$$\varphi(k+k'i)=e^{\delta k+\delta' k'}[\cos(\beta k+\beta' k')+i\sin(\beta k+\beta' k')], \tag{13}$$

où il reste encore à trouver les quantités δ, δ', β, β', qui ne peuvent être que des fonctions de α et de φ. On a

$$\varphi(k+k'i)=p+qi,$$

p et q étant donnés par les équations (2). En séparant les quantités réelles des imaginaires, on aura

$$\left\{\begin{aligned} e^{\delta k+\delta' k'}\cos(\beta k+\beta' k') &= 1+\lambda_1\alpha\cos\theta_1+\lambda_2\alpha^2\cos\theta_2+\cdots \\ &\qquad +\lambda_\mu\alpha^\mu\cos\theta_\mu+\cdots \\ e^{\delta k+\delta' k'}\sin(\beta k+\beta' k') &= \lambda_1\alpha\sin\theta_1+\lambda_2\alpha^2\sin\theta_2+\cdots \\ &\qquad +\lambda_\mu\alpha^\mu\sin\theta_\mu+\cdots \end{aligned}\right. \tag{14}$$

Nous allons d'abord considérer le cas où m est réel, c'est-à-dire où $k'=0$. Alors les expressions (14) prennent la forme,

$$\left\{\begin{aligned} e^{\delta k}\cos\beta k &= 1+\frac{k}{1}\alpha\cos\varphi+\frac{k(k-1)}{1.2}\alpha^2\cos 2\varphi \\ &\qquad +\frac{k(k-1)(k-2)}{1.2.3}\alpha^3\cos 3\varphi+\cdots=f\alpha \\ e^{\delta k}\sin\beta k &= \frac{k}{1}\alpha\sin\varphi+\frac{k(k-1)}{1.2}\alpha^2\sin 2\varphi \\ &\qquad +\frac{k(k-1)(k-2)}{1.2.3}\alpha^3\sin 3\varphi+\cdots=\theta\alpha. \end{aligned}\right. \tag{15}$$

Pour trouver δ et β, posons $k=1$, on aura

$$e^\delta\cos\beta=1+\alpha\cos\varphi;\quad e^\delta\sin\beta=\alpha\sin\varphi.$$

On en tire

$$e^\delta=(1+2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$\cos\beta=\frac{1+\alpha\cos\varphi}{(1+2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)^{\frac{1}{2}}},\quad \sin\beta=\frac{\alpha\sin\varphi}{(1+2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)^{\frac{1}{2}}},$$
$$\operatorname{tang}\beta=\frac{\alpha\sin\varphi}{1+\alpha\cos\varphi}.$$

Cette dernière équation donne, en désignant par s la plus petite de toutes les valeurs de β qui y satisfasse, et qui est toujours renfermée entre les limites $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$,

$$\beta=s+\mu\pi,$$

μ étant un nombre entier positif ou négatif. Donc les équations (15) se changent en celles-ci:

$$f\alpha=e^{\delta k}\cos k(s+\mu\pi)=e^{\delta k}\cos ks\cos k\mu\pi-e^{\delta k}\sin ks.\sin k\mu\pi,$$
$$\theta\alpha=e^{\delta k}\sin k(s+\mu\pi)=e^{\delta k}\sin ks\cos k\mu\pi+e^{\delta k}\cos ks.\sin k\mu\pi.$$

De ces équations on tire

$$\cos k\mu\pi=e^{-\delta k}(f\alpha.\cos ks+\theta\alpha.\sin ks),$$
$$\sin k\mu\pi=e^{-\delta k}(\theta\alpha.\cos ks-f\alpha.\sin ks).$$

Or, d'après le théorème IV, $\theta\alpha$ et $f\alpha$ sont des fonctions continues de α; par conséquent il faut que $\cos k\mu\pi$ et $\sin k\mu\pi$ conservent les mêmes valeurs pour toute valeur de α. Il suffit donc pour les trouver, d'attribuer à α une valeur quelconque. Soit $\alpha=0$, on aura, en remarquant qu'alors $e^{\delta}=1$, $f\alpha=1$, $\theta\alpha=0$, $s=0$,

$$\cos k\mu\pi=1,\ \sin k\mu\pi=0.$$

En substituant ces valeurs dans les expressions de $f\alpha$ et $\theta\alpha$, et en se rappelant que $e^{\delta}=(1+2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)^{\frac{1}{2}}$, on obtiendra

$$f\alpha=(1+2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)^{\frac{k}{2}}\cos ks,\quad \theta\alpha=(1+2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)^{\frac{k}{2}}\sin ks.$$

Donc enfin les expressions (15) deviendront:

$$(16)\quad\left\{\begin{aligned}&1+\frac{k}{1}\alpha\cos\varphi+\frac{k(k-1)}{1.2}\alpha^2\cos 2\varphi+\frac{k(k-1)(k-2)}{1.2.3}\alpha^3\cos 3\varphi+\cdots\\&\qquad=(1+2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)^{\frac{k}{2}}\cos ks.\\&\frac{k}{1}\alpha\sin\varphi+\frac{k(k-1)}{1.2}\alpha^2\sin 2\varphi+\frac{k(k-1)(k-2)}{1.2.3}\alpha^3\sin 3\varphi+\cdots\\&\qquad=(1+2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)^{\frac{k}{2}}\sin ks,\end{aligned}\right.$$

s étant renfermé entre les limites $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$ et satisfaisant à l'équation

$$\operatorname{tang} s = \frac{\alpha \sin \varphi}{1+\alpha \cos \varphi}.$$

Les expressions (16) ont été établies pour la première fois par M. *Cauchy* dans l'ouvrage cité plus haut.

On a supposé ici la quantité α moindre que l'unité. On verra plus bas que α peut aussi être égal à l'unité, lorsqu'on donne à la quantité k une valeur convenable.

