Poiseuille et l'écoulement des liquides dans les capillaires

par Pierre-Yves Gires
Docteur agrégé en sciences physiques,
en disponibilité au CEA Grenoble

Jean-Louis Marie Poiseuille (1797, Paris-1869, Paris), médecin physiologiste français, entre en 1815 à l'École polytechnique, qui ferme provisoirement en avril 1816 pour des raisons politiques liées à la Restauration. Ne reprenant pas ses études à Polytechnique, il décide de se consacrer à l'étude de la microcirculation sanguine. En 1840, il présente à l'Académie des sciences un mémoire intitulé « Recherches expérimentales sur le mouvement des liquides, dans les tubes de très petits diamètres », qui va apporter plusieurs contributions significatives au domaine de la mécanique des fluides ainsi qu'à son application en physiologie.

***Figure 1 :* Photographie de Jean-Léonard-Marie Poiseuille (1797-1869).**

Le contexte historique et scientifique

Dans le domaine de la physiologie, la compréhension du système cardiovasculaire a connu une importante avancée au XVIIe siècle, notamment grâce aux travaux du médecin anglais William Harvey (1578-1657), qui établit sur des bases solides l'existence de la grande (*resp.* petite) circulation, entre le cœur et les poumons pour les échanges avec l'air (*resp.* entre le cœur et l'ensemble des organes pour les échanges internes).

Parallèlement, l'utilisation du microscope permet au médecin italien Marcello Malpighi (1628-1694) de montrer que le sang passe des artères aux veines via de fins vaisseaux d'un diamètre de l'ordre de 10 microns ; puis aux savants néerlandais Jan Swammerdam (1637-1680) et Antoni van Leeuwenhoek (1632-1723) de découvrir l'existence des globules rouges, qui occupent en moyenne 45% en volume d'un échantillon de sang au repos.

Dans le domaine de la physique, au XVIIIe siècle, le savant suisse Euler établit l'équation aux dérivées partielles décrivant la dynamique d'un fluide non visqueux, la notion de viscosité ayant ensuite été ajoutée par l'ingénieur français Henri Navier[1]. La condition aux limites appropriée pour décrire l'écoulement d'un liquide au contact d'une paroi reste du domaine de l'inconnu.

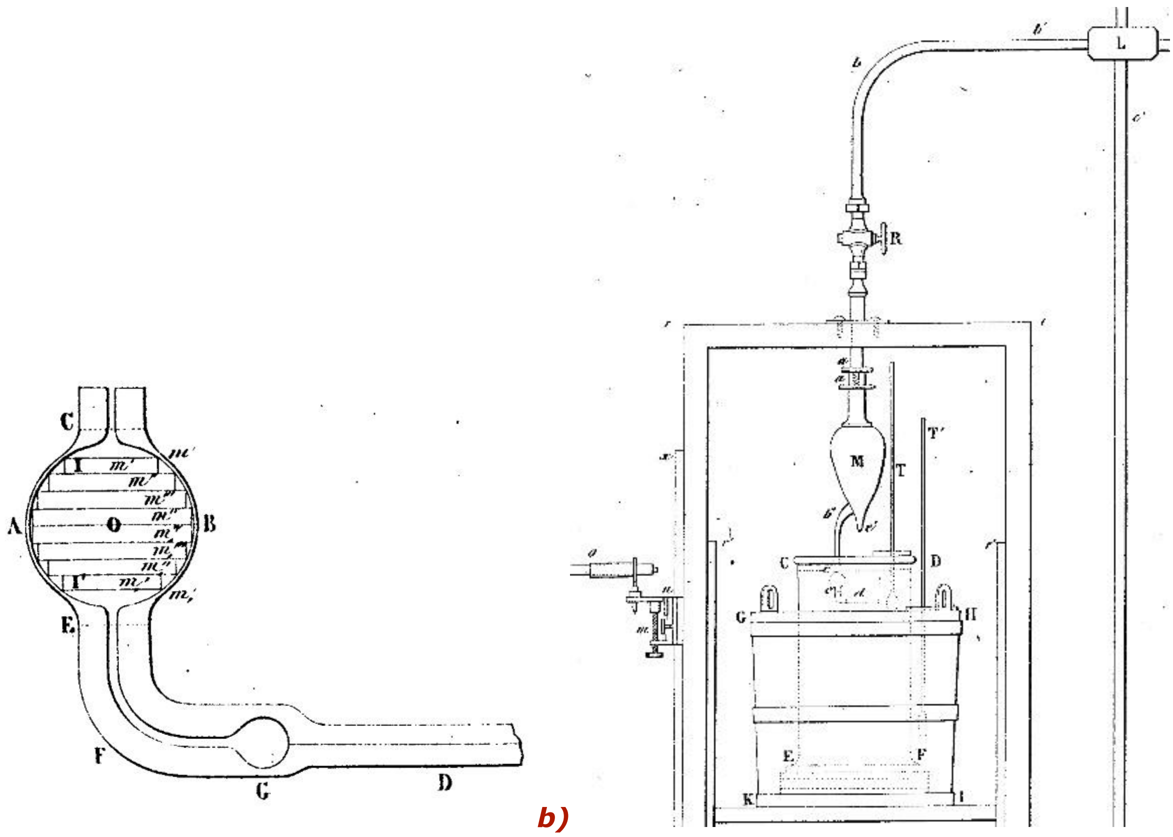
Les expériences minutieuses menées par Poiseuille vont permettre d'une part une meilleure compréhension de l'écoulement du sang dans la microcirculation, et d'autre part fournir un argument fort en faveur de la condition de non-glissement d'un liquide sur une paroi.

