l'auteur à son camarade et ami Fleuri Roh-

ÉLÉMENS

DE

STATIQUE,

Par LOUIS POINSOT.

A PARIS,

Chez CALIXTE-VOLLAND, Libraire,
Quai des Augustins, No. 25.

AN XII = 1803.

l'auteur à son camarade et ami fleuri Roh-

ÉLÉMENS

DE

STATIQUE,

Par LOUIS POINSOT.

A PARIS,

Chez CALIXTE-VOLLAND, Libraire,
Quai des Augustins, No. 25.

AN XII = 1803.

CHAPITRE PREMIER.

Composition et Décomposition des Forces.

Axiômes, Lemmes préliminaires, etc.

12. Il est évident que *deux forces égales et contraires appliquées à un même point sont en équilibre*. Il est encore évident que *deux forces égales et contraires appliquées aux extrémités d'une droite considérée comme une verge inflexible, et agissantes dans la direction de cette droite, sont en équilibre.*

Car il n'y a pas de raison pour que le mouvement naisse d'un côté plutôt que de l'autre, comme dans le premier axiôme.

Corollaire.

13. Il est facile de conclure delà que l'effet d'une force qui sollicite un corps, ne peut être changé en quelque point de sa direction qu'on la suppose appliquée; pourvu que ce point soit un des points du corps lui-même, ou, s'il est au-dehors, qu'il lui soit invariablement attaché.

Car, soit une force quelconque P appliquée au point A d'un corps ou système quelconque: Fig. 1.

si l'on prend sur la direction de cette force un autre point B invariablement lié au système, de manière que la longueur AB reste toujours constante; et si l'on applique au point B deux forces P′, —P′ égales entr'elles et à la force P, et agissantes dans la direction de AB, le point A sera encore sollicité de la même manière qu'auparavant; car l'effet des deux forces P′ et —P′ est nul de lui-même. Mais en considérant la force P et son égale et contraire —P′ appliquée en B, il est manifeste que leur effet est aussi nul. On peut donc les supprimer, et il ne reste plus que la force P′ qui n'est autre chose que la force P, mais appliquée au point B de sa direction; et le point A n'a pas cessé d'être sollicité de la même manière.

On peut donc appliquer une force en un point quelconque de sa direction, pourvu que ce point soit lié au premier point d'application par une ligne droite rigide et inextensible.

Remarque.

Lorsque nous changerons ainsi les points d'application des forces, nous ne répéterons pas toujours que l'on doit supposer les nouveaux points invariablement attachés aux premiers; mais il faudra toujours le sous-entendre.

Lemme.

14. LORSQUE deux forces P et Q sont appliquées à un même point A sous un angle quelconque, on conçoit bien qu'une troisième force R appliquée convenablement au point A pourrait faire équilibre aux deux forces P et Q. Car, en vertu des efforts combinés des deux forces P et Q, le point A tend à quitter le lieu où il est : or il ne peut s'échapper que d'un seul côté, et par conséquent si l'on applique une force convenable en sens contraire, ce point demeurera en équilibre. Fig. 2.

Les trois forces P, Q, R, étant en équilibre autour du point A, la force R est égale et directement opposée à la résultante des deux autres. Donc deux forces P et Q qui concourent, ont une résultante.

En second lieu, il est visible que cette résultante doit être dans le plan de leurs directions AP, AQ; car il n'y a pas de raison pour qu'elle ait au-dessus du plan une certaine position, plutôt que la position parfaitement symétrique au-dessous. Fig. 3.

De plus, elle doit être dirigée dans l'angle PAQ des deux forces ; car il est clair que le point A ne peut se mouvoir dans la partie du plan qui est au-dessus de la ligne AQ, vers D :

de même il ne peut se mouvoir au-dessus de la ligne AP, vers B ; et par conséquent il ne pourra se mouvoir que dans l'angle PAQ, et la résultante R devra être dirigée dans l'intérieur de cet angle.

Remarque.

15. Il n'y a qu'un seul cas où l'on puisse voir *à priori* quelle sera la direction de la résultante ; c'est celui où les deux forces P et Q sont égales : alors il est clair que la résultante divise en deux également l'angle qu'elles forment entr'elles ; car il n'y a pas de raison pour que cette résultante fasse avec l'une des composantes un angle plus petit qu'avec l'autre.

Axiôme.

16. Lorsque les deux forces P et Q agissent dans la même direction et dans le même sens, il est visible, et l'on doit accorder comme un axiôme que ces forces s'ajoutent, et donnent une résultante égale à leur somme $P+Q$.

Corollaire.

17. De là on peut conclure (en combinant successivement les forces deux à deux) que la résultante de tant de forces que l'on voudra qui agissent dans une même direction et dans le même

même sens, est égale à leur somme totale, et agit dans la même direction.

Que lorsque deux forces inégales P et Q agissent en sens contraire dans une même direction, leur résultante est égale à la différence P—Q des forces, et qu'elle agit dans le sens de la plus grande; car on peut concevoir dans la plus grande que je suppose P, par exemple, une force égale et contraire à Q, et qui la détruit : on peut supprimer ces deux forces-là, et le point est actuellement tiré par la différence P—Q des deux forces P et Q.

D'où l'on voit qu'en général, *la résultante de tant de forces que l'on voudra, agissantes dans la même direction, est égale à l'excès de la somme de celles qui tirent dans un sens, sur la somme de celles qui tirent dans le sens contraire, et qu'elle agit dans le sens de la plus grande somme.*

Remarque.

18. TELLES sont quelques-unes des propositions les plus élémentaires, dont on découvre la vérité *à priori*, et presqu'à la première inspection. Le cas le plus simple de la composition des forces, et en même temps celui où l'on connaît tout d'un coup la résultante, est évidemment le cas des forces qui agissent

dans une même direction. Nous allons commencer la composition des forces par celles qui s'y ramènent immédiatement.

Composition des forces qui agissent suivant des directions parallèles.

Théorème I.

Fig. 4. 19. *Deux forces quelconques* P *et* Q, *parallèles et de même sens, appliquées aux extrémités* A *et* B *d'une droite rigide* AB, *ont une résultante, et cette résultante doit être appliquée à la ligne* AB *entre les deux points* A *et* B.

2°. *Elle est parallèle aux forces* P *et* Q, *et égale à leur somme.*

1°. Appliquez à volonté aux deux points A et B, deux forces M et N, égales et contraires, et qui agissent dans le sens de la droite AB. L'effet de ces deux forces sera nul, et par conséquent l'effet des deux forces P et Q ne sera pas changé : mais les deux forces M et P appliquées en A, ont une résultante S appliquée au point A, et dirigée dans l'angle MAP (14). De même les deux forces N et Q ont une résultante T, appliquée en B et dirigée dans l'angle NBQ. Concevez qu'on ait pris ces deux résultantes, et qu'on les ait appliquées toutes deux au point D où leurs directions vont nécessairement se couper ; la résultante des deux forces S et T sera absolument la même que celle des deux forces P et Q : or, étant appliquée en D, et devant être dirigée dans l'angle ADB, elle ira passer entre A et B, en un certain point C, où l'on pourra la supposer appliquée.

2°. Maintenant, pour démontrer que cette résultante est parallèle aux forces P et Q, et égale à leur somme, imaginons qu'au point D on redécompose la force S en deux composantes M′ et P′, parfaitement égales et parallèles aux premières M et P ; de même, qu'on redécompose la force T en deux composantes N′ et Q′, parfaitement égales et parallèles aux premières N et Q. Les deux forces M′, N′, seront égales, et directement opposées, puisqu'appliquées à un même point D, elles sont parallèles à une même droite MN, et par conséquent leur effet sera absolument nul. Il ne restera donc que les deux forces P′ et Q′, respectivement égales et parallèles aux forces P et Q. Or, ces deux forces, étant évidemment dans une même direction, se composeront en une seule R, égale à leur somme P′ + Q′ ou P + Q; *ce qu'il fallait démontrer.*

Corollaire I.

20. Si les deux forces P et Q sont égales en- Fig. 5.

tr'elles, le point C d'application de la résultante sera au milieu de la ligne A B. Prenons, en effet, les deux forces M et N dont on est maître, égales aux forces P et Q. La résultante S des deux forces égales M et P divisera en deux également l'angle MAP (15); et à cause de DC parallèle à la ligne A P, le triangle A C D sera isoscèle. Par une raison toute semblable, le triangle B C D sera isoscèle; et l'on aura d'une part, A C = C D, et de l'autre, C D = C B; d'où A C = C B.

Corollaire II.

21. Il résulte delà que la résultante de tant de forces parallèles qu'on voudra, égales deux à deux et appliquées symétriquement à des distances égales du milieu d'une même droite, est égale à la somme de toutes ces forces, leur est parallèle, et passe par le milieu de la droite d'application. Car, en combinant successivement deux à deux, les forces égales placées de part et d'autre à des distances égales du milieu de la ligne droite, leurs résultantes successives passeront toutes par ce même point, et s'ajouteront ensuite comme étant dans une même direction.

22. Et réciproquement on pourra décomposer toute force P appliquée à une ligne, en tant d'autres forces parallèles qu'on voudra, appliquées à

différens points de cette ligne, pourvu que ces forces deux à deux, soient égales, à égales distances du point d'application de la force P, et que leur somme totale soit égale à cette même force.

Théorème II.

23. *Le point* C *d'application de la résultante de deux forces parallèles* P *et* Q *qui agissent aux extrémités* A *et* B *d'une droite inflexible* AB, *partage cette droite dans la raison réciproque de* P *à* Q: *de sorte que l'on a :* P : Q : : BC : AC. Fig. 6.