Dans ce qui précède nous avons trouvé les quantités δ et β. Maintenant nous allons montrer comment on peut trouver les deux autres quantités inconnues δ' et β'. Faisant à cet effet dans les équations (14) $k=0$ et $k'=n$, on obtiendra

$$e^{\delta' n}\cos \beta' n = 1+\lambda_1 \alpha \cos \theta_1 + \lambda_2 \alpha^2 \cos \theta_2 + \cdots,$$
$$e^{\delta' n}\sin \beta' n = \lambda_1 \alpha \sin \theta_1 + \lambda_2 \alpha^2 \sin \theta_2 + \cdots,$$

où $\lambda_\mu = \delta_1 \delta_2 \delta_3 \ldots \delta_\mu$, $\theta_\mu = \mu\varphi + \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_\mu$, δ_μ et γ_μ étant déterminés par les équations

$$\delta_\mu = \left[\left(\frac{\mu-1}{\mu}\right)^2 + \left(\frac{n}{\mu}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}},\quad \cos\gamma_\mu = -\frac{\mu-1}{\mu\delta_\mu},\quad \sin\gamma_\mu = \frac{n}{\mu\delta_\mu}.$$

De ces équations on déduit les suivantes:

$$\frac{e^{\delta' n}\cos\beta' n - 1}{n} = \frac{\lambda_1}{n}\alpha\cos\theta_1 + \frac{\lambda_2}{n}\alpha^2\cos\theta_2 + \cdots,$$
$$\frac{e^{\delta' n}\sin\beta' n}{n} = \frac{\lambda_1}{n}\alpha\sin\theta_1 + \frac{\lambda_2}{n}\alpha^2\sin\theta_2 + \cdots.$$

Or en supposant n positif on a $\lambda_1 = \delta_1 = n$, donc $\frac{\lambda_\mu}{n} = \delta_2\delta_3 \ldots \delta_\mu$, et par suite

$$\frac{e^{\delta' n}\cos\beta' n - 1}{n} = \alpha\cos\theta_1 + \delta_2\alpha^2\cos\theta_2 + \delta_2\delta_3\alpha^3\cos\theta_3 + \cdots,$$
$$\frac{e^{\delta' n}\sin\beta' n}{n} = \alpha\sin\theta_1 + \delta_2\alpha^2\sin\theta_2 + \delta_2\delta_3\alpha^3\sin\theta_3 + \cdots.$$

Ces séries sont convergentes pour toute valeur de n, zéro y compris, ce qu'on voit aisément par le théorème II. En faisant donc converger n vers la limite zéro, et remarquant que, d'après le théorème V, les séries sont des fonctions continues, on obtient

$$\delta'=\alpha\cos\theta_1'+\delta_2'\alpha^2\cos\theta_2'+\delta_2'\delta_3'\alpha^3\cos\theta_3'+\cdots,$$
$$\beta'=\alpha\sin\theta_1'+\delta_2'\alpha^2\sin\theta_2'+\delta_2'\delta_3'\alpha^3\sin\theta_3'+\cdots,$$

puisque δ' et β' sont les limites des quantités $\frac{e^{\delta' n}\cos\beta' n-1}{n}$ et $\frac{e^{\delta' n}\sin\beta' n}{n}$; θ_μ' est la limite de θ_μ et δ_μ' celle de δ_μ. Or, d'après l'expression de δ_μ, on a $\delta_\mu'=\frac{\mu-1}{\mu}$; donc $\cos\gamma_\mu=-1$; $\sin\gamma_\mu=0$ (lorsque $\mu>1$), donc

$$\cos\theta_\mu'=\cos(\mu\varphi+\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_\mu)=+\sin\mu\varphi.(-1)^\mu,$$
$$\sin\theta_\mu'=\sin(\mu\varphi+\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_\mu)=-\cos\mu\varphi.(-1)^\mu,$$

où il faut se rappeler qu'en vertu de l'équation

$$ni=\delta_1(\cos\gamma_1+i\sin\gamma_1),$$

on a $\cos\gamma_1=0$, $\sin\gamma_1=1$. Donc les valeurs de β' et δ' seront celles-ci:

$$\beta'=\alpha\cos\varphi-\tfrac{1}{2}\alpha^2\cos 2\varphi+\tfrac{1}{3}\alpha^3\cos 3\varphi-\cdots,$$
$$\delta'=-(\alpha\sin\varphi-\tfrac{1}{2}\alpha^2\sin 2\varphi+\tfrac{1}{3}\alpha^3\sin 3\varphi-\cdots)$$

De cette manière on a trouvé les quantités β' et δ' par des séries infinies. On peut aussi les exprimer sous forme finie. Car on tire de l'équation (15):

$$\frac{e^{\delta k}\cos\beta k-1}{k}=\alpha\cos\varphi+\frac{k-1}{1.2}\alpha^2\cos 2\varphi+\frac{(k-1)(k-2)}{1.2.3}\alpha^3\cos 3\varphi+\cdots,$$
$$\frac{e^{\delta k}\sin\beta k}{k}=\alpha\sin\varphi+\frac{k-1}{1.2}\alpha^2\sin 2\varphi+\frac{(k-1)(k-2)}{1.2.3}\alpha^3\sin 3\varphi+\cdots.$$

