

Le Verrier et la première détermination des valeurs propres d'une matrice

par Alain Juhel, agrégé de mathématiques,
professeur en Spéciales MP au lycée Faidherbe de Lille

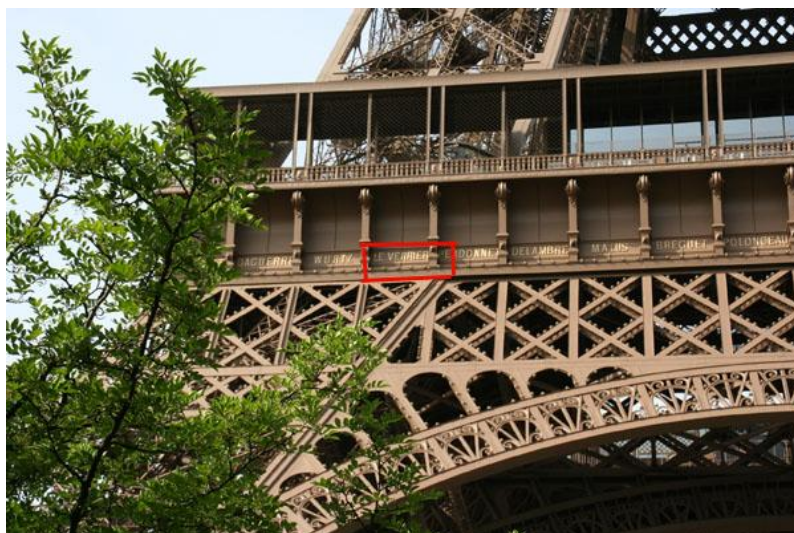


Figure 1 : Le Verrier fait partie des 72 savants honorés par Gustave Eiffel sur sa tour (face La Bourdonnais).

LES HASARDS D'UNE CARRIÈRE

Urbain Le Verrier (1811-1877) doit sa célébrité mondiale à la découverte de Neptune en 1846¹. Rien pourtant ne le prédisposait à une carrière d'astronome : entré à l'École polytechnique en 1831, il en sort huitième en 1833 et poursuit sa formation à l'École d'application des Tabacs : aussi, ses deux premiers articles scientifiques ont trait à la chimie du phosphore, essentielle dans la fabrication des allumettes. Mais pour éviter une affectation en province, il démissionne de l'Administration des Tabacs et postule à une place de répétiteur en chimie à l'École polytechnique. Il échoue : elle revient à Regnault, qui s'illustrera dans cette discipline. Mais un deuxième poste est vacant, en astronomie, qu'il obtient, car il est bon mathématicien. Et cela va lui servir immédiatement : son premier article résout, sous couvert d'astronomie, un problème que Laplace lui-même, « le Newton Français », n'avait osé aborder frontalement dans sa *Mécanique Céleste*.

1. Voir l'article de James Lequeux : *La Découverte de Neptune (1846)*, sur [BibNum](#) (juin 2010).

Cet article se décline en fait en trois variantes : le texte choisi pour notre étude, paru au *Journal de Mathématiques Pures & Appliquées* (alias *Journal de Liouville*) en 1839 est, comme le fait observer l'auteur en première page, un extrait détaillé de celui qui paraîtra dans la *Connaissance des Temps pour l'An 1843*, éditée en 1840². Il a été présenté sous forme de Mémoire à l'Académie des Sciences, et drastiquement réduit à une note de trois pages dans les *Comptes Rendus* de celle-ci, en date du 16 Septembre 1839. Les Commissaires, Arago – qui encouragea les débuts de Le Verrier, puis le pressa d'abandonner les questions de stabilité des orbites pour se consacrer à la recherche de Neptune –, Savary et Liouville, avaient préconisé sa publication dans le *Recueil des Savants Étrangers*³, mais ce sont finalement les deux revues citées qui furent choisies.

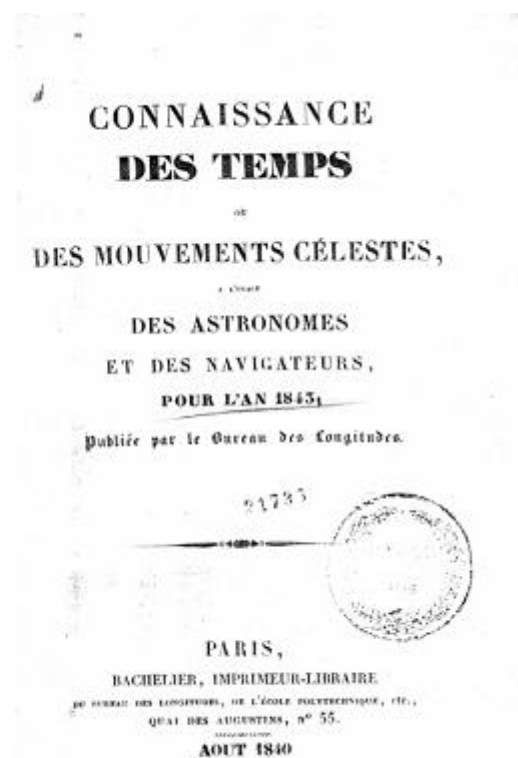


Figure 2 : (à g.) *Statue de Le Verrier, devant l'Observatoire de Paris (Henri Chapu, 1889);* (à dr.) *Le recueil Connaissance des Temps où fut publié l'article « jumeau ».*

UN PROBLÈME D'ASTRONOMIE...

Le Verrier commence, dans le §1, par un rappel succinct du problème : le mouvement elliptique képlérien de chaque planète, considérée comme soumise à la seule attraction du Soleil, n'est qu'une première approximation, au demeurant de fort

2. L'écart des dates n'est pas une anomalie: pour être utilisables, les éphémérides du mouvement des planètes doivent être publiés avec une certaine avance...
 3. C'est-à-dire « étrangers à l'Académie » (qui n'en sont pas membres).

bonne qualité en raison de la prépondérance de la masse solaire sur celle des satellites. C'est aussi le seul cas où l'on sache calculer l'orbite et sa loi horaire de parcours, et l'on ne manque pas de soumettre à cet exercice les étudiants dès leur première année après le Baccalauréat. Mais la lumineuse simplicité de la loi de Newton – tout le monde attire tout le monde ! – est, paradoxalement, la source d'une redoutable complexité : dès que le nombre de corps en interaction excède deux, il n'y a plus aucune formule exacte pour exprimer les mouvements, pourtant parfaitement déterminés⁴.