Supposons d'abord que les forces P et Q soient commensurables, c'est-à-dire, soient entr'elles comme deux nombres entiers m et n.

Divisons AB au point H en deux parties directement proportionnelles aux deux forces P et Q; de manière qu'on ait : AH : BH : : P : Q, et par conséquent, : : m : n. Sur le prolongement de la ligne inflexible AB, prenons AG = AH, et BK = BH. Le point A sera le milieu de GH, et le point B le milieu de HK.

Cela posé, puisque les forces P et Q sont entre elles comme les lignes AH et BH, elles seront aussi entr'elles comme les mêmes lignes doublées, c'est-à-dire, comme les lignes GH et HK. Et comme il y a, par hypothèse, dans la ligne AH, m mesures telles que BH en contient n, il y aura $2m$ mesures dans GH, et $2n$ mesures égales dans HK. Or, on peut décomposer la force P en $2m$ forces égales et parallèles, appliquées aux $2m$ points milieux des communes mesures de la ligne GH (22); et la force Q en $2n$ forces parallèles, égales entr'elles et aux premières, appliquées aux $2n$ points milieux des communes mesures de la ligne HK. Maintenant toutes ces forces égales, étant équidistantes, se trouveront placées deux à deux à égales distances du milieu C de la ligne entière GK, et par conséquent leur résultante générale qui est celle des deux forces P et Q, passera nécessairement par le milieu de la ligne GK.

Mais à cause de GC = AB, il vient, en retranchant la partie commune AC, BC = AG = AH; et en ajoutant de part et d'autre CH, AC = BH. Donc puisque l'on a : P : Q :: AH : BH, on a aussi :

$$P : Q :: BC : AC.$$

Supposons en second lieu, que les deux forces P et Q ne soient pas commensurables.

Fig. 7. Je remarque d'abord que si la résultante de deux forces quelconques P et Q appliquées aux points A et B, tombe en C, la résultante de la force P et d'une force $Q + I > Q$ tombera entre le point C et le point B; c'est-à-dire, que le point d'application de la résultante s'appro-

chera du point d'application de la composante qui aura augmenté. En effet, pour trouver la résultante des deux composantes P et $Q+I$, on peut prendre d'abord la résultante R de P et Q, qui passe au point C, par hypothèse, et ensuite celle de R et de I, dont le point d'application sera entre C et B (19).

Maintenant, si la résultante des deux forces incommensurables P et Q ne passe pas au point C qui en est tel qu'on a $P:Q::BC:AC$, elle passera en un autre point situé entre A et C, ou entre C et B. Supposons que ce soit en G entre A et C. Partagez la ligne AB en parties égales toutes plus petites que GC, il y aura au moins un point de division entre C et G. Soit I ce point: les deux lignes AI et BI seront commensurables, et le point I pourra être considéré comme le point d'application de la résultante de deux forces P et Q' qui seraient telles qu'on aurait : $P:Q'::BI:AI$: ce qui donne $Q' < Q$ (puisqu'on a par hypothèse $P:Q::BC:AC$.) Mais la résultante des deux forces P et Q' passant en I, celle des deux forces P, et $Q > Q'$, passera entre I et B, et ne pourra tomber en G contre l'hypothèse. Fig. 8.

On ferait voir absolument de la même manière qu'elle ne peut tomber entre C et B ; et par conséquent elle passe nécessairement en C.

Corollaire I.

Fig. 9. 24. Lorsque trois forces parallèles P, Q, R sont en équilibre sur une ligne AB, l'une d'entr'elles est égale et directement opposée à la résultante des deux autres. Ainsi la force Q, par exemple, prise en sens contraire, est la résultante des deux forces P et R. Comme les deux forces P et Q tirent dans le même sens, la force R est égale à $P+Q$, et par conséquent $Q = R - P$; d'où il suit que la résultante de deux forces parallèles qui agissent en sens contraires, est égale à leur différence, et tire du même côté que la plus grande.

25. Les deux forces P et R étant données ainsi que la distance AC qui sépare leurs points d'application, si l'on demande le point d'application de la résultante Q, on fera cette proportion : $P : Q :: BC : AC$: d'où l'on tire : $P+Q : Q :: BC+AC : AC$, c'est-à-dire, $R : Q :: AB : AC$, proportion qui fera connaître AB, et par conséquent le point B.

Remarque.

26. Supposons que les deux forces P et R soient égales, la résultante Q sera zéro, et la distance AB de son point d'application sera, par la pro-

portion ci - dessus, $\frac{R \times AC}{o}$, c'est-à-dire, infinie.

Si les deux forces P et R au lieu d'être égales, différaient d'une quantité très-petite, la résultante Q qui est égale à cette différence, serait très-petite, et la distance $AB = \frac{R \times AC}{Q}$ serait très-grande à cause du dénominateur Q très-petit; ainsi plus les deux forces s'approchent de l'égalité, plus la résultante diminue, et plus la distance du point où elle est appliquée augmente. De sorte que, lorsque les deux forces deviennent parfaitement égales, la résultante est nulle, et la distance du point d'application infinie. Ce qui nous apprend qu'on ne peut pas trouver actuellement une force unique qui fasse équilibre à deux forces égales, parallèles et agissantes dans des sens opposés.

27. Au reste, pour ne laisser aucun nuage sur cette dernière conséquence, concevons qu'une force quelconque, dirigée comme on voudra dans l'espace, fasse équilibre aux deux forces P et —P, parfaitement égales, parallèles et contraires. 1°. Il est clair que cette force doit être dans le plan des deux forces P et —P; car il n'y a pas de raison pour qu'elle soit au-

dessus plutôt qu'au-dessous, tout étant égal de part et d'autre. 2°. Quelle que soit la position qu'on lui donne dans le plan à l'égard de la force P, on lui en trouvera sur-le-champ une autre parfaitement symétrique et de sens contraire, à l'égard de la force —P : elle aurait donc à la fois deux positions différentes, ce qui est absurde.

Ainsi les deux forces P et —P ne peuvent avoir de résultante unique.

Nous reviendrons bientôt sur ces sortes de forces, dont la considération, qui n'avait paru jusqu'ici que comme un cas singulier, fera la seconde partie essentielle de nos Elémens.

Corollaire II.

Fig. 6. 28. De même que l'on compose en une seule deux forces parallèles qui agissent à des points donnés d'une ligne, on peut aussi décomposer une seule force quelconque R, appliquée à un point C d'une droite inflexible, en deux autres P et Q qui lui soient parallèles, et qui agissent en des points donnés A et B de cette droite. Il ne s'agit pour cela que de partager la force R en deux autres qui soient entr'elles dans le rapport des distances B C et A C ; et pour trouver la force Q, par exemple, on se servira de la proportion R : Q :: A B : A C, dans laquelle il

n'y a que Q d'inconnue. La force P sera égale à R—Q.

Mais si le point C d'application de la force R Fig. 10.
qu'on veut décomposer, ne tombait pas entre A et B, points d'application donnés des composantes P et Q que l'on cherche, on ferait toujours la proportion R : Q : : AB : AC, qui ferait connaître la force Q; mais la force P serait égale à R+Q.

Corollaire III.

29. QUAND on sait déterminer la résultante Fig. 11.
de deux forces parallèles, on peut facilement trouver celle de tant de forces parallèles qu'on voudra, appliquées aux différens points d'un système quelconque de figure invariable.

Soient, par exemple, les quatre forces parallèles P, P′, P″, P‴, appliquées respectivement aux quatre points A, B, C, D, situés d'une manière quelconque dans l'espace, et liés entr'eux d'une manière invariable : en considérant ces forces deux à deux, elles sont dans des mêmes plans. Ainsi l'on peut prendre d'abord la résultante X des deux forces P et P′; elle sera égale à leur somme P+P′, et passera en un point I de la ligne AB, qu'on trouvera en divisant AB dans la raison inverse de P à P′. La résultante X étant ainsi déterminée, on joindra le point I où elle agit, au point C de la troisième force P''. Les deux forces X et P'' étant parallèles, on en prendra la résultante X', comme nous avons fait tout-à-l'heure : cette résultante sera égale à leur somme $X+P''$, et le point F où elle devra être appliquée, se trouvera, en divisant la droite CI, dans la raison réciproque de X à P''. Joignant enfin le point F au point D d'application de la quatrième force P''', et divisant la droite FD en deux parties réciproquement proportionnelles aux forces X' et P''', on aura le point G d'application de la résultante générale R, qui sera parallèle aux deux forces X' et P''', et par conséquent à toutes les composantes; égale à leur somme $X'+P'''$, et par conséquent à la somme de toutes les composantes.

Le raisonnement que nous venons de faire s'étend manifestement à un nombre quelconque de forces parallèles.

Si parmi les forces P, P', P'', etc. les unes agissaient dans un sens, et les autres dans le sens contraire, on commencerait par prendre la résultante de toutes celles qui agissent dans le même sens; on chercherait ensuite la résultante de celles qui agissent dans le sens contraire; et toutes les forces étant alors réduites à deux forces parallèles et de sens contraires, on en trouverait la résultante par ce que nous avons dit plus haut.

30. On peut donc, en général, déterminer la position et la quantité de la résultante de tant de forces parallèles qu'on voudra; *cette résultante sera parallèle aux forces, et égale à l'excès de la somme de celles qui tirent dans un sens, sur la somme de celles qui tirent dans le sens contraire.*

J'ai dit en général, par ce qu'il peut arriver, que la résultante des forces qui tirent dans un sens, soit parfaitement égale à la résultante de celles qui tirent dans le sens contraire, sans lui être directement opposée; et alors il n'y a pas de résultante unique, comme nous l'avons vu plus haut.