On en déduit, en faisant converger k vers zéro,

$$(17)\qquad\left\{\begin{aligned}\delta&=\alpha\cos\varphi-\tfrac{1}{2}\alpha^2\cos 2\varphi+\tfrac{1}{3}\alpha^3\cos 3\varphi-\cdots,\\ \beta&=\alpha\sin\varphi-\tfrac{1}{2}\alpha^2\sin 2\varphi+\tfrac{1}{3}\alpha^3\sin 3\varphi-\cdots,\end{aligned}\right.$$

donc $\beta'=\delta$, $\delta'=-\beta$. Donc les expressions (14) prennent la forme

$$(18)\qquad\left\{\begin{aligned}&1+\lambda_1\alpha\cos\theta_1+\lambda_2\alpha^2\cos\theta_2+\cdots+\lambda_\mu\alpha^\mu\cos\theta_\mu+\cdots\\ &\qquad=e^{\delta k-\beta k'}\cos(\beta k+\delta k')=p,\\ &\lambda_1\alpha\sin\theta_1+\lambda_2\alpha^2\sin\theta_2+\cdots+\lambda_\mu\alpha^\mu\sin\theta_\mu+\cdots\\ &\qquad=e^{\delta k-\beta k'}\sin(\beta k+\delta k')=q,\end{aligned}\right.$$

où

$$\delta=\tfrac{1}{2}\log(1+2\alpha\cos\varphi+\alpha^2),\quad \beta=\text{arc. tang}\,\frac{\alpha\sin\varphi}{1+\alpha\cos\varphi};$$

or la somme de la série proposée étant égale à $p+qi$, on aura

$$1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\ldots(m-\mu+1)}{1.2\ldots\mu}x^\mu+\cdots$$
$$=e^{\delta k-\beta k'}[\cos(\beta k+\delta k')+i\sin(\beta k+\delta k')].$$

Maintenant on a

$$m=k+k'i,\ x=\alpha(\cos\varphi+i\sin\varphi)=a+bi;$$

donc

$$\alpha=\sqrt{a^2+b^2},\ \alpha\cos\varphi=a,\ \alpha\sin\varphi=b,$$

$$\delta=\tfrac{1}{2}\log(1+2a+a^2+b^2)=\tfrac{1}{2}\log[(1+a)^2+b^2],\ \beta=\text{arc tang}\,\frac{b}{1+a}.$$

En substituant et en écrivant m pour k et n pour k', l'expression ci-dessus prend la forme:

(19)

$$1+\frac{m+ni}{1}(a+bi)+\frac{(m+ni)(m-1+ni)}{1\ .\ 2}(a+bi)^2$$
$$+\frac{(m+ni)(m-1+ni)(m-2+ni)}{1\ .\ 2\ .\ 3}(a+bi)^3+\cdots$$
$$+\frac{(m+ni)(m-1+ni)(m-2+ni)\ldots(m-\mu+1+ni)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ .\ .\ \mu}(a+bi)^\mu+\cdots$$
$$=\Big[\cos\Big(m\,\text{arc tang}\,\tfrac{b}{1+a}+\tfrac{1}{2}n\log[(1+a)^2+b^2]\Big)+i\sin\Big(m\,\text{arc tang}\,\tfrac{b}{1+a}+\tfrac{1}{2}n\log[(1+a)^2+b^2]\Big)\Big]$$
$$\times[(1+a)^2+b^2]^{\frac{m}{2}}e^{-n\,\text{arc tang}\,\frac{b}{1+a}}.$$

Cette expression a lieu comme nous l'avons vu, de même que l'expression (18), pour toute valeur de $\alpha=\sqrt{a^2+b^2}$ inférieure à l'unité.

En faisant p. ex. $b=0$, $n=0$, on a l'expression

$$(20)\qquad 1+\frac{m}{1}a+\frac{m(m-1)}{1.2}a^2+\cdots=(1+a)^m,$$

de laquelle nous tirerons parti ci-après.

4.

Dans ce qui précède on a trouvé la somme de la série proposée toutes les fois que $\alpha=\sqrt{a^2+b^2}$ est inférieur à l'unité. Il reste encore à examiner le cas où cette quantité est égale à 1.

Nous avons vu par le théorème IV que lorsque α s'approche indéfiniment de l'unité, la série

$$v_0+v_1\alpha+v_2\alpha^2+\cdots$$

s'approchera en même temps de la limite $v_0+v_1+v_2+\cdots$, en supposant que cette dernière série soit convergente. En faisant donc converger α vers l'unité dans les équations (18), on aura

$$(21)\left\{\begin{aligned}1+\lambda_1\cos\theta_1+\lambda_2\cos\theta_2+\cdots+\lambda_\mu\cos\theta_\mu+\cdots&=e^{\delta_1k-\beta_1k'}\cos(\beta_1k+\delta_1k'),\\ \lambda_1\sin\theta_1+\lambda_2\sin\theta_2+\cdots+\lambda_\mu\sin\theta_\mu+\cdots&=e^{\delta_1k-\beta_1k'}\sin(\beta_1k+\delta_1k'),\end{aligned}\right.$$

où δ_1 et β_1 sont les limites des quantités δ et β, en supposant que les séries, contenues dans ces équations, soient convergentes. Or il est clair que $\frac{1}{2}\log(2+2\cos\varphi)$ est la limite de δ, et que

$$\text{arc tang}\,\frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi}=\text{arc tang}\,\frac{2\cos\frac{1}{2}\varphi\sin\frac{1}{2}\varphi}{2(\cos\frac{1}{2}\varphi)^2}=\text{arc tang}\,(\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\varphi)$$

est celle de β; on a donc

$$(22)\qquad \delta_1=\tfrac{1}{2}\log(2+2\cos\varphi),\quad \beta_1=\text{arc tang}\,(\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\varphi).$$

Nous n'avons donc qu'à examiner dans quels cas les séries sont convergentes. A cet effet il faut distinguer trois cas: lorsque k est égal à -1, ou compris entre -1 et $-\infty$; lorsque k est compris entre 0 et $+\infty$, et lorsque k est égal à zéro ou compris entre 0 et -1.

Premier cas, lorsque k est égal à -1 ou compris entre -1 et $-\infty$. On a

$$\delta_\mu=\left[\left(\frac{k-\mu+1}{\mu}\right)^2+\left(\frac{k'}{\mu}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

En faisant donc $k=-1-n$, on a

$$\delta_\mu=\left[\left(\frac{n+\mu}{\mu}\right)^2+\left(\frac{k'}{\mu}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

d'où l'on voit que δ_μ est toujours égal ou supérieur à l'unité. Or on a $\lambda_\mu = \delta_1 \delta_2 \delta_3 \ldots \delta_\mu$, donc pour des valeurs toujours croissantes de μ, λ_μ ne convergera pas vers zéro, donc en vertu du théorème I les séries (21) sont divergentes.