La présence de plusieurs planètes autour du Soleil rend la détermination de leurs mouvements beaucoup moins aisée. Elles agissent les unes sur les autres [...] et par là elles sont sans cesse entraînées hors de l'ellipse qu'elles décriraient si elles n'étaient soumises qu'à l'action du Soleil.

La providence mathématico-physique qui valide, en première approche, le traitement du système solaire comme n systèmes Soleil-planète indépendants, c'est la décroissance de la force d'attraction en $1/r^2$: celle qui émane d'un autre corps que le Soleil (dont la forte masse, au numérateur, compense la distance lointaine, au dénominateur) est la plupart du temps négligeable, **sauf** si cet autre corps est à la fois **proche** de la planète étudiée (au moins à certaines époques) et **massif** : ainsi, Jupiter **perturbe** légèrement le mouvement de Mars. Si la traque de Neptune fut entreprise un peu plus tard, en 1845, c'est bien parce que les prédictions imparfaites du mouvement d'Uranus (découverte en 1781) laissaient supposer l'existence d'une **planète troublante** – au sens d'une perturbation de la trajectoire.

@@@@@@

Les astronomes sont aussi gens de pratique: ils doivent construire des éphémérides, quitte à se baser sur une méthode approchée, pourvu que la précision soit satisfaisante pour les calculs envisagés. Lagrange a imaginé, en 1767, l'astuce suivante : considérer que l'ellipse du mouvement képlérien se déforme lentement au cours du temps :

Il est donc permis de considérer chacune des planètes comme se mouvant sur une ellipse de forme et de position variable. D'ailleurs, la petitesse des masses perturbatrices rend les variations séculaires de éléments elliptiques fort lentes et négligeables dans un intervalle de quelques années.

4. Il n'y aura pas d'avancée théorique avant les célèbres travaux d'Henri Poincaré sur le Problème des Trois Corps en 1889. Et, plus d'un siècle plus tard, le domaine reste un sujet de recherche pointu et ardu.

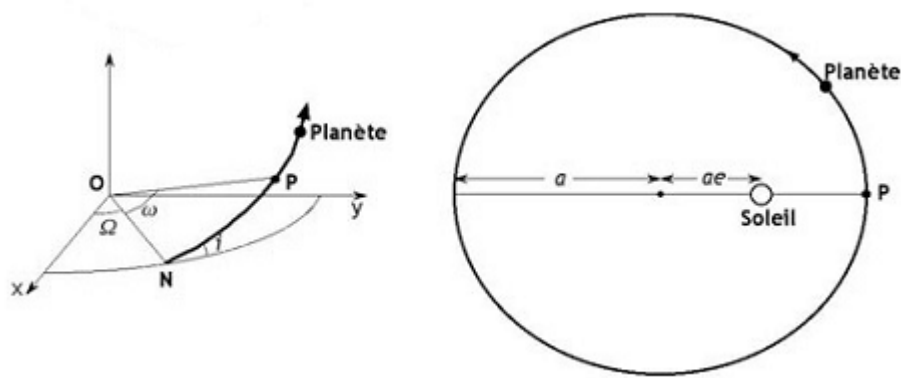


Figure 3 : Paramètres d'une orbite elliptique (figure extraite « La Découverte de Neptune (1846) », James Lequeux, BibNum, op.cit.). Sur un intervalle de temps petit ou « de taille raisonnable », le mouvement réel, complexe et non calculable, ne diffère pas significativement du mouvement sur une ellipse ; on caractérise celle-ci dans l'espace par 6 paramètres, d'une part situant son plan dans l'espace, d'autre part indiquant sa forme dans son plan. Lorsque l'intervalle de temps grandit, cette approximation ne peut rester indéfiniment valable, mais on peut imaginer que l'ellipse a légèrement varié, en considérant désormais que ses quantités caractéristiques ne sont plus fixes, mais fonctions de la variable t (le temps).

Le Verrier s'intéresse à deux de ces paramètres : l'**excentricité** e et la **longitude** ϖ du périhélie. Le premier mesure l'écart relatif entre centre et foyer ; le second est un angle permettant de placer dans l'espace le point le plus proche du Soleil, donc de positionner le grand axe. De façon clairement équivalente, il substitue à e et ϖ les paramètres h et l , définis par

$$h = e \cos \varpi, l = e \sin \varpi$$

qui seront assujetties à varier avec le temps ; ce sont elles qui seront désormais étudiées.

...QUI DEVIENT UN PROBLÈME D'ANALYSE...

Quand on applique les lois de la physique à des grandeurs qui varient, on obtient, en général, des **équations différentielles**. Si, comme c'est le cas ici, plusieurs quantités sont simultanément étudiées, on obtient des équations « mêlées », ce qui est encore bien plus compliqué ! On parle alors d'un **système différentiel**. Toutefois, en raison même du procédé d'approximation imaginé par Lagrange et employé par Laplace, à qui Le Verrier emprunte sans autre commentaire⁵ ses formules, celui-ci est linéaire, seule classe que l'on sache entièrement résoudre, en théorie du moins. Car, en pratique, cette résolution passe... par le travail que Le Verrier sera le premier à faire !

5. Un simple renvoi au tome 2 de la *Mécanique Céleste*, §55.

Ce système comporte 14 équations pour 14 fonctions inconnues, deux pour chacune des 7 planètes connues à l'époque (avant la découverte de Neptune). Il est de la forme qui suit, où les dérivées premières des fonctions inconnues sont données, chacune, par une combinaison linéaire de ces mêmes fonctions. Nous avons écrit un système analogue au système (2), §2 de Le Verrier, en regroupant les équations différemment : d'abord toutes celles qui déterminent les dérivées de h_1, \dots, h_7 , puis celles de l_1, \dots, l_7 (Le Verrier, lui, l'a écrit dans l'ordre des planètes):

Écriture développée (système d'équations)	Écriture matricielle
$\begin{aligned} h_1'(t) &= a.l_1(t) \\ l_1'(t) &= -a.h_1(t) \end{aligned}$	$\begin{pmatrix} h_1' \\ l_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ l_1 \end{pmatrix} \quad \textbf{(I)}$
$\begin{aligned} h_1'(t) &= a.l_1(t) + \beta.l_2(t) \\ h_2'(t) &= \gamma.l_1(t) + \delta.l_2(t) \\ l_1'(t) &= -a.h_1(t) - \beta.h_2(t) \\ l_2'(t) &= -\gamma.h_1(t) - \delta.h_2(t) \end{aligned}$	$\begin{pmatrix} h_1' \\ h_2' \\ l_1' \\ l_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a & \beta \\ 0 & 0 & \gamma & \delta \\ -a & -\beta & 0 & 0 \\ -\gamma & -\delta & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} \quad \textbf{(II)}$

La structure étant la même, nous pouvons observer et comprendre le travail de Le Verrier sur le cas plus simple (II). On peut aussi adopter une écriture par blocs, dont la concision est commode

$$\begin{pmatrix} H' \\ L' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & B \\ -B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H \\ L \end{pmatrix} \quad \textbf{(III)}$$

H et L représentent des colonnes de 7 termes, et la matrice B est une matrice 7×7 . Le système complet admet alors la même écriture que le système (I)... à ceci près que chaque équation y est remplacée par un groupement de 7 équations.