Corollaire IV.

31. SUPPOSONS que les quatre forces P, P', P'', P''', sans changer de grandeurs, sans cesser d'être parallèles et de passer aux mêmes points respectifs A, B, C, D, viennent à prendre les positions p, p', p'', p''' dans l'espace.

Si l'on en cherche la résultante en suivant le même ordre que plus haut, on trouvera d'abord que la résultante x de p et p'', passe au même point I que la résultante X de P et P', et qu'elle lui est égale. Elle passera par le même point, parce que son point d'application doit diviser la même droite A B dans la raison réciproque de p à p', qui est la même que celle de P à P'. Elle lui sera égale, parce qu'on aura $p+p'=P+P'$. On trouvera de même que la résultante x' de x et p'' passera au même point F que la résultante X' de X et P'', et qu'elle lui sera égale; et ainsi de suite : de sorte que la résultante générale des quatre forces $p, p', p'' p'''$, passera au même point que la résultante des quatre forces P, P', P'', P'''; et cela est général, quel que soit le nombre des forces: d'où l'on peut conclure ce théorème remarquable:

32. *Si l'on a un système quelconque de forces parallèles, appliquées à un assemblage de points* A, B, C, D, *etc., et qu'on incline successivement tout le système de ces forces dans diverses situations, de manière que les mêmes forces passent toujours par les mêmes points, et conservent leurs grandeurs et leur parallélisme; les résultantes générales qu'on trouvera successivement dans chacune de ces positions, se croiseront toutes au même point.*

Ce point d'intersection des résultantes successives se nomme *le centre des forces parallèles*. Nous aurons occasion d'en parler plus loin, quand il sera question des centres de gravité.

On peut remarquer, au reste, dans la démonstration précédente, qu'il n'est pas nécessaire de supposer que les forces conservent toujours les mêmes grandeurs, mais qu'il suffit que, dans les positions successives du groupe, elles demeurent proportionnelles.

Composition des forces dont les directions concourent en un même point.

Théorème III.

33. *La résultante de deux forces quelconques* P *et* Q, *appliquées à un même point* A *sous un angle quelconque, est dirigée suivant la diagonale du parallélogramme* ABDC *construit sur les deux lignes* AB, AC, *qui représentent les forces* P *et* Q *en grandeurs et en directions.* Fig. 12.

D'abord, nous avons vu que cette résultante doit être dans le plan des deux forces P et Q; en second lieu, qu'elle doit être appliquée au point A, puisque cette résultante, par hypothèse, doit solliciter le point A absolument de la même manière que les deux forces P et Q.

Je dis maintenant qu'elle doit passer au point D, extrémité de la diagonale AD.

Prenons, en effet, sur le prolongement de la ligne BD la partie DG = DC, et achevons le rhombe CDGH. Appliquons aux points G et H et dans la direction de G H, deux forces Q' et Q'' contraires, égales entr'elles et à la force Q. Il est facile de voir que la résultante des quatre forces P, Q, Q' et Q'' doit passer au point D. Car 1°. à cause de $Q' = Q$, les deux forces parallèles P et Q' sont entr'elles comme les côtés AB, AC ou comme DC et DB, ou bien à cause de $DC = DG$, comme les lignes DG et DB; et par conséquent (23) leur résultante S passe en D; 2°. les deux forces Q et Q'' étant égales, leur résultante T prolongée divise en deux également l'angle CHG du rhombe CDGH, et va passer aussi par le point D, où l'on peut la supposer appliquée. Donc la résultante générale qui est celle des deux forces S et T passe au point D.

Mais les deux forces Q' et Q'' appliquées sur GH étant parfaitement égales et contraires, leur effet est absolument nul, et la résultante des quatre forces P, Q, Q' et Q'' est identiquement la même que celle des deux forces P et Q. Donc, puisque la première passe en D, celle des deux forces P et Q, passe aussi au même point.

Puisque la résultante passe à la fois par les deux points A et D, elle est donc nécessairement dirigée suivant la diagonale A D.

Corollaire.

Corollaire.

34. CONCLUONS de là que si l'on connaissait seulement les directions des deux forces P et Q, et celle de leur résultante R, on pourrait déterminer le rapport de la force P à la force Q. Car, en prenant sur la direction de la résultante un point quelconque D, et menant de ce point deux parallèles DC et DB aux directions des composantes P et Q, et qui rencontrent ces directions en C et B, on aurait nécessairement P : Q : : AB : AC. Sans quoi l'on aurait P à Q comme AB est à une ligne AO plus petite ou plus grande que AC; et alors la résultante des deux forces P et Q serait dirigée suivant la diagonale AI d'un parallélogramme AOIB différent du parallélogramme ABDC, ce qui est contre l'hypothèse. Fig. 13.

Théorème IV.

35. *La résultante de deux forces quelconques* P *et* Q *appliquées à un même point* A, *est représentée en grandeur et en direction par la diagonale du parallélogramme* ABDC *construit sur les deux lignes* AB, AC *qui représentent ces forces en grandeurs et en directions.* Fig. 14.

Nous avons déjà vu que cette résultante est dirigée suivant la diagonale ; reste à faire voir qu'elle est représentée en quantité par la diagonale elle-même.

Soit R cette résultante : supposez qu'elle soit appliquée au point A sur le prolongement de la diagonale D A, en sens contraire de son action. Les trois forces P, Q, R seront en équilibre sur le point A. Donc l'une d'elles, la force Q, par exemple, sera égale et directement opposée à la résultante des deux autres P et R. Donc la direction de la force Q, prolongée, sera celle de la résultante des deux forces P et R. Donc si, du point B, vous menez à la direction A R, la parallèle B G qui rencontre en G le prolongement de Q A, et du point G, à la direction A P la parallèle G H qui rencontre en H la direction de la force R, les deux forces P et R seront entr'elles comme les côtés A B, A H du parallélogramme A B G H (34). Mais la ligne A B représente actuellement la force P, donc la ligne A H représente la force R. Or, par les parallèles, on a : A H = B G = A D ; donc, etc.

Corollaire.

36. PUISQUE les trois forces P, Q, R sont entr'elles comme les trois lignes A B, A C, A D ;

et que dans le parallélogramme ABDC, on a: AB = CD, on peut dire que ces trois forces sont entr'elles comme les trois côtés CD, CA et AD du triangle ACD. Mais ces trois côtés sont entr'eux comme les sinus des angles opposés CAD, CDA, ACD, et à cause des parallèles, l'angle CDA = l'angle BAD; l'angle ACD est supplément de l'angle BAC, et par conséquent a le même sinus; on a donc:

$$P : Q : R :: \sin. CAD : \sin. BAD : \sin. BAC.$$

D'où l'on peut conclure que la résultante de deux forces P et Q étant représentée par le sinus de l'angle formé par leurs directions, les deux forces P et Q sont représentées réciproquement par les sinus des deux angles adjacents à la direction de la résultante. Ou, si l'on veut, *chacune des forces* P, Q, R *est comme le sinus de l'angle formé par les directions des deux autres*.

Remarque.

37. On peut voir par là, et mieux encore par la considération immédiate du parallélogramme des forces, que lorsque deux forces agissent sur un même point sous un angle qui n'est pas égal à deux droits, elles ne peuvent jamais donner une résultante nulle, à moins qu'elles ne soient nulles elles-mêmes chacune en particulier.

Car, si aucune des deux forces n'était nulle, on pourrait construire un parallélogramme sur les deux lignes qui les représentent en grandeurs et en directions, et la diagonale de ce parallélogramme serait la résultante.

Si l'une d'elles seulement était nulle, la seconde serait la résultante; et par conséquent la résultante ne peut être nulle, à moins que les composantes ne soient toutes deux nulles en même temps.

Lorsque les deux composantes agissent sous un angle égal à deux angles droits, elles sont alors contraires, et la résultante n'est pas nulle dans le seul cas où ces deux composantes sont nulles toutes deux, mais encore dans celui où elles sont égales.

Corollaire II.

Fig. 15. 38. On peut toujours décomposer une force donnée R en deuxautres P et Q dirigées suivant des lignes données A P, A Q, pourvu que ces directions et celle de la force R soient comprises dans un même plan et concourent au même point A. Car, prenant sur la direction de la force R une partie A D qui représente sa quantité, et par le point D menant les droites D C, D B parallèles aux directions données A P,

AQ, on formera un parallélogramme ABDC, dont les côtés AB, AC représenteront les forces demandées P et Q.

Si l'on veut calculer immédiatement leurs grandeurs, on pourra faire ces deux proportions :

$$R : P :: \sin. BAC : \sin. CAD$$
$$R : Q :: \sin. BAC : \sin. BAD$$

dans lesquelles il n'y a que P et Q d'inconnues.

Remarque.

39. Si l'angle BAC était droit, on aurait, en supposant le rayon $=1$, $\sin. BAC = 1$; $\sin. CAD = \cos. BAD$, et réciproquement $\sin. BAD = \cos. CAD$. Et les deux proportions ci-dessus deviendraient :

$$R : P :: 1 : \cos. BAD$$
$$R : Q :: 1 : \cos. CAD.$$

D'où : $P = R. \text{Cos}. BAD$ et $Q = R. \text{Cos}. CAD$.

Il résulte delà que lorsqu'on décompose une force en deux autres qui agissent suivant des directions rectangulaires entr'elles, on trouve chaque composante en multipliant la force proposée par le cosinus de l'angle qu'elle fait avec la direction de cette composante.

Chaque composante est représentée par la projection de la résultante sur sa direction, et c'est ce qu'on appelle souvent, la force *estimée* suivant cette direction. Ainsi, R cos. B A D, ou la composante P est la force R *estimée* suivant la direction A P.