Le dispositif utilisé

Le dispositif développé par Poiseuille permet de mesurer le débit de liquides dans des capillaires de diamètre submillimétrique, dans des conditions précisément contrôlées, avec notamment une différence de pression et une température fixées. Le capillaire utilisé est en verre, correspondant au trait fin en *D* sur la fig.2a. La différence de pression est imposée grâce à une pompe, dont la connexion est schématisée sur la fig.2b, la pompe étant reliée au raccord 4 voies *L* par le tube supérieur. La température est contrôlée en immergeant le capillaire dans un cylindre de verre rempli d'eau distillée à la température souhaitée (cf. région *CDFE*

1. La dérivation des équations pour un fluide parfait est introduite dans Leonhard Euler, « Principes généraux du mouvement des fluides », *Mémoires de l'Académie des sciences de Berlin*, (11) 74-315 (1757), en ligne ; pour un fluide visqueux par Henri Navier dans « Mémoire sur les lois du mouvement des fluides », *Mémoire de l'Académie royales des sciences de l'Institut de France*, VI, 389-440 (1823), en ligne.

sur la fig.2b), lui-même plongé dans un baquet à la même température (cf. *GHIK* fig.2b). La pression en entrée est mesurée via un manomètre (cf. tube à droite de la connectique *L* sur la fig.2b, et le débit par le volume écoulé pendant une durée chronométrée.



a) ***b)***

<u>Figure 2 :</u> Dispositif utilisé ; a) Capillaire immergé : *à l'ampoule en verre soufflé* CEB *sont soudés deux tubes, marqués en* C *et* E *à la lime. Le tube inférieur se termine par le renflement sphéroïde* G*, auquel est soudé le capillaire étudié ;* ***b) Positionnement du capillaire dans le dispositif, ici noté*** **d.** *On aperçoit notamment le microscope chercheur en o*[2]*.*

L'obtention de la loi de puissance correcte reliant le débit et le rayon de la conduite – soit une dépendance en la puissance quatrième – a été possible grâce au soin particulier apporté à la précision des mesures, notamment au niveau de la forme des capillaires (section approximativement circulaire et constante), la mesure minutieuse du volume écoulé grâce à deux marques sur les capillaires en *C* et *E* (fig.2a), observées au « microscope chercheur », le filtrage des poussières au fond de l'ampoule *M* (fig.2b) – le liquide s'écoulant par la soudure latérale *b''*–,

---

2. Les deux figures sont extraites d'une version plus exhaustive de l'article ici analysé, publié 6 ans plus tard par Poiseuille : « Recherches expérimentales sur le mouvement des liquides dans les tubes de très-petits diamètres », Mémoires présentés par divers savants à l'Académie Royale des Sciences de l'Institut de France, IX, 433-544 (1846), p. 541, en ligne.

la prise en compte des différents effets influant significativement sur la pression en entrée du capillaire (notamment l'évolution de la dépression liée au ménisque se déplaçant successivement du capillaire *C* à l'ampoule *O*, puis au capillaire *E* (fig. 2a), et enfin la régulation de la pression via un réservoir en cuivre (cf. tube arrivant par le bas en *L* sur la fig.2b). On peut aussi noter la régularité de l'écoulement obtenue par une immersion du capillaire dans le cylindre *CDFE*, évitant ainsi les irrégularités induites par l'écoulement goutte à goutte obtenu pour un faible débit dans le cas d'une sortie à l'air.