Deuxième cas, lorsque k est positif. Supposons que c soit une quantité positive inférieure à k, on aura

$$(\mu-k-1+c)^2=(\mu-k-1)^2+2c(\mu-k-1)+c^2,$$

donc

$$(\mu-k-1)^2+k'^2=(\mu-k-1+c)^2+k'^2-c^2-2c(\mu-k-1).$$

Si l'on fait

$$\mu>k+1-\tfrac{1}{2}c+\frac{k'^2}{2c},$$

il s'ensuit que $k'^2-c^2-2c(\mu-k-1)$ est négatif; par conséquent

$$(\mu-k-1)^2+k'^2<(\mu-k-1+c)^2,$$

c'est-à-dire:

$$\delta_\mu<\frac{\mu-k-1+c}{\mu},\quad \delta_\mu<1-\frac{1+k-c}{\mu}.$$

Si dans l'équation (20) on fait $a=\frac{1}{\mu}$, $m=-n$, on aura

$$\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{-n}=1-\frac{n}{\mu}+\frac{n(1+n)}{1.2}\frac{1}{\mu^2}-\cdots$$
$$=1-\frac{n}{\mu}+\frac{n(n+1)}{1.2}\frac{1}{\mu^2}\left(1-\frac{2+n}{3\mu}\right)+\cdots$$

Donc en faisant $n=1+k-c$, on voit aisément que

$$\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{-1-k+c}>1-\frac{1+k-c}{\mu};$$

par conséquent

$$\delta_\mu<\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^{1+k-c},\quad \text{où}\quad \mu>k+1-\tfrac{1}{2}c+\frac{k'^2}{2c}\,(=\varrho),$$

donc

$$\delta_{\varrho+\mu}<\left(\frac{\varrho+\mu}{\varrho+\mu+1}\right)^{1+k-c},\quad \text{où}\quad \mu>0.$$

En posant successivement $\mu=1, 2, 3 \ldots \mu$, et en faisant le produit des résultats, on obtiendra

$$\delta_{\varrho+1}\delta_{\varrho+2}\ldots\delta_{\varrho+\mu}<\left(\frac{\varrho+1}{\varrho+\mu+1}\right)^{1+k-c};$$

or $\lambda_{\mu+\varrho}=\delta_1\delta_2\delta_3\ldots\delta_{\mu+\varrho}$, donc

$$\lambda_{\mu+\varrho}<\delta_1\delta_2\ldots\delta_\varrho\left(\frac{\varrho+1}{\varrho+\mu+1}\right)^{1+k-c},$$

par conséquent lorsqu'on fait $\mu=0, 1, 2\ldots\mu$,

$$\lambda_\varrho+\lambda_{\varrho+1}+\cdots+\lambda_{\varrho+\mu}<\delta_1\delta_2\ldots\delta_\varrho(\varrho+1)^{1+k-c}\left(\frac{1}{(\varrho+1)^{1+k-c}}+\frac{1}{(\varrho+2)^{1+k-c}}+\cdots+\frac{1}{(\varrho+\mu+1)^{1+k-c}}\right).$$

Si maintenant dans l'expression (20) on fait $a=-\frac{1}{\varrho+\mu+1}$, $m=-k+c$, on aura

$$\left(1-\frac{1}{\varrho+\mu+1}\right)^{c-k}=1+\frac{k-c}{\varrho+\mu+1}+\frac{(k-c)(k-c+1)}{1.2(\varrho+\mu+1)^2}+\cdots,$$

donc en se rappelant que $k>c$:

$$\left(\frac{\varrho+\mu}{\varrho+\mu+1}\right)^{c-k}>1+\frac{k-c}{\varrho+\mu+1}.$$

Il s'ensuit, en divisant par $(k-c)(\varrho+\mu+1)^{k-c}$,

$$\frac{1}{(\varrho+\mu+1)^{1+k-c}}<\frac{1}{k-c}\left(\frac{1}{(\varrho+\mu)^{k-c}}-\frac{1}{(\varrho+\mu+1)^{k-c}}\right).$$

Cela donne, en faisant $\mu=0, 1, 2\ldots\mu$ et ajoutant,

$$\frac{1}{(\varrho+1)^{1+k-c}}+\frac{1}{(\varrho+2)^{1+k-c}}+\cdots+\frac{1}{(\varrho+\mu+1)^{1+k-c}}<\frac{1}{k-c}\left(\frac{1}{\varrho^{k-c}}-\frac{1}{(\varrho+\mu+1)^{k-c}}\right)<\frac{1}{k-c}\cdot\frac{1}{\varrho^{k-c}}.$$

Il s'ensuit que

$$\lambda_\varrho+\lambda_{\varrho+1}+\cdots+\lambda_{\varrho+\mu}<\delta_1\delta_2\delta_3\ldots\delta_\varrho\frac{(\varrho+1)^{1+k-c}}{(k-c)\varrho^{k-c}},$$

pour toute valeur de μ. Donc la série $1+\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2+\cdots$, dont tous les termes sont positifs, est convergente, et par conséquent, d'après le théorème II, les séries

$$1+\lambda_1\cos\theta_1+\lambda_2\cos\theta_2+\cdots+\lambda_\mu\cos\theta_\mu+\cdots$$
$$\lambda_1\sin\theta_1+\lambda_2\sin\theta_2+\cdots+\lambda_\mu\sin\theta_\mu+\cdots$$

seront de même convergentes.