Corollaire III.

40. QUAND on sait déterminer la résultante de deux forces appliquées à un point, on peut déterminer celle de tant de forces P, Q, R, S, etc. qu'on voudra, appliquées à un même point A et dirigées d'une manière arbitraire dans l'espace. Car, en considérant d'abord deux quelconques de ces forces, comme les forces P et Q, par exemple, ces deux forces seront dans un même plan, et l'on en déterminera la résultante comme nous l'avons fait tout-à-l'heure. Soit X cette résultante, on prendra semblablement la résultante de la force X et d'une autre telle que R. Combinant ensuite cette résultante que je désigne par Y avec une nouvelle force S, on aura leur résultante Z qui sera celle des quatre forces P, Q, R, S; et continuant ainsi, on arrivera nécessairement à la résultante générale.

Si toutes les forces P, Q, R, S, etc. sont dans un même plan, les résultantes successives X, Y, Z, etc. seront dans ce même plan, et par conséquent la résultante générale y sera aussi.

Si toutes les forces sont en équilibre, la résultante générale sera nulle.

Théorème V.

41. *Si trois forces* X, Y, Z *appliquées à un même point* A *dans l'espace, sont représentées par les trois lignes* A B, A C, A D, *et qu'on achève le parallélépipède* A... F, *la résultante* R *de ces trois forces sera représentée par la diagonale* A F *de ce parallélépipède.* Fig 16.

En effet, les deux forces X et Y qui sont représentées par les deux côtés du parallélogramme A B G C, donneront pour résultante une force P représentée par la diagonale A G de ce parallélogramme.

Ensuite, à cause de A D égale et parallèle à G F, la figure A G F D sera un parallélogramme, et par conséquent les deux forces P et Z donneront une résultante R représentée par la diagonale A F, laquelle est en même temps la diagonale du parallélépipède proposé.

Remarque.

42. Observons, sur le champ, comme au n°. 37, que tant que les trois forces X, Y, Z ne seront pas dans un même plan, elles ne pourront jamais donner une résultante nulle, à moins qu'elles ne soient nulles elles-mêmes en particulier.

Car, si aucune d'elles n'était nulle, on pourrait construire le parallélépipède sur les lignes qui les représentent, en grandeurs et en directions, et la diagonale serait la résultante.

Si l'une d'elles seulement était nulle, les deux autres qui, par hypothèse, ne sont pas en ligne droite, auraient une résultante.

Enfin, si deux d'entr'elles seulement étaient nulles, la troisième serait la résultante, et par conséquent, les composantes X, Y, Z doivent être nulles toutes trois, pour donner une résultante nulle.

Corollaire I.

43. On voit par le Théorème précédent, (qu'on pourrait nommer le parallélépipède des forces) qu'une force quelconque donnée R est toujours décomposable en trois autres X,

Y, Z respectivement parallèles à trois lignes données dans l'espace, pourvu que deux de celles-ci ne soient pas parallèles.

Car, en prenant la partie A F pour représenter la quantité de la force R, et menant par le point A d'application trois lignes parallèles aux droites données chacune à chacune, on conduira par le point A trois plans indéfinis X Y, X Z, Y Z, et par le point F trois autres plans respectivement parallèles aux premiers ; et ces six plans détermineront le parallélépipède dont les trois arrêtes contigues A B, A C, A D représenteront les trois composantes X, Y, Z.

Corollaire II.

44. Si le parallélépipède est rectangulaire, on aura dans le rectangle A D F G : $\overline{AF}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AG}^2$; mais dans le rectangle A B G C, on a : $\overline{AG}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2$; donc en substituant cette valeur $\overline{AG}^2$, on aura :

$\overline{AF}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2$; et par conséquent :

$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2.$$

Ce qui donne $R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$ pour la valeur de la résultante en fonction des trois composantes.

45. Si l'on veut avoir les trois composantes en fonction de la résultante et des angles qu'elles font avec elle, en nommant d'abord α l'angle que la résultante R fait avec la composante X, on aura visiblement : A F : A B : : 1 : cos. α, et par conséquent :

$$R : X : : 1 : \cos. \alpha :$$

d'où l'on tire : $X = R \cos. \alpha$.

En nommant de même β et γ les angles que la résultante fait respectivement avec les composantes Y et Z, on trouvera : $Y = R \cos. \beta$, $Z = R \cos. \gamma$: d'où il suit qu'on trouvera les valeurs des trois composantes respectives, en multipliant la résultante par les cosinus respectifs des trois angles que sa direction forme avec les directions de ces composantes.

Remarque.

46. Puisqu'on a trouvé $R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$ en substituant pour X, Y, Z leurs valeurs respectives R cos. α, R cos. β, R cos. γ ; on aura :

$$R^2 = R^2 \cos.^2 \alpha + R^2 \cos.^2 \beta + R^2 \cos.^2 \gamma :$$

ou bien :

$$R^2 = R^2 (\cos.^2 \alpha + \cos.^2 \beta + \cos.^2 \gamma)$$

$$\text{d'où}, \cos.^2\alpha + \cos.^2\beta + \cos.^2\gamma = 1$$

relation connue qui a toujours lieu entre les angles que fait une droite avec trois axes rectangulaires dans l'espace.

Composition et décomposition des Couples.

47. Pour abréger le discours, nous appellerons *couple* l'ensemble de deux forces, telles que P et —P, égales, parallèles et contraires, mais non appliquées au même point. La perpendiculaire commune AB, menée entre les directions des deux forces, sera *le bras de levier* du couple ; et le produit $P \times AB$ de l'une des forces par le bras du levier, en sera nommé *le moment*. Fig. 17.

Quelle que soit l'action de deux forces telles que P et —P, sur le corps auquel elles sont appliquées, nous avons vu (32) que cette action ne peut être contrebalancée par celle d'aucune simple force appliquée comme on voudra au même corps; et que par conséquent l'effort d'un couple ne peut être comparé d'aucune manière à une simple force. Pour distinguer cette nouvelle cause de mouvement, qui est en quelque sorte d'une nature particulière, on pourrait l'appeler *énergie*. Au reste, comme on verra tout-à-l'heure que l'*énergie* d'un couple est mesurée par son *moment*, on pourra souvent substituer ce second mot au premier, ou les prendre quelquefois l'un pour l'autre.

La composition des couples formera la seconde partie essentielle des principes de notre Statique, et se reproduira dans le cours de cet Ouvrage presqu'aussi souvent que la composition des forces. On en verra bientôt dériver les lois de l'équilibre d'une manière si naturelle et si simple, que l'on nous pardonnera d'avoir paru nous arrêter ici à l'examen d'un cas singulier, lorsque nous tendions peut-être le plus directement possible vers le but principal.

Ce que nous allons dire sur les couples est tout-à-fait indépendant de l'effet qu'ils produisent sur les corps ; mais lorsqu'on voudra se faire une idée des sens respectifs de différens couples situés dans le même plan, on pourra se représenter que les milieux de leurs bras de levier sont fixes : alors l'effet de chaque couple sera visiblement de faire tourner le corps autour du milieu de son bras de levier, et l'on distinguera facilement le sens des couples, en distinguant les couples qui tendent à faire tourner dans un sens, d'avec ceux qui tendent à faire tourner dans le sens contraire. Mais ne perdons pas de vue qu'il n'y aura réellement aucun point fixe, à moins que nous n'en avertissions expressément, et que l'idée de rotation qui est purement accessoire, ne servira qu'à faire image au besoin.

48. Nous avons vu plus haut qu'une force peut être transportée en un point quelconque de sa direction, pourvu que ce point soit lié au premier d'une manière invariable : voici une proposition analogue pour les couples, qui n'est pas moins remarquable que la première, et dont nous ferons le plus grand usage par la suite.

Lemme.

49. *Un couple quelconque peut être transporté partout où l'on voudra dans son plan, ou dans tout autre plan parallèle, et tourné comme on voudra dans ce plan, sans que son effet sur le corps auquel il est appliqué en soit changé, pourvu qu'on suppose le nouveau bras de levier invariablement attaché au premier.*

Pour démontrer plus facilement cette proposition, nous la décomposerons en deux autres.

Soit d'abord le couple (P, —P) appliqué Fig. 18.

perpendiculairement sur A B ; prenons où l'on voudra, dans le plan de ce couple ou dans tout autre plan parallèle, la droite C D égale et parallèle à A B : joignons A D et B C qui seront dans un même plan, et se couperont visiblement au milieu I de leurs longueurs respectives; et supposons enfin les droites A B et C D liées entr'elles d'une manière invariable.

Si l'on applique sur la ligne C D, parallèlement aux forces P et —P, deux couples contraires (P', —P'), (P'', —P''), égaux entr'eux et au couple proposé (P, —P), il est évident que ces deux couples se détruiront d'eux-mêmes, et que par conséquent l'effet du couple (P, —P) ne sera pas changé ; mais, d'un autre côté, il est facile de voir que les deux couples (P, —P,) et (P'', —P'') se détruisent aussi d'eux-mêmes ; car le point I étant à la fois le milieu des deux lignes A D et B C, les deux forces égales et parallèles P et P'', appliquées sur A D, donnent une résultante parfaitement égale et opposée à la résultante des deux forces —P et —P'', appliquées sur B C. On peut donc supprimer les deux couples (P, —P), (P'', —P'') ; et il ne reste plus que le couple (P', —P') appliqué sur C D, lequel n'est autre chose que le couple primitif qu'on aurait pour ainsi dire transporté parallèlement à ses forces, de manière que son bras de levier AB fut venu dans la position parallèle CD.