DÉPENDANCE DU DÉBIT AVEC LE DIAMÈTRE DU CAPILLAIRE

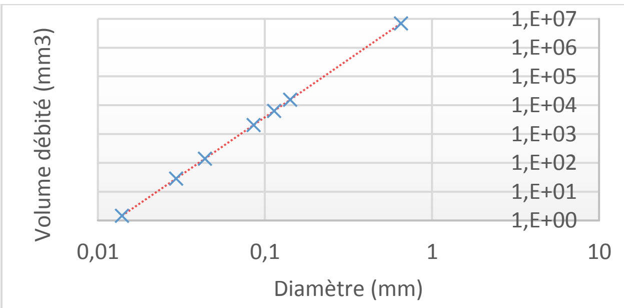
Après avoir montré que le débit est proportionnel à la différence de pression entre l'entrée et la sortie du tube, puis inversement proportionnel à la longueur du capillaire, Poiseuille utilise les lois obtenues pour comparer les volumes qui se seraient écoulés pour une longueur de tube constante de 25 mm, avec une surpression en entrée du tube de 775 mm de mercure, pendant 500 s, à une température de 10°C : ses résultats sont reproduits sur la fig.3a.

En utilisant notamment ces observations, Poiseuille en déduit, en ayant noté *Q* le débit volumique et *P* la différence de pression entre les extrémités amont et aval du capillaire :

> *En joignant ce résultat à ceux obtenus précédemment, il viendra pour l'équation du mouvement des liquides dans nos petits tubes,* D *représentant le diamètre,* $Q = k'' \frac{PD^4}{L}$*,* k'' *étant un coefficient constant pour la même température et la même intensité de la pesanteur.*

TUBES.	DIAMÈTRES EN FRACTIONS DE MILLIMÈTRE.	PRODUITS EXPRIMÉS EN MILLIMÈTRES CUBES.
	mm.	mm. c.
M	0,01394	1,4648
E	0,02938	28,8260
D	0,04373	141,5002
C	0,08549	2067,3912
B	0,11340	6398,2933
A	0,14160	15532,8451
F	0,65217	6995870,2463

a)



b)

<u>Figure 3 :</u> Influence du diamètre du capillaire sur le volume d'eau écoulé. *a) Mesures de Poiseuille. b) Tracé correspondant en échelle logarithmique : les points s'alignent sur une droite de coefficient directeur 4, faisant apparaître l'exposant de la loi de puissance.*

Il compare ensuite la loi de puissance obtenue aux résultats dont il a connaissance : il s'agit des mesures de P.-S. Girard, et d'une modélisation de Navier. La loi d'échelle est différente, celles de la littérature correspondant à un débit proportionnel au cube du diamètre. Poiseuille indique que cela pourrait être dû aux longueurs des tubes utilisés qui étaient plus importantes, et propose de mener des recherches pour déterminer un critère de transition entre ces deux lois. A posteriori, la différence n'est pas liée à un régime différent, mais à des conditions aux bords différentes considérées par Navier[3], ainsi qu'à des incertitudes sous-estimées dans le cas de Girard, notamment au niveau des diamètres des tubes utilisés[4].

Un an auparavant, et indépendamment, le physicien allemand Hagen a réalisé des expériences similaires, obtenant aussi une dépendance du même type. Cette loi de puissance, dite loi de Poiseuille ou de Hagen-Poiseuille, sera notamment dérivée en 1860 par Franz Neumann (1798-1895)[5]. Une présentation actuelle d'une démarche possible est présentée dans l'encadré ci-dessous.

Dérivation de la relation de Poiseuille dans un cas idéal

On considère un liquide incompressible s'écoulant en régime stationnaire dans une conduite cylindrique infinie de rayon *R*. On note *η* sa viscosité dynamique et *ρ* sa masse volumique. Le référentiel d'étude est supposé inertiel, et l'écoulement parallèle à l'axe du canal. Enfin, la conduite étant horizontale, l'influence de la gravité est négligeable.

On utilise un repère cylindrique d'origine *O* et de coordonnées (r, θ, z), l'axe *Oz* étant confondu avec l'axe du cylindre, le fluide s'écoulant vers les *z* croissants.

Du fait de la symétrie du système, on cherche des champs de vitesse et de pression respectivement sous la forme

$$\boldsymbol{v}(r, \theta, z) = v_z(r, z)\boldsymbol{e}_z, \text{ et}$$

$$p(r, \theta, z) = p(r, z).$$

L'écoulement étant incompressible, on a

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (1),$$

3. Dans son « Mémoire sur les lois du mouvement des fluides », présenté en 1822, Navier considère pour condition aux bords $\left(E + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial r}\right)(M) = 0$, où M est un point de la paroi, u la composante tangente de la vitesse, r la distance normale à la paroi, (E, ε) étant deux constantes physiques. Parmi les cas pratiques qu'il considère, il ne présente pas celui où $\varepsilon \to 0$, dont la limite correspond à l'hypothèse de non-glissement. (Mémoires de l'Académie des sciences de l'Institut de France, (6) 389-440 (1823), en ligne).