Cette forme très particulière permet de traiter un système de 7 équations seulement, mais du second ordre (c'est à dire, faisant intervenir les dérivées secondes). Par exemple, le système (I) peut s'écrire (en dérivant la première et en y reportant la seconde, que l'on conserve pour déduire l_1 de h_1 , une fois celle-ci calculée) :

$$\{ h_1''(t) + a^2.h_1(t) = 0 ; a.l_1(t) = h_1'(t) \} \quad \textbf{(I')}$$

On détermine facilement h_1 : on sait qu'elle est de la forme

$$h_1(t) = U.\cos(at) + V.\sin(at) = N.\sin(at + \zeta)$$

où U, V, N, ζ sont des constantes. Les deux formes sont équivalentes.

@@@@@@

On peut faire exactement le même travail sur (III), et l'on est ramené à résoudre le système 7×7 , dont la matrice est $A = B^2$

$$\{ H''(t) + B^2.H(t) = H''(t) + A.H(t) = 0 \quad (III')$$

Par exemple, on vérifie aisément que le système (II) se ramène à

$$\begin{pmatrix} h_1'' \\ h_2'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (II')$$

où a, b, c, d se calculent facilement selon les règles classiques d'un produit de matrices⁶: $a = a^2 + \beta \gamma$; $b = a \beta + \beta \delta$.

... ET QUI FINIT EN PROBLÈME D'ALGÈBRE!

Il s'agit désormais de « démêler » ces équations. Ainsi, si nous avons, au lieu de (II'), un système de même forme, mais avec des coefficients nuls aux places de b et c , soit

$$\begin{pmatrix} k_1'' \\ k_2'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (III'')$$

nous aurions deux équations analogues à (I') – sept à partir du système (III'). Leur nombre importe peu, il suffirait de répéter autant que nécessaire la tâche. Ce qui compte pour assurer qu'on aura effectivement des mouvements **périodiques**, ce sont les **signes** de λ et μ : ils doivent tous deux être strictement positifs. Faute de quoi, il se produirait une chose encore pire : les solutions ne seraient plus bornées (par exemple de type exponentielles), ce qui signifierait que le système solaire ne serait plus stable ! On comprend mieux pourquoi Le Verrier a emprunté ses formules à Laplace : si le premier est préoccupé de la précision des éphémérides, le second étudiait très précisément la stabilité du système solaire. Il n'y a donc pas un problème théorique d'un côté, un problème pratique d'un autre : tout dépend du passage de la forme (II) à la forme (II'') et de la détermination des nombres λ et μ ... ou de sept nombres similaires, lorsqu'on passe du cas d'école au cas réel.

@@@@@@

Le problème qui se pose ainsi est très exactement celui de la **détermination des valeurs propres** et de la **diagonalisation** d'une matrice. Disons sans plus attendre que Le Verrier ne peut le formuler en ces termes, car la théorie des matrices ne verra le jour qu'en 1858 avec le mathématicien britannique Arthur Cayley (1821-

6. Ces calculs n'ont aucune utilité pour la suite; seule la forme matricielle du problème importe.

1895), et ne diffusera que très lentement dans le monde scientifique, essentiellement à partir des années... 1920-1930⁷! Ce qui est aujourd'hui banal pour un étudiant de première année était donc loin de l'être pour les pionniers. Une fois de plus, nous allons observer quel merveilleux confort, quelle facilité apportent des notations modernes... et quelle marche délicate a dû être celle des défricheurs.

Pour passer de (III) à (III''), l'idée naturelle est de faire un changement de fonctions inconnues, prenant les anciennes (les h_i) comme combinaisons linéaires des nouvelles (les k_i)

$$\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} \quad (CF)^8$$

ou, en forme concise, forme qui a l'avantage d'être valable que le nombre d'inconnues soit 2, 7, ou... n quelconque :

$$H(t) = QK(t),$$

forme qui, les coefficients p, q, r, s – plus généralement p_{ij} – étant constants, se dérive en $H'(t) = QK'(t)$. Le système (II') s'écrit alors

$$QK''(t) + AK(t) = 0, \text{ soit}$$

$$K''(t) + Q^{-1}AK(t) = 0 \quad (II'')$$

Le problème est alors devenu purement algébrique : **trouver une matrice Δ diagonale**, et une matrice **Q** (inversible) telle que

$$\Delta = Q^{-1}AQ \quad (D)$$

d'où le nom attribué au problème: **diagonalisation** de la matrice A .

Si nous le supposons un instant résolu, nos équations sont démêlées, chacune est facile à résoudre : on obtient les fonctions sinusoidales k_1, \dots, k_7 puis, par les combinaisons linéaires indiquées par (CF) les fonctions h_i . Le Verrier ne fait rien d'autre : son système (5), au §3, pose pour principe, certes un peu empirique, mais tellement naturel, que les fonctions recherchées auront cette forme. Le mouvement apparaît comme une addition de divers mouvements périodiques, « donc » combinaison linéaire de sinus dont il restera à déterminer, pour chacun, l'amplitude N et la phase ζ .

Mais il faut avant cela rechercher les coefficients diagonaux de D , λ et μ dans le cas $n = 2$.

7. Voir par exemple, sur BibNum, l'[analyse](#) par Roger Mansuy de l'article de Cholesky « Sur la résolution numérique des systèmes d'équations linéaires ». Daté de 1910, le texte de Cholesky ne contient pas encore une seule matrice !

8. CF = changement de fonctions.

DIGRESSION : LE CALCUL QUI A FAIT RECULER LAPLACE.

C'est sur la difficulté de ce travail que s'ouvre le §4:

Les intégrales (5) peuvent donner à la rigueur toutes les circonstances des variations des éléments des orbites. Mais, ainsi que Lagrange l'a remarqué, elles sont d'une discussion très difficile.