Soit, en second lieu, le couple (P, —P) appliqué perpendiculairement sur AB. Tirons dans le plan de ce couple, sous un angle quelconque avec AB, la droite CD = AB, et supposons que ces deux droites se coupent au milieu I de leurs longueurs respectives, et soient invariablement fixées entr'elles. Fig. 19.

Si l'on applique à angle droit sur CD, deux couples contraires égaux entr'eux et au couple proposé (P, —P), ces deux couples se détruiront d'eux-mêmes, et par conséquent l'effet du couple (P, —P) ne sera pas changé. Mais, d'un autre côté, les deux couples (P, —P), (P″, —P″), se détruisent aussi d'eux-mêmes : car, avec un peu d'attention, on voit que les deux forces égales P et —P″ qui se rencontrent en G, donnent une résultante égale et directement opposée à la résultante des deux forces —P et P″ qui se rencontrent en H. On peut donc supprimer les deux couples (P, —P), (P″, —P″), et il ne reste plus que le couple (P′, —P′) appliqué sur CD, lequel n'est, pour ainsi dire, que le couple primitif qu'on aurait tourné dans son plan, de manière que son bras de levier AB fut venu dans la position oblique CD.

De ces deux propositions réunies, on peut conclure qu'un couple quelconque, sans que son effet soit changé, peut être transporté dans son plan ou dans tout autre plan parallèle, dans telle position qu'on voudra : car on peut d'abord le transporter parallèlement à ses forces dans le plan donné, de manière que le milieu de son bras de levier touche au point donné qu'on voudra, et l'on peut ensuite le tourner autour de ce point, de manière à l'amener dans la position donnée : ou, réciproquement, on peut le tourner d'abord dans son plan, de manière que ses forces deviennent parallèles aux nouvelles directions qu'on veut leur donner, et ensuite le transporter immédiatement dans la position donnée.

Transformation des Couples, Mesure de leurs Energies.

Lemme.

Fig. 20. 50. *Un couple quelconque* (P, —P) *appliqué sur un bras de levier* A B, *peut être changé en un autre* (Q, —Q) *de même sens, appliqué sur un bras de levier* B C *différent du premier, pourvu qu'on ait* : P : Q :: BC : AB, *ou* $P \times AB = Q \times BC$, *c'est-à-dire, pourvu que les momens de ces couples soient égaux.*

Prenons

Prenons en effet sur le prolongement de AB une partie quelconque BC, et appliquons sur BC parallèlement aux forces P et —P, deux couples (Q, —Q), (Q′, —Q′) égaux et contraires : leur effet sera absolument nul ; et par conséquent celui du couple (P, —P) ne sera pas changé. Mais, d'un autre côté, si l'on suppose que les forces P et Q, et par conséquent P et Q′, sont en raison inverse des lignes AB et BC, leur résultante qui est égale à P+Q′, passe en B, et détruit évidemment les forces contraires —P —Q′ qui s'y trouvent. On peut donc supprimer les quatre forces P, Q′, —P, —Q′, et il ne reste plus que le couple (Q, —Q) appliqué sur BC, lequel remplace le couple proposé (P, —P) appliqué sur AB.

Corollaire.

51. Il n'est pas difficile de conclure de là que les énergies des couples sont proportionnelles à leurs momens.

En effet, l'on peut voir d'abord que les énergies de deux couples (P, —P), (Q, —Q), qui agissent sur des bras de levier égaux AB, CD, sont entr'elles comme les forces P et Q de ces couples; car si l'on suppose les forces P et Q entr'elles, comme deux nombres entiers, Fig. 21.

comme 5 et 3 par exemple, en partageant chaque force P et —P en 5 forces égales, et chaque force Q et —Q en trois forces égales entr'elles et aux premières, on pourra considérer le couple (P, —P) comme la somme de 5 couples égaux et de même sens, appliqués parfaitement l'un sur l'autre, et le couple (Q, —Q) comme la somme de 3 couples égaux entr'eux et aux premiers, aussi appliqués l'un sur l'autre. Les énergies des couples (P, —P), (Q, —Q), seront donc entr'elles comme 5 à 3, ou comme P à Q. Si les forces P et Q sont incommensurables, on fera le raisonnement connu, etc.

Maintenant soient deux couples quelconques (P, —P), (Q, —Q); soit p le bras de levier du premier, et q le bras de levier du second: le couple (Q, —Q) agissant sur la ligne q, est équivalent au couple $\left(\frac{q}{p}Q, -\frac{q}{p}Q\right)$, qui agirait sur la ligne p; car les momens sont égaux de part et d'autre, le premier étant Qq, et le second, $\frac{q}{p}Q.\,p = Qq$. Ainsi, au lieu des deux couples proposés, on a ces deux-ci, (P, —P), $\left(\frac{q}{p}Q, -\frac{q}{p}Q\right)$ qui ont un même bras de levier p. Mais les énergies M et N de ces deux couples sont entr'elles comme leurs forces, et par conséquent l'on a : $M : N :: P : \frac{q}{p} Q$, ou bien $M : N :: Pp : Qq$.

52. Puisque les énergies de deux couples sont entr'elles dans le rapport de leurs momens, il s'ensuit que le moment d'un couple est la mesure de son énergie : car si l'on prend pour unité d'énergie, celle d'un couple composé de deux forces égales à l'unité de force, appliquées sur un bras de levier égal à l'unité de ligne, l'énergie du couple (P, —P) au bras de levier p, contiendra autant de fois l'unité d'énergie, que le moment $P \times p$ contiendra le moment 1×1, c'est-à-dire, contiendra l'unité.

Remarque.

53. Pour comparer entr'elles les énergies des couples, on pourrait prendre aussi, au lieu des produits Pp, Qq, des forces par leurs bras de levier rectangulaires, les produits de ces mêmes forces par des bras de levier obliques sur leurs directions. Mais il faudrait pour tous les couples que les bras de levier fissent le même angle avec les forces. Il est clair qu'alors les bras de levier obliques seraient tous propor-

tionnels aux bras de levier rectangulaires, et que par conséquent les nouveaux momens seraient proportionnels aux premiers.

Nous employerons quelquefois ces nouveaux momens dans la mesure relative de différens couples; mais nous regarderons toujours les autres comme la mesure absolue de leurs énergies.

Composition des couples situés dans un même plan, ou dans des plans parallèles.

Théorème I.

54. *TANT de couples que l'on voudra, situés dans un même plans ou dans des plans parallèles, se composent toujours en un seul, dont le moment est égal à la somme des momens des couples composans, ou égal à leur différence, lorsqu'il y a des couples de sens inverse.*

En effet, on peut d'abord ramener tous les couples dans un même plan, ensuite ramener les forces de ces couples au parallélisme, enfin les changer tous en d'autres équivalens qui auraient un même bras de levier, et alors les appliquer l'un sur l'autre.

Soient P, Q, R... les forces composantes des différens couples; p, q, r... leurs bras de levier respectifs ; et soit D la longueur du bras de levier commun à tous les couples transformés. Au lieu du moment Pp du couple $(P, -P)$, on substituera le moment équivalent d'un couple $(P', -P')$, tel qu'on aurait $P'D = Pp$. On substituera de même à la place des momens Qq, Rr..., les momens $Q'D$, $R'D$... de couples équivalens ; et tous ces couples transformés étant appliqués l'un sur l'autre sur le même bras de levier D, on aura un couple unique résultant qui sera :

$$\{(P' + Q' + R' \ldots), -(P' + Q' + R' \ldots)\}$$

et dont le moment sera : $(P' + Q' + R' \ldots) \times D$, ou $P'D + Q'D + R'D \ldots = Pp + Qq + Rr \ldots$

Ainsi l'énergie résultante sera égale à la somme de toutes les énergies composantes, ou bien à leur différence, selon que les forces P', Q', R'... qui agiront à la même extrémité du bras de levier D, seront toutes de même sens, ou en partie contraires.

Composition des couples situés dans des plans quelconques.

Théorème II.

55. *Deux couples situés, comme on voudra, dans deux plans qui se coupent sous un angle quelconque, se composent toujours en un seul.* Fig. 22.

Et si l'on représente les momens de ces couples par les longueurs respectives de deux droites tirées sous un angle égal à celui des deux plans, et qu'on achève le parallélogramme, le moment du couple résultant sera représenté par la diagonale de ce parallélogramme, et le plan de ce couple partagera l'angle que font entr'eux les plans des couples composans, comme la diagonale du parallélogramme partage l'angle que font les deux côtés adjacens.

Soient en effet les deux couples proposés, situés dans les deux plans A G M, A G N, qui se rencontrent suivant A G; et supposons qu'on ait d'abord changé ces deux couples en deux autres respectivement équivalens, qui auraient un même bras de levier.

En quelque lieu que soit situé le couple (P, —P) dans le plan A G M, on pourra le ramener dans ce plan à angle droit sur l'intersection A G, de manière que son bras de levier A B tombe sur l'intersection A G (49). De même, en quelque lieu que soit situé le couple (Q, —Q) dans le plan A G N, on pourra le ramener aussi à angle droit sur la même intersection, et de manière que son bras de levier, égal au premier, coïncide avec lui en A B.

Alors les deux forces P et Q appliquées en A, se composeront en une seule R appliquée au même point A, et représentée par la diagonale AR du parallélogramme construit sur les deux lignes AP, AQ, qui représentent les forces P et Q. Les deux forces —P, —Q appliquées en B, se composeront aussi en une seule —R appliquée en B, parfaitement égale, parallèle et contraire à la première; et l'on aura, au lieu des deux couples (P, —P), (Q, —Q), le couple unique (R, —R) appliqué sur le même bras de levier AB.