Troisième cas, lorsque k est égal à zéro ou compris entre zéro et -1. Dans ce cas les séries ci-dessus seront convergentes pour toute valeur de k, pourvu que φ ne soit pas égal à $(2n+1)\pi$. Cela peut se démontrer comme il suit: Soit

$$m=k+k'i,\quad x=\cos\varphi+i\sin\varphi,$$

$$1+m_1x+m_2x^2+m_3x^3+\cdots+m_nx^n=p_n.$$

En multipliant par $1+x$, on obtient

$$1+(m_1+1)x+(m_2+m_1)x^2+\cdots+(m_n+m_{n-1})x^n+m_nx^{n+1}=p_n(1+x).$$

Or on sait que

$$m_1+1=(m+1)_1,\quad m_2+m_1=(m+1)_2\ldots,\quad m_n+m_{n-1}=(m+1)_n,$$

donc en substituant:

$$1+(m+1)_1x+(m+1)_2x^2+\cdots+(m+1)_nx^n=-m_nx^{n+1}+p_n(1+x).$$

Maintenant, si l'on fait $n=\infty$, le premier membre de cette équation sera, d'après le cas précédent, une série convergente. En la désignant par s, on aura

$$s=p_n(1+x)-m_n[\cos(n+1)\varphi+i\sin(n+1)\varphi],$$

où n est infini. Or on peut démontrer comme dans le deuxième cas que $m_n=0$ pour $n=\infty$. On a donc

$$s=p(1+x),\ \text{où}\ p=1+m_1x+m_2x^2+\cdots$$

Cette équation donne, si $x+1$ n'est pas égal à zéro,

$$p=\frac{s}{1+x}.$$

La série p est donc alors convergente, et par conséquent les séries ci-dessus le sont également.

Si $x+1=0$, on a $1+\cos\varphi+i\sin\varphi=0$, donc $\sin\varphi=0$, $1+\cos\varphi=0$, d'où $\varphi=(2n+1)\pi$, n étant un nombre entier positif ou négatif. Donc les séries en question sont convergentes pour toute valeur de k égale à zéro ou comprise entre 0 et -1, si φ n'est pas égal à $(2n+1)\pi$.

Lorsque $\varphi=(2n+1)\pi$, les séries sont nécessairement divergentes, car si elles étaient convergentes, elles auraient pour somme les limites des fonctions

$$e^{k\delta-k'\beta}[\cos(k\beta+k'\delta)+i\sin(k\beta+k'\delta)],$$

en y faisant converger α vers l'unité, et faisant $\varphi=(2n+1)\pi$. Or

$$\delta=\tfrac{1}{2}\log(1+2\alpha\cos\varphi+\alpha^2),\ \beta=\text{arc. tang}\frac{\alpha\sin\varphi}{1+\alpha\cos\varphi},$$

donc pour $\varphi=(2n+1)\pi$ on a

$$\delta=\log(1-\alpha),\ \beta=0.$$

La fonction en question prendra donc la forme

$$(1-\alpha)^k[\cos(k'\log(1-\alpha))+i\sin(k'\log(1-\alpha))].$$

Or, k étant égal à zéro ou négatif, il est clair qu'en faisant converger α vers l'unité, on n'obtiendra pas pour cette fonction une limite finie et déterminée. Donc les séries sont divergentes.

De ce qui précède il s'ensuit, que les séries (21) ont lieu pour toute valeur de φ, lorsque k est positif, et pour toute valeur de φ pour laquelle $\cos\frac{\varphi}{2}$ n'est pas zéro, lorsque k est égal à zéro ou compris entre -1 et 0, quelle que soit d'ailleurs la valeur de k'. Dans tout autre cas les séries sont divergentes. Dans le cas que nous examinons, la série générale (19), lorsqu'on y fait $b^2+a^2=1$, ou $b=\sqrt{1-a^2}$, prend la forme:

$$(23)\quad\left\{\begin{aligned}&1+\frac{m+ni}{1}(a+\sqrt{a^2-1})+\frac{(m+ni)(m-1+ni)}{1\ .\ 2}(a+\sqrt{a^2-1})^2\\&\quad+\frac{(m+ni)(m-1+ni)(m-2+ni)}{1\ .\ 2\ .\ 3}(a+\sqrt{a^2-1})^3+\cdots\\&=(2+2a)^{\frac{m}{2}}e^{-n\,\text{arc. tang}\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}}\Big[\cos\Big(m\,\text{arc. tang}\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}+\tfrac{1}{2}n\log(2+2a)\Big)\\&\qquad+i\sin\Big(m\,\text{arc. tang}\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}+\tfrac{1}{2}n\log(2+2a)\Big)\Big].\end{aligned}\right.$$

Voici un résumé des résultats précédents:

I. Lorsque la série,

$$1+\frac{m+ni}{1}(a+bi)+\frac{(m+ni)(m-1+ni)}{1\ .\ 2}(a+bi)^2+\cdots$$

est convergente, elle a pour somme

$$[(1+a)^2+b^2]^{\frac{m}{2}}e^{-n\,\text{arc. tang}\frac{b}{1+a}}\Big[\cos\Big(m\,\text{arc. tang}\frac{b}{1+a}+\frac{n}{2}\log[(1+a)^2+b^2]\Big)$$
$$+i\sin\Big(m\,\text{arc. tang}\frac{b}{1+a}+\frac{n}{2}\log[(1+a)^2+b^2]\Big)\Big].$$

II. La série est convergente pour toute valeur de m et n, lorsque la quantité $\sqrt{a^2+b^2}$ est inférieure à l'unité. Si $\sqrt{a^2+b^2}$ est égal à l'unité, la série est convergente pour toute valeur de m comprise entre -1 et $+\infty$, si l'on n'a pas en même temps $a=-1$. Si $a=-1$, m doit être positif. Dans tout autre cas la série proposée est divergente.