Laplace n'a pas été plus chaud pour tenter l'aventure, en dépit des capacités de calculateur dont il fait preuve dans la *Mécanique Céleste*. Il a donc prouvé, par un argument très courant en Physique – la détermination d'une **intégrale première du système** –, que les variations sont bornées. Le Verrier rappelle cette argument dans son §4, dont la lecture peut rester accessoire. Pour le système très simple (I), cela consisterait à multiplier sa première équation par $h_1(t)$, la seconde par $l_1(t)$ pour obtenir

$$h'_1(t).h_1(t) + l'_1(t).l_1(t) = 0, \text{ qui s'intègre en}$$

$$h_1(t)^2 + l_1(t)^2 = k^2$$

ce qui fournit le résultat : ces deux fonctions sont bornées. Le cas de (II) n'est guère plus difficile à traiter.

Valeurs Propres « pour les nuls »!

Si l'on écrit la relation (D) sous la forme équivalente

$$Q \Delta = A Q \quad (D')$$

Comme Δ est diagonale, la relation se traduit, colonne par colonne, en

$$A Q_j = \lambda_j Q_j$$

soit par exemple dans le cas $n=2$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \text{ en } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ s \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} q \\ s \end{pmatrix}$$

Ce qui amène à poser les définitions usuelles suivantes :

→ λ est **valeur propre** de A s'il existe un vecteur (colonne), **non nul**, \mathbf{x} tel que $A \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$ [1]

→ \mathbf{x} est dit **vecteur propre** associé.

→ On peut écrire encore [1] sous la forme $(A - \lambda I_n) \mathbf{x} = \mathbf{0}$ [2], où I_n est l'opérateur identité.

→ Un \mathbf{x} non nul n'existera que si la matrice $(A - \lambda I_n)$ n'est pas inversible, ce qu'on écrit par la condition portant sur le déterminant

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = 0 \quad [3]$$

→ [3] est l'**équation caractéristique**, et la fonction P du premier membre le **polynôme caractéristique**; on voit assez facilement, au moins sur les exemples, qu'il est de degré n .

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; P(\lambda) = \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc)$$

→ Si $P(\lambda)$ a n racines distinctes, A est diagonalisable, et la matrice Q constituée en accolant n vecteurs propres, chacun relatif à l'une des valeurs propres réalise une telle diagonalisation:

$$\Delta = Q^{-1} A Q \quad (\mathbf{D})$$

Ce qui est inhumain au point de dissuader Laplace de l'entreprendre, c'est la perspective du calcul algébrique d'un déterminant d'ordre 7 : c'est enfantin à l'ordre 2 (cf. encadré), faisable à l'ordre 3 si on sait un peu d'algèbre... et généralement très désagréable au-delà. Le Verrier y revient dès l'entrée du §6 :

Le calcul de cette équation, déjà compliqué quand on ne considère pas plus de quatre planètes simultanément, devient impraticable par les moyens ordinaires de l'élimination quand on considère sept planètes.

Le problème n'est donc résolu qu'en théorie :

- calculer le polynôme caractéristique $P(\lambda)$;
- chercher ses racines.

Notons tout de même la deuxième partie du travail, enfantine elle aussi à l'ordre deux (résoudre une équation du second degré) ne sera pas tout à fait une partie de plaisir à l'ordre 7... mais Le Verrier va réussir, par un ultime argument astronomique, à scinder le calcul en deux: une matrice 3 x 3, une matrice 4 x 4.

FORMER LE POLYNÔME CARACTÉRISTIQUE

Comment Le Verrier va-t-il réussir à poser, puis à effectuer ce calcul sans matrice ni déterminant ? Suivons sa méthode, présentée au §6, avec la matrice A du problème (II') ; elle repose sur la résolution des systèmes. Il écrirait, notant g plutôt que λ son inconnue, $(A - gI_2) \mathbf{x} = \mathbf{0}$ [2] en (système (14) dans le texte) :

$$\begin{aligned} (a-g)N + bN' &= 0 \\ cN + (d-g)N' &= 0 \end{aligned}$$

On calcule N et N' par

$$\begin{aligned} [(a-g)(d-g) - bc] \cdot N &= 0 \\ [(a-g)(d-g) - bc] \cdot N' &= 0 \end{aligned}$$

équations que Le Verrier écrit de façon résumée

$$DN = 0 ; DN' = 0$$

Elles ne fourniront que la solution triviale $N = 0$, $N' = 0$, et partant ne seront d'aucun intérêt... **sauf si** $D = 0$. On reconnaît alors en D ... le polynôme caractéristique de A ! Le déterminant du système donne en effet la condition à laquelle il a une autre solution que $(0,0)$: il n'est donc pas surprenant qu'il apparaisse en facteur de chacune des quantités à calculer.

Voilà donc la théorie réglée en pensée : si l'on conduit une résolution du système par éliminations successives des inconnues, on obtiendra le polynôme caractéristique au moment où, ayant éliminé toutes les autres, la dernière inconnue sera exprimée par $0/D$, sauf si $D = 0$ bloque ce calcul⁹.

D étant le dénominateur commun à toutes les inconnues. Or on peut considérer ces résultats comme les équations finales provenant de l'élimination de toutes les indéterminées excepté une, et par là on voit que l'équation finale en g dont nous avons besoin, n'est autre que l'équation $D = 0$.

LA MÉTHODE DES TRACES

Mais en pratique, ce serait inextricable, note Le Verrier dès l'introduction du §6:

Le calcul de cette équation, déjà compliqué quand on ne considère pas plus de quatre planètes simultanément, devient impraticable par les moyens ordinaires de l'élimination quand on considère sept planètes.

D'où l'introduction d'une nouvelle méthode de calcul, qui repose sur deux objets très simples, mais que l'auteur ne met guère en lumière simultanément :

1. Les **fonctions symétriques** des racines, vieil ingrédient de l'étude des équations;
2. La **trace d'une matrice**, que l'on définit comme somme de ses coefficients diagonaux.

Si le premier est explicitement mentionné dès le début du §6, le second apparaît une bonne page plus loin, et le rapprochement ne sera fait, de manière rapide, qu'à la fin.

Fonctions symétriques des racines

Prenons l'exemple d'un polynôme de degré 3 en λ .

$$P(\lambda) = \lambda^3 + u\lambda^2 + v\lambda + w = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)(\lambda - \gamma)$$

selon qu'on l'écrit en forme développée ou factorisée; cette dernière fait apparaître ses racines α , β , γ .