Puisque ces trois couples ont un même bras de levier, leurs énergies respectives sont proportionnelles aux valeurs des trois forces P, Q, R. Donc, si l'on représente les énergies des deux couples composans, par les deux lignes AP, AQ qui leur sont proportionnelles, l'énergie du couple résultant sera représentée par la diagonale AR du parallélogramme APRQ construit sur ces lignes. Or, il est visible que les angles formés par les trois lignes AP, AQ, AR, mesurent les angles que font les trois plans: donc le plan du couple résultant partage l'angle des deux autres plans, comme la diagonale AR partage l'angle PAQ des deux côtés adjacens AP, AQ. Donc, etc.

Corollaire.

56. On pourra donc toujours réduire à un

seul tant de couples que l'on voudra, appliqués à un corps d'une manière quelconque dans l'espace : car, en les composant successivement deux à deux, comme nous venons de faire, on arrivera nécessairement à un couple unique dont on connaîtra le plan et l'énergie, et qui sera équivalent à tous les autres.

Corollaire II.

57. On peut aussi décomposer un couple en deux autres situés dans deux plans donnés, pourvu que ces plans et celui du couple proposé se rencontrent suivant une même droite, ou suivant des droites parallèles ; (car en transportant le plan de l'un de ces couples parallèlement à lui-même, ce qui est permis (49), on rassemblerait leurs trois intersections parallèles en une seule).

Pour opérer cette décomposition, on n'aura qu'à suivre dans l'ordre inverse le procédé que nous venons de donner pour la composition de deux couples ; ou bien l'on s'y prendra de cette manière qui est très-simple, et dont nous nous servirons quelquefois.

Fig. 23. 58. Soit AZ la commune intersection des trois plans : menons à volonté un plan YAX qui les coupe suivant les trois lignes respec-

tives AY, AV, AX; et soit ZAV le plan du couple proposé.

De quelque manière que ce couple (P,—P) soit situé dans le plan ZAV, on peut le placer de manière que ses forces soient parallèles à l'intersection AZ, et que la direction de l'une d'elles, comme de la force —P, coïncide avec cette même intersection. Alors la direction de l'autre force P rencontrera quelque part en B la droite AV, et l'on aura le couple (P, —P) appliqué d'une manière quelconque sur AB, comme on le voit dans la figure. Maintenant formons, suivant les directions AY, AX, avec AB comme diagonale, le parallélogramme BCAD; et à l'un des angles C ou D, en D par exemple, appliquons deux forces contraires P′, —P″, égales et parallèles aux forces P et P du couple proposé. L'effet de ce couple ne sera pas changé. Mais actuellement, au lieu du couple (P, —P) appliqué sur la diagonale AB, on peut en considérer deux autres: l'un (P′, - P) appliqué sur le côté AD dans l'un des plans donnés ZAY : l'autre (P, —P′), appliqué sur BD parallèlement à l'autre plan ZAX. Or, ce couple peut être transporté parallèlement à lui-même dans ce plan ZAX, sur le côté AC=BD; et l'on aura alors, au lieu du couple (P, —P) appliqué sur la diagonale AB, deux couples

(P′, —P), (P, —P′), composés de forces égales et parallèles aux premières, appliqués dans les deux plans donnés sur les côtés AD, AC.

Remarque.

59. Si l'on supposait que le plan YAX est mené perpendiculairement à la commune intersection AZ des plans des trois couples, les forces de ces couples seraient perpendiculaires aux lignes AY, AV, AX; et comme ces forces sont égales, les énergies des couples seraient proportionnelles à leurs bras de levier AD, AB, AC; et d'après ce que nous venons de dire, on retomberait sur la proposition précédente, n°. (55); ce qui fournit, comme on voit, une nouvelle démonstration de cette proposition.

Manière plus simple d'exprimer les Théorèmes qui concernent la composition des Couples.

60. Au lieu de déterminer la position d'un couple par celle de son plan, on peut aussi la déterminer par la direction d'une droite quelconque perpendiculaire à ce plan, et que l'on pourra nommer *l'axe du couple*. Puisqu'un couple peut être supposé appliqué où l'on voudra dans son plan, ou dans tout plan pa-

rallèle, il est visible que l'on connaîtra la position d'un couple dans l'espace, lorsque l'on connaîtra la direction de son axe ; car en élevant où l'on voudra sur cet axe un plan perpendiculaire, ce plan pourra être pris pour celui du couple proposé.

Au moyen de cette remarque, nous exprimerons plus commodément dans le discours et dans le calcul, le théorème que nous venons de démontrer, et celui que nous y ajouterons.

61. Soit le parallèlogramme ALGM, et concevons suivant les deux côtés AL, AM, et suivant la diagonale AG, trois plans élevés perpendiculairement sur le plan de ce parallélogramme. Nous venons de voir que s'il y a dans les deux premiers deux couples dont les momens respectifs soient représentés par les deux côtés AL, AM, ces deux couples se composeront en un seul situé dans le troisième plan, et dont le moment sera représenté par la diagonale AG. Fig. 24.

Or, si par le point A et dans le plan du parallélogramme, on tire trois lignes AL', AG', AM', perpendiculaires aux trois lignes respectives AL, AG, AM, il est facile de voir que ces trois lignes seront respectivement perpendiculaires aux plans des trois couples, qu'elles feront entr'elles les mêmes angles que les trois lignes AL, AG, AM, et que par conséquent, si l'on prend AL′=AL, AG′=AG, AM′=AM, on formera un parallélogramme AL′G′M′ parfaitement égal au premier ALGM.

Donc l'on pourra dire, que *si deux couples situés dans deux plans respectivement perpendiculaires aux deux côtés d'un parallélogramme AL′G′M′, sont représentés en énergies par les longueurs respectives AL′, AM′ de ces côtés; le couple résultant sera situé dans un plan perpendiculaire à la diagonale, et représenté en énergie par la longueur AG′ de cette diagonale.*

Ou plus simplement : deux couples représentés, pour leurs axes et pour leurs énergies, par les deux côtés respectifs AL′, AM′ d'un parallélogramme, se composent en un seul représenté, pour son axe et pour son énergie, par la diagonale AG′ de ce parallélogramme.

62. On voit ici par un raisonnement tout-à-fait semblable à celui du n°. (37), que deux couples qui agissent dans des plans qui se coupent, ou qui ne sont pas parallèles, ne peuvent jamais donner un couple résultant nul, à moins qu'ils ne soient nuls tous les deux à-la-fois.

Remarque.

63. Lorsque les plans des deux couples com-

posans sont rectangulaires entr'eux, les deux perpendiculaires à ces plans, ou les deux axes AL′ AM′, sont aussi rectangulaires; et l'on a dans le rectangle AL′G′M′, $\overline{AG'}^2 = \overline{AL'}^2 + AM'^2$; de plus, si l'on nomme α et β les angles que fait la diagonale AG′ avec les deux côtés adjacents AL′, AM′; on a $AL' = AG' \cos. \alpha$, $AM' = AG'. \cos. \beta$.

Donc, en désignant simplement les trois énergies respectives par les lettres L, M, G, on a pour l'énergie résultante $G : G^2 = L^2 + M^2$, d'où $G = \sqrt{L^2 + M^2}$, et pour les angles que son axe fait avec les axes des deux autres $L = G \cos. \alpha$, $M. = G. \cos. \beta$, d'où $\cos. \alpha = \frac{L}{G}$, $\cos. \beta = \frac{M}{G}$.

Théorème III.

64. *Trois couples situés dans trois plans respectivement perpendiculaires aux trois arrêtes contigues d'un parallélipipède, et représentés en énergies par les longueurs respectives de ces arrêtes, se composent toujours en un seul situé dans un plan perpendiculaire à la diagonale, et représenté en énergie par cette diagonale elle-même.* Fig. 25.

Soit en effet A...G le parallélipipède,

AL, AM, AN, les côtés qui représentent à la fois les axes et les énergies des trois couples.

Les deux couples représentés en énergies par les deux côtés AL, AM du parallélogramme ALOM, se composeront en un seul, représenté en énergie par la diagonale AO, et situé dans un plan perpendiculaire à cette diagonale. Maintenant ce couple, et le troisième représenté en énergie par AN, se composeront en un seul, représenté en énergie par la diagonale AG du parallélogramme ANGO, et situé dans un plan perpendiculaire à cette diagonale. Or cette diagonale est en même temps celle du parallélipipède : donc etc.

65. On voit encore ici, par le même raisonnement que celui du n°. (42), que si trois couples agissent dans trois plans qui forment un angle solide, ou qui se coupent en un point unique, ils ne peuvent jamais avoir un couple résultant nul, à moins qu'ils ne soient nuls en même temps tous les trois.

Remarque.

66. Lorsque le parallélipipède est rectangulaire, en nommant L, M, N, les énergies composantes, et G l'énergie résultante, on a manifestement : $G^2 = L^2 + M^2 + N^2$.

En désignant par λ, μ, ν, les trois angles que la diagonale, ou plutôt que l'axe du couple résultant fait avec les trois axes des couples composans, on a :

$$L = G \cos. \lambda,\ M = G \cos. \mu,\ N = G.\cos. \nu.$$

d'où :

$$\text{Cos. } \lambda = \frac{L}{G},\ \cos. \mu = \frac{M}{G},\ \cos. \nu = \frac{N}{G}.$$

Donc s'il s'agit de calculer le moment résultant G des trois momens L, M, N, dont les axes sont rectangulaires, on aura pour sa valeur, $G = \sqrt{L^2 + M^2 + N^2}$, et pour les angles λ, μ, ν, que son axe fait avec les trois axes des momens composans :

$$\text{Cos. } \lambda = \frac{L}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}},$$

$$\text{Cos. } \mu = \frac{M}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}},$$

$$\text{Cos. } \nu = \frac{N}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}.$$

S'il s'agit, au contraire, de décomposer l'énergie G d'un couple en trois autres situées dans trois plans rectangulaires entr'eux, ou dont les trois axes soient rectangulaires, on aura, pour les valeurs respectives des énergies composantes, $L = G \cos. \lambda$, $M = G \cos. \mu$, $N = G \cos. \nu$; λ, μ, ν, étant les trois angles que l'axe du couple donné fait avec ceux des couples composans cherchés.