Comme cas particuliers on doit considérer les suivants:

A. Lorsque $n=0$. On a alors

$$(24)\quad \begin{cases} 1+\frac{m}{1}(a+bi)+\frac{m(m-1)}{1.2}(a+bi)^2+\cdots \\ =[(1+a)^2+b^2]^{\frac{m}{2}}\left[\cos\left(m\,\text{arc. tang}\,\frac{b}{1+a}\right)+i\sin\left(m\,\text{arc. tang}\,\frac{b}{1+a}\right)\right]. \end{cases}$$

Cette expression donne, en faisant $a=\alpha\cos\varphi$, $b=\alpha\sin\varphi$ et en séparant les termes réels des imaginaires:

$$(25)\quad \begin{cases} 1+\frac{m}{1}\alpha\cos\varphi+\frac{m(m-1)}{1.2}\alpha^2\cos 2\varphi+\cdots \\ \qquad =(1+2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)^{\frac{m}{2}}\cos\left(m\,\text{arc. tang}\,\frac{\alpha\sin\varphi}{1+\alpha\cos\varphi}\right), \\ \frac{m}{1}\alpha\sin\varphi+\frac{m(m-1)}{1.2}\alpha^2\sin 2\varphi+\cdots \\ \qquad =(1+2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)^{\frac{m}{2}}\sin\left(m\,\text{arc. tang}\,\frac{\alpha\sin\varphi}{1+\alpha\cos\varphi}\right). \end{cases}$$

B. Lorsque $b=0$.

Dans ce cas l'expression générale prend la forme suivante:

$$(26)\quad \begin{cases} 1+\frac{m+ni}{1}a+\frac{(m+ni)(m-1+ni)}{1\;.\;2}a^2+\cdots \\ \qquad =(1+a)^m[\cos(n\,.\log(1+a))+i\sin(n\,.\log(1+a))]. \end{cases}$$

C. Lorsque $n=0$, $b=0$.

Alors on a

$$(27)\quad 1+\frac{m}{1}a+\frac{m(m-1)}{1.2}a^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^3+\cdots=(1+a)^m.$$

Cette expression a lieu pour toute valeur de m lorsque la valeur numérique de a est inférieure à l'unité, de plus pour toute valeur de m comprise entre

-1 et $+\infty$, lorsque $a=1$, et pour toute valeur positive de m, lorsque $a=-1$. Pour toute autre valeur de a et de m le premier membre est une série divergente.

Faisant p. ex. $a=1$, $a=-1$, on a

$$1+\frac{m}{1}+\frac{m(m-1)}{1.2}+\cdots=2^m,$$

$$1-\frac{m}{1}+\frac{m(m-1)}{1.2}-\cdots=0.$$

La première équation a lieu pour toute valeur de m comprise entre -1 et $+\infty$, et la seconde pour toute valeur positive de m.

D. Lorsque $\sqrt{a^2+b^2}=1$.

Alors on a

$$(28)\ \left\{\begin{aligned}&1+\frac{m+ni}{1}(a+\sqrt{a^2-1})+\frac{(m+ni)(m-1+ni)}{1\;.\;2}(a+\sqrt{a^2-1})^2+\cdots\\ &=(2+2a)^{\frac{m}{2}}e^{-n\,\text{arc. tang}\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}}\left[\cos\left(m\,\text{arc. tang}\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}+\frac{n}{2}\log(2+2a)\right),\right.\\ &\qquad\left.+i\sin\left(m\,\text{arc. tang}\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}+\frac{n}{2}\log(2+2a)\right)\right].\end{aligned}\right.$$

Si l'on fait ici $a=\cos\varphi$, on obtient

$$(29)\ \left\{\begin{aligned}&1+\frac{m+ni}{1}(\cos\varphi+i\sin\varphi)+\frac{(m+ni)(m-1+ni)}{1\;.\;2}(\cos 2\varphi+i\sin 2\varphi)+\cdots\\ &=(2+2\cos\varphi)^{\frac{m}{2}}e^{-n(\frac{1}{2}\varphi-\varrho\pi)}\left[\cos\left(m(\tfrac{1}{2}\varphi-\varrho\pi)+\frac{n}{2}\log(2+2\cos\varphi)\right)\right.\\ &\qquad\left.+i\sin\left(m(\tfrac{1}{2}\varphi-\varrho\pi)+\frac{n}{2}\log(2+2\cos\varphi)\right)\right],\end{aligned}\right.$$

en remarquant qu'on a

$$\text{arc. tang}\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}=\text{arc. tang}\sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}}=\text{arc. tang}(\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\varphi)=\tfrac{1}{2}\varphi-\varrho\pi,$$

si l'on suppose $\frac{1}{2}\varphi$ compris entre $\varrho\pi-\frac{\pi}{2}$ et $\varrho\pi+\frac{\pi}{2}$.

E. Lorsque $\sqrt{a^2+b^2}=1$, $a=\cos\varphi$, $b=\sin\varphi$, $n=0$.

Dans ce cas l'expression précédente donne

$$(30)\quad \begin{cases} 1+\frac{m}{1}(\cos\varphi+i\sin\varphi)+\frac{m(m-1)}{1.2}(\cos 2\varphi+i\sin 2\varphi)+\cdots \\ =(2+2\cos\varphi)^{\frac{m}{2}}[\cos m(\tfrac{1}{2}\varphi-\varrho\pi)+i\sin m(\tfrac{1}{2}\varphi-\varrho\pi)] \\ \text{depuis } \tfrac{1}{2}\varphi=\varrho\pi-\frac{\pi}{2} \text{ jusqu'à } \tfrac{1}{2}\varphi=\varrho\pi+\frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

ou, en séparant la partie réelle de l'imaginaire,

$$(31)\quad \begin{cases} 1+\frac{m}{1}\cos\varphi+\frac{m(m-1)}{1.2}\cos 2\varphi+\cdots=(2+2\cos\varphi)^{\frac{m}{2}}\cos m(\tfrac{1}{2}\varphi-\varrho\pi) \\ \frac{m}{1}\sin\varphi+\frac{m(m-1)}{1.2}\sin 2\varphi+\cdots=(2+2\cos\varphi)^{\frac{m}{2}}\sin m(\tfrac{1}{2}\varphi-\varrho\pi) \\ \text{depuis } \tfrac{1}{2}\varphi=\varrho\pi-\frac{\pi}{2} \text{ jusqu'à } \tfrac{1}{2}\varphi=\varrho\pi+\frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

F. Lorsque $a=0$, $b=\operatorname{tang}\varphi$.

Dans ce cas on obtient, lorsque φ est compris entre $+\frac{\pi}{4}$ et $-\frac{\pi}{4}$,

$$(32)\quad \begin{cases} 1+\frac{m+ni}{1}i\operatorname{tang}\varphi+\frac{(m+ni)(m-1+ni)}{1.2}(i\operatorname{tang}\varphi)^2+\cdots \\ =(\cos\varphi)^{-m}e^{-n\varphi}[\cos(m\varphi-n\log\cos\varphi)+i\sin(m\varphi-n\log\cos\varphi)]. \end{cases}$$

5.