9. Pour le dire autrement, ce D serait le dénominateur des célèbres formules de Cramer: quelle que soit la taille du système, toutes les inconnues sont calculées avec le même dénominateur, ou la nullité de celui-ci empêche l'expression d'une solution unique.

$$\begin{aligned}
 u &= - (a + \beta + \gamma) \\
 v &= a \beta + \beta \gamma + \gamma a \\
 w &= - a \beta \gamma
 \end{aligned}$$

Ce sont les fonctions symétriques *élémentaires* des racines. D'autres fonctions symétriques en a, β, γ sont dites *sommes de Newton* :

$$\begin{aligned}
 S_1 &= a + \beta + \gamma \\
 S_2 &= a^2 + \beta^2 + \gamma^2 \\
 S_3 &= a^3 + \beta^3 + \gamma^3
 \end{aligned}$$

Connaissant u, v, w , on calcule aisément S_1, S_2, S_3 , et inversement. Il suffit donc, pour connaître un polynôme, de connaître les sommes de Newton de ses racines.

De telles relations d'aller et retour existent pour tout degré n . Le calcul est juste un peu plus technique; Newton a donné dans ce but des formules auxquelles son nom est resté attaché.

Le Verrier va alors utiliser le subterfuge suivant : plutôt que calculer les coefficients de P , c'est à dire les fonctions symétriques élémentaires, calculer les sommes de Newton correspondantes, sous la forme de traces de matrices (sans le dire de cette manière, bien sûr). Tout part d'une remarque sur la forme de P , que l'on fait aujourd'hui sous sa forme déterminantale

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; P(\lambda) = \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc)$$

Le produit des termes de la diagonale de ce déterminant est le seul à intervenir dans les termes de plus haut degré n et dans les termes de degré $n - 1$; on le constate facilement sur le cas $n = 2$.

Cette équation sera du septième degré, car le produit $(g-a)(g-b')(g-c'')$... donnera le terme g^7 qui ne pourra être déduit par aucun autre. Du même produit dépend en outre le coefficient du second terme de l'équation ; car [...] on voit qu'il ne peut contenir deux des coefficients compris dans une même colonne verticale, ou dans une même ligne horizontale des équations (14).

Ainsi, dans le cas $n = 2$, on cueille le terme $S_1 = (a + d)$ sur la matrice, si l'on est moderne... ou sur le système différentiel, ce qui revient au même, si l'on est adepte de la cuisine traditionnelle !

Il n'y a plus qu'à trouver les autres. On voit aisément, par simple application de la définition, que la matrice A^2 a pour valeurs propres les carrés de celles de A , et ainsi de suite à chaque puissance : dans le cas à racines deux à deux distinctes, on le voit grâce aux formules (D) liant A à sa réduite diagonale Δ

$$\Delta = Q^{-1} A Q, \Delta^2 = Q^{-1} A^2 Q, \Delta^3 = Q^{-1} A^3 Q, \dots$$

On peut certes objecter qu'on n'est pas sûr d'être dans ce cas... avant d'avoir déterminé les racines, mais l'expérience montrera que c'est bien ce qui se produit¹⁰.

L'algorithme de Le Verrier consiste donc

- ☑ à **calculer les puissances de la matrice A** , jusqu'à un ordre égal à sa taille;
- ☑ puis, **calculer les traces**, ou somme des coefficients diagonaux, de chacune d'elles.

Comme il ne dispose pas du produit matriciel, le carré est évalué par la dérivation du système différentiel : les dérivées secondes sont exprimées à l'aide des dérivées premières, et l'opération d'élevation au carré se fait implicitement par la réutilisation du système initial pour chasser toute dérivée du membre de droite : c'est ce que nous avons fait, nous aussi, lors de la présentation du problème (passage de (III) à (III')). Le Verrier résume ainsi son algorithme :

Il n'est pas besoin de plus longues explications pour apercevoir qu'on obtiendra la somme des cubes, des quatrièmes puissances... des racines, au moyen des dérivées troisième, quatrième ... de h, h' ... Et d'ailleurs, quand on aura les sommes des puissances semblables des racines jusqu'à la septième, il sera facile de calculer les coefficients de l'équation par les fonctions symétriques. Cette marche est assez simple [...]

Lorsque $n = 2$, on obtient

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad S_1 = \text{Tr}(A) = a + d$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & \heartsuit \\ \clubsuit & d^2 + bc \end{pmatrix} \qquad S_2 = \text{Tr}(A^2) = a^2 + d^2 + 2bc$$

et enfin, si l'on se rapporte aux coefficients λ et μ du système (III') page 6 :

$$\lambda \cdot \mu = ad - bc = \frac{1}{2}(S_1^2 - S_2); \quad P(x) = x^2 - (a + d)x + (ad - bc)$$

10. Le résultat est tout à fait général, c'est l'illustration que nous limitons à ce cas par souci de simplicité.

TRAVAUX PRATIQUES !

Exemple 1 : un cas d'école :

	A	A ²	A ³
matrice	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & 6 & -8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 17 & 22 & -27 \\ -8 & -13 & 27 \\ -16 & -34 & 58 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -47 & -106 & 201 \\ 74 & 133 & -201 \\ 148 & 282 & -410 \end{pmatrix}$
trace	- 6	62	- 324

On calcule les coefficients u, v, w de $P(\lambda) = -\lambda^3 + u\lambda^2 + v\lambda + w$ en fonction de S_1, S_2, S_3 , ce que l'on fait à partir des relations¹¹ :

$$Tr(A) = S_1 = u$$

$$Tr(A^2) = S_2 = u^2 + 2v$$

$$Tr(A^3) = S_3 = uS_2 + vS_1 + 3w$$

Le calcul est sans difficulté, et, comme la matrice provient... d'un livre de mathématiques, on factorise le polynôme caractéristique dès qu'on a vu la racine -2 :

$$P(\lambda) = -\lambda^3 - 6\lambda^2 + 13\lambda + 42 = -(\lambda + 7)(\lambda + 2)(\lambda - 3)$$

Exemple 2 : le vrai calcul de Le Verrier :

Le Créateur du Monde, lui, est un peu plus farceur : il n'a pas prévu que les calculs s'arrangent aussi miraculeusement ! Mais heureusement, avec un ordinateur, voire une simple calculette programmable, les calculs s'effectuent très rapidement.