67. Au reste, nous ne nous arrêterons pas sur ces détails : nous remarquerons seulement qu'entre les sept quantités L, M, N, G, cos. λ, cos. μ, cos. ν, on a quatre équations qui sont: $G^2 = L^2 + M^2 + N^2$, $L = G \cos. \lambda$, $M = G \cos. \mu$, $N = G \cos. \nu$, au moyen desquelles, connaissant d'ailleurs trois de ces quantités, on pourra déterminer les quatre autres.

Il faut pourtant excepter le cas où l'on ne connaîtrait que les trois angles λ, μ, ν; alors on ne pourrait obtenir que les rapports des énergies L, M, N, G.

Conclusion générale de ce Chapitre.

Composition des Forces dirigées comme on voudra dans l'espace.

68. Soient tant de forces que l'on voudra P, $P_{,}$, $P_{,,}$ etc. appliquées d'une manière quelconque dans l'espace, à un corps ou système libre.

Je considère d'abord l'une d'elles, la force P, par exemple, qui est appliquée au point B. Ensuite, au point A, arbitrairement pris dans
Fig. 26. ce corps, ou au-dehors (pourvu qu'on l'y suppose invariablement fixé) j'applique deux forces

contraires

contraires P', $-P'$ égales et parallèles à la force P. Il est clair que je n'ai rien changé à l'état du système. Mais je puis considérer maintenant, au lieu de la force P appliquée en B, la force P' appliquée en A, et le couple (P, $-P'$) agissant sur la droite AB. Si, pour plus de clarté, on transporte ce couple ailleurs dans un plan quelconque parallèle au sien, il ne restera au point A que la force P' égale et parallèle à la force P, et qui n'est, en quelque sorte, que cette même force P qu'on aurait transportée parallèlement à elle-même de B en A.

Si l'on fait la même transformation pour toutes les forces du système à l'égard du même point A, il est manifeste que toutes ces forces viendront s'y réunir parallèlement à elles-mêmes, mais qu'il y aura de plus dans le système autant de couples appliqués provenans de chaque transformation. Or, toutes les forces appliquées au point A se composeront en une seule R, et tous les couples, en un seul couple (S, $-S$) appliqué sur une certaine droite BC. Fig. 27.

Ce qui nous apprend que *tant de forces que l'on voudra appliquées d'une manière quelconque à un corps, peuvent toujours se réduire à une seule force et à un couple unique, lesquels seront en général situés dans des plans différens.*

Observons, en passant, que la quantité, la direction et le sens de la résultante R seront toujours les mêmes, en quelque lieu qu'on ait pris le point A. En variant la position de ce point, la résultante R ne fera que se transporter parallèlement à elle-même en différens lieux de l'espace; mais le plan et l'énergie du couple résultant (S, —S) changeront nécessairement.

Corollaire I.

Qui contient les lois de l'équilibre de tout système libre.

69. Un couple ne pouvant jamais être tenu en équilibre par aucune simple force dirigée comme on voudra dans l'espace, il résulte de ce que nous venons de dire qu'il ne pourra jamais y avoir équilibre dans le système, à moins que la résultante R des forces ne soit nulle d'elle-même, et que le moment du couple résultant (S, —S) ne soit aussi nul de lui-même.

Ainsi, *toutes les forces appliquées au système, étant transportées parallèlement à elles-mêmes en un point quelconque du système ou de l'espace, doivent s'y faire équilibre entr'elles; et tous les couples qu'elles produisent en se transportant en ce point, doivent aussi se faire équilibre entr'eux.*

Remarque.

70. TELLES sont, pour un système libre quelconque, de forme invariable, les deux conditions d'équilibre nécessaires et suffisantes, c'est-à-dire, sans lesquelles l'équilibre ne pourra subsister, et telles qu'il aura manifestement lieu, si elles sont remplies.

Pour développer ces deux conditions, il faudra remonter à la valeur de la résultante R, et à la valeur du couple résultant (S, — S), en conservant les lois qui lient la résultante à ses composantes, et le couple résultant aux couples composans; faire ensuite la force R et le couple (S, —S) tous deux nuls, et voir quelles relations cela établit entre les forces primitives appliquées au système. On obtiendra de cette manière les conditions de l'équilibre, exprimées au moyen des seules forces données immédiatement par l'état de la question, ce qui est la solution du problème que nous avions en vue.

Mais tous ces développemens qui, d'après les principes posés ci-dessus, ne sont plus qu'une affaire de géométrie et de calcul, feront l'objet du Chapitre suivant.

Corollaire II.

Qui contient les conditions nécessaires pour que toutes les forces appliquées au système, aient une résultante unique, lorsqu'elles ne se font pas équilibre.

71. Toutes les forces appliquées au système étant ramenées, ainsi que nous venons de le voir, à une seule force et à un couple, supposons que cette force R et le couple (S, —S) se réduisent effectivement à une seule force, ou, si l'on veut, qu'une force unique R′ fasse équilibre au couple (S, —S) et à la force R.

Puisqu'il y a équilibre entre les deux forces R, R′ et le couple (S, —S), je dis que les deux forces R et R′ doivent former un couple contraire et équivalent au couple (S, —S), et situé dans le même plan, ou dans un plan parallèle, ce qui est ici la même chose.

Car, il ne peut arriver que trois cas : ou les deux forces R et R′ seront susceptibles de se réduire à une seule, et alors cette force ne pourra faire équilibre au couple (S, —S); ou elles se réduiront à une seule avec un couple, et alors ce couple et le proposé (S, —S) se réduiront à un seul, qui ne pourra pas être en équilibre avec la force : ou bien enfin, elles se réduiront à un seul couple, et c'est le seul cas qui puisse arriver.

Il faut donc au moins que les deux forces R et R′ forment ensemble un couple. Mais pour que ce couple fasse équilibre au couple (S, —S), il est nécessaire qu'il soit situé dans le même plan ou dans un plan parallèle, sans quoi ces deux couples se composeraient toujours en un seul qui ne pourrait jamais être nul (62), et il n'y aurait pas équilibre. Donc la direction de la résultante R doit être parallèle au plan du couple résultant (S, —S); et par conséquent, *toutes les forces appliquées au système ne pourront jamais se réduire à une seule, à moins que la résultante de ces forces transportées parallèlement à elles-mêmes en un même point, n'ait une direction parallèle au plan du couple résultant; et cela, en quelque lieu de l'espace qu'on ait pris d'abord le point où l'on a transporté toutes les forces.*

Cette condition est nécessaire, et il est clair qu'elle suffit en général; car, à moins que la résultante R ne soit nulle, on sera toujours maître d'appliquer au système une force R′ qui soit égale, parallèle et opposée à la force R, et qui forme avec elle un couple (R, —R) de sens contraire à l'égard du couple (S, —S), et d'un moment équivalent. Cette force estimée en sens contraire sera la résultante générale.

Au reste, on pourra prendre immédiatement cette résultante; car si la force R appliquée en A est parallèle au plan du couple (S, —S), on pourra amener ce couple dans un même plan avec la force R, et alors les trois forces R, S et —S étant dans le même plan se composeront toujours en une seule qui sera la résultante unique de toutes les forces.

72. Dans le cas où la force R est égale à zéro, il n'y a point de résultante unique. Car toutes les forces du système sont réduites au seul couple (S, —S) qui ne peut jamais se réduire à une seule force. Ainsi, à la condition précédente qui exige que la force R soit parallèle au plan du couple (S, —S), on pourrait joindre encore celle-ci, comme condition particulière: que la force R ne soit pas égale à zéro; à moins qu'il n'y ait équilibre, auquel cas la force résultante et le couple résultant étant tous deux nuls, on pourrait dire qu'il y a une résultante unique qui est zéro, et qui a d'ailleurs telle direction et telle position qu'on veut dans l'espace.

Remarque I.

73. LORQUE le couple résultant (S, —S) et
Fig. 28. la force R ne sont pas dans des plans parallèles, il n'y a jamais de résultante unique. Seulement en transportant le couple (S, —S), parallèlement à son plan, on peut amener l'extrémité

B ou C de son bras de levier sur le point A, et alors les deux forces R et S appliquées en A se composent en une seule T; et toutes les forces du système sont réduites à deux autres T et $-S$ non situés dans le même plan.

Ce qui nous fait voir d'abord que *tant de forces que l'on voudra dirigées arbitrairement dans l'espace, peuvent toujours se réduire à deux au plus, non situées dans le même plan.*

Et de plus, que *deux forces non situées dans le même plan, ne peuvent jamais avoir de résultante unique*; proposition qu'on regarde ordinairement comme évidente, mais qui a besoin d'être démontrée.

Remarque II.

74. Comme il paraît incontestable qu'un couple ne peut être en équilibre autour d'un point fixe, par exemple autour du milieu de son bras de levier, remarquons cette différence entre l'équilibre de plusieurs forces appliquées à un corps assujéti à tourner autour d'un point fixe, et l'équilibre de plusieurs couples qui seraient appliqués au même corps.