Des expressions précédentes on peut, par des transformations convenables, en déduire plusieurs autres, parmi lesquelles il s'en trouve de très remarquables. Nous allons en développer quelques unes. Pour plus de détail on peut consulter l'ouvrage cité de M. *Cauchy*.

A.

Sommation des séries $\alpha\cos\varphi-\frac{1}{2}\alpha^2\cos 2\varphi+\frac{1}{3}\alpha^3\cos 3\varphi-\cdots$,
$\alpha\sin\varphi-\frac{1}{2}\alpha^2\sin 2\varphi+\frac{1}{3}\alpha^3\sin 3\varphi-\cdots$.

Lorsque α est supérieur à l'unité, on voit aisément que ces séries sont divergentes. Si α est inférieur à l'unité, nous avons vu plus haut qu'elles sont convergentes; leurs sommes sont les quantités β et δ du § 3, c'est-à-dire, en mettant pour β et δ leurs valeurs données par les équations (18),

$$(33)\quad \begin{cases} \frac{1}{2}\log(1+2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)=\alpha\cos\varphi-\frac{1}{2}\alpha^2\cos 2\varphi+\frac{1}{3}\alpha^3\cos 3\varphi-\cdots, \\ \text{arc. tang}\,\frac{\alpha\sin\varphi}{1+\alpha\cos\varphi}=\alpha\sin\varphi-\frac{1}{2}\alpha^2\sin 2\varphi+\frac{1}{3}\alpha^3\sin 3\varphi-\cdots \end{cases}$$

Pour avoir les sommes de ces séries lorsque $\alpha=+1$ ou -1, il faut seulement faire converger α vers cette limite. La première expression donne de cette manière

$$(34)\quad \begin{cases} \frac{1}{2}\log(2+2\cos\varphi)=\cos\varphi-\frac{1}{2}\cos 2\varphi+\frac{1}{3}\cos 3\varphi-\cdots, \\ \frac{1}{2}\log(2-2\cos\varphi)=-\cos\varphi-\frac{1}{2}\cos 2\varphi-\frac{1}{3}\cos 3\varphi-\cdots, \end{cases}$$

en supposant que les seconds membres de ces équations soient des séries convergentes, ce qui a lieu, d'après le théorème II, pour toute valeur de φ, excepté pour $\varphi=(2\mu+1)\pi$ dans la première expression, et pour $\varphi=2\mu\pi$ dans la seconde, μ étant un nombre entier quelconque positif ou négatif.

La seconde formule donne, en supposant φ compris entre π et $-\pi$, et en se rappelant qu'on a alors

$$\text{arc. tang}\,\frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi}=\text{arc. tang}\,(\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\varphi)=\tfrac{1}{2}\varphi:$$

$$(35)\quad \tfrac{1}{2}\varphi=\sin\varphi-\tfrac{1}{2}\sin 2\varphi+\tfrac{1}{3}\sin 3\varphi-\cdots\ (\text{depuis } \varphi=+\pi \text{ jusqu'à } \varphi=-\pi).$$

Lorsque $\varphi=\pi$ ou $=-\pi$, la série se réduit à zéro, comme on le voit aisément. Il s'ensuit que la fonction:

$$\sin\varphi-\tfrac{1}{2}\sin 2\varphi+\tfrac{1}{3}\sin 3\varphi-\cdots$$

a la propriété remarquable d'être discontinue pour les valeurs $\varphi=\pi$ et $\varphi=-\pi$. En effet, lorsque $\varphi=\pm\pi$, la fonction se réduit à zéro; si au contraire $\varphi=\pm(\pi-\alpha)$, α étant positif et moindre que π, la valeur de la fonction est

$$\pm\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right).$$

La formule (33) contient comme cas particulier la suivante:

$$(36)\qquad \text{arc. tang}\,\alpha=\alpha-\tfrac{1}{3}\alpha^3+\tfrac{1}{5}\alpha^5-\cdots$$

ce qu'on trouve en faisant $\varphi=\frac{\pi}{2}$. Cette formule sera applicable pour toute valeur de α, depuis -1 jusqu'à $+1$, les limites y comprises.

B.

Développement de $\cos m\varphi$ et de $\sin m\varphi$ suivant les puissances de $\operatorname{tang}\varphi$.

On peut déduire ces développemens de l'expression (32). En effet, en faisant $n=0$, et séparant les parties réelles des parties imaginaires, on obtient, après avoir multiplié par $(\cos\varphi)^m$,

$$(37)\quad \begin{cases} \cos m\varphi = (\cos\varphi)^m \Big(1 - \frac{m(m-1)}{1.2}(\operatorname{tang}\varphi)^2 \\ \qquad\qquad + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}(\operatorname{tang}\varphi)^4 - \cdots\Big), \\ \sin m\varphi = (\cos\varphi)^m \Big(m(\operatorname{tang}\varphi) - \frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}(\operatorname{tang}\varphi)^3 + \cdots\Big), \end{cases}$$

depuis $\varphi=\frac{\pi}{4}$ jusqu'à $\varphi=-\frac{\pi}{4}$, et ces équations ont lieu pour toute valeur de m lorsque $\operatorname{tang}\varphi$ est moindre que 1. Si $\operatorname{tang}\varphi=\pm 1$, elles ont lieu pour tout m compris entre -1 et $+\infty$. Elles sont alors:

$$(38)\quad \begin{cases} \cos\left(m\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{m}{2}}\left(1 - \frac{m(m-1)}{1\cdot 2} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} - \cdots\right) \\ \sin\left(m\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{m}{2}}\left(m - \frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3} + \cdots\right). \end{cases}$$

C.