Comment Le Verrier procédait-il à son époque ? Ce serait une boutade à peine exagérée que de le considérer comme un des pionniers du tableur et... du calcul parallèle, pointe de la modernité de nos ordinateurs. À un détail près : les circuits de processeurs arithmétiques d'alors étaient des êtres humains ! L'observatoire employait une armée de *calculateurs*, gens ayant une bonne habileté arithmétique, mais sans connaissances scientifiques particulières, qui exécutaient sans comprendre une suite d'opérations dont l'astronome avait préparé la marche sur des feuilles de calculs. On pourrait aussi bien, dans une école primaire aujourd'hui¹², partager les 16 opérations que réclament le produit de deux matrices 4×4 en 32 élèves, chacun faisant le calcul d'un terme (4 multiplications et 3 additions), un terme étant confié à deux personnes dont le résultat n'est validé que s'il est identique pour les deux, et repris sinon ! (Contrôle et minimisation des erreurs n'étaient alors pas une mince affaire). Chaque

11. La troisième s'obtient à partir de l'équation : on l'écrit pour chacune des trois racines, et on somme. C'est un cas particulier des formules de Newton !

12. On fait ici l'hypothèse - hasardeuse ou téméraire - que les élèves y savent additionner et multiplier... ou disposent d'une calculette 4 opérations.

participant effectue un calcul dont le sens lui échappe, et dont seul le coordinateur connaît la signification...

Le problème porte sur une matrice 7 x 7 qui – curieusement ? – ne figure pas dans l'article du *Journal de Liouville*. Mais on la trouve dans le *Connaissance des Temps*, dont beaucoup d'items sont les mêmes, mot pour mot, ou très proches : cet homme qui maîtrisait le tableur maniait aussi le « copier-coller » avec aisance. Le Verrier allège alors la tâche avec une considération simplificatrice : si une matrice a cette forme

$$M = \begin{pmatrix} A_4 & C \\ 0 & B_3 \end{pmatrix}$$

où les lettres majuscules symbolisent des blocs (A_4 est un carré 4 x 4, B_3 un carré 3 x 3, C a donc 4 lignes et 3 colonnes), le polynôme caractéristique de M est le produit de ceux de A et B . La situation n'est pas tout à fait celle-ci, mais elle en est toute proche : tous les coefficients du bloc 3 x 4, en bas à gauche, sont inférieurs à 0.001. On peut donc faire comme s'ils étaient nuls *sans, probablement, altérer beaucoup les valeurs propres*. Et voilà la détermination d'un polynôme de degré 7 remplacée par celle de deux facteurs de degré 4 et 3, et, surtout, les calculs de puissance matricielle limités efficacement en taille et en nombre de produits.

9. Reprenons le système des équations (4), en y remplaçant chacun des symboles qu'elles renferment par sa valeur numérique donnée au n° 7 en secondes sexagésimales. Ce système deviendra ainsi :

$$\left. \begin{aligned} (g-5,509\ 882)N + 1,870\ 086N' + 0,422\ 908N'' + 0,008\ 814N''' &= 0, \\ + 0,148\ 711N^{IV} + 0,003\ 908N^V + 0,000\ 045N^{VI} & \\ 0,287\ 865N + (g-11,811654)N' + 5,711\ 900N'' + 0,058\ 717N''' &= 0, \\ + 0,728\ 088N^{IV} + 0,018\ 788N^V + 0,000\ 224N^{VI} & \\ 0,049\ 099N + 4,308\ 033N' + (g+12,970\ 687)N'' + 0,229\ 326N''' &= 0, \\ + 1,689\ 087N^{IV} + 0,042\ 580N^V + 0,000\ 504N^{VI} & \\ 0,006\ 235N + 0,269\ 851N' + 1,397\ 369N'' = (g-17,596\ 207)N''' &= 0, \\ + 5,304\ 038N^{IV} + 0,125\ 346N^V + 0,001\ 451N^{VI} & \\ 0,000\ 022\ 31N + 0,000\ 709\ 48N' + 0,002\ 182\ 27N'' + 0,001\ 124\ 62N''' &= 0, \\ + (g-7,489\ 041)N^{IV} + 4,815\ 454N^V + 0,035\ 319N^{VI} & \\ 0,000\ 001\ 45N + 0,000\ 045\ 22N' + 0,000\ 135\ 88N'' + 0,000\ 065\ 65N''' &= 0, \\ + 11,893\ 979N^{IV} + (g-18,585\ 410)N^V + 0,232\ 241N^{VI} & \\ 0,000\ 000\ 06N + 0,000\ 001\ 94N' + 0,000\ 005\ 79N'' + 0,000\ 002\ 73N''' &= 0, \\ + 0,313\ 829N^{IV} + 0,835\ 482N^V + (g-2,325\ 935)N^{VI} & \end{aligned} \right\} (14)$$

et pour en trouver les différentes solutions, nous allons employer des approximations successives.

Figure 4 : Le système 7x7, brut, dans la Connaissance des Temps pour l'An 1843.
Remarque la petitesse des quatre premiers coefficients dans les trois dernières lignes.

Cet état de fait n'a rien d'un miracle : il y a une bonne raison astronomique à cela. Les planètes peuvent être divisées en deux groupes, les trois "grosses" : Jupiter, Saturne, Uranus et les quatre "petites": Mercure, Vénus, Terre et Mars. Or, si les grosses font ressentir leur attraction aux petites, ces dernières, certes, agissent sur les grosses... mais si peu ! C'est exactement ce que traduit le système : en première approximation, on peut donc considérer comme autonome le système des trois grosses planètes, ce qui correspond à B_3 et chercher ses valeurs propres, puis traiter le système des quatre petites planètes. Le Verrier donne seulement, dans son article, le polynôme et les racines pour les deux blocs ; voici l'essentiel du calcul pour celui de taille 4.