4. Cf. Olivier Darrigol, "Between hydrodynamics and elasticity theory: the first five births of the Navier-Stokes equation", *Arch. Hist. Exact Sci.* (56) 95–150 (2002) (JSTOR).

5. Cité par Olivier Darrigol, *ibid.*

ainsi l'écoulement n'est fonction que de la distance r à l'axe du canal. D'après l'équation de Navier-Stokes,

$$\rho\left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{v}\right)=-\boldsymbol{\nabla}p+\eta\Delta\boldsymbol{v}\ ,$$

où l'on a noté $\boldsymbol{\Delta}$ l'opérateur Laplacien vectoriel, cette relation exprimant que l'accélération de toute particule de fluide est la résultante des efforts surfaciques de pression et de viscosité.

L'écoulement étant stationnaire, l'accélération locale est nulle ($\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}=\boldsymbol{0}$), et de par la forme de l'écoulement, il en est de même pour l'accélération convective ($(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{v}=v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\boldsymbol{e}_z=\boldsymbol{0}$) : on aboutit ainsi à l'équation dite de Stokes,

$$-\boldsymbol{\nabla}p+\eta\Delta\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}\quad(\mathbf{2}),$$

expression mathématique d'une absence d'effet inertiel, les efforts de pression équilibrant les frottements visqueux.

De par les formes déduites pour p et $\boldsymbol{v}$, on a $\boldsymbol{\nabla}p=\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial r}\boldsymbol{e}_r+\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial z}\boldsymbol{e}_z$, et $\Delta\boldsymbol{v}=\Delta\boldsymbol{v_z}\boldsymbol{e}_z$: par conséquent, par projection de (2) suivant $\boldsymbol{e}_r$, p ne dépend que de z. Ensuite, par projection de (2) suivant $\boldsymbol{e}_z$, en exprimant le Laplacien en coordonnées cylindriques[6], on déduit que

$$\frac{\eta}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)=\frac{\partial p}{\partial z}.$$

Le premier terme n'étant fonction que de z, et le second que de r, ils sont donc nécessairement égaux à la même constante, que l'on note $\frac{\Delta P}{L}$, avec $\Delta P=p(0)-p(L)$, L étant une longueur donnée de la conduite.

À partir de $\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)=\frac{\Delta P r}{\eta L}$, par deux intégrations successives, en utilisant que la vitesse est nécessairement bornée sur l'axe, ainsi que la condition de non-glissement $v_z(R)=0$, on obtient

$$v_z(r)=v_{max}\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right],$$

avec $v_{max}=\frac{\Delta P R^2}{4\eta L}$.

Enfin, par intégration sur une section transverse, on obtient le débit volumique de liquide, ici noté D, vérifiant[7]

$$D=\frac{\pi\Delta P R^4}{8\eta L},$$

ce qui correspond à la relation dite de Poiseuille, que l'on peut aussi noter $D=\frac{v_{max}\,S}{2}$, où $S=\pi R^2$ est la section de la conduite.

6. Par définition, pour toute fonction scalaire $f(\boldsymbol{r})$, $\Delta f(\boldsymbol{r})=div\left(\overrightarrow{grad}\,f(\boldsymbol{r})\right)$, avec, en utilisant les coordonnées cylindriques, et en considérant une fonction à dépendance seulement radiale, $\overrightarrow{grad}\,g(r)=\frac{\partial g}{\partial r}\boldsymbol{e}_r$ et $div\,(g(r)\boldsymbol{e}_r)=\frac{1}{r}\frac{\partial(rg)}{\partial r}$, des termes supplémentaires étant à ajouter pour une dépendance spatiale plus générale.

7. On a : $D=\iint_{section}\boldsymbol{vdS}=\int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{2\pi}v_z r d\theta dr=2\pi\,v_{max}\int_{r=0}^{R}\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]rdr=2\pi v_{max}\left[\frac{R^2}{2}-\frac{R^2}{4}\right]=\frac{v_{max}\pi R^2}{2}$.