Dans le premier cas, il n'est pas nécessaire que les forces aient une résultante nulle d'elle-même; il suffit qu'elles aient une résultante qui passe par le point fixe où elle sera détruite.

Mais dans le second, il faut nécessairement que les couples appliqués au corps donnent un couple résultant nul de lui-même, comme s'il n'y avait pas de point fixe dans le corps. Car, si ce couple n'est pas nul de lui-même, en le transportant, pour plus de clarté, de manière que le milieu de son bras de levier vienne tomber au point fixe, il est évident que ses deux forces ne pourront être en équilibre autour de ce point.

Et il est encore évident qu'elles ne seraient pas en équilibre, quand bien même il y aurait dans le corps un axe fixe, pourvu que le plan du couple ne passât point par cet axe, ou ne fût pas parallèle à sa direction, ce qui reviendrait au même (49).

Ainsi, *lorsque différens couples situés comme on voudra dans l'espace, sollicitent un corps ou système assujéti à tourner d'un point fixe, les conditions de l'équilibre sont absolument les mêmes que si le corps était parfaitement libre.*

Et la même chose a lieu dans le cas d'un axe fixe, si les couples appliqués sont tellement disposés qu'ils ne puissent jamais donner un couple résultant parallèle à cet axe; ce qui n'arrive généralement que lorsque tous les couples sont dans des plans parallèles qui rencontrent l'axe fixe en le coupant.

CHAPITRE II.

DES CONDITIONS DE L'ÉQUILIBRE.

75. Nous venons de voir (68) qu'on peut transformer chaque force P qui agit sur un système en un certain point B, en une autre force P′ égale, parallèle et de même sens, appliquée en un autre point A pris à volonté dans l'espace, et en un couple (P, —P) appliquée sur A B, et dont l'énergie est mesurée par le moment $P \times AI$, AI étant une perpendiculaire abaissée du point A sur la direction de la force P. Que de cette manière, le système peut être considéré comme sollicité par la résultante de toutes les forces qui se seraient en quelque sorte transportées parallèlement à elles-mêmes au point A, et par le couple résultant de tous les couples qui naissent de ces transformations. Nous avons vu que pour l'équilibre, cette résultante et le moment du couple résultant doivent être nuls tous les deux à la fois. Fig. 26.

Nous pourrions développer sur-le-champ ces deux conditions dans le cas général d'un corps ou système sollicité par tant de forces que l'on voudra dans l'espace, et déduire delà les conditions de l'équilibre dans tous les cas particuliers qui peuvent se présenter : mais, comme notre marche doit toujours être uniforme dans le courant de ce Chapitre, ou plutôt comme elle n'offrira qu'une même et continuelle application d'un même principe, nous aimons mieux passer en revue plusieurs questions simples, avant que de traiter la question générale. Cela nous fournira d'ailleurs l'occasion de répandre plusieurs propositions sur les momens dont on fait beaucoup d'usage dans la Statique.

Une fois parvenu au Théorème général de l'équilibre, on pourra s'y arrêter, et l'on y trouvera comprises toutes les propositions qui auront été précédemment expliquées.

I.

De l'équilibre des Forces parallèles qui sont situées dans un même plan.

Fig. 29. 76. SOIENT P, P′, P″, etc. les différentes forces parallèles. D'un point A pris où l'on voudra dans leur plan, abaissons une perpendiculaire commune sur leurs directions, et qui les coupe aux points respectifs B, C, D, etc.

Considérant d'abord la force P, j'applique au point A deux forces contraires P, —P, égales et parallèles à la première; ainsi, j'ai au lieu de la simple force P appliquée en B, une force égale et parallèle appliquée en A, et un couple (P, —P) agissant sur A B et dont l'énergie est $P \times AB$. Je substitue de même au lieu de la force P′ appliquée en C une force égale et parallèle et de même sens appliquée en A, et un couple (P′, —P′) appliqué sur A C et dont l'énergie en $P \times AC$, de même pour la force P″, etc.

Si, pour plus de clarté, on transporte tous les couples ailleurs dans le même plan, il ne restera au point A que les forces P, P′, P″, etc. égales et parallèles aux forces primitives appliquées en B, C, D, etc. et de même sens.

Or, pour qu'il y ait équilibre, il faut 1o. que la résultante des forces appliquées en A soit nulle d'elle-même. Mais, toutes ces forces agissant dans une même direction, leur résultante est égale à leur somme (*), et par conséquent, l'on aura :

$$P + P' + P'' + \text{etc.} = 0$$

première équation de l'equilibre.

2o. Il faut que le moment résultant de tous les momens des couples soit aussi nul de lui-

(*) Il faut prendre ce mot ici et ailleurs, dans le sens de la remarque suivante (77).

même ; mais ce moment résultant est égal à la somme des momens composans, puisque tous les couples sont dans un même plan. Donc, en nommant pour abréger p, p', p'', etc. les bras de levier respectifs A B, A C, A D, etc. on aura :

$$\mathrm{P}p + \mathrm{P}'p' + \mathrm{P}''p'' + \text{etc.} = 0$$

seconde équation de l'équilibre.

Remarque.

77. Il est clair que dans la première équation, si l'on regarde les forces qui tirent dans un même sens comme positives, il faut regarder celles qui tirent dans le sens contraire comme négatives. Nous regarderons désormais comme positives les forces telles que P′ qui tirent au-dessus de la droite A D, et par conséquent comme négatives les forces telles que P, P′.... qui tirent au-dessous ; et de cette manière on pourra dire que la *somme* des forces doit être nulle par l'équilibre.

Pour les signes des momens P p, P′ p'..... de la seconde équation, il faut faire attention à deux choses, 1°. au signe de la force ; 2°. au signe du bras de levier.

Supposons, en effet, que la force P sans cesser d'agir du même côté du point A, vienne à changer de signe; il est clair que le couple nouveau qu'elle produira à l'égard du point A sera d'un sens contraire à celui du premier : ainsi, le moment Pp change de signe, lorsque la force P en change.

Concevons maintenant que la force P, sans changer de signe, vienne à agir au point B′ de l'autre côté du point A. Il est visible que le couple nouveau qu'elle produira à l'égard du point A sera d'un sens contraire à celui du premier, et par conséquent le moment Pp change de signe, lorsque le seul bras de levier p en change.

Donc en prenant les bras de levier tels que AB qui sont à droite du point A comme positifs, par exemple, il faudra prendre les bras de levier tels que AB′ qui tomberaient à gauche comme négatifs; et l'on pourra toujours dire que la somme des momens doit être nulle en donnant des signes convenables aux forces et aux bras de levier.

Corollaire.

78. Supposons que les forces P, P′, P″, etc. ne soient pas en équilibre, et soit R leur résultante, et par conséquent —R la force capable de leur faire équilibre.

Les deux équations précédentes devront avoir lieu si l'on y fait entrer la force $-R$. On aura donc d'abord :

$$P + P' + P'' + \text{etc.} - R = 0$$

ou bien :

$$R = P + P' + P'' + \text{etc.}$$

ce qui nous apprend que la résultante est égale à la somme des composantes, ce que nous savions déjà.

En second lieu, si l'on nomme r la distance de la résultante au point A, on aura :

$$Pp + P'p' + P''p'' + \text{etc.} - Rr = 0$$

ou bien :

$$Rr = Pp + P'p' + P''p'' + \text{etc.}$$

Ce qui nous fait voir que le produit de la résultante par sa distance r à un point quelconque A pris dans le plan des forces, est égal à la somme de tous les produits semblables des composantes par leurs distances respectives à ce même point.

En divisant cette équation par R, et mettant à la place de cette quantité sa valeur $P + P' + P'' +$ etc., on aura :

$$r = \frac{Pp + P'p' + P''p'' + \text{etc.}}{P + P' + P'' + \text{etc.}}$$

Ce qui donnera la distance de la résultante au point A, et par conséquent fera connaître sa position, puisque l'on sait, d'ailleurs, qu'elle doit être parallèle aux composantes.

Remarque.

79. Les produits Pp, $P'p'$, etc. sont ce que l'on nomme ordinairement les momens des forces; mais on n'attache pas, au mot de moment, d'autre idée que celle d'un simple produit, qui résulte de deux nombres dont l'un exprime la force et l'autre sa distance à un point: au lieu que le moment est pour nous la mesure d'une force particulière, c'est-à-dire, de l'énergie du couple qui provient de la force, lorsqu'on la transporte parallèlement à elle-même au point que l'on considère. Mais comme ici, et dans la plupart des ouvrages de Statique, le moment exprime une même quantité numérique, à la différence près de l'idée que nous y joignons, nous avons cru devoir conserver ce mot qui est

consacré par l'usage, et qui rend bien d'ailleurs notre idée, puisque le mot latin *momentum* d'où vient *moment*, signifie, *force*, *poids*, *énergie*.

Au reste, lorsque nous ne voudrons parler que du simple produit numérique d'une force par sa distance, à un point, à un axe perpendiculaire, ou à un plan parallèle à sa direction, nous dirons aussi le moment de la force par rapport au point, ou à l'axe, ou au plan parallèle : et cela n'introduira aucun équivoque dans le discours, puisque l'on pourra entendre, si l'on veut, par ce produit, le moment du couple qui naîtra de la force transportée parallèlement à elle-même au point, ou sur l'axe, ou dans le plan parallèle.

De cette manière, l'équation précédente

$$Rr = Pp + P'p' + P''p'' + \text{etc.}$$

peut s'exprimer ainsi:

La somme des momens de tant de forces parallèles qu'on voudra, par rapport à un point quelconque de leur plan, est égale au moment de leur résultante par rapport au même point; ce qui est le Théorème connu des momens, pour les forces parallèles qui sont situées dans un même plan.

II.