Mat	Valeurs numériques	Trace
A	$\begin{pmatrix} -5.509882 & 1.870086 & 0.422908 & 0.008814 \\ 0.287865 & -11.811654 & 5.711900 & 0.058717 \\ 0.049099 & 4.308033 & -12.970687 & 0.222936 \\ 0.006235 & .269851 & 1.397369 & -17.596207 \end{pmatrix}$	- 47.8884301
A^2	$\begin{pmatrix} 30.9179513 & -30.568482 & 2.878480 & 0.000430 \\ -4.705449 & 164.676401 & -141.350463 & -0.450815 \\ 0.334144 & -106.611163 & 193.178063 & -6.561073 \\ 0.002224 & -1.904169 & -41.169231 & 309.953924 \end{pmatrix}$	698.670122
A^3	$\begin{pmatrix} -179.012526 & 431.284262 & -198.863927 & -.888232 \\ 66.388065 & -2562.964382 & 5.711900 & 2771.407830 \\ -23.086778 & 2090.326019 & -3123.631429 & 152.259410 \\ -.649200 & -71.221488 & 956.237737 & -5463.303306 \end{pmatrix}$	- 11328.91164
A^4	$\begin{pmatrix} 1100.719981 & -6285.901356 & 4965.907314 & -4.9585201 \\ 0.287865 & 42332.551415 & -50577.879295 & 713.437823 \\ 576.519279 & -38149.001865 & 52658.377749 & -3253.023813 \\ -4.038533 & 3485.255374 & -20444.395629 & 96342.408061 \end{pmatrix}$	192434.05720

Grâce aux relations sur les fonctions symétriques, Le Verrier obtient alors :

$$P(\lambda) = \lambda^4 - 47.88843 \lambda^3 + 797.2789 \lambda^2 - 5349.457 \lambda + 12296.555$$

et les racines¹³

$$\lambda_1 = 5.29870, \lambda_2 = 7.57404, \lambda_3 = 17.15266, \lambda_4 = 17.86303$$

La méthode a été améliorée, du point de vue algorithmique, par le Français Jean-Marie Souriau (1948) et le Russe Dimitri Faddeev (1949), tout en restant basée sur le principe du calcul du polynôme caractéristique.

13. Il ne dit rien de la méthode employée à cet effet.

LA QUESTION DE LA PRÉCISION

Elle se pose dans toute détermination numérique ; dans ce qui précède, deux circonstances invitent à s'interroger :

1. Si l'on avait estimé A à quatre (respectivement à trois, deux) décimales, la valeur des racines en aurait-elle été notoirement affectée, ou aurait-on obtenu des précisions « cohérentes » ? Par exemple, en arrondissant les coefficients à 2 décimales, obtiendrait-on des valeurs propres arrondies à 2 décimales des résultats précédents ?
2. En découplant le système des grosses planètes de celui des petites, on a commis une erreur de méthode. Quelles sont ses répercussions ?

Qualitativement, la question peut se reformuler ainsi : les valeurs propres varient-elles continûment avec la matrice ? (ou les racines avec les coefficients d'un polynôme?). **Quantitativement**, peut-on garantir des bornes effectives sur la variation du résultat à partir de celle des données ? Heureux les étudiants d'aujourd'hui : rien n'est plus facile que de se faire une idée expérimentale à l'aide d'un logiciel retournant les valeurs propres, il n'en manque pas ; on ne peut que les encourager à étudier ainsi les deux questions posées. Une étude théorique sérieuse n'a pas été entreprise avant le XX^e siècle. On n'en appréciera que davantage le travail esquissé par Le Verrier dans son §9, à partir de la différenciation des formules exprimant les fonctions symétriques des racines : il est clair que l'importance du problème ne lui avait pas échappé et là encore, il se révèle un pionnier lucide.

LA SUITE DU CALCUL DES VALEURS PROPRES

Le deuxième mathématicien, dans l'ordre historique, à se lancer à l'assaut des valeurs propres va opérer une rupture de méthode radicale. Karl Gustav Jacobi (1804-1851) met au point en 1844 une méthode itérative de résolution des systèmes, correspondant à la construction d'une **suite de matrices**. A priori, ce n'est pas le même problème ! Mais voilà qu'à la fin de son article, Jacobi remarque :

La méthode décrite ici est encore plus intéressante quand les équations ont la forme suivante.

en l'occurrence, le système (14) du §6 de Le Verrier ! (ci-dessous)

$$\begin{aligned}
(g^2 - A)N + BN' + CN'' + \dots &= 0, \\
A'N + (g^2 - B)N' + C'N'' + \dots &= 0, \\
A''N + B''N' + (g^2 - C'')N'' + \dots &= 0, \\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

C'est ainsi que Jacobi obtient une **méthode itérative de calcul des valeurs propres** comme sous-produit d'une **méthode itérative de résolution des systèmes**, dont il ne donne qu'une idée assez vague, précisant¹⁴ :

Je me contente ici de ces indications car j'ai l'intention d'exposer, dans un travail ultérieur, l'application de cette méthode aux perturbations séculaires des sept planètes principales. On verra par là, grâce aux calculs effectués avec le plus grand soin par mon savant ami, M. le Docteur Seidel, de Munich, que ma méthode présente des avantages notables sur celle de M. Le Verrier, pour la rapidité et la sûreté avec lesquelles on parvient à déterminer le résultat final.

La nouveauté, c'est que l'on court-circuite ainsi le polynôme caractéristique : on vise directement la diagonalisation en construisant des matrices qui s'approchent de plus en plus d'une matrice diagonale. Or, à partir de 1950, les calculs des ingénieurs, parallèlement à l'essor des ordinateurs, concernent des matrices de taille de plus en plus grande. Les méthodes itératives s'adaptent parfaitement à l'évolution conjointe de la taille des problèmes, de celle des mémoires et de la vitesse de calcul. Le procédé de Le Verrier devient impraticable dès qu'on est amené à rechercher les racines d'un polynôme de degré supérieur à quelques dizaines... C'est pourquoi le développement des méthodes de calcul numérique des valeurs propres a suivi la voie proposée par Jacobi et non celle de Le Verrier ; l'une des plus utilisées aujourd'hui est la méthode "QR" de John Francis (1961). Le lecteur désireux d'en savoir plus sur cette évolution au XX^e siècle trouvera un bon point de départ dans l'article, ci-dessous référencé¹⁵.

LA SUITE DE L'ÉTUDE DU SYSTÈME SOLAIRE

Revenons brièvement à la question d'astronomie qui a motivé ces découvertes mathématiques : la variation des éléments elliptiques des orbites, parmi lesquelles figure en bonne place celle du périhélie. En 1841, Le Verrier s'intéresse particulièrement à celui de Mercure.

14. Traduction de Colette Bloch pour le livre J-L Chabert & al. *Histoires d'Algorithmes* (Belin, 2010).

15. Gene H. Golub, Henk.A. van der Vorst, "Numerical Progress in Eigenvalue Computation in the 20th Century" ([en ligne](#)). D'un niveau toutefois nettement plus élevé que celui de cet article.