Cette relation suppose un écoulement parallèle à l'axe de la conduite : des études ultérieures menées notamment par le physicien irlandais Osborne Reynolds (1842-1912)[8] ont montré que l'écoulement considéré ici n'est stable que jusqu'à un certain débit, caractérisé par un nombre adimensionnel, dit nombre de Reynolds et défini par $Re = \frac{\rho R U}{\eta}$, où (ρ,η) sont la masse volumique et la viscosité dynamique du fluide, et U la vitesse moyenne de l'écoulement. L'écoulement reste laminaire tant que R_e est inférieur à une valeur de l'ordre de quelques milliers[9].

Application à la régulation du débit sanguin

Poiseuille conclut de la relation obtenue que la régulation de la circulation sanguine dans les différents organes devrait pouvoir être régulée de manière particulièrement efficace en modulant le diamètre des capillaires sanguins :

> *Les dimensions des tubes capillaires de l'économie animale, étant telles que les lois du mouvement des liquides que nous venons d'établir, s'y appliquent parfaitement, il résulte qu'en considérant les systèmes capillaires de deux organes, si les vaisseaux capillaires de l'un sont, par exemple, d'un diamètre 2 fois plus grand que celui des capillaires de l'autre, il passera dans le premier, toutes choses égales d'ailleurs, 16 fois plus de liquide que dans le second.*

Des travaux postérieurs ont de plus montré que le débit de certains vaisseaux sanguins peut être modulé par l'intermédiaire de cellules musculaires (muscles lisses) présentes dans leurs parois.

Les mesures présentées ont été réalisées dans le cadre de liquides homogènes à l'échelle du diamètre des capillaires. Or ce n'est pas le cas du sang, les globules rouges au repos ayant une forme de disque biconcave d'un diamètre de 8 microns : ce caractère corpusculaire donne lieu à une évolution particulière présentée dans l'encadré ci-dessous.

Influence du caractère corpusculaire

Dans le cas de sang s'écoulant dans des capillaires en verre, la valeur du coefficient k dépend du diamètre, cet effet ayant notamment été

8. Osborne Reynolds, "On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion", *Proc. R. Soc. Lond.* (56) 40-45 (1894), en ligne : introduction du nombre dit de Reynolds pour décrire la stabilité d'un écoulement

9. Cette transition d'un écoulement laminaire à turbulent est liée à la non-linéarité de l'équation de Navier-Stokes.

étudié par les scientifiques suédois Fåhræus et Lindqvist, *k* diminuant plus le diamètre se rapproche de celui des globules rouges[10].
Cet effet est lié à l'existence d'une couche dépourvue de globules rouges, plus fluide, au voisinage de la paroi des artérioles et veinules, cette dernière ayant d'ailleurs été observée par Poiseuille en 1835[11] :
Quand on examine le cours du sang dans une veine ou une artère mésentérique d'une jeune grenouille [...], *on voit, ainsi que l'ont fait remarquer Malpighi, Haller, Spallanzani, etc., en allant de l'axe du vaisseau vers les parois, les globules doués de vitesses très différentes ; dans l'axe, la vitesse est à son maximum. Tout près des parois, qui, vues de champ, apparaissent sous forme d'une ligne opaque, on distingue un espace très-transparent* [...] *où se montrent rarement les globules ; cet espace a une largeur égale au huitième ou au dixième du diamètre du vaisseau.*

On peut noter aussi l'effet d'une couche moléculaire de l'ordre de quelques centaines de nanomètres, appelée le glycocalyx, présente *in vivo*, qui augmente également la valeur de *k*. Malgré l'excédent de travail cardiaque induit, une augmentation de *k* se traduisant par une fluidité d'ensemble moindre, cette couche présente notamment l'intérêt d'isoler des contraintes de cisaillement une partie des membranes cellulaires des parois vasculaires, les efforts étant concentrés sur des régions adaptées, telle une forêt transmettant au sol, via ses racines, les efforts d'un vent conséquent, tout en abritant un éventuel promeneur resté aux aguets. L'étude de cette couche, notamment impliquée dans l'apparition de maladies cardiovasculaires, fait l'objet de recherches actuelles[12].

■

(janvier 2017)

10. Enfin, en poursuivant encore le confinement, si le diamètre devient inférieur à (environ) celui d'un globule rouge, il finit par y avoir une augmentation de *k avec une réduction de la section du canal*, par un effet de type bouchon.
11. Poiseuille, « Recherches sur les causes du mouvement du sang dans les vaisseaux capillaires », *Mémoires des savants étrangers* (tome VII) 44-45 (publié en 1839), en ligne.
12. Des détails peuvent par exemple être trouvés dans la publication Sheldon Weinbaum, John M. Tarbell, Edward R. Damiano Weinbaum, « The structure and function of the endothelial glycocalyx layer », *Annu. Rev. Biomed. Eng.* (9) 121–167 (2007).