Développement de $(\cos x)^n$ et $(\sin x)^n$ en séries ordonnées suivant les cosinus et les sinus des arcs multiples.

Depuis quelque temps plusieurs analystes se sont occupés du développement de $(\cos x)^n$ et $(\sin x)^n$. Mais jusqu'à présent, si je ne me trompe, ces efforts n'ont pas entièrement réussi. On est bien parvenu à des expressions justes sous certaines restrictions, mais ces expressions n'ont pas été rigoureusement fondées. On peut les déduire assez simplement des expressions démontrées ci-dessus. En effet, si l'on ajoute les deux équations (31), après avoir multiplié la première par $\cos\alpha$ et la seconde par $\sin\alpha$, on obtient

$$\cos\alpha+\frac{m}{1}\cos(\alpha-\varphi)+\frac{m(m-1)}{1.2}\cos(\alpha-2\varphi)+\cdots$$
$$=(2+2\cos\varphi)^{\frac{m}{2}}\cos\left(\alpha-\frac{m\varphi}{2}+m\varrho\pi\right)$$
$$\left(\text{depuis } \tfrac{1}{2}\varphi=\varrho\pi-\frac{\pi}{2} \text{ jusqu'à } \tfrac{1}{2}\varphi=\varrho\pi+\frac{\pi}{2}\right).$$

Or puisque $2+2\cos\varphi=4(\cos\frac{1}{2}\varphi)^2$, on aura, en faisant $\varphi=2x$,

$$\cos\alpha+\frac{m}{1}\cos(\alpha-2x)+\frac{m(m-1)}{1.2}\cos(\alpha-4x)+\cdots=(2\cos x)^m\cos(\alpha-mx+2m\varrho\pi)$$
$$\text{depuis } x=2\varrho\pi-\frac{\pi}{2} \text{ jusqu'à } x=2\varrho\pi+\frac{\pi}{2}$$
$$\cos\alpha+\frac{m}{1}\cos(\alpha-2x)+\frac{m(m-1)}{1.2}\cos(\alpha-4x)+\cdots=(-2\cos x)^m\cos[\alpha-mx+m(2\varrho+1)\pi]$$
$$\text{depuis } x=2\varrho\pi+\frac{\pi}{2} \text{ jusqu'à } x=2\varrho\pi+\frac{3\pi}{2}.$$

Si l'on fait ici 1) $\alpha=mx$; 2) $\alpha=mx+\frac{\pi}{2}$; 3) $\alpha=my$, $x=y-\frac{\pi}{2}$; 4) $\alpha=my-\frac{\pi}{2}$, $x=y-\frac{\pi}{2}$, on obtiendra

1) $(2\cos x)^m\cos 2m\varrho\pi=\cos mx+\frac{m}{1}\cos(m-2)x+\frac{m(m-1)}{1.2}\cos(m-4)x+\cdots,$

2) $(2\cos x)^m\sin 2m\varrho\pi=\sin mx+\frac{m}{1}\sin(m-2)x+\frac{m(m-1)}{1.2}\sin(m-4)x+\cdots,$

$$\text{depuis } x=2\varrho\pi-\frac{\pi}{2} \text{ jusqu'à } x=2\varrho\pi+\frac{\pi}{2};$$

3) $(2\sin x)^m\cos m(2\varrho+\frac{1}{2})\pi=\cos mx-\frac{m}{1}\cos(m-2)x+\frac{m(m-1)}{1.2}\cos(m-4)x-\cdots,$

4) $(2\sin x)^m\sin m(2\varrho+\frac{1}{2})\pi=\sin mx-\frac{m}{1}\sin(m-2)x+\frac{m(m-1)}{1.2}\sin(m-4)x-\cdots,$

$$\text{depuis } x=2\varrho\pi \text{ jusqu'à } x=(2\varrho+1)\pi;$$

5) $(-2\cos x)^m\cos m(2\varrho+1)\pi=\cos mx+\frac{m}{1}\cos(m-2)x+\frac{m(m-1)}{1.2}\cos(m-4)x+\cdots,$

6) $(-2\cos x)^m\sin m(2\varrho+1)\pi=\sin mx+\frac{m}{1}\sin(m-2)x+\frac{m(m-1)}{1.2}\sin(m-4)x+\cdots,$

$$\text{depuis } x=(2\varrho+\tfrac{1}{2})\pi \text{ jusqu'à } x=(2\varrho+\tfrac{3}{2})\pi;$$

7) $(-2\sin x)^m\cos m(2\varrho+\frac{3}{2})\pi=\cos mx-\frac{m}{1}\cos(m-2)x+\frac{m(m-1)}{1.2}\cos(m-4)x-\cdots,$

8) $(-2\sin x)^m\sin m(2\varrho+\frac{3}{2})\pi=\sin mx-\frac{m}{1}\sin(m-2)x+\frac{m(m-1)}{1.2}\sin(m-4)x-\cdots,$

$$\text{depuis } x=(2\varrho+1)\pi \text{ jusqu'à } x=(2\varrho+2)\pi.$$

Ces formules ont encore lieu pour les valeurs limites de x, lorsque m est positif. Lorsque m est compris entre -1 et 0 ces valeurs sont exclues.

Comme cas particuliers on peut considérer les deux suivants:

$$(2\cos x)^m = \cos mx + \frac{m}{1}\cos(m-2)x + \frac{m(m-1)}{1.2}\cos(m-4)x + \cdots,$$

$$0 = \sin mx + \frac{m}{1}\sin(m-2)x + \frac{m(m-1)}{1.2}\sin(m-4)x + \cdots,$$

$$\left(\text{depuis } x = -\frac{\pi}{2} \text{ jusqu'à } x = \frac{\pi}{2}\right).$$