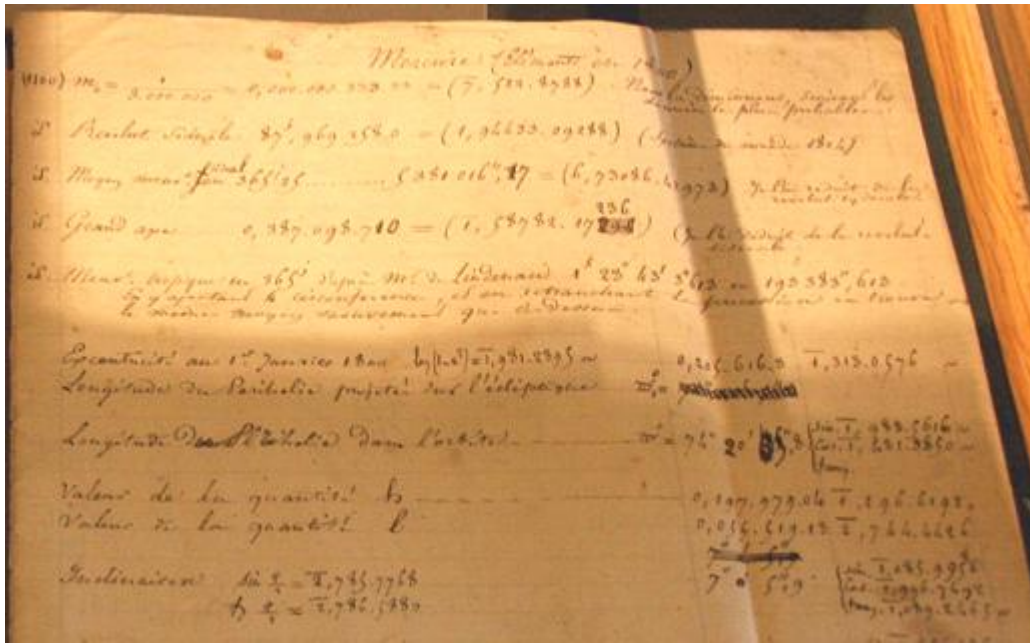
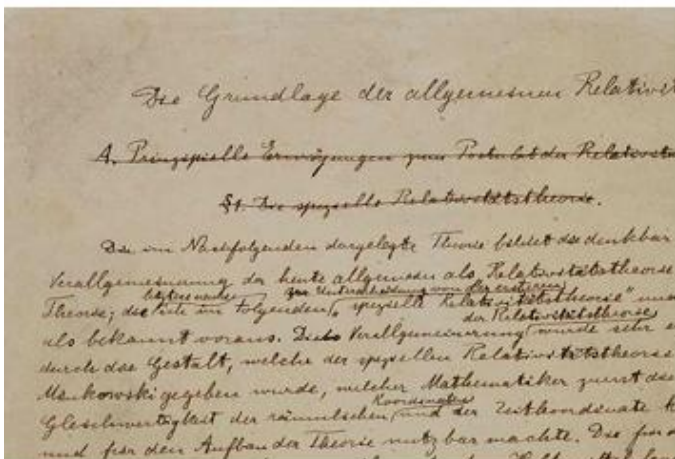


Figure 5 : Relevé manuscrit, par Le Verrier, d'éléments de Mercure
(Document Observatoire de Paris).

La méthode des perturbations explique l'avance du périhélie de toutes les planètes... sauf celui de Mercure. Il aura beau reprendre la question en 1849, espérant renouveler le coup d'éclat de la découverte de Neptune (1846) en émettant l'hypothèse d'une nouvelle planète troublante – déjà baptisée Vulcain ! – ses tentatives seront vaines, et pour cause : l'explication viendra de la Relativité générale d'Einstein (1915), dont ce sera la première confirmation !



1916.

38:7

ANNALEN DER PHYSIK
VIERTE FOLGE. BAND 49.

I. Die Grundlage
der allgemeinen Relativitätstheorie;
von A. Einstein.

Die im nachfolgenden dargelegte Theorie bildet die denkbar weitgehendste Verallgemeinerung der heute allgemein als „Relativitätstheorie“ bezeichneten Theorie; die letztere nenne ich im folgenden zur Unterscheidung von der ersteren „spezielle Relativitätstheorie“ und setze sie als bekannt voraus. Die Verallgemeinerung der Relativitätstheorie wurde sehr erleichtert durch die Gestalt, welche der speziellen Relativitätstheorie durch Minkowski gegeben wurde, welcher Mathematiker zuerst die formale Gleichwertigkeit der räumlichen Koordinaten und der Zeitkoordinate klar erkannte und für den Aufbau der Theorie nutzbar machte. Die für die all-

Figure 6 : Brouillon et première parution de l'article d'Albert Einstein sur la Relativité Générale.

Berechnet man das Gravitationsfeld um eine Größenordnung genauer, und ebenso mit entsprechender Genauigkeit die Bahnbewegung eines materiellen Punktes von relativ unendlich kleiner Masse, so erhält man gegenüber den Kepler-Newton'schen Gesetzen der Planetenbewegung eine Abweichung von folgender Art. Die Bahnellipse eines Planeten erfährt in Richtung der Bahnbewegung eine langsame Drehung vom Betrage

$$(75) \quad \varepsilon = 24 \pi^3 \frac{a^2}{T^2 c^2 (1 - e^2)}$$

pro Umlauf. In dieser Formel bedeutet a die große Halbachse, c die Lichtgeschwindigkeit in üblichem Maße, e die Exzentrizität, T die Umlaufszeit in Sekunden.¹⁾

Die Rechnung ergibt für den Planeten Merkur eine Drehung der Bahn um 43'' pro Jahrhundert, genau entsprechend der Konstatierung der Astronomen (Leverrier); diese fanden nämlich einen durch Störungen der übrigen Planeten nicht erklärbaren Rest der Perihelbewegung dieses Planeten von der angegebenen Größe.

1) Bezüglich der Rechnung verweise ich auf die Originalabhandlungen A. Einstein, Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wiss. 47. p. 831. 1915. — K. Schwarzschild, Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wiss. 7. p. 189. 1916.

[37]

(Eingegangen 20. März 1916.)

Figure 7 : L'explication de l'avance du périhélie de Mercure clôt l'article ! On remarque cité le nom de « Leverrier ».

Quant à la stabilité du système solaire, elle sera malmenée – pour le très long terme, évidemment – par Poincaré et ses prémisses de la théorie du chaos en 1889....

C'est donc dans un contexte historique très riche que s'inscrit cet article de Le Verrier : les mathématiques pures (le polynôme caractéristique), appliquées (la méthode des traces) y ont été mises au service d'une astronomie classique alors à son sommet, avant qu'elle ne doive tenir compte de deux théories essentielles au XX^e siècle : celle de la Relativité et celle du Chaos déterministe.



(septembre 2011)